Gerda WERTH, Paderborn

Ziehen und Beweisen mit DGS – Welche Beweiskraft haben für Studierende die Erkenntnisse, die sie im Zugmodus gewinnen?

Einleitung

Seit dem Wintersemester 1998/99 wird an der Universität Paderborn die Erstsemester-Pflichtvorlesung „Elemente der Geometrie“ für die Lehrämter HRGe und G unter Einsatz der Software für dynamische Geometrie (DGS) Cinderella gelesen, d.h. sowohl die wöchentliche Vorlesung mit der zweistündigen Übung, als auch die Klausur werden mit Computereinsatz durchgeführt. Die naheliegende Frage, inwieweit sich die Hoffnungen und Erwartungen bzgl. des Einsatzes der DGS bestätigt haben, mündete in eine qualitative Untersuchung zu den Forschungsfragen:

- DGS und Beweis: Wie wirkt sich DGS auf das Beweisverständnis der Lernenden aus?
- Zugmodus als heuristisches Werkzeug: Wie verwenden Lernende den Zugmodus, und welchen kognitiven Nutzen ziehen sie aus ihm?

Theoretischer Rahmen

In der Literatur zum Thema „Beweisen“ finden sich viele Aussagen, die herausstellen, dass die Mathematik eine „beweisende“ Wissenschaft sei, ohne jedoch den Begriff „Beweis“ explizit zu definieren. Manin z.B. sagt: „A proof becomes a proof only after the social act of „accepting it as a proof.“ This is true for mathematics as it is for physics, linguistics or biology” (Manin 2010, S.45). Als Beispiele für diese These seien der vom Computer ausgeführte Beweis des Vier-Farben-Satzes oder die interaktiven Zero-knowledge-Beweise genannt. Da so gut wie nie formale Beweise in aller Strenge geführt werden, bedarf es eines in der betroffenen mathematischen Kommunität ausgehandelten Konsenses darüber, wie detailliert jeweils vorgegangen werden muss, mit der einhergehenden Gewissheit, dass entstandene Lücken jederzeit geschlossen werden können. Für die Lernenden ergibt sich hieraus das Problem, dass sie oftmals unsicher sind, ob etwas bewiesen ist, oder nicht. Hinzu kommt, dass in der Schul- und in der Hochschullehre nach wie vor die verifizierende Funktion eines Beweises stark im Vordergrund steht (vgl. de Villiers 1990, S.17). Noch bedeutsamer für die Lehre wären jedoch eigentlich die Funktionen des Begründens, der Systematisierung und der Kommunikation; weitere Funktionen wie Förderung eines entdeckenden Vorgehens und überhaupt intellektuelle Herausforderung ließen

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

sich anschließen. Betrachtet man nun die Rolle einer DGS beim Beweisen, so sind hier vielfältige Bereiche zu benennen, wie das Aufstellen und Untersuchen einer Vermutung, das Finden einer Beweisidee, die Visualisierung von zentralen Beweisschritten, die Erarbeitung von Beweisstrategien oder auch das Führen von Existenzbeweisen. Für welche Aspekte die Studierenden die DGS vor dem Hintergrund ihres individuellen Beweisverständnisses einsetzen, wird in der Untersuchung herausgearbeitet.

Untersuchungsdesign der Studie

Im Wintersemester 08/09 wurden 51 Lehramtsstudierende befragt, davon 27 Erstsemester, die aktuell an der Veranstaltung „Elemente der Geometrie" teilnahmen, und 24 Studierende im Hauptstudium, die diese einige Semester zuvor gehört hatten. Die Studierenden bearbeiteten, je nach Zeit, ein bis zwei zufällig aus einem Aufgabenpool von insgesamt vier Aufgaben ausgewählte Aufgaben und wurden anschließend nach einem vorbereiteten Interviewleitfaden (teilstandardisierte Methode nach Mayring) befragt. Durch die Auswertung der Transkripte mit der Methode der Objektiven Hermeneutik nach Oevermann wurde das Beweisverständnis anschließend qualitativ herausgearbeitet und mit der Bearbeitung der Aufgaben abgeglichen.

Welches Beweisverständnis findet sich bei den Studierenden?

Viele Studierende weisen einem Beweis in erster Linie verifizierende Funktion zu und berühren keine weiteren Beweisaspekte. Für diese Studierende kann der Einsatz der DGS deswegen einen Beweis liefern, weil sie ja mit Hilfe der dynamischen Visualisierung alle möglichen Fälle überprüfen können. Nur ein kleiner Teil dieser Personen akzeptiert die Visualisierung nicht als Beweis. Diese Gruppe führt im Wesentlichen zwei Argumente an: zum einen könnten auch mit einer DGS nur endlich viele Fälle überprüft werden (endliche Anzahl von Pixeln, Untersuchung einer endlichen Anzahl von Objekten), zum anderen sei die Darstellung ohnehin ungenau (flächige Punkte, treppenförmige Geraden).

Etwas anders sieht es bei denjenigen aus, die einem Beweis darüber hinaus auch begründende Funktion zuweisen. Hier wird die Visualisierung vorwiegend nicht als Beweis akzeptiert. Allerdings ist es von entscheidender Bedeutung, ob der Wunsch, durch einen Beweis die Begründungszusammenhänge aufzudecken, intrinsisch motiviert ist, oder ob eher eine Orientierung an der „mathematischen Kommunität" erfolgt, von der man weiß, dass diese derartige Nachweise einfordert. Trotz ihres Wissens um diesen mathematischen Standard machen diese Studierenden sich ihn nicht zu eigen, was sich darin ausdrückt, dass sie zufrieden sind, wenn etwas „anschaulich klar" ist, ein Status, der bereits durch die Visualisierung erreicht werden kann und keines weiteren Beweises bedarf.

Studierenden, für die ein Beweis eine verifizierende und/oder begründende Funktion hat, fällt es relativ leicht zu entscheiden, ob ein Sachverhalt durch eine bestimmte Vorgehensweise (Visualisierung mit einer DGS) bewiesen ist oder nicht, da sie sich an ihrem Beweisverständnis orientieren können. Demgegenüber gibt es aber viele Studierende, die ein eher diffuses Beweisverständnis haben und denen nicht klar ist, aus welcher Motivation heraus etwas bewiesen wird, weshalb ihnen dann auch nicht klar ist, wann etwas bewiesen ist. Damit einhergehend findet sich bei diesen Personen häufig kein eigenes Beweisbedürfnis, sondern eher die Auffassung, dass Beweisen eine lästige Pflichtaufgabe sei.

Insgesamt konnte ich bei den Beweisverständnissen keinen wesentlichen Unterschied zwischen Erstsemester- und fortgeschrittenen Studierenden feststellen.

Beobachtungen zum Einsatz des Zugmodus

Besonders häufig war zu beobachten, dass die Studierenden den Zugmodus einsetzen, um durch das Überprüfen „aller möglichen Fälle“ Thesen zu generieren. Je nach Beweisverständnis wurde anschließend ein formaler Beweis für nötig erachtet oder diese Überprüfung als hinreichend angesehen. Die sich während des Ziehens für eine Behauptung ergebenden Gegenbeispiele wurden längst nicht von allen Studierenden als solche erkannt. Dabei spielte auch die Art und Weise des Ziehens und der Formatierung eine Rolle: während einige Studierende hektisch hin- und herzogen, so dass Beobachtungen kaum möglich waren, erzeugten andere derart viele Linien, Punkte, Strecken- und Winkelmessungen, dass die Zeichnung unübersichtlich wurde und somit Zusammenhänge nur schwer erkannt werden konnten. Andere wiederum blendeten Linien aus, die für das Aufspüren von Beziehungen hilfreich gewesen wären. Auch beim Umgang mit dem Programm traten häufig Probleme auf, was insofern überraschend ist, als dieses i.A. als unkompliziert und leicht erlernbar angesehen wird. Von besonderer Bedeutung erwiesen sich hier die Konstruktionshierarchien. Einigen Studierenden gelang es nicht, eine für die jeweilige Beobachtung geeignete Zeichnung zu erstellen. Dieses Unvermögen manifestierte sich vor allem darin, dass nicht bedacht wurde, ob feste oder variierbare Größen von Vorteil für den jeweiligen Untersuchungszweck wären. Dies führte oft dazu, dass Ideen allein deswegen nicht weiter verfolgt wurden, weil die technische Umsetzung scheiterte.

Es gab indes auch Studierende, die den Zugmodus gewinnbringend einsetzen konnten, um Vermutungen zu generieren, gegebenenfalls zu verwerfen und auf Beweisideen zu kommen. Interessanterweise befanden sich diese Studierenden alle im oberen Leistungsdrittel.

Zusammenfassung und Konsequenzen

Da das individuelle Beweisverständnis zunächst unabhängig vom Einsatz einer DGS ist, vertrete ich die These, dass diese Problematik durch die DGS nicht hervorgerufen, sondern nur sichtbar gemacht wird. Damit zeigt sich erneut die Bedeutsamkeit der Auseinandersetzung mit den Fragen: „Was ist ein Beweis?", „Was akzeptieren wir als Beweis?", „Warum beweisen wir?". In diesem Kontext ist wichtig, dass ein Beweis nicht ausschließlich auf die Verifikation reduziert wird, sondern dass die Studierenden die verschiedenen Beweisfunktionen kennen und gegebenenfalls auch einander gegenüberstellen.

Zum Einsatz des Zugmodus lässt sich sagen, dass sich die von Hölzl 1999 getroffene Aussage: „Dynamik per se liefert keinen didaktischen Vorsprung gegenüber den traditionellen Werkzeugen der Geometrie" auf eindrucksvolle Weise bestätigt hat. Da sich planvolles Ziehen offensichtlich nicht von alleine einstellt, muss der Einsatz des Zugmodus viel häufiger thematisiert und reflektiert werden: wie konnten Thesen generiert werden, welche Vorgehensweisen wurden beim Ziehen verfolgt, und an welchen Stellen ergaben sich unerwartete Schwierigkeiten oder konnten überraschende Beobachtungen gemacht werden? Auch die Analyse von Zeichnungen, die aufgrund ihrer Anlage letztlich nicht zum gewünschten Ziel führten, könnte hier hilfreich sein. Das Repertoire der von mir beobachteten Studierenden war hier i.A. nicht sehr reichhaltig, denn auch diejenigen, die fachlich sehr gut waren und durchaus auch vom Einsatz der DGS profitiert haben, stießen hier immer wieder an Grenzen.

Literatur

De Villiers, M. (2003). *Rethinking Proof with The Geometer's Sketchpad.* Emeryville CA: Key Curriculum Press.

Hölzl, R. (1999). *Qualitative Untersuchungen zur Verwendung dynamischer Geometrie-Software..* Augsburg: Wißner.

Manin, Y.I. (2010). *A Course in Mathematical Logic for Mathematicians.* New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer.

Mayring, P. (1999). *Einführung in die qualitative Sozialforschung.* Weinheim: Beltz, Psychologie Verlags Union.

Oevermann, U. (1993). Die objektive Hermeneutik als unverzichtbare methodologische Grundlage für die Analyse von Subjektivität. Zugleich eine Kritik der Tiefenhermeneutik. In T. Jung et al. (Hrsg.), *„Wirklichkeit" im Deutungsprozess: Verstehen und Methoden in den Kultur- und Sozialwissenschaften* (S. 106–189). Frankfurt / M.: Suhrkamp.