Peter Stender, Hamburg

# Heuristische Strategien zur Überwindung der doppelten Diskontinuität in der Lehrerbildung

Die doppelte Diskontinuität ist ein seit langem bekanntes ungelöstes Problem des Lehramtsstudiums. In einem Lehramtstutorium zur Linearen Algebra fokussieren wir auf Methoden der Mathematik ergänzend zu den Gegenständen der Vorlesung. Als Methoden zur Beweisfindung sind heuristische Strategien aus der Theorie zum Problemlösen bekannt. Im Tutorium werden Strategien in Beweisen aus der Vorlesung bewusst gemacht und deren Auftreten in der Schulmathematik aufgezeigt. Dies wird an Beispielen dargestellt.

## Rahmenbedingungen

Die Lehramtsausbildung in der Universität Hamburg findet fakultätsübergreifend statt. Das Fachstudium geschieht in den für das Fach zuständigen Fachbereichen (hier: Fachbereich Mathematik in der MINT-Fakultät), während die Fachdidaktiken in der Fakultät für Erziehungswissenschaften angesiedelt sind. Die hier vorgestellte Arbeit findet im Projekt ProfaLe (Professionelles Lehrerhandeln zur Förderung fachlichen Lernens unter sich verändernden gesellschaftlichen Bedingungen, Projektleitung Prof. Dr. Gabriele Kaiser, Prof. Dr. Eva Arnold) statt, das im Rahmen der Qualitätsoffensive Lehrerbildung durch das BMBF finanziert wird. Die Arbeit baut auf vorhandenen Kooperationen zwischen der Fachdidaktik Mathematik und dem Fach Mathematik auf.

Im Fachstudium Mathematik belegen die Studierenden in den ersten beiden Semestern Lineare Algebra I und II. Das Modul besteht in jedem Semester aus einer vierstündigen Vorlesung und einer zweistündigen Übung, in der wöchentlich Übungsaufgaben behandelt werden. Die Modulprüfung besteht aus einer Klausur am Ende des 2. Semesters. Zulassungskriterium für die Klausurteilnahme ist die regelmäßige Teilnahme an den Übungsgruppen sowie das Erreichen von 50% der Punkte bei den Übungsaufgaben.

Ergänzend bietet der Fachbereich drei zweistündige wöchentliche Tutorien zur Vorlesung an. Im Rahmen des Projektes ProfaLe wird ein viertes Tutorium angeboten, in dem eine lehramtsspezifische Unterstützung der Studierenden vorgenommen wird. Dieses Tutorium wird vom Autor gemeinsam mit Dr. Lukas Buhné (Fachbereich Mathematik, Universitätskolleg Hamburg) durchgeführt. Dr. Buhné bietet im Rahmen des Universitätskollegs darüber hinaus eine Hausaufgabenhilfe an, in der den Studierenden Unterstützung bei der Bearbeitung der Übungsaufgaben angeboten wird.

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Das Tutorium wird von etwa 20 Studierenden besucht. Einige der Studierenden brachen das Studium ab, das Tutorium wurde jedoch im Laufe des Semesters von weiteren Studierenden belegt, so dass die Teilnehmerzahl insgesamt leicht anstieg.

## Theoretischer Rahmen

In der Wissenschaftstheorie ist unstrittig, dass jede Fachwissenschaft neben einem spezifischen Gegenstandsbereich spezifische Methoden anwendet (z.B. Schurz, 2006). Ich unterscheide hier die folgenden *Gegenstände der Mathematik*:

- Die in den Definitionen generierten Begriffe,
- die mathematischen Sätze und
- die fertig formulierten Beweise zu diesen Sätzen.

Bei den *mathematischen Methoden* zum Generieren und Anwenden der mathematischen Gegenstände verwende ich die folgenden Unterscheidungen:

- die mathematischen Beweismethoden zum Beweisen von Sätzen, wie geschicktes Substituieren, geschicktes Addieren von Nullen etc. oder Verfahren, wie den Beweis durch Widerspruch, vollständige Induktion, etc.,
- die Methoden zum Nutzen von Mathematik zur Lösung von Problemen, an prominenter Stelle die heuristischen Strategien oder weitere mathematische Handlungsstrategien, wie das konsequente Nutzen von Algorithmen, Diskretisieren u.a.,
- die Methoden (eher Konventionen), mit denen mathematische Gegenstände in der Community präsentiert werden (Darstellungsmethoden).

*Heuristische Strategien* werden hier im Sinne von Dörner (1976) verstanden, als Verfahren, mit deren Hilfe Lösungen von Problemen gefunden werden können. Diese Definition bezieht sich auf Dörners Definition des Begriffs *Problem*: „Ein Problem ist also gekennzeichnet durch drei Komponenten: 1. Unerwünschter Anfangszustand $s_\alpha$; 2. Erwünschter Zielzustand $s_\omega$; 3. Barriere, die die Transformation von $s_\alpha$ in $s_\omega$ im Moment verhindert." (Dörner 1976). Diese Definition führt zu einer sehr weiten Sichtweise des Begriffs *heuristische Strategie*, da sie sämtliche Handlungsstrategien umfasst, die dazu beitragen, Handlungsbarrieren zu überwinden. In diesem Sinne sind die oben angeführten Beweisstrategien eine Teilmenge der heuristischen Strategien, da sie beim Entwickeln von Beweise genutzt werden können, die für das handelnde Subjekt neue sind. Mathematische Beweisstrategien beziehen sich in der Regel auf formalsprachliche Aspekte, während im Allgemeinen heuristische Strategien auch außerhalb der Mathematik wirksam werden können. Basierend auf diesem weiten Begriff heuristischer Strategien wurde eine Liste solcher Strategien erstellt, basierend u.a. auf Pólya (1973), der in dem Titel die heuristischen Strategien bereits den Methoden der Mathematik zuordnet: *Material organisieren; Systematisches Probieren; Zerlege dein Problem in Teilprobleme; Superpositionsverfahren; Vergrößere den Suchraum; Betrachte Grenzfälle oder Spezialfälle; Verallgemeinerungen; zum Optimieren muss man variieren; Rückwärts arbeiten und Vorwärts arbeiten; Repräsentationswechsel; Symmetrie nutzen; Superzeichenbildung; Simulationen nutzen; Probleme auf Algorithmen zurückführen; führe Neues auf Bekanntes zurück; Diskretisieren; Analogien nutzen; dran bleiben und Aufhören können - jeweils zum richtigen Zeitpunkt.*

Es gilt als bestätigt, dass das selbständige Bilden von Superzeichen in Problemlöseprozessen ein deutlicher Hinweis auf hohe mathematische Begabung ist, ebenso wie flexible Repräsentationswechsel (z. B. Bauersfeld, 2001; Fuchs, 2006). Daher kann man folgern, dass diesen Strategien eine besondere Bedeutung im Rahmen der Mathematik zu kommen. Der Begriff *Superzeichen* (Kießwetter, 1988) stammt aus der Informationstheorie und meint „ein Zeichen, das für mehrere Zeichen steht“, also für eine Menge von Zeichen. Dörner (1976) bezeichnet das gleiche Konzept als *Komplexion*, die ursprüngliche Bezeichnung *Chunks* geht auf Miller (1956) zurück. Zentraler Gedanke dabei ist die effektive Nutzung des Arbeitsgedächtnisses durch sinnvolles Zusammenfassen mehrerer gedanklicher Objekte zu einem einzigen neuen Objekt. In der Mathematik treten Superzeichen vielfach auf in Form von Mengen, Äquivalenzklassen, Vektoren, Matrizen, Polynomen (unendliche Tupel), Funktionen (Mengen rechtseindeutiger Paare), Strukturen wie Gruppen, Ringen, Körpern etc.

## Gestaltung des Tutoriums

Im Tutorium wurden Fragen zur Vorlesung beantwortet, selbst entwickelte Präsenzaufgaben bearbeitet, die einerseits Inhalte aus der Vorlesung illustrieren, andererseits Bezüge zur Schulmathematik aufzeigen, sowie heuristische Strategien thematisiert, die in den Inhalten der Vorlesung wirksam wurden. Bei letzterem wurden zu den jeweils thematisierten heuristischen Strategien passende Beispiele aus der Schulmathematik genannt. Daneben wurde in regelmäßigen Abständen Überblickswissen über die Vorlesungsinhalte vermittelt. Hier wird ein Beispiel zu den heuristischen Strategien vorgestellt.

Quotientenringe wie $\mathbb{Z}/(m\mathbb{Z})$ werden in der Vorlesung allgemein definiert, Strukturen werden nachgewiesen und daraus Operationen auf diesen Strukturen geklärt. Zur ergänzenden Erklärung wurden für $m=4$ unterschiedliche

Repräsentationen der zugrundeliegenden Abbildung gezeigt, deren Kern $m\mathbb{Z}$ ist, sowie der Äquivalenzklassen (Kern und Nebenklassen), aus denen $\mathbb{Z}/(4\mathbb{Z})$ besteht. Eine der Schwierigkeiten im Umgang mit diesen Strukturen für die Studierenden ist anscheinend, dass hier mit Äquivalenzklassen, also Superzeichen, gerechnet wird und die Repräsentationen vielfach wechseln.

In der Schule treten an zwei zentralen Stellen vergleichbare Schwierigkeiten auf: Funktionen sind Superzeichen, die zugrundeliegenden Elemente sind Wertepaare. Der Wechsel zwischen den Repräsentationen „Term, Tabelle, Graph, Situation" ist für die Lernenden anspruchsvoll und die Bildung des Superzeichens *Funktion* aus den Wertepaaren / Wertetabellen gelingt vielen Lernenden nicht.

Brüche / rationale Zahlen sind in zweierlei Hinsicht Superzeichen (Paare von Zahlen bzw. Äquivalenzklassen von Paaren von Zahlen). Auch für die Entwicklung des Bruchkonzeptes sind zahlreiche Repräsentationen und die entsprechenden Wechsel zentral und für Lernende sehr anspruchsvoll.

Zur Verdeutlichung der Schulrelevanz wurde ergänzend die emotionale Situation von Lernenden betont, die sich mit solchen neuen Strukturen auseinandersetzen und die für die Studierenden vermutlich in Bezug auf $\mathbb{Z}/(m\mathbb{Z})$ Ähnlichkeiten aufweisen zur Situation in der Schule in Bezug auf Funktionen und Brüche.

## Literatur


Dörner, D. (1976). *Problemlösen als Informationsverarbeitung* (1. Aufl.). Stuttgart: Kohlhammer.

Bauersfeld, H. (2001). Theorien zum Denken von Hochbegabten. *mathematica didactica*, 24(2), 3–20.

Fuchs, M. & Käpnick, F. (Hrsg.). (2008). *Mathematisch begabte Kinder: Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft*. Begabungsforschung. Berlin: LIT.

Kießwetter, K. (1988). Das Hamburger Fördermodell und sein mathematikdidaktisches Umfeld unter besonderer Berücksichtigung der Überlegungen und Modellierungselemente, welche Ausgangspunkte für die Konzeption waren. In K. Kießwetter (Hrsg.), *Das Hamburger Modell zur Identifizierung besonders befähigter Schüler* (S. 6–34). Hamburg: Selbstverlag.

Miller, G. A. (1956). The Magical Number Seven, Plus or Minus Two: Some Limits on our Capacity for Processing Infor-mation. Psychological Review, 63, 81–97.

Pólya, G. (1973). *How To Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton, N. J.: Princeton University Press.

Schurz, G. (2006). *Einführung in die Wissenschaftstheorie*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.