

Anna-Katharina ROOS, Würzburg

Probleme Studierender mit dem Begriff Extrempunkt

Motivation

Ausgangspunkt der Studie bildet das Themengebiet der reellen Funktionen. Dessen Verständnis ist auf Hochschulniveau ein interessantes Forschungsgebiet, zum einen, da es eine Weiterführung der Schulmathematik darstellt, zum anderen da es in der Hochschulmathematik eine Grundlage bildet für weitere, komplexere mathematische Themen. In dem hier vorgestellten Projekt wurden drei grundlegende Charakteristika reeller Funktionen näher untersucht: Monotonie, Differenzierbarkeit und Extrempunkte.

Dazu sollen Vorstellungen und Verständnis der Studierenden hinsichtlich dieser Begriffe und ihrer Eigenschaften untersucht werden. Insbesondere werden Fehler und Fehlvorstellungen Studierender aufgezeigt, die im Zusammenhang mit diesen Begriffen stehen. Unter einem Fehler verstehen wir dabei die Abweichung von einer Norm (vgl. Hartinger, 1997), wobei die Norm sich bei uns aus der Fachmathematik ergibt (vgl. Prediger & Wittmann, 2009). Unter Fehlvorstellungen verstehen wir stabile Theorien, die ursächlich für Fehler sind (vgl. Schoy-Lutz, 2005).

Hinsichtlich Problemen (und deren Ursachen) mit dem Funktionsbegriff oder bestimmter Eigenschaften wie Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Tangente und auch Wendepunkt, kann bereits auf einigen Studien aufgebaut werden (vgl. Biza & Zachariades, 2010; Dreyfus & Eisenberg, 1983; Orton, 1983; Tall & Bakar, 1992; Tsamir & Ovodenko, 2013; Vinner & Dreyfus, 1989).

Theoretischer Hintergrund

Die Basis dieser Studie sollen zum einen die theoretischen Konstrukte *concept image* und *concept definition* (vgl. Tall und Vinner, 1981) bilden, zum anderen der Begriff der *Grundvorstellungen* (vgl. vom Hofe, 1995; Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016).

Unter der *concept definition* versteht man eine aus Worten bestehende Erklärung, die ein Individuum verwendet, um einen Begriff zu spezifizieren. Dabei wird unterschieden zwischen der persönlichen Rekonstruktion einer Begriffsdefinition (*personal concept definition*) und einer in der Fachwissenschaft akzeptierten Rekonstruktion (*formal concept definition*). Das *concept image* beinhaltet alle gedanklichen Verknüpfungen, die ein Individuum mit einem Begriff verbindet. Dabei müssen verschiedene *concept images* nicht zwangsläufig kohärent sein, sondern können sich inhaltlich auch widersprechen.

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Zur Spezifizierung der Begriffe *Aspekt* und *Grundvorstellung* greifen wir auf die Definition von Greefrath et al. (2016) zurück: „Ein *Aspekt* eines mathematischen Begriffs ist ein Teilbereich des Begriffs, mit dem dieser fachlich charakterisiert werden kann.“, und: „Eine *Grundvorstellung* zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt.“

Ziele

Das Ziel dieser Studie ist es, Fehler beziehungsweise Fehlvorstellungen hinsichtlich der Begriffe Monotonie, Differenzierbarkeit und Extrempunkte zu finden. Daher lauten die Forschungsfragen wie folgt:

1. Welche Fehler lassen sich im Hinblick auf die Themengebiete Monotonie, Differenzierbarkeit und Extrempunkte bei den Studierenden nachweisen?
2. Welche Ursachen könnten die hinsichtlich des Begriffs Extrempunkt identifizierten Fehler haben?

Obwohl zunächst Fehler für alle drei Themengebiete gesucht wurden, wollen wir uns bei der Ursachenfindung spezialisieren, um ausführlicher und tiefer in den Bereich Extrempunkte einzusteigen. Dieser stellt eine Verbindung der beiden anderen Gebiete dar, da die Begriffe Monotonie und Differenzierbarkeit für den Inhaltsbereich Extrempunkt eine wichtige Rolle spielen.

Offensichtlich gibt es auch andere Ursachen für auftretende Fehler, wie zum Beispiel Schwierigkeiten mit der Aufgabenstellung oder Unaufmerksamkeit. In dieser Untersuchung wollen wir uns aber auf Ursachen, die mit dem Verständnis des Begriffs Extrempunkt zusammenhängen, konzentrieren.

Aufbau und Erste Ergebnisse

Zunächst soll betont werden, dass die nachfolgende Arbeit noch im Entstehen ist und daher noch keine endgültigen Ergebnisse präsentiert werden können.

Um zunächst einen Überblick über mögliche Fehler im Zusammenhang mit den Begriffen Monotonie, Differenzierbarkeit und Extremwerte zu bekommen, wurde ein Fragebogen mit 20 Items konzipiert. Ein Item besteht dabei aus einer mathematischen Aussage die entweder wahr oder falsch ist. Alle Fragestellungen sind auf der symbolischen Ebene gehalten, um der Arbeitsweise an der Universität gerecht zu werden. Die Antworten der Studierenden wurden zwar durch diverse Möglichkeiten zum Ankreuzen gelenkt, allerdings bietet der Fragebogen nach jeder Ankreuzmöglichkeit ausreichend Platz für offene Antworten mit Zeichnungen.

Im Wintersemester 2013/14 wurde zunächst ein Pilot-Versuch durchgeführt und in dessen Anschluss ein vorläufiges Kategoriensystem aufgestellt. Dann wurde die Hauptstudie im Sommersemester 2014 in der Bachelorveranstaltung Analysis II mit circa 75 Studierenden durchgeführt.

Anschließend wurden erste Fehlerkategorien mit Hilfe der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2010) aufgestellt.

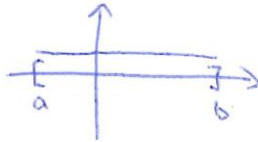
An dieser Stelle möchten wir ein kurzes Beispiel geben:

Item 1: Wenn $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf (a, b) ist, dann nimmt f seine Extremwerte auf $[a, b]$ an.

Antworten der Studierenden lauteten beispielsweise:

- Die Aussage ist falsch, ein Gegenbeispiel ist (auch eine Zeichnung ist möglich):

Konstante Funktion besitzt keine Extremwerte



Erklärung:

Eine mögliche Kategorie zu diesem Beispiel heißt:

K1: Konstante Funktionen haben keine Extrema

Aus den einzelnen Kategorien wurde ein Kodierleitfaden erstellt, der die aufgetretenen Fehler kategorisiert.

Prediger und Wittmann (2009) stellen fest: „Die Fehlerursachen erschließen sich [...] vielfach erst im Gespräch“. Daher wurden im Februar/März 2016 Interviews durchgeführt, um Ursachen für Fehler aufzudecken und die bisher aufgestellten Kategorien zu überprüfen. Diese wurden durchgeführt bei Studierenden nach dem ersten Analysis Semester. Im Vorfeld bearbeiteten die Studierenden einen Teil des ursprünglichen Fragebogens mit lediglich fünf Items, die den Begriff Extrempunkt mit verschiedenen Aspekten betrafen. Der zuvor bearbeitete Fragebogen wurde genutzt, um das Interview als fokussiertes Interview aufbauen zu können. Unter einem fokussierten Interview versteht man ein Leitfadeninterview über ein fokussiertes Objekt, hier der im Vorfeld beantwortete Fragebogen. Vor dem Interview wird anhand einer genauen Analyse der gegebenen Antworten Vermutungen über deren Bedeutung und damit mögliche Fehlerursachen aufgestellt. Auf Basis der Analyse und der aufgestellten Hypothesen entsteht der Leitfaden für die Interviews. Um auf das Beispiel von oben einzugehen: Eine mögliche Ursache

dafür, dass konstante Funktionen nicht als Extrema-besitzend wahrgenommen werden, könnte der möglicherweise vorherrschende Prototyp eines Extremums als Berg oder Tal (Normalparabel) sein.

Auf Grundlage des theoretischen Hintergrunds werden jegliche Vorstellungen, die im Zusammenhang mit dem Begriff Extrempunkt und Aspekten dessen stehen, also auch Fehlvorstellungen, dem *concept image* zugeordnet.

Ausblick

In näherer Zukunft ist die Auswertung der Interviews und eine damit verbundene Überprüfung der Vermutungen möglicher Fehlerursachen beziehungsweise das Entdecken weiterer Fehlerursachen geplant.

Literatur

- Biza, I. & Zachariades, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29(4), 218-229.
- Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1983). The Function Concept in College Students: Linearity, Smoothness and Periodicity. *Focus on learning problems in mathematics*, 5, 119-132.
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. Im Druck (2016): *Didaktik der Analysis*. Heidelberg: Springer-Verlag.
- Hartinger, A. (1997): Aus Fehlern wird man klug - nur wie? In: *Grundschule*, 10 (1997), 29-30.
- Vom Hofe, R. (1995): *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag
- Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse*. Weinheim und Basel: Beltz Verlag.
- Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14(3), 235-250, 1983.
- Prediger, S. & Wittmann, G. (2009). Aus Fehlern lernen – (wie) ist das möglich? *Praxis der Mathematik*, 51(3), 1-8.
- Radatz, H. (1980). *Fehleranalysen im Mathematikunterricht*. Braunschweig: Vieweg.
- Schoy-Lutz, M. (2005). *Fehlerkultur im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franz-Becker Verlag.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12(2), 151-169.
- Tall, D. & Bakar, M. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 23(1), 39-50.
- Tsamir, P. & Ovodenko, R. (2013). University students' grasp of inflection points. *Educational Studies in Mathematics*, 83(3), 409-427.
- Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356-366.