Tobias ROLFES, Jürgen ROTH, Wolfgang SCHNOTZ, Landau

Der Einfluss von Repräsentationsformen auf die Lösung von Aufgaben zu funktionalen Zusammenhängen

Ein mathematisches Objekt ist nur über eine Repräsentation zugänglich (Duval, 2006). Diese Erkenntnis induziert die Frage, ob es unterschiedlich „vorteilhafte" Repräsentationsform für den Umgang mit mathematischen Objekten gibt. Nach Larkin und Simon (1987) ist eine Repräsentation *nutzungseffizienter,* wenn die relevanten Informationen schneller und einfacher als einer anderen Repräsentation entnommen werden kann. Die Repräsentation mit der höchsten Nutzungseffizienz ist die „beste" Repräsentationsform für die Aufgabe.

Vergleich der Repräsentationsformen Graph und Wertetabelle

Graphen und Wertetabellen sind zwei übliche Repräsentationsformen von funktionalen Zusammenhängen. Wainer (1992) behauptet, dass Graphen gut verständlich seien, da Menschen gut darin seien, Dinge zu sehen. Beispielsweise könne bereits ein Kind erkennen, dass ein Drittel eines Kuchens größer als ein Viertel eines Kuchens ist, lang bevor es beurteilen könne, dass der Bruch $^1/_3$ größer als $^1/_4$ ist. Allerdings stellen wohlbekannte Beispiele von verzerrten visuellen Wahrnehmungen (z.B. Abb. 1) Wainers Überzeugung zumindest in seiner Allgemeinheit infrage. Die Beurteilung, ob $^{19}/_{60}$ oder $^{20}/_{60}$ eines Kuchens größer ist, lässt sich mit einer Bruchdarstellung schneller und zweifelsfreier beurteilen als anhand der realen Kuchenstücke.

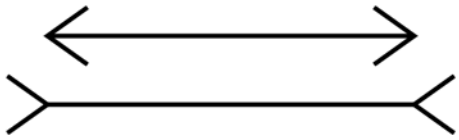

Abbildung 1: Die untere Linie erscheint länger als die obere, obwohl beide Linien die gleiche Länge haben (Müller-Lyer, 1889)

Aufgrund dieser ambivalenten Ergebnisse über die mentale Verarbeitung von visuellen Eindrücken war das Hauptziel der Untersuchung, den Einfluss von Graphen auf das Lösen von Aufgaben zum funktionalen Zusammenhang zu untersuchen. Als kontrastierende Repräsentationsform wurde die Wertetabelle ausgewählt, da sie eine ausschließlich symbolische Repräsentationsform darstellt.

Da die Nutzungseffizienz einer Repräsentationsform von der Anforderung abhängt, wurden unterschiedliche Aufgabenkategorien identifiziert. Zunächst wurde zwischen einer quantitativen und einer qualitative Analyse eines funktionalen Zusammenhangs unterschieden. Eine quantitative Analyse liegt vor, wenn bei Verwendung des Graphen konkrete Funktionswerte entnommen werden müssen, um beispielsweise eine Änderungsrate zu be-

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

rechnen. Bei Items dieser *Itemkategorie K1* ist anzunehmen, dass die Wertetabelle nutzungseffizienter als ein Graph ist, da die benötigten Funktionswerte in der Tabelle explizit in symbolischer Form dargeboten werden.

Eine qualitative Analyse liegt nach unserer Definition vor, wenn die Aufgabe anhand der Form des Graphen gelöst werden kann, d.h. wenn bei Verwendung des Graphen *keine* konkreten Funktionswerte entnommen werden müssen. Entsprechend der dargestellten Erkenntnissen zur mentalen Verarbeitung von visuellen Eindrücken vermuten wir, dass es einen Unterschied macht, ob bei der qualitativen Analyse die Form des Graphen genau inspiziert werden muss (*Itemkategorie K2*) oder eine grobe Inspektion des Graphen ausreicht (*Itemkategorie K3*). Ist eine genau Inspektion des Graphen zur Lösung der Aufgabe anhand der Form des Graphen notwendig, so kann es zu Wahrnehmungsverzerrung wie in Abb. 1 kommen. In diesem Fall ist die Arbeit mit konkreten Zahlenwerten anhand der Tabelle fehlerfreier und nutzungseffizienter. Wenn dagegen die benötigte visuelle Eigenschaft des Graphen zur Lösung der Aufgabe relativ einfach erkennbar ist, muss die Form des Graphen nur grob inspiziert werden. Daher sollte für diese Itemkategorie K3 der Graph nutzungseffizienter als die Tabelle sein.

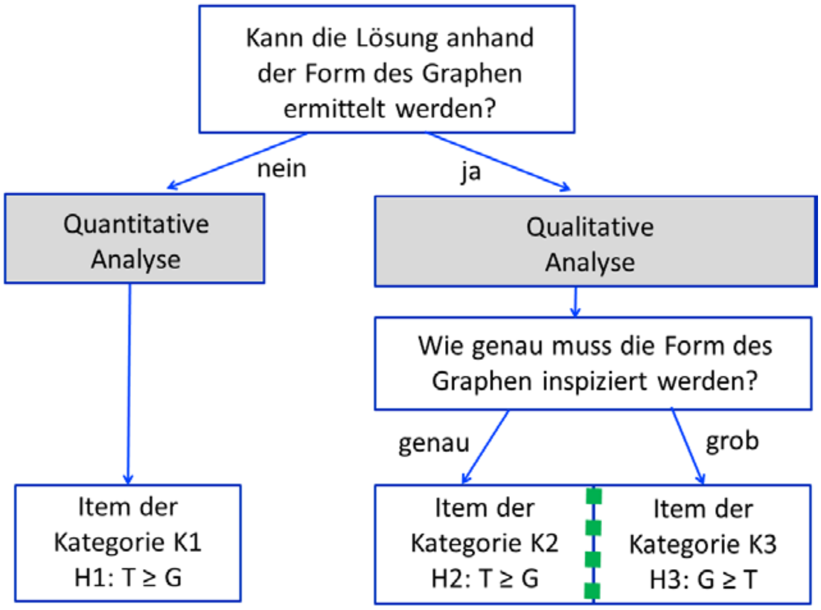

Abbildung 2: Itemkategorien und Hypothesen zu Aufgaben zum funktionalen Zusammenhang

Methode

N = 377 Schülerinnen und Schüler aus zehn sechsten Klassen und fünf siebten Klassen in sechs Schulen (Gymnasium und IGS) in Rheinland-Pfalz nahmen an der Untersuchung teil. Der Papier-Bleistift-Test bestand aus insgesamt 24 Items der drei Itemkategorien zu drei unterschiedlichen funktionalen Zusammenhängen. Jedes Testlet war entweder mit einer Tabelle oder einem Graph begleitet. Die Schülerinnen und Schüler wurden zufällig einer Experimentalgruppe zugeordnet.

Die Zuordnung der qualitativen Items zu den Kategorien K2 und K3 wurde auf der Grundlage eines Ratings mit fünf Experten durchgeführt. Unterschiede in den Itemschwierigkeiten wurden mit Hilfe des linear-logistischen Testmodells (LLTM) nach Fischer (1995) modelliert. Vor Anwendung des LLTM wurde die grundsätzliche Raschskalierbarbeit der Items vor allem durch Untersuchung der Itemtrennschärfe und der INFIT-Werte bestätigt.

Ergebnisse

Bei den zwölf Items der Itemkategorie K1 gab es bei acht Items keine signifikanten Schwierigkeitsunterschiede zwischen Tabellen- und Graph-Items (vgl. Tab. 1). Bei drei Items war entsprechend der Hypothese die Tabelle signifikant leichter als der Graph. Bei einem Item war entgegen der Hypothese der Graph signifikant leichter als die Tabelle. Bei den Items der zweiten Kategorie waren alle Ergebnisse hypothesenkonform, da bei alle sieben Items die Tabelle leichter als der Graph war. Bei den fünf Items der Kategorie K3 gab es bei drei Items hypothesenkonforme signifikante Unterschiede ($G \geq T$) und bei zwei Items keine signifikanten Unterschiede.

Tabelle 1: Ergebnisse des LLTM für den Vergleich von Graph und Tabelle

Item-kategorie	Hypothese	Ergebnis Hypothesentest (H_0: T = G)	Anzahl Items
K1	$T \geq G$	Hypothesenkonforme signifikante Unterschiede (T > G)	3
		Keine signifikanten Unterschiede ($T \approx G$)	8
		Nicht hypothesenkonforme signifikante Unterschiede (G > T)	1
K2	$T \geq G$	hypothesenkonforme signifikante Unterschiede (T > G)	7
		keine signifikanten Unterschiede ($T \approx G$)	0
		nicht hypothesenkonforme signifikante Unterschiede (G > T)	0
K3	$G \geq T$	hypothesenkonforme signifikante Unterschiede (G > T)	3
		keine signifikanten Unterschiede ($G \approx T$)	2
		nicht hypothesenkonforme signifikante Unterschiede (T > G)	0

Anmerkungen: G = Graph, T = Tabelle

Diskussion

Die empirischen Daten verhielten sich konform zu den Hypothesen. Bei qualitativen Analysen ist der Graph nur nutzungseffizienter gegenüber der Tabelle, wenn zur Lösung der Aufgabe der Graph nur grob inspiziert werden muss. Ist eine genaue Inspektion der Form des Graphen notwendig, ist die Tabelle vorteilhafter.

Die Verallgemeinerbarkeit der Ergebnisse ist eingeschränkt, da die Probanden aus den Klassenstufen 6 und 7 stammten. Ältere Schülerinnen und Schüler könnten eine höhere Performanz bei Graph-Items aufweisen. Zum anderen ist unklar, ob die Lernenden bei Items der Kategorie K2 bei Verwendung des Graphen wirklich qualitativ gearbeitet haben. Sollten die Probanden Funktionswerte aus dem Graphen entnommen und damit die Aufgabe gelöst haben, würde die Tabelle ebenfalls nutzungseffizienter sein.

Trotz der Einschränkungen ergibt sich vor dem Hintergrund der dargestellten Ergebnisse die Frage, warum im Schulunterricht bei der Behandlung linearer Funktionen nicht verstärkt mit dem Begriff der *Änderungsrate* neben dem Begriff der *Steigung* gearbeitet wird. Zum einen können Änderungsraten in verschiedenen Repräsentationsformen identifiziert werden, wohingegen der Steigungsbegriff mit der graphischen Repräsentationsform verknüpft ist (Rolfes, Roth und Schnotz, 2013). Zum anderen erfordert die Bestimmung einer Steigung bzw. einer Änderungsrate eine quantitative Analyse, bei der die Tabelle nutzungseffizienter als der Graph ist.

Außerdem erscheint es empfehlenswert, in der Schule Metastrategien für den Umgang mit dem Graphen zu lehren. So kann es hilfreich sein, bei einer quantitativen Analyse entnommene Zahlenwerte an den Graphen zu schreiben oder in eine kleine Wertetabelle ins Heft zu überführen, um das Arbeitsgedächtnis zu entlasten und Fehler zu vermeiden. Außerdem sollten Schülerinnen und Schüler sich auch bei qualitativen Analysen nicht alleine auf den visuellen Eindruck verlassen. Stattdessen empfiehlt es sich, quantitativ zu überprüfen, ob beispielsweise die Zunahme in einem Abschnitt eines Graphen wirklich größer als in einem anderen Abschnitt ist.

Literatur

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1-2), 103–131.

Fischer, G. H. (1995). The linear logistic test model. In G. H. Fischer & I. W. Molenaar (Hrsg.), *Rasch Models. Foundations, recent developments, and applications* (S. 131–155). New York, NY: Springer.

Larkin, J. H. & Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science*, 11 (1), 65–100.

Müller-Lyer, F. C. (1889). Optische Urtheilstäuschungen. *Archiv für Physiologie Suppl,* 263–270.

Rolfes, T., Roth, J. & Schnotz, W. (2013). Der Kovariationsaspekt in der Sekundarstufe I. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 834–837). Münster: WTM

Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational Researcher, 21* (1), 14–23