

Susanne WÖLLER & Simone REINHOLD, Leipzig

Konzeptionelles Begriffsverständnis von Drittklässlern zu den Begriffen *Würfel* und *Quader*

In der Grundschule spielt das Wissen um geometrische Objekte eine wichtige Rolle. Dieses Wissen artikuliert sich überwiegend auf einer sprachlichen Ebene, z. B. durch das Benennen von Eigenschaften dieser Objekte (*gleich lange Seiten, gleich große Flächen*). Allerdings haben Grundschulkinder häufig Schwierigkeiten ihr mathematisches Wissen und ihre Vorstellungen über Flächen und Körper sprachlich auszudrücken. So können konstruktive Bauaktivitäten als gewinnbringend erachtet werden, um das Verständnis von Kindern über geometrische Objekte zu erfassen. Vor diesem Hintergrund wurden im Sommer und Herbst 2015 insgesamt 22 Kinder im Alter von acht bzw. neun Jahren zu ihrem Wissen und ihren Vorstellungen zu den Begriffen *Würfel* und *Quader* befragt. Mit Bausteinen sollten diese Körper konstruiert und die Bauaktivitäten kommentiert werden.

Begriffsverständnis von Kindern zu geometrischen Körpern

Fischbein (1993) beschreibt ein *Konzept* allgemein als “(...) ideal representation of a class of objects, based on their common features” (S. 139). In diesem Sinne beziehen sich *geometrische Konzepte* auf Eigenschaften von geometrischen Figuren, die visuell oder haptisch bei konkreten Repräsentanten der Klasse wahrgenommen werden können. So ordnen Kinder Repräsentanten geometrischer Objekte durch das Erkennen besonderer Flächenformen, Seitenlängen oder Winkelgrößen in eine Begriffskategorie (z. B. *Viereck* oder *Würfel*) ein. Darauf aufbauend umfasst *konzeptionelles Begriffsverständnis* nicht nur spezifisches mathematisches Wissen (vgl. Vollrath, 1984, S. 9-10), das die Kinder über geometrische Formen besitzen, sondern auch subjektiv individuelle Vorstellungsbilder über geometrische Objekte (vgl. Tall & Vinner, 1981). Ebenso relevant ist die Ausprägung von Vorstellungen über das zugrundeliegende Begriffsnetz, in das Begriffe aufbauend auf ihren Eigenschaften eingeordnet werden können (Weigand, 2014, S. 103ff).

Das *Modell der Entwicklung geometrischen Begriffswissens* nach Van Hiele (1986) stellt in diesem Kontext eine weitere Grundlage dar. Hier werden fünf aufeinander aufbauende Denkebenen definiert, die jeweils unterschiedliche Ausprägungen des Wissens bei Kindern beleuchten. So befinden sich Schulanfänger vorwiegend auf der Ebene des räumlichanschauungsgebundenen Denkens (*Visualization*). Hierbei werden geometrische Figuren durch ihre äußere Erscheinungsform erkannt und beschrie-

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

ben. Die Ebene des analysierend-beschreibenden Denkens (*Analysis*) ist geprägt durch die Fähigkeiten zunehmend mathematische Eigenschaften eines geometrischen Objekts für dessen Kategorisierung in Betracht zu ziehen. Erst wenn die Kinder in der Lage sind ein Beziehungsnetz zwischen den Eigenschaften von geometrischen Figuren aufzuspannen, befinden sie sich auf der Ebene des abstrahierend-relationalen Denkens (*Abstraction*). Für die hier vorgestellte Studie mit Kindern im Grundschulalter sind zunächst nur die ersten drei Ebenen relevant (vgl. Szinger, 2008, S. 173).

Forschungsfragen, methodisches Vorgehen und Datenauswertung

Aus Untersuchungen zu ebenen Figuren (u. a. Burger & Shaughnessy, 1986; Maier & Benz, 2014; Thom & McGarvey, 2015) ist bekannt, dass Zeichnungen und Beschreibungen von Kindern Rückschlüsse auf das konzeptionelle Begriffsverständnis zulassen. Dieses Vorgehen als Möglichkeit der Artikulation geometrischen Wissens findet sich auch in Studien zu räumlichen Objekten wieder (u. a. Lewis, 1963; Mitchelmore, 1978). Aus Studien, die Baustrategien von Grundschulkindern in den Blick nehmen (u. a. Reinhold et al., 2013), ergibt sich ferner, dass individuelle Konstruktionen und Produkte von Kindern einen Zugang zu ihren individuellen Vorstellungen bieten. Zudem unterliegen Bauaktivitäten im Vergleich zu Zeichnungen deutlich geringeren Restriktionen im Hinblick auf die (fein)motorischen Fähigkeiten von Grundschulkindern.

Daher versucht das Projekt tiefere Einblicke in das konzeptionelle Begriffsverständnis von Kindern im Alter von acht bis zwölf Jahren zu den geometrischen Körpern *Würfel* und *Quader* über konstruktive Bauaktivitäten mit vorgegebenem Material (Würfel, Quader, Prismen, Fröbel's 6. Spielgabe) und begleitende sprachliche Artikulationen der Kinder zu erlangen. In einem ersten Schritt wird dabei durch die Befragung von Drittklässlern aus unterschiedlichen Zusammenhängen versucht eine breite Basis im Sinne einer Querschnittstudie zu schaffen. Im Fokus steht dabei die Frage, welcher Art (und Größe) die von den Kindern konstruierten Bauwerke sind und inwieweit sich die Bauaktivitäten und Antworten der Kinder mit dem oben vorgestellten Van-Hiele-Modell verbinden lassen.

Zunächst wurden dazu zehn deutsche und zwölf malaysische Kinder dritter Klassen (Leipzig bzw. Penang, Malaysia) in einer Eins-zu-Eins-Situation mit einem halbstrukturierten Fragebogen interviewt. Während des ca. 20-minütigen Interviews wurden den Kindern sowohl Impulse für konstruktive Bauaktivitäten (*Baue aus diesen Bausteinen einen Würfel (Quader). Kannst du auch noch einen anderen Würfel (Quader) bauen?*), als auch Anregungen zu sprachlichen Äußerungen (*Erkläre mir, was du machst. Warum ist*

das für dich ein Würfel (Quader)?) gegeben. In die Konzeption des Leitfadens wurden vorliegende Ergebnisse aus Studien zur Entwicklung geometrischen Denkens bei Kindern (u. a. Crowley, 1987) einbezogen.

Alle Interviews wurden mittels f4-Software transkribiert und nach der Methode der Grounded Theory (Corbin & Strauss, 2015) in Atlas.ti codiert. Auf der Basis konsensueller Validierung wurde ein Codierleitfaden erstellt, der das Begriffsverständnis der Kinder zum *Würfel* und zum *Quader* in Bauaktivitäten sowie die begleitende sprachliche Artikulation einfängt. Ziel ist es, diesen Codierleitfaden mit zunehmendem Datenmaterial weiter auszudifferenzieren und auf diese Weise Hypothesen zur Entwicklung des konzeptionellen Begriffsverständnisses von Kindern im Alter von acht bis zwölf Jahren zu generieren.

Einblicke in erste Ergebnisse und Schlussfolgerungen

Die Auswertung der Daten zeigt eine große Vielfalt an individuellen Vorgehensweisen der befragten deutschen und malaysischen Kinder beim Bauen und Umbauen. Dadurch kann ein großes Spektrum an individuellen Vorstellungen von Drittklässlern bzgl. der ausgewählten Körper angenommen werden. Die Kinder tendieren dazu prototypische Vorstellungsbilder von den Begriffen *Würfel* und *Quader* in ihren Bauaktivitäten umzusetzen: So werden vorwiegend Quader gebaut, deren Schichten relativ zum Gesamtobjekt ausgewogen sind (2x3x2-Quader oder 3x4x3-Quader). Lange und dünne Quader werden dahingegen selten gebaut. Beim Bauen von Würfeln orientieren sich die Kinder größtenteils an der quadratischen Grundfläche, wobei manche Kinder zum Teil die Höhe nicht berücksichtigen und beispielweise einen 3x3x1-Quader bereits als Würfel bezeichnen.

Die Kinder aus Deutschland nutzen in ihren Beschreibungen relativ unsicher mathematisches Wissen und verwenden Eigenschaften der Begriffskategorien der jeweiligen Körper. So sind z. B. Äußerungen wie „*die Flächen sehen quadratisch aus*“ oder „*nur die gegenüberliegenden Seiten sehen gleich aus*“ Indikatoren für die Zugehörigkeit zur Van-Hiele-Ebene *Visualization* mit Tendenz zur Ebene *Analysis*. Die Kinder aus Malaysia sind teilweise ebenfalls dazu in der Lage. Dennoch wird eine noch größere Spanne eröffnet, da einige Begründungen der Kinder für ihre Bauaktivitäten rein intuitiv und anschauungsgebunden zu sein scheinen („*I just know this is a cube*“).

Die Ergebnisse der Studie bereichern empirisch begründet das Van-Hiele-Modell um Aspekte geometrischen Begriffsverständnisses mithilfe konstruktiver Bauaktivitäten. Es stellt sich die Frage, wie sich das Wissen über die genannten geometrischen Körper in den folgenden Klassenstufen wei-

terentwickelt. Dieses Interesse bildet den Ausgangspunkt für eine anknüpfende Längsschnittstudie, die tiefere Einblicke in die Entwicklung des geometrischen Begriffsverständnisses von Kindern im Alter von acht bis zwölf Jahren ermöglichen wird.

Literatur

- Burger, W. F. & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(1), 31-48.
- Corbin, J. & Strauss, A. (2015). *Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory*. Thousand Oaks: Sage.
- Crowley, M. (1987). The Van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. In M. Montgomery Lindquist (Hrsg.), *Learning and Teaching Geometry, K-12* (S. 1-16). Reston, VA: NCTM.
- Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
- Franke, M. & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*. Wiesbaden: Springer.
- Lewis, H. P. (1963). Spatial Representation in Drawing as a Correlate of Development and a Basis for Picture Preference. *Journal of Genetic Psychology*, 102, 95-107.
- Maier, A. S. & Benz, C. (2014). Children's Conceptual Knowledge on Triangles Manifested in their Drawings. In P. Liljedahl et al. (Hrsg.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA36* (Vol. 4, S. 153-160). Vancouver, Canada: PME.
- Mitchelmore, M. C. (1978). Developmental Stages in Children's Representation of Regular Solid Figures. *The Journal of Genetic Psychology*, 133(2), 229-239.
- Reinhold, S., Beutler, B. & Merschmeyer-Brüwer, C. (2013). Preschoolers Count and Construct: Spatial Structuring and its Relation to Building Strategies in Enumeration-Construction Tasks. In A. Lindmeier & A. Heinze (Hrsg.), *Proceedings of the 37th Conference of the IGPME* (Vol. 4, S. 81-88). Kiel: PME.
- Szinger, I. S. (2008). The Evolvement of Geometrical Concepts in Lower Primary Mathematics. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 35, 173-188.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Thom, J. S. & McGarvey, L. M. (2015). The Act and Artifact of Drawing(s): Observing Geometric Thinking with, in, and through children's drawings. *ZDM Mathematics Education*, 47(3), 465-481.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Orlando: Academic Press.
- Vollrath, H.-J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*. Stuttgart: Klett.
- Weigand, H.-G. (2014). Begriffslernen und Begriffslehren. In H.-G. Weigand et al. (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 99-122). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x-y). Münster: WTM-Verlag