

Anselm STROHMAIER, Kristina REISS, Stefan UFER, Frank FISCHER,  
München

## **Einsatz heuristischer Lösungsbeispiele mit Selbsterklärungsprompts zur Förderung von Beweis- und Argumentationskompetenz an der Schnittstelle Schule- Hochschule**

Mathematisches Argumentieren stellt eine erhebliche Herausforderung für viele Studienanfängerinnen und Studienanfänger der Mathematik dar (Rach, 2014). Das DFG-geförderte Projekt ELK-Math (vgl. Kollar et al., 2014) versucht daher gezielt im Rahmen eines Brückenkurses für Studienanfängerinnen und Studienanfänger der Mathematik unter anderem durch den Einsatz heuristischer Lösungsbeispiele verschiedene Facetten mathematischer Argumentationskompetenz zu fördern. In der vorliegenden Studie wird ein Teilaspekt des Projektes vorgestellt, der sich explizit mit der Förderung durch heuristische Lösungsbeispiele beschäftigt.

Generell zeigen Lösungsbeispiele den Lernenden eine vorgefertigte Lösung zu einem gegebenen Problem auf. Im Gegensatz zu regulären Lösungsbeispielen, die in ihrer Darstellungsform einen Produktcharakter aufweisen, fokussieren *heuristische Lösungsbeispiele* (HLB) auf den Prozess, der zu dieser Lösung führt. Dadurch sind HLB auch in wenig algorithmischen Domänen wie der Hochschulmathematik hilfreich, wo das Vermitteln erfolgreicher Strategien im Vordergrund steht (Reiss & Renkl, 2002).

Im Projekt ELK-Math werden bereits seit einigen Jahren erfolgreich HLB zur Förderung mathematischer Argumentationskompetenz eingesetzt (Reichersdorfer, 2013). Die HLB orientieren sich dabei an der von Boero (1999) beschriebenen Beweisstruktur. Für die vorliegende Studie wurden die HLB nochmals gezielt optimiert. Dabei wurde unter anderem das Format auf ein gedrucktes Arbeitsheft gewechselt und Selbsterklärungsprompts und Abbildungen dem aktuellen Stand der Forschung angepasst (Beitlich, Obersteiner & Reiss, 2015; Renkl, Hilbert & Schworm, 2009).

Mathematische Argumentationskompetenz wird verstanden „... als die Fähigkeit und Bereitschaft in einer mathematischen Argumentationssituation eine plausible mathematische Aussage zu finden, formulieren und evaluieren [...]“ (Reichersdorfer, 2013, S. 8). Operationalisiert wurde das bisher in Form von vier Facetten: Neben technischem und komplexem Beweisen wurde auch das Evaluieren von richtigen bzw. falschen mathematischen Aussagen erhoben. Dabei fand sich bisher für die Evaluation keine Überlegenheit des Einsatzes von HLB gegenüber freien Problemlösebedingungen.

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Es ist nach wie vor nicht geklärt, welchen Einfluss allgemeine kognitive Voraussetzungen der Lernenden auf die Wirksamkeit des Einsatzes von HLB haben. Während die Forschung zu allgemeinen Lösungsbeispielen eine Wirksamkeit vor allem für schwächere Lernende vermutet (Sweller, 2003), zeigen Studien zu HLB vermehrt den gegenteiligen Effekt: Hier sind oftmals positive Effekte vor allem bei stärkeren Lernenden zu beobachten (Kollar et al., 2014).

Neben den oben angesprochenen Facetten mathematischer Argumentationskompetenz deckt die genannte Definition explizit auch das Generieren einer mathematischen Hypothese mit ab. In unserer Operationalisierung wurde diese Facette bisher nicht erhoben. Auch wenn mittelfristig über die Analyse von Prozessdaten ein umfassenderes Erhebungsinstrument geschaffen werden soll (Ottinger & Ufer, 2015), findet sich die initiale Hypothesengenerierung derzeit noch nicht in unseren Instrumenten.

Für die vorliegende Studie ergeben sich daher drei Fragestellungen:

- Lässt sich durch optimierte heuristische Lösungsbeispiele ein positiver Einfluss auf das Evaluieren mathematischer Aussagen erreichen?
- Welchen Einfluss haben allgemeine kognitive Voraussetzungen auf die Wirksamkeit von heuristischen Lösungsbeispielen?
- Welchen Einfluss hat die Arbeit mit heuristischen Lösungsbeispielen auf die initiale Hypothesengenerierung?

### **Fragestellungen 1 & 2**

Untersucht wurden bis zum jetzigen Zeitpunkt 120 Teilnehmerinnen und Teilnehmer eines Brückenkurses für Studienanfängerinnen und Studienanfänger der Mathematik (46 weiblich). Das Durchschnittsalter betrug 19,36 Jahre ( $SD = 2,18$ ). Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer arbeiteten in vier Sitzungen in einer problemorientierten Lernumgebung. Dabei wurde eine offene mathematische Problemstellung präsentiert (beispielsweise „Wählen Sie einige Quadratzahlen. Bilden Sie Differenzen von je zwei Quadratzahlen. Was fällt Ihnen auf? Formulieren Sie eine Vermutung und beweisen Sie diese!“). Eine Gruppe erhielt in diesen Sitzungen HLB, eine Kontrollgruppe erhielt keine solche Unterstützung. Die Arbeit fand kooperativ in Zweiergruppen statt. Aufgaben, Instruktionen und Zeitvorgaben wurden dabei parallelisiert. Darüber hinaus wurde ein Vor- und Nachtest zum Evaluieren mathematischer Aussagen durchgeführt (vgl. Reichersdorfer, 2013). Zu Beginn des Brückenkurses wurde die Abiturnote als Indikator allgemeiner kognitiver Voraussetzungen erhoben.

Zur Analyse der Effekte der Bedingung und der allgemeinen kognitiven Voraussetzungen wurde eine ANCOVA gerechnet mit den Faktoren Interventionsgruppe und in einem zweiten Schritt darüber hinaus allgemeinen kognitiven Voraussetzungen (durch einen Mediansplit wurden zwei Stufen gebildet). Abhängige Variable war das Nachtestergebnis, das Vortestergebnis wurde als Kovariate kontrolliert.

Es zeigten sich keine signifikanten Effekte oder Interaktionseffekte.

### **Fragestellung 3**

#### **Methode**

Untersucht wurden 306 Teilnehmerinnen und Teilnehmer des gleichen Brückenkurses für Studienanfängerinnen und Studienanfänger der Mathematik (117 weiblich). Das Durchschnittsalter betrug 19,22 Jahre ( $SD = 2,05$ ). Für diese Untersuchung wurde nach zwei Interventionssitzungen eine weitere offene mathematische Problemstellung präsentiert, jedoch in beiden Gruppen keine Hilfestellung gegeben. Am Ende der Sitzung wurden die Teilnehmerinnen und Teilnehmer aufgefordert, eine Vermutung zur Problemsituation schriftlich festzuhalten.

Für die Aufgaben waren unterschiedliche hierarchische Hypothesen möglich. Kodiert wurde die mathematische Stärke der aufgestellten Vermutung.

In der Gruppe, die zuvor mit Lösungsbeispielen gearbeitet hatte, zeigten sich signifikant stärkere Vermutungen.

#### **Diskussion**

Auch durch die systematische Optimierung der HLB konnte in diesem Fall kein signifikanter Vorteil der Arbeit mit HLB gegenüber dem freien Arbeiten an gleichartigen Problemen auf das Evaluieren mathematischer Aussagen festgestellt werden. Das deutet darauf hin, dass sich auch nach vollständiger Auswertung aller vorliegenden Daten bisherige Forschungsergebnisse bestätigen könnten und lässt vermuten, dass in dieser Facette mathematischer Argumentationskompetenz möglicherweise kein systematischer Vorteil von HLB vorhanden ist. Ein Interaktionseffekt von allgemeinen kognitiven Voraussetzungen konnte in dieser Stichprobe nicht gefunden werden. Das bestärkt das Vorhaben, weiterhin genauer individuelle Voraussetzungen für die Wirksamkeit von HLB zu untersuchen. Insbesondere wird dies durch die vollständige Auswertung aller vorliegenden Daten möglich sein.

Ferner scheint die Vermutung bestärkt zu werden, dass die Arbeit mit HLB einen positiven Effekt auf die spätere initiale Hypothesengenerierung haben könnte. Auch wenn durch lediglich eine Aufgabe und ohne einen Vor-

test die Ergebnisse nicht überbewertet werden dürfen, scheint es doch lohnenswert, diese Facette mathematischer Argumentationskompetenz künftig systematisch zu untersuchen, wenn HLB zur Förderung verwendet werden. Auch hier erhoffen wir uns, durch vollständige Auswertung aller Daten ein differenzierteres Bild zeichnen zu können.

## Literatur

- Beitlich, J., Obersteiner, A., Reiss, K. (2015). How do secondary school students make use of different representation formats in heuristic worked examples? An analysis of eye movements. In K. Beswick, T. Muir, & J. Wells (Hrsg.), *Proceedings of the 39th Psychology of Mathematics Education conference* (Band 2, S. 97–104). Hobart: PME.
- Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: a complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 7(8).
- Kollar, I., Ufer, S., Reichersdorfer, E., Vogel, F., Fischer, F., Reiss, K. (2014). Effects of collaboration scripts and heuristic worked examples on the acquisition of mathematical argumentation skills of teacher students with different levels of prior achievement. *Learning and Instruction*, 32, S. 22-36.
- Ottinger, S., Ufer, S. (2015). Entwicklung eines Instruments zur Erfassung kooperativer mathematischer Argumentationskompetenz. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten, & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (S. 1148f.). Münster: WTM-Verlag.
- Rach, Stefanie (2014). *Charakteristika von Lehr-Lern-Prozessen im Mathematikstudium. Bedingungsfaktoren für den Studienerfolg im ersten Semester*. (Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik 22). Münster, Waxmann.
- Reichersdorfer, E. (2013). *Unterstützungsmaßnahmen am Beginn des Mathematikstudiums: Heuristische Lösungsbeispiele und Problemlösen in problembasierten Lernumgebungen zur Förderung mathematischer Argumentationskompetenz*. Diss. Technische Universität München.
- Reiss, K., Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(3), S. 212-220.
- Renkl, A., Hilbert, T., Schworm, S. (2009). Example-based learning in heuristic domains: a cognitive load theory account. *Educational Psychology Review*, 21, S. 67-78.
- Sweller, J. (2003). Evolution of human cognitive architecture. *Psychology of Learning and Motivation*, 43, S. 215–266.
- Zöttl, L., Ufer S., Reiss, K. (2010). Modelling with Heuristic Worked Examples in the KOMMA Learning Environment. *Journal für Mathematik-Didaktik* 31, S. 143-165.