

Christian RÜTTEN, Essen

## „Null ist in Wirklichkeit eine Tausend“ – Sichtweisen von Grundschulkindern auf negative Zahlen

### 1. Einleitende Bemerkung

Lehrende kennen aus der unterrichtlichen Praxis das Phänomen, dass Lernende bereits vor der unterrichtlichen Thematisierung erste Ideen zu mathematischen Gegenständen und Sachverhalten besitzen. So sind Grundschulkindern z. T. schon negative Zahlen sowie Operationen mit ganzen Zahlen bekannt, obwohl diese gewöhnlich erst in der Sekundarstufe thematisiert werden. Bspw. stellt sich der Viertklässler Viktor negative Zahlen mittels der Metapher „Null ist in Wirklichkeit eine Tausend“ vor, indem er an der Zahlengerade – ähnlich wie links der Tausend – auch links der Null Zahlen verortet (vgl. Rütten 2016). Solche vorunterrichtlichen Vorstellungen über den erweiterten Zahlbereich veranlassen nähere Untersuchungen. Sowohl im deutschen Sprachraum wie international finden sich bereits einige entsprechende Forschungsprojekte. Dabei lässt sich zwischen solchen Projekten unterscheiden, die unter vornehmlich *konstruktiver* Perspektive Unterrichtskonzepte bzw. Lernarrangements zu negativen Zahlen für die Grundschule entwickeln, und solchen, die eher *rekonstruktiv* nach den Lernvoraussetzungen von Grundschulkindern im Hinblick auf den Umgang mit diesen Zahlen fragen. Als zentrale Lernvoraussetzung werden dabei auch die vorunterrichtlichen Vorstellungen der Lernenden in den Blick genommen. Dieses Ziel verfolgte auch eine explorative Studie mit 291 Lernenden der Klassen 3 und 4, die versucht im Forschungsrahmen der didaktischen Rekonstruktion einen Einblick in die Lernerperspektiven bzgl. negativer Zahlen zu geben und so für diese zu sensibilisieren (vgl. Rütten 2016).

### 2. Lernerperspektiven

Unter der Lernerperspektive können in Verknüpfung der Theorie der *kognitiven Schichtenstruktur* (Petri & Niedderer 2001) und dem *concept-image-Ansatz* (Tall & Vinner 1981) sowie dem *psychologischen Vorwissenskonzept* die meist situationsabhängig aktivierten Schichten einer konzeptuellen Domäne verstanden werden, wobei das in diesen Schichten repräsentierte Wissen lediglich nach seiner individuellen Viabilität, nicht aber nach dem Wahrheitswert im Sinne der Übereinstimmung mit konventionellen, als Norm verstandenen Sichtweisen bewertet werden kann (vgl. Rütten 2016). Die Lernerperspektive äußert sich im Sinne einer *personal concept definition* auf der sprachlichen Ebene und lässt sich folglich auch über diese re-

konstruieren. Da sich eine kognitive Schicht auch psychologisch als mentales Modell bzw. mathematikdidaktisch als Grundvorstellung begreifen lässt, eröffnen sich über die entsprechenden Ansätze Perspektiven zur Rekonstruktion von Lernerperspektiven.

### 3. Systematische Metaphernanalyse

Bspw. sieht Bender (1991) in der Metapher eine Möglichkeit, aus sprachlichen Äußerungen Grundvorstellungen zu rekonstruieren. Die konzeptuelle Metapherntheorie (vgl. z. B. Lakoff & Johnson 1980) bietet einen theoretischen Hintergrund, vor dem sich eine entsprechende Metaphernanalyse entwickeln lässt. Im Verständnis der konzeptuellen Metapherntheorie ist die Metapher weniger ein rein rhetorisches Mittel, sondern vielmehr eine kognitive Struktur, deren Wesen darin besteht, einen (meist weniger konkret erfahrbaren) Gegenstand oder Sachverhalt in Ausdrücken eines anderen (meist erfahrungsgebundenen) zu verstehen und zu erfahren (vgl. Lakoff & Johnson 1980). Als solche ist die Metapher in Sprache und Denken omnipräsent. In der Sprache finden die *konzeptuellen Metaphern* der gedanklichen Ebene in Systemen konsistenter *Lexemmetaphern* ihren Ausdruck, sodass diese Systeme eine Möglichkeit zur Rekonstruktion der dahinterliegenden metaphorischen Konzepte eröffnen. Schmitt (z. B. 1997) stellt eine dementsprechende systematische Metaphernanalyse für die sozialwissenschaftliche Forschung vor. Diese lässt sich unter Berücksichtigung mathematikdidaktischer Überlegungen zur Metapher bzw. metapherntheoretischer Überlegungen zur Mathematik für die Rekonstruktion der Lernerperspektiven von Grundschulkindern auf negative Zahlen adaptieren. Lakoff und Núñez (2000) machen in mathematischen Publikationen im Sinne einer Metaphertypologie sog. *Grundmetaphern* aus, über die elementare mathematische Ideen in Anknüpfung an Alltagserfahrungen verstanden werden. Als arithmetische Grundmetaphern lassen sich dabei OM- und MaP-Metapher (Object Manipulation Metaphor bzw. Motion along a Path Metaphor) nennen. Die OM-Metapher wird von Lakoff und Núñez (2000, S. 54 ff.) phänomenologisch differenziert, wobei im Hinblick auf empirische Befunde eine solche Differenzierung weder notwendig noch sinnvoll erscheint. Mittels OM-Metapher werden Zahlen und Operationen im Zusammenhang mit Objekt Manipulationen, also unter kardinaler Perspektive vorgestellt. Dagegen erfolgt das Verstehen von Zahlen und Operationen mittels MaP-Metapher über Bewegungen entlang eines Weges, also eher räumlich-relational. Eine systematische Metaphernanalyse versucht, die entsprechenden Grundmetaphern zu rekonstruieren, indem sie Lexemmetaphern im in lexikalische Einheiten zergliederten Text identifiziert und daraus konzeptuelle Metaphern synthetisiert (vgl. Rütten 2016).

#### 4. Tiefenstrukturspektrum der Lernerperspektiven

Im Rahmen der oben erwähnten Studie wurden neben einer schriftlichen Befragung mittels eines in Orientierung an niederländischen Testformaten konzipierten Aufgabenbogens mit 47 Lernenden problemzentrierte Interviews geführt, um einen Eindruck von der Tiefenstruktur der Lernerperspektiven bzgl. negativer Zahlen zu erhalten. Ein Teil dieser Interviews wurde vollständig transkribiert und die Transkripte der adaptierten systematischen Metaphernanalyse unterzogen. Als Ergebnis ist zunächst festzustellen, dass sich bei einigen Lernenden keine konzeptuellen Metaphern rekonstruieren lassen und ihre Sprache arm an Lexemmetaphern ist. Diese Lernenden zeigen i. d. R. keine Kenntnisse bzgl. negativer Zahlen. Bei anderen Lernenden lassen sich anhand der Lexemmetaphern entweder OM- oder MaP-Metapher rekonstruieren. Ein solcher Metaphersingularismus kann sich dabei kontextunabhängig über die unterschiedlichen Aufgaben im Interview hinweg zeigen, so dass von einer globalen Monoperspektivität gesprochen werden kann. Dabei hat diese Monoperspektivität unterschiedliche Auswirkungen in Bezug auf die Konzeptualisierung negativer Zahlen. Lernende mit OM-Metaphersingularismus äußern meist keine oder sehr undifferenzierte Kenntnisse bzgl. negativer Zahlen, wohingegen Lernende mit MaP-Metaphersingularismus bereits umfassende Kenntnisse erkennen lassen. Neben dieser globalen Monoperspektivität lässt sich auch eine lokale, kontextabhängige Monoperspektivität ausmachen. Je nach Kontext lässt sich aus den Lexemmetaphern entweder die OM- oder die MaP-Metapher rekonstruieren. Lernende mit einer solchen kontextabhängigen Monoperspektivität haben auch kontextabhängige Kenntnisse bzgl. negativer Zahlen. So können diese bspw. an der Zahlengeraden Verwendung finden, werden aber bei formalen Rechenaufgaben nicht als Ergebnisse genutzt oder akzeptiert. Schließlich zeigen sich auch Lernende, bei denen sich kontextunabhängig beide konzeptuellen Metaphern finden lassen. Hier wird von einer Polyperspektivität gesprochen. Allerdings spielt bei der polyperspektivischen Aktivierung mehrerer Schichten der kognitiven Schichtenstruktur deren Verhältnis eine entscheidende Rolle. Die Schichten können *hierarchisch* oder *heterarchisch* organisiert sein. Bei Polyperspektivität mit Schichtenhierarchie bzgl. der OM-Metapher dient diese i. d. R. der Überprüfung der „practical, behavioral validity“ (Fischbein 1987, S. 89). So geht z. B. Paul (Klasse 3) von der Existenz der negativen Zahlen aus, qualifiziert diese aber – ähnlich wie in der Mathematikgeschichte Cardano und Stifel (vgl. Rütten 2016) – als ‚unlogisch‘. Eine Polyperspektivität mit Schichtenheterarchie zeigt sich bspw. bei Tabea (Klasse 4), die Bonbonmengen in ihrer Vorstellung entsprechend deren Mächtigkeit räum-

lich anordnet. Die durch OM- und MaP-Metapher repräsentierten Schichten stehen damit integriert nebeneinander.

## 5. Unterrichtliche Konsequenzen

Eine Hierarchisierung des vorgestellten Tiefenspektrums der Lernerperspektiven scheint wenig sinnvoll. Überdies zeigt sich ein Metaphernpluralismus für ein Verstehen ganzer Zahlen und ihrer Operationen nicht unbedingt als notwendig. Dennoch erweist sich die MaP-Metapher für das entsprechende Verstehen von zentraler Bedeutung. Als eine wesentliche unterrichtliche Konsequenz aus der Erfassung der Lernerperspektive mittels Rekonstruktion konzeptueller Metaphern kann somit die Förderung des Auf- und Ausbaus der MaP-Metapher betrachtet werden. Dabei lässt sich entsprechend der konzeptuellen Metaphertheorie vermuten, dass ein entsprechender Auf- und Ausbau über entsprechende Lexemmetaphernsysteme initiiert werden kann. Diese Systeme werden neben Sprache auch Gesten und graphische Umsetzungen der MaP-Metapher (z. B. Veranschaulichungen an der Zahlengeraden) integrieren. Ein entsprechender Auf- und Ausbau sollte dabei sinnvollerweise in der Grundschule beginnen.

## Literatur

- Bender, P. (1991). Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen aus dem Sekundarstufenbereich. In H. Postel, A. Kirsch & W. Blum (Hrsg.), *Mathematik lehren und lernen. Festschrift für Heinz Griesel* (S. 48-60). Hannover: Schroedel
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach*. Dordrecht: Reidel.
- Lakoff, G. & Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. Chicago. The University of Chicago Press.
- Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from? How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.
- Petri, J., & Niedderer, H. (2001). Kognitive Schichtenstrukturen nach einer UE Atomphysik (Sek II). *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, H. 7, 53-68.
- Rütten, C. (2016). *Sichtweisen von Grundschulkindern auf negative Zahlen Metaphernanalytisch orientierte Erkundungen im Rahmen didaktischer Rekonstruktion*. Heidelberg: Springer.
- Schmitt, R. (1997). Metaphernanalyse als sozialwissenschaftliche Methode. Mit einigen Bemerkungen zur theoretischen „Fundierung“ psychosozialen Handelns. *Psychologie & Gesellschaft*, 21(1), 57-86.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.