

Annika M. WILLE, Klagenfurt

## **„Die Analysis ist also etwas Unerreichbares“ – Wie sich Studierende zentralen Begriffen der elementaren Analysis nähern.**

Die Veranstaltung „Didaktik der Analysis“ an der Universität Klagenfurt im Wintersemester 2015/2016 begegnete der Frage, wie der Aufbau eines reflektierten Verständnisses für die zentralen Begriffe der elementaren Analysis, deren Zusammenhang und deren Bedeutung für den Schulunterricht bei Lehramtsstudierenden unterstützt werden kann. Schriftliche Reflexionen und Rückmeldungen der Studierenden werden dahingehend analysiert und die Veranstaltungsform vorgestellt.

### **Theoretischer Rahmen**

In der Theory of Commognition von Anna Sfard (2008) wird *Denken* als individualisierte Form von (interpersonaler) Kommunikation gesehen. Denken und Kommunikation werden als zwei Erscheinungsformen des selben Phänomens verstanden und daher verwendet Sfard für beide den Ausdruck *commognition*, der sich aus „cognition“ und „communication“ zusammensetzt.

*Lernen* wiederum wird betrachtet als Individualisierung vom kollektiven Diskurs. Das heißt, es ist eine Veränderung der eigenen mathematischen Kommunikation, sei es mit anderen oder mit sich selbst, um nach und nach kompetenter am Diskurs mit anderen teilnehmen zu können. Eine *Vorbedingung für Lernen* sei die „*recursivity of linguistic commognition*“. Gemeint ist, sich auf Teile der Kommunikation wieder beziehen zu können, beispielsweise Anmerkungen über eigene Gedanken äußern oder reflektieren, was ein anderer oder man selbst kommunizierte. Dies ermöglicht einen „*Blick von außen*“, um reflektieren, abstrahieren und begründen zu können.

### **Veranstaltung „Didaktik der Analysis“**

Die Veranstaltung „Didaktik der Mathematik“ an der Universität Klagenfurt im Wintersemester 2015/2016 versuchte eine Antwort auf die Frage zu finden, wie ein Blick von außen im oben genannten Sinne gefördert werden könne, so dass Studierende ihre mathematische und mathematikdidaktische Kommunikation verändern können, um kompetentere Teilnehmer im allgemeinen elementaranalytischen Diskurs zu werden.

Inhaltlich orientierte sich die Veranstaltung (zwei parallele Kure mit insgesamt 40 Studierenden) am Buch „Analysis verständlich unterrichten“ von In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Rainer Danckwerts und Dankwart Vogel (2006). Dabei wechselten sich bei fünf Themengebieten – Folgen, Ableitungsbegriff, Integralbegriff, Kurvendiskussion und Extremwertprobleme – Vorlesungen, Übungen und Reflexionen ab. Die Reflexionen wurden durch *erdachte Dialoge* (Wille 2008) umgesetzt, eine Form des Schreibens im Mathematikunterricht, bei der in einer Einzelarbeit ein schriftlicher selbst erdachter Dialog zwischen zwei Protagonisten verfasst, bzw. fortgesetzt wird, die sich über eine mathematische oder mathematikdidaktische Fragestellung unterhalten.

Im Folgenden wird auf die zweite Reflexion zum Ableitungsbegriff eingegangen, die von 35 Studierenden abgegeben wurde. Die Studierenden setzten hierbei den folgenden Anfangsdialog fort:

- S1: Kannst du mir noch einmal erklären, was in der letzten Stunde wichtig war?
- S2: Hast du denn eine spezielle Frage? Wir hatten ja drei Zugänge zum Ableitungsbegriff, einen geometrischen, einen anwendungsbezogenen und am Ende noch die lokale Linearisierung.
- S1: Der anwendungsbezogene war der mit der lokalen Änderungsrate?
- S2: Ja, genau.
- S1: Der schien für die Schulanalysis besonders wichtig zu sein. Aber warum?
- S2: Du gehst dabei vom Bestand über den absoluten Zuwachs zum relativen Zuwachs und – schwupp – hast du die momentane Änderungsrate.
- S1: Schwupp???
- S2: Entschuldige, das „Schwupp“ ist wirklich nicht so einfach und eigentlich der springende Punkt. Ich erkläre es dir einmal ganz genau und danach, warum das für die Schulanalysis wichtig ist.
- S1: Danke, denn mit den ganzen Begriffen kann ich im Moment nicht viel anfangen.

Fragestellungen für die Auswertung der Reflexionen waren:

1. Wie werden elementaranalytische Begriffe im erdachten Dialog verwendet und weist der Gebrauch der Begriffe auf Hürden auf dem Weg hin, nach und nach kompetenter am elementaranalytischen Diskurs mit anderen teilnehmen zu können?
2. Welche Rekursionsebenen sind erkennbar? An welchen Stellen bezieht sich der Studierende beim Schreiben auf einen Teil seines eigenen erdachten Dialoges?

## **Auswertung**

Zunächst wird auf die zweite Frage nach den Rekursionsebenen eingegangen. Es zeigten sich in den Reflexionen verschiedene Ebenen, bei denen sich der jeweils Schreibende auf Teile des eigenen erdachten Dialoges bezog (vgl. Abb. 1). Alle Studierenden beschrieben einen Prozess, wie sie auf die lokale Änderungsrate kommen oder sie ausrechnen können. 37% aller

Studierenden nahm einen „Blick von außen“ ein, indem sie Zusammenhänge zu unterschiedlichen Interpretationen oder Beschreibungsebenen erklärten. Auf die zentrale Frage nach Schwierigkeiten beim Schritt zur Analysis durch den Grenzwertübergang gingen nur 26% der Studierenden ein, und schließlich begründeten 63% der Studierenden didaktisch die Bedeutung des anwendungsorientierten Zugangs für die Schulanalysis, aber in unterschiedlichen Tiefen. Manche bezogen sich direkt auf den von ihnen vorher beschriebenen Prozess (mittlerer Pfeil in Abb. 1), andere bezogen sich auf den Zusammenhang zwischen verschiedenen Zugängen oder auf Schwierigkeiten beim Übergang zur Analysis, wie beispielsweise eine Studentin, die in der Rolle von S1 zur Bedeutung des anwendungsorientierten Zugangs schreibt: „Weil er – bis zum Schwupp – im Anschaulichen bleibt. Das kann man sich ja wirklich vorstellen.“

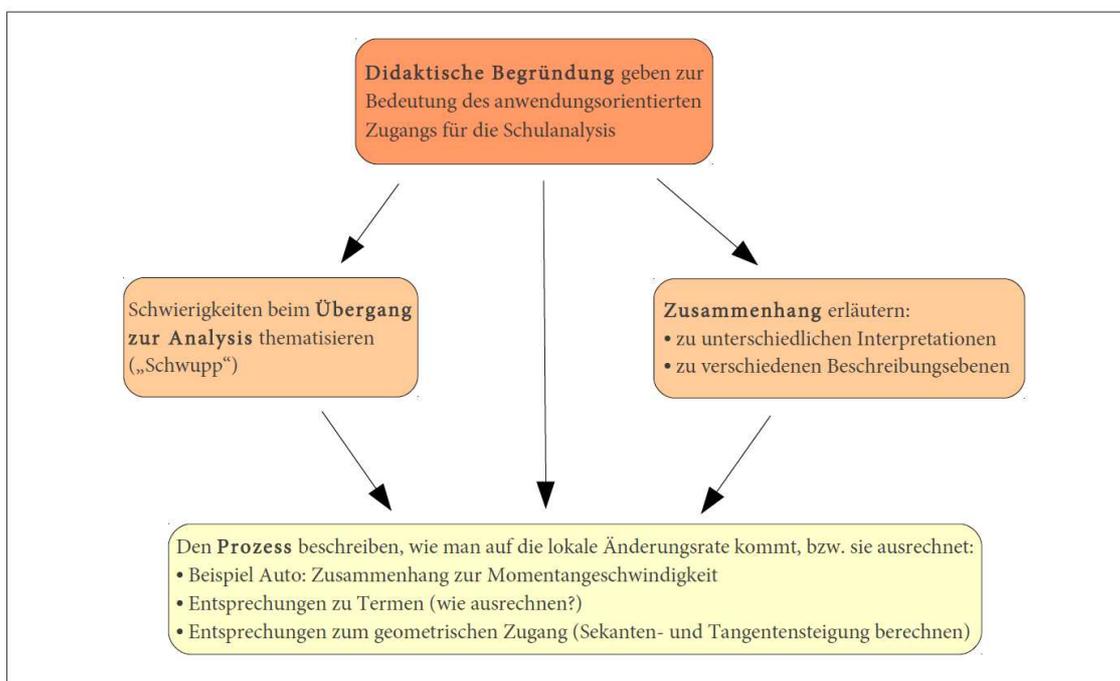


Abbildung 1: Rekursionsebenen in der zweiten Reflexion.

Bezüglich der ersten Frage nach dem Gebrauch elementaranalytischer Begriffe zeigten sich zum einen bei der Interpretation von Variablen oder Termen Unsicherheiten im mathematischen Diskurs, zum anderen wurde zum Teil der Begriff „lokale Änderungsrate“ ausschließlich synonym für den entsprechenden Term oder für die Tangentensteigung verwendet, so dass Schwierigkeiten beim Übergang zur Analysis umgangen wurden.

## Diskussion

Welchen Effekt hatten nun die Reflexionen auf die Veranstaltung? Zum einen konnte während des Semesters auf Verständnisschwierigkeiten ein-

gegangen werden, die in den Reflexionen auftraten. Dabei wurden die ersten vier erdachten Dialoge kommentiert, so dass jeder Studierende Rückmeldungen erhielt. Zum anderen wurden gute Reflexionen nach Absprache für alle Studierende zur Verfügung gestellt. Die Studierenden selbst werteten die Reflexionen überwiegend positiv, aber nicht nur. Zum einen wurde der Zeitaufwand angeführt, zum anderen schrieb beispielsweise ein Studierender:

„negativ für mich war einfach, dass wenn man sich mit dem stoff nicht ganz auskannte, war es wirklich schwer eine reflexion zu schreiben die einen eigentlich das gefühl beim lesen geben hätte sollen, dass die person die es geschrieben hat, auch eine ahnung davon hat“.

Der gleiche Punkt wurde von anderen positiv gesehen. So schrieben zwei Studierende:

„Positiv war, dass einem beim Schreiben der Reflexionen erst wirklich klar wurde ob man ein Thema verstanden hatte oder nicht. Wenn nicht konnte man dies in den Reflexionen auch anmerken. (...) Ebenfalls positiv war, dass man in die Rolle des Erklärenden schlüpfen kann, und somit eine andere Sicht auf das Thema bekommt.“

„Nochmals das Durchdenken, das Erarbeiten von eigenen Beispielen, man kommt auf andere Dingen und Zusammenhänge, an die man rein reproduktiv nicht denken würde.“

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Abwechseln von Vorlesung, Übung und Reflexion einen häufigen Austausch zwischen Studierenden und Lehrenden während des Semesters ermöglichte. Die Reflexionen selbst spiegelten den Gebrauch elementaranalytischer Begriffe eines Studierenden, so dass während des Semesters die jeweils individuelle Kommunikation Teil des gemeinsamen Diskurses werden konnte. Es gab zudem einen Zusammenhang zwischen dem späteren Klausurergebnis und der Rekursionstiefe, der ein Indiz dafür sein könnte, dass es zum Lernprozess beitragen kann, Teile des eigenen erdachten Dialoges in verschiedenen Tiefen aufgreifen zu können, wobei wiederum die Fähigkeit nötig ist, den Prozess, wie man einen analytischen Begriff entwickelt, selbst als Produkt zu betrachten, über das man spricht.

## Literatur

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. München: Spektrum Akademischer Verlag.

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wille, A. M. (2008). Aspects of the concept of a variable in imaginary dialogues written by students. In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Seúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME32)*, vol. 4 (S. 417-424). Cinvestav-UMSNH, Mexico.