Jörg KORTEMEYER, Paderborn

Mathematikverwendung in ingenieurwissenschaftlichen Grundlagenfächern am Beispiel der „Grundlagen der Elektrotechnik“

Das Ziel meiner Dissertation im Rahmen des BMBF-geförderten Projekts KoM@ING (FKZ 01PK11021B) ist die Modellierung der Kompetenzen, die Studierende an der Schnittstelle zwischen Mathematik und Elektrotechnik in Grundlagenfächern zur Elektrotechnik benötigen. In ihren ersten Fachsemestern belegen Elektrotechnik-Studierende parallel Veranstaltungen zu den Grundlagen der Elektrotechnik (GET) wie auch zu der Mathematik für Ingenieure (MfI). Typischerweise wird in GET die Theorie in den Vorlesungen präsentiert, während die Übungen Wege zur Lösung der Übungsaufgaben durch Vereinfachung der Vorlesungsinhalte aufzeigen. Die MfI konzentriert sich vor allem auf Rechenmethoden und ihre Inhaltsbereiche sind die Analysis in einer oder mehreren Veränderlichen, die Lineare Algebra sowie Komplexe Zahlen.

Daraus ergeben sich mehrere Herausforderungen für die Studierenden: Es gibt Asynchronizitäten zwischen den beiden Veranstaltungen, insbesondere werden mathematische Inhalte in GET teilweise früher benötigt als sie in der MfI vorkommen, da diese zur Sicherstellung des Verständnisses einer deduktiven Struktur folgt. Des Weiteren gibt es unterschiedliche mathematische Praktiken in GET und MfI z. B. im Umgang mit Differentialen und die Mathematik-Verwendung in GET ist nicht Teil der MfI-Veranstaltungen. Daher ergeben sich folgende Forschungsfragen: Welche (idealisierten) Lösungen können wir von Studierenden nach ihrem ersten Jahr in Elektrotechnik erwarten? Wie lösen die Studierenden tatsächlich die Aufgaben und welche Schwierigkeiten treten auf? Welche Lösungsstrategien gibt es?

Methodik

Die Basis der Analysen bilden vier Aufgaben aus einer GET-Klausur nach dem ersten Jahr. Sie decken folgende Gebiete ab: Magnetischer Kreis (vgl. Biehler et al., 2015), Schwingkreise, Spannungsanalysen sowie Komplexer Wechselstrom. Es wurden mehrere Studien durchgeführt: (1) Experteninterviews zur Identifikation der expliziten und impliziten Kompetenzerwartungen der GET-Lehrenden, (2) Durchführung und Analyse von Videostudien von Problemlöseprozessen von Studierendenpaaren, um Unterschiede zu den Ideallösungen zu finden und Schwierigkeiten identifizieren zu können, (3) Analyse der schriftlichen Lösungen aus der Klausur zur Bestätigung, Verfeinerung und Erweiterung der Ergebnisse aus (1) und (2).

Unsere Analysen in Stufe 2 und 3 basieren auf der sogenannten Studi-Expert-Lösung (SEL). Die Grundlage für die SELen bilden Experteninterviews sowie drei theoretische Ansätze. Die Experteninterviews wurden mit der sogenannten PARI-Methodik (Hall et al., 1995) durchgeführt und setzen sich aus drei Phasen zusammen: Zunächst löst der Experte die Aufgaben mit lautem Denken ohne Unterbrechungen. Anschließend geht der Interviewer die Bearbeitung mit dem Experten durch, um Begründungen für jeden Schritt zu erhalten. Die dritte Phase enthält eine didaktische Rekonstruktion zu Alternativlösungen, typischen Fehlern und Validierungsmöglichkeiten sowie Gründe für das Stellen der Aufgaben und mögliche Aufgabenvariationen.

Es werden folgende theoretische Werkzeuge verwendet. Der Modellierungskreislauf (Blum/Leiß, 2005) unterteilt den Lösungsprozess von Anwendungsaufgaben in Mathematik und den „Rest der Welt" und gliedert ihn in sieben Schritte: Verstehen, Vereinfachen, Mathematisieren, Mathematisch arbeiten, Interpretieren, Validieren und Erklären. Beim Problemlösen (Polya, 1949) wird der Lösungsprozess einer Aufgabe in vier Phasen unterteilt: das Verstehen der Aufgabe, das Entwickeln eines Plans, das Durchführen des Plans sowie die Rückschau. Redish/Bing, 2008, liefert vier Rahmungen für Mathematikverwendung in der Physik: Berechnung, Physikalische Mechanismen, Berufen auf Autoritäten und die mathematische Konsistenz.

Als Grundstruktur für die SEL verwenden wir eine Neuinterpretation der Schritte des Modellierungskreislaufs, welche drei Phasen hat: (1) „Mathematisierung", die mathematische Beschreibung der in der Aufgabe gegebenen Situation, (2) „Mathematisch-elektrotechnischen Arbeiten", das Lösen der Elektrotechnik-Aufgabe unter Verwendung der Mathematik der Größen und schließlich (3) „Validierung", die Überprüfung der Ergebnisse.

Eine Beispielaufgabe zu Schwingkreisen

Das folgende Netzwerk besteht aus einem Ohm'schen Widerstand R, einer Spule L, einem Kondensator C und einer idealen Spannungsquelle U_0:

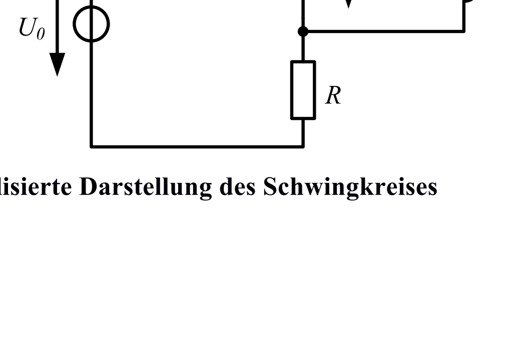

Abbildung 1: Konventionalisierte Darstellung des Schwingkreises

Die Schalter S_1 und S_2 sind geöffnet für $t \leq 0s$ und die Spule und der Kondensator sind vollkommen entladen. Zur Zeit $t = 0$ wird der Schalter S_1 geschlossen. Der Schalter S_2 bleibt geöffnet. Bestimmen Sie eine Gleichung, die die Werte der Spannung u_C am Kondensator in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt.

Rekonzeptualisierung der Modellierungsphasen

Bei der Mathematisierung verwenden die Studierenden konventionalisierte Skizzen aus der Elektrotechnik. Dabei bleiben die Idealisierungen häufig implizit und sind den Studierenden häufig nicht bekannt. In unseren Studien zeigte sich, dass die Studierenden teilweise versuchten, die physikalischen Mechanismen zu verstehen und von der Realsituation überfordert waren. Beim „Lesen" der Skizze müssen die Studierenden mehrere Typen von Gleichungen verwenden: Erstens gibt es die Bauteilgleichungen für die beiden Bauteile im geschlossenen Teil des Schwingkreises, also den Ohm'schen Widerstand ($u_R(t)=Ri_R(t)$) und den Kondensator ($i_C(t)=Cu'(t)$), welche in der Vorlesung über Ladungen begründet wurde. Zweitens muss der Aufbau des Schwingkreises beachtet werden, in dem die Kirchhoff-Gesetze, die sogenannten Knoten- und Maschengleichungen, angewendet werden. Hier ergibt sich $U_0=u_R(t)+u_C(t)$ für den geschlossenen Teil, der sogenannten Masche, des Schwingkreises. Der Prozess des „Sammelns" der Formeln ist eng mit dem mathematisch-elektrotechnischen Arbeiten verbunden, denn die Aufgabe ist nicht lösbar, falls eine der benötigten Formeln fehlt.

Beim math.-elektrotechnischen Arbeiten ist das Ziel, eine Gleichung zu finden, bei der ausschließlich der funktionale Ausdruck $u_C(t)$ unbekannt ist. Die benötigte Kombination der Gleichungen bezeichnen wir als Gleichungsmanagement. Gegeben sind die drei Gleichungen von oben ($u_R(t)=Ri_R(t)$, $i_C(t)=Cu'(t)$, $U_0=u_R(t)+u_C(t)$). Zusätzlich wird noch die Gleichung $i_C(t)=i_R(t)$ benötigt, da der Strom überall im geschlossenen Bereich des Schwingkreises identisch ist. Beim Gleichungsmanagement ergibt sich aufgrund der ersten Ableitung in der Bauteilgleichung für den Kondensator eine Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, da $u_C'(t)$ nicht eliminiert werden kann. Als zu lösende Differentialgleichung ergibt sich $RCu_C(t)+u_C(t)=U_0$. Die Lösungsverfahren (aber nicht das Aufstellen) sind Teil der Mathematik-Veranstaltungen und die Aufgabe kann über Trennung der Veränderlichen und Variation der Konstanten oder über einen Superpositionsansatz aus homogener und partikulärer Lösung gelöst werden.

Die Lösung der Differentialgleichung, $u_C(t)=U_0(1-e^{-t/(RC)})$, kann in verschiedener Weise validiert werden, welche den Rahmungen von Redish/Bing (2008) zugeordnet werden können. Über die Rahmung „Berechnung" kann argumentiert werden, da das Einsetzen von $u_C(t)$ in die zu lösende DGL

$RCu_C(t)+u_C(t)=U_0$ die Richtigkeit bestätigt. Alternativ sind den Studierenden die zugrundeliegenden physikalischen Mechanismen aus Experimenten im Rahmen von Grundlagenlaboren bekannt. In einem solchen Netzwerk nähert sich der Wert von $u_C(t)$ dem Wert der idealen Spannungsquelle U_0 an und kann mittels einer Exponentialfunktion beschrieben werden. Bei der Rahmung „mathematische Konsistenz“ kann Wissen aus der MfI-Veranstaltung verwendet werden, nämlich, dass eine reelle Exponentialfunktion nicht die Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten sein kann, wobei somit auch ein Berufen auf Autoritäten stattfindet. In unseren Studien validierten die Studierenden sämtliche ihrer Lösungen. Eine Hinterfragung der Modellannahmen fand jedoch nicht statt.

Fazit

Die Studi-Expert-Lösung ist ein neuentwickeltes Werkzeug zur Beschreibung von Problemlöseprozessen in Ingenieur-Grundlagenfächern. Sie konzeptualisiert den Lösungsprozess und unterteilt ihn in drei Phasen: Mathematisierung, mathematisch-elektrotechnisches Arbeiten sowie Validierung. Diese Phasen haben spezielle Charakteristika: Bei der Mathematisierung werden konventionalisierte Skizzen verwendet anstatt dass ein Realmodell konstruiert wird. Beim mathematisch-elektrotechnischen Arbeiten werden Ressourcen wie Gleichungsmanagement verwendet, die das Eintreten in die Welt der Mathematik erlauben, wobei physikalische Größen, d. h. Zahlen und Einheiten, verwendet werden. Zur Validierung können neben innermathematischen Strategien häufig Erfahrungen aus Grundlagenlaboren bzgl. physikalischer Mechanismen verwendet werden.

Literatur

Biehler, R., Kortemeyer, J. & Schaper, N. *Conceptualizing and studying students' processes of solving typical problems in introductory engineering courses requiring mathematical competences*. In: Proceedings of CERME 9 (in press)

Bing, T. J. (2008). *An epistemic framing analysis of upper level physics students' use of mathematics*. Ph.D. thesis University of Maryland. Abgerufen bei: http://drum.lib.umd.edu/bitstream/1903/8528/1/umi-umd-5594.pdf

Blum, W., & Leiß, D. (2007). *How do students and teachers deal with modelling problems?* In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Eds.), Mathematical modelling: Education, engineering, and economics (pp. 222-231). Chichester: Horwood.

Hall, E. P., Gott, S. P., & Pokorny, R. A. (1995). *A procedural guide to cognitive task analysis: The PARI Methodology* (No. AL/HR-TR-1995-0108). Armstrong Lab Brooks AFB TX Human Resources Directorate, Abgerufen bei: http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a303654.pdf

Polya, G. (1949). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.