Eva-Maria Wißing, Essen

Kinder deuten Beziehungen zwischen Phänomenen und Strukturen in arithmetisch-symbolischen Zahlenmustern

In der Mathematik, die als „Wissenschaft von den Mustern“ (Devlin 1997, S. 3) verstanden wird, werden von Mathematikern „abstrakte „Muster“ – Zahlenmuster, Formenmuster, Bewegungsmuster, Verhaltensmuster und so weiter“ (ebd.) untersucht. Devlin charakterisiert diese Muster unter anderem als „wirkliche oder vorgestellte, sichtbare oder gedachte, statische oder dynamische, qualitative oder quantitative, auf Nutzen ausgerichtete oder bloß spielerischem Interesse entspringende. Sie können aus unserer Umgebung an uns herantreten oder aus den Tiefen des Raumes und der Zeit oder aus unserem eigenen Interesse“ (ebd.).

Muster sind ein bedeutender Bestandteil des Mathematikunterrichts (der Grundschule). So werden in den Bildungsstandards Mathematik für die Grundschule „Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept“ (Walther 2007, S. 42) angegeben und sind den Inhaltsbereichen *über*geordnet. Demzufolge gibt es im aktuellen Lehrplan Mathematik für die Grundschule NRW keinen separaten Bereich „Muster und Strukturen“. Vielmehr sind sie „integraler Bestandteil aller (*Themen-*) Bereiche“ (MSW 2008, S. 56, Hinzufügung Wißing).

Begriffsbestimmung *Muster* und *Struktur*

In den Bildungsstandards wird darauf hingewiesen, dass „sich die Begriffe *Muster* und *Struktur* nicht scharf definieren und nicht voneinander abgrenzen lassen“ (Walther 2007, S. 43, vgl. Lüken 2012, S. 22) und meist synonym verwendet werden. Weiter geben sie an, dass sie den Begriff *Muster* als Oberbegriff verwenden und vor allem dann von *Struktur* sprechen, wenn es sich um grundlegende, vorgegebene *Muster* handelt (vgl. Walther 2007, S. 43). Eine Vermischung der beiden Begrifflichkeiten lässt sich häufig vorfinden. Lüken weist in diesem Zusammenhang auf eine Schwierigkeit für die schulische Arbeit hin und nimmt eine Begriffsschärfung vor (vgl. Lüken 2012, S. 14, 18ff).

Bevor Lükens Begriffsschärfung kurz erläutert wird, soll zunächst ein allgemeines Verständnis der beiden Begrifflichkeiten skizziert werden, um dann im Anschluss mein theoretisches Konzept vorzustellen.

Der Begriff *Muster* stammt vom lateinischen Wort *monstrare* ab, was im Deutschen mit *zeigen, weisen* übersetzt werden kann. Allgemein bedeutet es eine Vorlage oder ein Vorbild, das in seiner Art vollkommen, nachahmenswert beziehungsweise beispielhaft ist. Es besteht aus (regelmäßigen,)

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

sich wiederholenden Elementen. (vgl. Brockhaus Bd. 19, 2006, S. 178) Gemeint ist somit jedes wiederholt zu beobachtende, regelhafte Phänomen.

Der Begriff *Struktur* lässt sich vom lateinischen Wort *structura* ableiten, was mit *Ordnung*, *Bau* übersetzt wird. Gemeint ist die Anordnung der Teile eines Ganzen, die einen gegliederten Aufbau, eine innere Gliederung aufweisen. Diese Teile können wechselseitig voneinander abhängen und sind ein in sich strukturiertes Ganzes (vgl. Brockhaus Bd. 26, 2006, S. 501f).

Lüken gibt nach vorangegangener Diskussion zum Bereich „Muster und Struktur in der Mathematik“ (vgl. Lüken 2012, S. 20ff) an, dass ein *Muster* eine Regelmäßigkeit beschreibt. Daher versteht sie unter einem *mathematischen Muster* „jegliche numerische oder räumliche Regelmäßigkeit“ (Lüken 2012, S. 22). Den Begriff *Struktur* schärft sie aus, indem sie angibt, dass er die Art und Weise beschreibt, in der ein Muster gegliedert ist. Das heißt, dass die Beziehungen zwischen den verschiedenen Bestandteilen eines Musters dessen Struktur darstellen (vgl. ebd., Lüken bezieht sich auf Mulligan, Mitchelmore & Prescott 2006, S. 209).

Ein *mathematisches Muster*, im Rahmen meines Forschungsvorhabens ein *Zahlenmuster*, steht für mich in einer Wechselbeziehung zwischen zwei komplementären Komponenten, die sich wechselseitig bedingen: Den phänomenologisch sichtbaren (An-) Ordnungen und den gesetzmäßig strukturellen Zusammenhängen (s. Abb. 1).

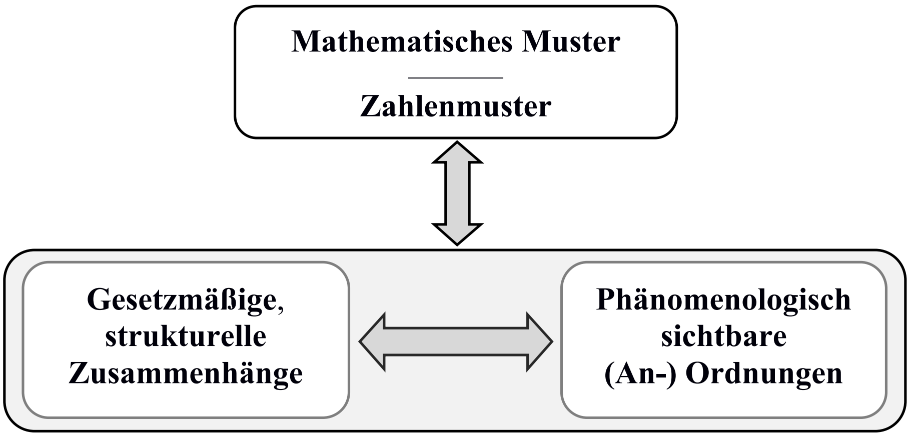

Abb. 1: Komplementäre Beziehungen des didaktischen Konzepts „Mathematisches Muster“

Unter phänomenologischen (An-) Ordnungen ist das visuell Wahrnehmbare gemeint, also das, was ‚an der Oberfläche’ zu sehen ist. Soll dieses gedeutet werden, so wird es zu einem fraglichen Zeichen (vgl. Epistemologisches Dreieck - Steinbring 2005). Um es deuten zu können, *muss* man sich den gesetzmäßigen, strukturellen Elementen bzw. Zusammenhängen, die den Phänomenen an der Oberfläche zugrunde liegen und zum Teil nicht direkt sichtbar sind, bedienen.

Nachdem vorangehend eine Begriffsschärfung der Begriffe *Muster* und *Struktur* erfolgte, sollen nun Typen der Musterdeutung vorgestellt werden, die im Rahmen des Forschungsprojektes *KidZ – **Ki**nder **d**euten **Z**ahlenmuster* rekonstruiert werden konnten. (Für weitere Informationen zum Forschungsprojekt s. Wißing 2015)

Typen der Musterdeutung

In der Interventionsstudie KidZ wurden Schülerinnen und Schüler der vierten Jahrgangstufe der Grundschule dazu aufgefordert, Zahlenmuster innerhalb substanzieller Lernaufgaben zu deuten. Insgesamt wurden mit zehn Schülerinnen und Schülern 60 klinische Interviews geführt, von denen 30 Prä- und weitere 30 Post-Interviews darstellten. Mittels dieses Datenmaterials konnte ein Spektrum an Deutungen bezüglich der arithmetisch-symbolischen Strukturierungsfähigkeit ausgemacht werden, wobei vier verschiedene Deutungstypen rekonstruiert werden konnten: *Ziffer*, *Zahl*, *Veränderung*, *Operativer Zusammenhang*.

Ziffer - Nehmen Kinder bei der Deutung eines Zahlenmusters eine *Ziffern*sicht ein, so deuten sie *sichtbare* Einzelelemente eines Zahlenmusters. Sie zerlegen das zu deutende Zahlenmuster in seine Einzelelemente und nehmen elementare Beschreibungen, Anordnungen, Gruppierungen etc. vor.

So beschreibt Anna den ersten Summanden eines Strukturierten Päckchens (s. Abb. 2), indem sie sagt, dass „am Anfang alles sieben ist und dann geht's hier so runter: Drei, zwei, eins, null." Ferner gibt sie an, dass auf „beiden Seiten" (sie meint die Hunderter und Einer) alles gleich ist und dass es in der Mitte „runter geht".

0.	734	+	222	=	____
1.	724	+	233	=	____
2.	714	+	244	=	____
3.	704	+	255	=	____
4.	____	+	____	=	____

Abb. 2: Strukturiertes Päckchen

Annas Deutungen können wir mit einer *Buchstabensicht* vergleichen. Soll man das Buchstaben-Päckchen aus Abb. 3 beschreiben, so könnte man sich den Formulierungen von Anna bedienen.

a.	ldf	+	hhh	=	____
b.	lcf	+	hii	=	____
c.	lbf	+	hjj	=	____
d.	laf	+	hkk	=	____
e.	____	+	____	=	____

Abb. 3: Buchstaben-Päckchen

Zahl - Bei einer *Zahl*sicht stehen elementare Zahlbeziehungen im Vordergrund. Um beispielsweise Zahlen geschickt zu addieren, werden solche miteinander kombiniert, die ein glattes Ergebnis hervorrufen (18+12=30). Hierbei werden *Beziehungen zwischen sichtbaren Elementen* ausgenutzt.

Veränderung - Bei der Sichtweise *Veränderung* stehen regelbasierte, konstante Veränderungen bzw. (rhythmische) Unterschiede im Vordergrund. So wird beispielsweise erkannt, dass der erste Summand (s. Abb. 2) immer um zehn kleiner wird. Die sichtbaren Zahlen werden miteinander verglichen, sodass zugrundeliegende *unsichtbare Beziehungen* genannt werden.

Operativer Zusammenhang - Wird die Sichtweise des Operativen Zusammenhangs eingenommen, so beziehen sich Schülerinnen und Schüler auf *Beziehungen von Beziehungen zwischen Unsichtbarem*. Beim angegebenen Strukturierten Päckchen (s. Abb. 2) werden z. B. die beiden Veränderungen der Summanden zueinander in Beziehung gesetzt, um die operative Auswirkung des Ergebnisses vorherzusagen: „Die Zahlen werden immer um elf größer (2. Summand) und aber die um zehn kleiner (1. Summand). Also wird das Ergebnis immer einen mehr, weil elf minus zehn sind eins."

Resümee

Jeder Typ der hier vorgestellten Muster-Typen kann für eine Aufgabenbearbeitung sinnvoll sein. Daher sollten Schülerinnen und Schüler in einem reflektierenden Umgang mit diesen Typen gefördert werden.

Literatur

Brockhaus Enzyklopädie in 30 Bänden (2006). *Band 19 MOSC-NORDD*, *Band 26 SPOT-TALA*, 21., völlig neu überarbeitete Auflage. Leipzig, Mannheim: F. A. Brockhaus GmbH, Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG.

Devlin, K. (1997). *Muster der Mathematik: Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur*. Aus dem Amerikanischen übersetzt von Diener, I. Heidelberg; Berlin: Spektrum, Akademischer Verlag.

Lüken, M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht. Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern*. Münster: Waxmann Verlag GmbH.

MSW - Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2008). *Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen*. Nr. 2012. Frechen: Ritterbach Verlag.

Mulligan J., Mitchelmore, M. Prescott, A. (2006). Integrating Concepts and Processes in Early Mathematics: the Australian Pattern and Structure Mathematics Awareness Project (PASMAP). In: Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M., Stehlíková, N. (Hg.): Proc. 30th Conf. of PME. Vol 4. Prague, S. 209-216.

Walther, G., van den Heuvel-Panhuizen, M., Granzer, D., Köller, O. (Hrsg.) (2007). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor GmbH & Co. KG.

Steinbring, Heinz (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction - An Epistemological Perspective*. Mathematics Education Library, Vol. 38. Berlin, New York: Springer.

Wißing, E.-M. (2015). Kinder deuten strukturierte arithmetisch-symbolische Zahlenmuster - Erste Einsichten aus einer qualitativen Studie. In: Calouri, F., Linneweber-Lammerskitten H. & Streit C. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM Verlag, Band 2, S. 1000-1003.