Dmitri NEDRENCO, Würzburg

Axiomatisieren lernen mit Papierfalten

Dieser Beitrag handelt von einer theoretischen Begründung und Gestaltung sowie praktischen Durchführung und Auswertung eines universitären Kurses zu mathematischem Papierfalten und Axiomatik der euklidischen Ebene für gymnasiales Lehramt.

Es gibt einen Konsens darüber, dass Studierende bis zum Ende des Studiums einer Axiomatisierung einer mathematischen Theorie begegnet sein sollten (Freudenthal 1973). Ferner glauben wir, dass Studierende zu irgendeinem Zeitpunkt ihres Studiums Grundlagen der Axiomatik der euklidischen Ebene gesehen haben müssen, da euklidische Geometrie ein wesentlicher Teil des Lehrplans ist. Sie sollten eine solide Grundlage in diesem Thema haben und diese Überlegung wird auch von den »Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik« (DMV u.a. 2008) unterstützt. Nach Freudenthal gibt es in der Lehrerbildung keinen Platz für »präfabrizierte Mathematik«, somit ist eine Axiomatisierung einer Axiomatik vorzuziehen. Bedauerlicherweise ist eine Axiomatisierung der euklidischen Ebene schwer, wobei es auch gute, aber langwierige Wege gibt (Martin 1998, Schnabel 1981). Mehr noch, zu dem Problem, euklidische Geometrie deduktiv zu unterrichten, gesellt sich das Problem, dass Studierende schwer davon zu überzeugen sind, wozu so etwas überhaupt nötig ist (Yanotta 2013). Überhaupt kann man sagen, dass Studierende erst einmal eine gewisse mathematische Abstraktionsreife erreicht haben müssen, um über diese Fragen erfolgreich nachzudenken. Besitzen Studierende diese Reife nicht – erreichen sie die höchsten Niveaus 3 und 4 der van-Hiele-Messskala (Burger&Shaughnessy 1986, Hoffer 1983) nicht –, was häufig der Fall ist (Mayberry 1983), dann werden sie Axiome und Axiomatisierung als »meaningless and incomprehensible« wahrnehmen (de Villiers 1986). Wir suchen also einen durchführbaren Weg, um Studierenden einen Abstaktionsaufstieg zu ermöglichen.

Aus eigenen Erfahrungen und aktuellen Studien (vgl. Literatur in Arslan 2012) glauben wir, in mathematischem Papierfalten einen solchen Weg gefunden zu haben.

Mathematisches Papierfalten

Papierfalten wir von vielen Forschungsgruppen als eine – für Lehrer wie für Schüler – sehr motivierende Beschäftigung mit einem hohen Bildungspotenzial und einer reichhaltigen Mathematik angesehen. Es gibt eine Vielzahl an Studien über alle Schulformen hinweg (von Grund- und Mittelschulen über Gymnasien bis zu Universitäten), die positive Effekte des Papierfaltens herausstellen. In diesen Studien werden Effekte auf räum-

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* – nster: WTM-Verlag

liches Vorstellungsvermögen, logische Argumentation, geometrische Kompetenzen uvm. untersucht (Arıcı&Aslan-Tutak 2013, Boakes 2011, Golan 2011). Die Erforschung didaktischer Aspekte des Papierfaltens ist vorwiegend auf Grund- und Mittelschulen konzentriert und es besteht Bedarf nach Studien aus dem universitären Umfeld (Arıcı&Aslan-Tutak, S.2).

Mathematisches Papierfalten ist inzwischen eine reichhaltige Wissenschaft, die unter anderem eine natürliche Fortsetzung der Theorie der euklidischen Konstruktionen darstellt. Wenn wir uns etwa darauf beschränken, dass in einem Faltschritt genau ein Falz entstehen darf (diese Art des Faltens nennen wir 1-fach Origami), dann kann man zeigen, dass man hiermit alle mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte konstruieren kann. Mehr noch, solche mit Zirkel und Lineal unlösbare Aufgaben wir das Delische Problem oder Winkeldrittelung sind mit 1-fach Origami möglich. Sogar Lösungen allgemeiner kubischer Gleichungen sind damit konstruierbar (Hull 2013, Alperin&Lang 2009).

Wie bei allen komplizierten Prozessen kann man Axiomatisieren erst an leichteren Theorien lernen. Wir glauben, dass 1-fach Origami ein solcher geeigneter Übungsplatz wäre, denn es lässt sich leicht axiomatisieren (Alperin&Lang 2009).

Ziele und Forschungsfragen

Meine Lehrziele sind zweierlei. Erstens will ich einen universitären Kurs für zukünftige gymnasiale Mathematiklehrerinnen und -lehrer gestalten, in dem theoretische, praktische und didaktische Aspekte des Papierfaltens mit starker Anbindung am Schulunterricht behandelt werden. Konkret kann man dieses Ziel so fassen: Studierende können charakteristische Konstruktionen des Papierfaltens wie Winkeldreiteilung, Lösen von kubischen Gleichungen, Konstruktionen von Vielecken sowie Konstuktionen von wichtigen Verhältnissen (etwa 1/3, 1/5, etc.) durchführen und erklären. Sie verstehen den Unterschied zwischen Konstruktionen mit Zirkel&Lineal und 1-fach Origami. Außerdem wissen sie, welche didaktische Schwierigkeiten im Unterricht entstehen können und kennen mögliche Lösungen.

Zweitens wissen Studierende, was Axiome und Axiomensysteme im modernen Sinne sind, welche Eigenschaften ein Axiomensystem haben sollte und warum. Ferner kennen sie didaktische Schwierigkeiten der Axiomatik; sie kennen Unterschiede zwischen Axiomensystemen der euklidischen Geometrie nach Euklid bzw. Hilbert und Nachfolgern. Kurzum, Studierende sollen ein ausreichendes Verständnis der modernen Diskussion über Axiomensysteme besitzen.

Meine Forschung konzentriert sich also auf der einen Seite auf das Lehren des mathematischen Papierfaltens; darauf, wie ein sinnvoller Kurs zu mathematischem Papierfalten gestaltet werden könnte. Auf der anderen Seite möchte ich Prozesse des Axiomatisierens aus studentischer Sicht besser verstehen und untersuchen, ob und welchen Unterschied es für Studierende macht, mit Axiomen des Papierfaltens und Axiomen der euklidischen Ebene zu arbeiten. Ferner will ich verstehen, welchen Problemen und Schwierigkeiten Studierende im Umgang mit Axiomen und Axiomensystemen begegnen (Yannotta 2013); wann und warum sie einen Bedarf nach Axiomen verspüren. Zusammengefasst ist die Frage: Wie kann Axiomatisierung des 1-fach Origami zum besseren Verständnis der Axiomatik der euklidischen Ebene beitragen? Eine weitere wesentliche Forschungsfrage ist: Wie kann man eine Veränderung im Denken der Studierenden messen?

Design der Forschung

Es ist davon auszugehen, dass ein durchschnittlicher Studierender nichts über mathematisches Papierfalten weiß. Deswegen können wir nicht direkt mit lokalem Ordnen der Theorie nach Freudenthal anfangen, sondern müssen erst einige naheliegende Aussagen, wie etwa »es ist möglich, eindeutig einen Punkt auf einen anderen zu falten« entdecken, daraus Theoreme ableiten, diese wiederum sortieren und weitere Aussagen entdecken. Das machen wir so lange, bis alle Axiome des 1-fach Origami gefunden wurden (das ist in der Tat möglich), ordnen also die Theorie letztlich global. Danach geht es zur euklidischen Ebene, verschiedenen Axiomensystem ebendieser und damit verbundenen logischen und didaktischen Problemen.

Am Ende des Kurses werden alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer in Doppelinterviews befragt und die Transkripte mit einer angepassten Grounded Theory Maschinerie (vgl. Kelle&Kluge 2010) analysiert. Die Ergebnisse der Auswertung des Kurses werden dazu genutzt, den Kurs zu verbessern und Interviewfragen anzupassen. Danach wird der ganze Zyklus (mit anderen Studierenden) wiederholt. Insgesamt soll diese Prozedur drei Mal durchlaufen werden. Nach dem dritten Mal hoffe ich, so viele Ergebnisse und Erfahrungen gesammelt zu haben, dass fundierte Aussagen zu obigen Problemstellungen gemacht werden können.

Aktuelle Lage

Der erste Kurs fand im Sommersemester 2015 mit zwölf Teilnehmerinnen und Teilnehmern, durchschnittliche Semesterzahl 8,25, statt. Davon wurden insgesamt zehn am Ende des Kurses interviewt. Es gab 17 Fragen, wie etwa »Kannst du mit 1-fach-Origami eine Strecke in fünf gleiche Teile teilen?«, »Kannst du Axiome des 1-fach-Origami benennen?«, »Was denkst du, wie würdest du jemandem erklären, was ein Axiom ist?«.

Der zweite Kurs fand im Wintersemester 2015-16 mit vierzehn Teilnehmerinnen und Teilnehmern (durchschnittliche Semesterzahl 6,25) statt, alle wurden am Ende des Kurses interviewt. Der dritte Kurs wird im Wintersemester 2016-17 stattfinden.

Literatur

Alperin, R. C., & Lang, R. J. (2006). One-, two, and multi-fold origami axioms. *Origami 4*. A K Peters.

Arıcı, S., & Aslan-Tutak, F. (2013). The effect of Origami-based instruction on spatial visualization, geometry achievement, and geometric reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(1), 179-200.

Arslan, O. (2012). *Investigating beliefs and perceived self-efficacy beliefs of prospective elementary mathematics teachers towards using origami in mathematics education* (Doctoral dissertation, Middle East Technical University).

Boakes, N. (2011). Origami and Spatial Thinking of College-Age Students. In *Origami 5*. CRC Press.

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for research in mathematics education*, 31-48.

De Villiers, M. D. (1986). The role of axiomatization in mathematics and mathematics teaching. *University of Stellenbosch.*

DMV, GDM, MNU (2008). Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik. Empfehlungen von DMV, GDM und MNU, Juni 2008. *Mitteilungen der DMV*, *16*, 149-159.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe.* Klett.

Golan, M. (2011, June). Origametria and the van Hiele Theory of Teaching Geometry. In *Origami 5*. CRC Press.

Hoffer, A. (1983). Van Hiele-based research. In: *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 205-227.

Hull, T. (2013). *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics*. CRC Press.

Kelle, U., & Kluge, S. (2010). Vom Einzelfall zum Typus. Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung (2., überarbeitete Aufl.). Wiesbaden.

Martin, G. E. (1975). *The foundations of geometry and the non-Euclidean plane*. Springer.

Mayberry, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for research in Mathematics Education*, 58-69.

Schnabel, R. (1981). *Euklidische Geometrie* (Habilitationsschrift). Kiel.

Yannotta, M. (2013). Students' Axiomatizing in a Classroom Setting. In *Proceedings of the 16th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*.