Karina HÖVELER, Dortmund

4 Mannschaften, jede spielt dreimal, aber es sind 6 Spiele!?- Strategien und Denkwege von Drittklässlern beim Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme

1. Theoretischer Hintergrund

Bereits im ersten Schuljahr sind Anzahlbestimmungen ein zentrales Unterrichtsthema. Dennoch zeigen Studien, dass Lernende verschiedener Altersklassen bei Anzahlbestimmungen im Kontext kombinatorischer Problemstellungen erhebliche Schwierigkeiten haben (vgl. u.a. Batanero et al., 1997; Lockwood, 2011). Angenommen wird, dass diese auf ein fehlendes Verständnis der zugrundliegenden fachlichen Strategien und Konzepte zurückzuführen sind (Hefendehl-Hebeker & Törner, 1984). Zur Verständnisförderung bedarf es im Sinne des genetischen Prinzips der Kenntnis über Lernendenstrategien und -konzeptualisierungen, mit dem Ziel diese als Ausgangspunkt für die Thematisierung fachlicher Lösungszugänge und Konzepte zu nutzen. Bislang liegen diesbezüglich jedoch keine ausreichenden Forschungsbefunde vor (Lockwood, 2011).

Aus fachlicher Sicht sind drei Zugänge zum Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme zentral: Die gesuchte Figurenmenge kann über die Auflistung und anschließende Abzählung aller Figuren, durch die Anwendung von Zählprinzipien oder den Einsatz kombinatorischer Operationen bestimmt werden (vgl. Schrage, 1996). Die beiden erstgenannten Zugänge sind bereits auf der Basis des Grundschulwissens zugänglich. Empirische Studien zu Lösungsstrategien (u.a. English, 1991; Hoffmann, 2003) liefern Informationen über Auflistungsstrategien, nicht jedoch über Zählstrategien, da diese Untersuchungen bislang in der Regel auf Aufzählprobleme ("Welche Ergebnisse sind möglich?") fokussierten. Frühe Studien von Piaget und Inhelder (1975) geben allerdings Hinweise darauf, dass Lernende Anzahlbestimmungsprobleme ("Wie viele Ergebnisse sind möglich?") im Grundschulalter u. a. bereits mit additiven und rekursiven Strategien lösen, oftmals aber andere als die gesuchten Lösungsanzahlen ermitteln. Welche Denkwege diesen Strategien zugrunde liegen und in welcher Beziehung diese zu den mathematischen Zählprinzipien stehen, ist nicht bekannt.

Um Lernende darin unterstützen zu können, ausgehend von eigenen Zählstrategien die kombinatorischen Zählprinzipien und deren zugrundeliegenden Konzepte zu verstehen, ist es zentral, erstens genauere Kenntnisse über Zählstrategien sowie die zugrundeliegenden Konzepte sowie zweitens über Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Zählstrategien der Lernenden und mathematischen Prinzipien zu erlangen.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*. WTM-Verlag, Münster, 2014, S. x-y

2. Forschungsinteresse und Untersuchungsdesign

Zur Klärung der genannten Aspekte wurden im Rahmen eines Dissertationsprojektes Vorgehensweisen und Denkwege von Lernenden beim Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme erhoben und deren Beziehungen zu fachlichen Konzepten untersucht (vgl. Höveler, 2014). Dazu wurde ein zyklisches Untersuchungsdesign angelegt, in dem 63 Drittklässler in klinischen Interviews jeweils einen von drei Aufgabensätzen zu einer kombinatorischen Figur lösten. Die Aufgabenauswahl basierte auf zwei Bedingungen: Die Problemstellungen sollten mit verschiedenen Zählprinzipien gelöst werden können und die Daten auch Aufschluss über den Einfluss verschiedener Aufgabenvariablen liefern, da vorangehende Studien den Einfluss verschiedener Größen (u.a. komb. Figur, Anzahl der Elemente) auf Lösungserfolge und Vorgehensweisen zeigen (vgl. Batanero et. al., 1997). Die Aufgabensätze beinhalteten daher zwei zueinander isomorphe Probleme sowie jeweils eine Grundaufgabe mit n=4 und eine Erweiterungsaufgabe mit n=5 Elementen. Die videographierten und transkribierten Interviews wurden mittels zentraler Elemente der Grounded Theory (Glaser & Strauss, 1967) analysiert: Zunächst wurden die Vorgehensweisen der Lernenden identifiziert und klassifiziert. Anschließend wurden durch den wechselseitigen Vergleich Beziehungen zwischen ihren Strategien und den zugrunde liegenden Konzepten und mathematische Zählprinzipien identifiziert.

3. Untersuchungsergebnisse

Die Ergebnisse der Datenanalyse zeigen, dass Lernende die Mächtigkeit durch *additive und multiplikative Strategien* sowie durch *Kompensationsstrategien* bestimmen. Zudem verwenden sie bei der Erweiterung der Problemstellungen *rekursive Strategien* oder bestimmen die Anzahl indirekt *durch Rückgriff auf isomorphe Strukturen*. In der Regel werden die Zählstrategien aus einer vorherigen Auflistung abgeleitet, teilweise erfolgen sie auch direkt auf der Grundlage einer gedanklichen Strukturierung. Besonders bemerkenswert ist, dass sowohl bei Variations- als auch bei Kombinationsproblemen die Anzahl teilweise multiplikativ bestimmt wird. Dabei ist bei *jeder* multiplikativen Rechnung die ermittelte Lösungsanzahl größer als die gesuchte, ein Fehler, der in der Literatur als „Error of overcounting“ bekannt ist (vgl. u.a. Batanero et al., 1997). Die zugrundeliegende multiplikative Strategie und die Denkwege der Lernenden werden nachfolgend exemplarisch anhand der Fußballaufgabe erläutert, bevor Kompensationsstrategien in den Fokus rücken (für detaillierte Analysen & Darstellungen sowie weitere Strategien vgl. Höveler, 2014).

Bei der Fußballaufgabe sollte ausgehend von vier Mannschaften und der Bedingung, dass jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere spielt, die Anzahl aller Spiele auf dem Turnier ermittelt werden. Lernende, wie beispielsweise Ruben, ermitteln zunächst die Anzahl Figuren mit einem festen Element *(„Schwarz spielt dreimal“)* und folgern (korrekt), dass es mit jedem anderen Element ebenso viele Objekte gibt (*„gelb, rot und grün spielen auch dreimal“*). Ausgehend von der Anzahl der Figuren mit einem festen Element schließen sie auf die gesamte Figurenmenge, indem sie die Anzahl aller Mengen mit der ermittelten Mächtigkeit multiplizieren: *„Also insgesamt 4 Mannschaften, jede spielt dreimal, dann sind es viermal 3 gleich 12 Spiele“*. Diese Grundidee, nachfolgend als *„Schluss von der Anzahl der Einzelelemente auf die Figurenmenge“* bezeichnet, wurde nicht nur bei multiplikativen, sondern auch bei additiven Strategien und Auflistungsstrategien identifiziert. Es ist daher anzunehmen, dass es sich hierbei um einen zentrales Lernendenkonzept handelt. Eine genauere Analyse legt nahe, dass die Beziehung zwischen der Anzahl der Figuren mit einem festen Element und der Mächtigkeit der gesamten Figurenmenge für Lernende grundsätzlich eine besondere Herausforderung darstellt. So führt diese Beziehung auch bei Lernenden, die die richtige Lösungsanzahl ermitteln zu einem kognitiven Konflikt, der beispielsweise von Paul wie folgt expliziert wird: *„4 Mannschaften, jede spielt dreimal, <u>aber</u> es sind 6 Spiele!?“* Die Herausforderung besteht augenscheinlich darin, dass die Schnittmenge der gebildeten Teilmengen nicht leer ist. Bedingung für additive und multiplikative Anzahlbestimmungen ist jedoch die Disjunktheit der Teilmengen.

Lernende, die den Fehler bemerkten, entwickelten *zwei unterschiedliche Typen von Kompensationsstrategien*: Die Strategie *„Doppelte wegnehmen“,* welche durch das Entfernen doppelter Objekte gekennzeichnet ist und die Strategie *„Gruppen bilden“,* bei der stattdessen Objekte, die unter den gegebenen Bedingungen als gleich betrachtet werden können, zunächst zu einer Gruppe zusammengelegt werden um zur Anzahlbestimmung anschließend die Anzahl aller Gruppen zu zählen. Der wechselseitige Vergleich zeigt, dass die Grundidee des Wegnehmens doppelter Elemente mit der Idee des Ein- und Ausschaltprinzips übereinstimmt. Ebenso stellt die Idee des Zuviel-Zählens und anschließenden Bildens von Gruppen mit gleichen Objekten die Grundidee des Prinzips der Schäfer dar (zur Darstellung Zählprinzipien vgl. Schrage, 1996; für detaillierte Gegenüberstellungen vgl. Höveler, 2014).

4. Diskussion und Ausblick

Aus den dargestellten Ergebnissen lassen sich Konsequenzen und Leitideen für den Unterricht ableiten, zugleich werden weitere zentrale Forschungsinteressen offensichtlich: So zeigen die Ergebnisse, dass Drittklässler bereits eigenständig Zählstrategien entwickeln. Unter propädeutischen Gesichtspunkten erscheint daher bereits in der Grundschule eine verstärkte Betrachtung kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme mit einem Fokus auf geschickte Anzahlbestimmungsstrategien von besonderer Bedeutung. Mit dem „Schluss von der Anzahl der Einzelelemente auf die Figurenmenge“ liefern die Ergebnisse eine mögliche Ursache für Fehler des Typs „Error of overcounting“. Es stellt sich die Frage, ob durch gezielte Auseinandersetzungen mit der Beziehung zwischen der Anzahl der Figuren mit einem festen Element und der Mächtigkeit der Figurenmenge sowie der Notwendigkeit der Disjunktheit von Teilmengen das Auftreten des genannten Fehlertyps verringert werden kann und diese zugleich dazu beitragen ein vertieftes konzeptuelles Verständnis zu entwickeln. Zudem wird ersichtlich, dass Lernende in der Lage sind Kompensationsstrategien zu entwickeln, die in den Kernideen mit zwei zentralen kombinatorischen Zählprinzipien übereinstimmen. Entsprechend sollten Strategien, die auf der Idee des „Schlusses von der Anzahl der Einzelelemente auf die Figurenmenge“ basieren im Unterricht nicht als fehlerhaft verworfen, sondern vielmehr als Ausgangspunkte für die Entwicklung von Kompensationsstrategien und die propädeutische Thematisierung von Zählprinzipien verwendet werden.

Literatur

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics,* 32, 181-199.

English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(5), 451-474.

Glaser, B. & Strauss, A. (1967). *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research*. New York: Aldine De Gruyter.

Hefendehl-Hebeker, L. & Törner, G. (1984). Über Schwierigkeiten bei der Behandlung der Kombinatorik. *Didaktik der Mathematik, 12 (4), 245-262*.

Höveler, K. (2014). *Das Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme: Eine Untersuchung zu den Strukturierungs- und Zählstrategien von Drittklässlern.* Dortmund: TU Dortmund. Verfügbar unter: http://hdl.handle.net/2003/33604.

Hoffmann, A. (2003). Elementare Bausteine der kombinatorischen Problemlösefähigkeit. Hildesheim: Franzbecker.

Lockwood, E. (2011). Student connections among counting problems: An exploration using actor-oriented transfer. *Educational Studies in Mathematics*, *78 (3),* 307-322.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of change in children*. London: Routledge and Kegan Paul Ltd.

Schrage, G. (1996). Analyzing Subject Matter: Fundamental Ideas of Combinatorics. In T. Cooney, S. Brown, J. Dossey, G. Schrage & E. Ch. Wittmann (Hrsg.), *Mathematics, Pedagogy and Secondary Teacher Education* (167-220). Portsmouth: Heinemann.