Heinz SCHUMANN, Weingarten

Das räumliche Viereck – eine Sachanalyse

Die schulgeometrische *Formenlehre räumlicher Figuren* ist geprägt durch einen bescheidenen Vorrat an Figuren als dienende Magd für Berechnungen. Vermutlich deshalb und aus Gründen der Darstellbarkeit und der geringen physischen Repräsentanz ist das räumliche Viereck als eine Verallgemeinerung des ebenen Vierecks nicht Unterrichtsgegenstand des bisherigen Geometrie-Curriculums allgemeinbildender Schulen geworden. Eine Sachanalyse dieses elementargeometrischen Themas benutzt Dynamische Raumgeometrie-Systeme (DRGS), z. B. das prototypische Cabri 3D (Bainville & Laborde 2004-2015), zur Visualisierung, Exploration und Erkenntnissicherung in Gestalt von Beweisfiguren. Die heute vielfach vernachlässigte *Sachanalyse* bildet die intersubjektive Grundlage für didaktisch-methodische Überlegungen. Sie stellt die Beziehung zur Hintergrundtheorie *Elementarmathematik* her, deren Beherrschung und Pflege eine mathematikdidaktische Aufgabe ist. Das Thema liefert ein Musterbeispiel für die Anwendung von DRGS, die Förderung der räumlichen Vorstellung, die inhaltliche Bereicherung und die – vor allem heuristische – Methodenverstärkung im Raumgeometrie-Unterricht.

1. Sachanalyse

Eine idealtypische Beschreibung der Sachanalyse findet sich bei Roth (1963, S. 120): „Es ist völlig verkehrt, bei diesen ersten Bemühungen schon an das Kind oder den Jugendlichen zu denken. Es geht zunächst nur um die Sache. [...] Es geht nicht schon um das mögliche Verhältnis des Kindes zu dieser Wahrheit, sondern um das Verhältnis des Lehrers zu dieser Wahrheit. Nichts ist verkehrter als die Annahme, die Unreife des Kindes erlaube eine oberflächliche Beziehungsaufnahme zum Kulturgut. Das Verhältnis des Lehrers zu seinem Lehrgegenstand muß immer seinem eigenen geistigen Niveau entsprechen, nicht dem des Kindes. Und zwar immer seiner höchstmöglichen geistigen Fassungskraft. Jedes halbe, schiefe oder seichte Wissen verfehlt gerade das, worauf es bei der stofflichen Besinnung ankommt: die Erfassung des wahren Wesens, des sachlichen Gehalts, des existentiell Wichtigen. Es ist völlig verkehrt, bei diesen ersten Bemühungen schon an das Kind oder den Jugendlichen zu denken. Es geht zunächst nur um die Sache. [...] Es geht nicht schon um das mögliche Verhältnis des Kindes zu dieser Wahrheit, sondern um das Verhältnis des Lehrers zu dieser Wahrheit. Nichts ist verkehrter als die Annahme, die Unreife des Kindes erlaube eine oberflächliche Beziehungsaufnahme zum Kulturgut. Das

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Verhältnis des Lehrers zu seinem Lehrgegenstand muß immer seinem eigenen geistigen Niveau entsprechen, nicht dem des Kindes. Und zwar immer seiner höchst möglichen geistigen Fassungskraft. Jedes halbe, schiefe oder seichte Wissen verfehlt gerade das, worauf es bei der stofflichen Besinnung ankommt: die Erfassung des wahren Wesens, des sachlichen Gehalts, des existentiell Wichtigen.“ Neben dieser Beschreibung aus der Lernpsychologie liest man beispielsweise in der schulpädagogischen Literatur (Gonschorek & Schneider 2005, S. 283): „Die Sachanalyse ist die Grundlage für alle weiteren didaktischen und methodischen Entscheidungen. In der ausformulierten Sachanalyse zeigt der Planende, dass er sich in den Unterrichtsgegenstand vertieft hat, sich mit der Sache vertraut gemacht hat, die wichtigsten Momente und Strukturen und deren Beziehungen untereinander verstanden hat. Es ist ein abgerundeter, rein (fach-)wissenschaftlicher, sachlicher Text [...]“. Im Gegensatz dazu werden als Sachanalyse in dem vorstehenden Sinne gedachte Manuskripte von Herausgebern einer mathematikdidaktischen Zeitschrift folgendermaßen bewertet: „Wir haben unsere Zeitschrift auf didaktisch orientierte Beiträge ausgerichtet und möchten auf elementarmathematische Beiträge verzichten“ (Andreas Eichler für die Herausgeber von *mathematica didactica*, 25.5.2014). Offensichtlich ist die enge Beziehung zwischen einer Sachanalyse und der Elementarmathematik aus dem Fokus geraten. – Leider geht der Bedeutungsverlust der Sachanalyse sogar soweit, dass diese in einer die Grundlagen der Mathematikdidaktik betreffenden Buchveröffentlichung überhaupt nicht mehr vorkommt (Reiss & Hammer 2012). Die weitgehende Schwächung der elementarmathematischen Fundierung eines Unterrichtsthemas ist u. a. auf Klafkis subjektiv interpretierbare allgemeine Rechtfertigungskriterien soziologischer Art im Rahmen seiner kritisch-konstruktiven Didaktik zurückzuführen.

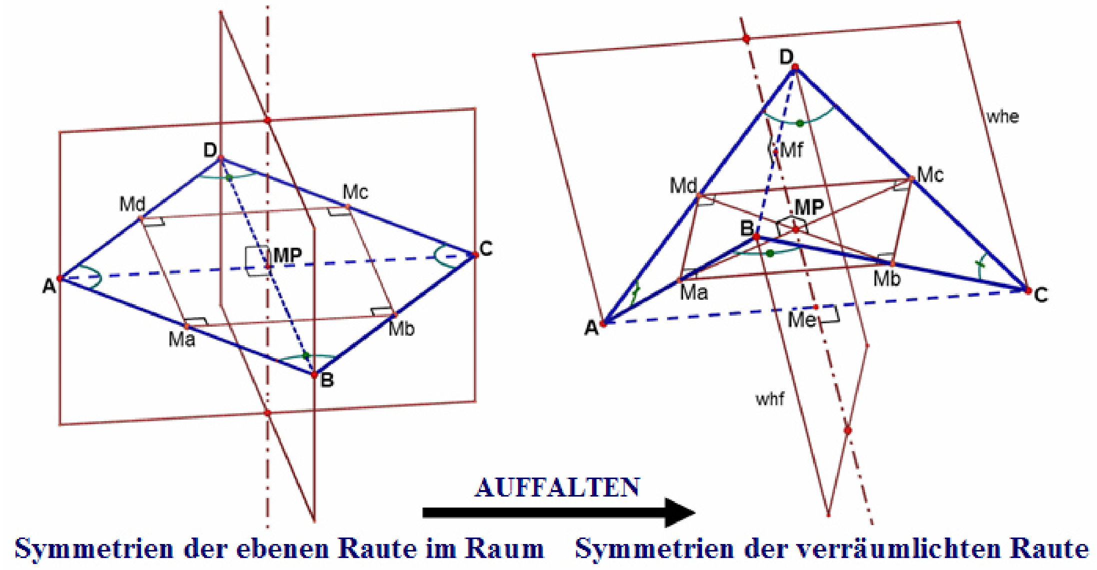
2. Das räumliche Viereck (Abriss)

Ein geschlossener Streckenzug aus vier Strecken, dessen Eckpunkte nicht derselben Ebene angehören ist ein räumliches Viereck. Man kann sich ein solches Viereck u. a. durch „Auffalten“ eines ebenen Vierecks um einer seiner Diagonalen als Faltachse vorstellen.

Einige Aussagen über räumliche Vierecke, die zusammen mit ihren Beweisen gleichermaßen für ebene Vierecke gelten: (1) Das Seitenmittenviereck eines räumlichen Vierecks ist ein Parallelogramm (*Varignon*). Deshalb halbieren die Verbindungsstrecken gegenüberliegender Seitenmitten einander im Mittelpunkt des Parallelogramms. (2) Der Mittelpunkt des Seitenmittenparallelogramms eines räumlichen Vierecks halbiert die Verbindungsstrecke seiner Diagonalenmittelpunkte. (3) Für ein räumliches Viereck gilt: Die Summe aus den Quadraten der Längen seiner Diagonalen ist gleich der doppelten Summe aus den Quadraten der Längen seiner Mittellinien. (4) Für ein räumliches Viereck gilt: Die Summe aus den Quadraten der Längen seiner Seiten ist gleich der Summe aus den Quadraten der Längen seiner Diagonalen vermindert um das Vierfache des Quadrats der Distanz seiner Diagonalenmitten. (5) Vier Punkte P_a, P_b, P_c und P_d auf den Seiten bzw. Seitengeraden eines räumlichen Vierecks ABCD mit P_a auf AB, P_b auf BC, P_c auf CD und P_d auf DA liegen in einer Ebene genau dann, wenn gilt: $\frac{|AP_a||BP_b||CP_c||DP_d|}{|P_aB||P_bC||P_cD||P_dA|} = 1$ (*Menelaos*). Mittels Zurückführung auf die entsprechende Ungleichung für ebene Vierecke (*Ptolemäos*) erhält man: (6) Für ein räumliches Vierecks gilt: Die Summe der Produkte aus je zwei Gegenseiten ist stets kleiner als das Produkt seiner Diagonalen.

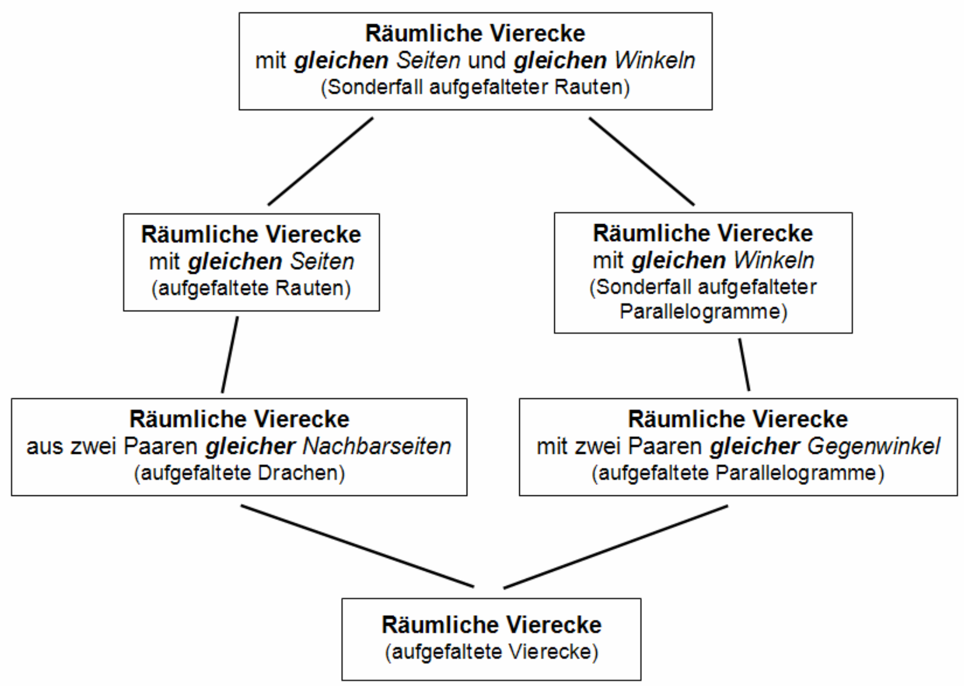
Andere Aussagen über räumliche Vierecke: (7) Die Summe der Innenwinkel eines räumlichen Viereck ist kleiner als vier rechte Winkel (*360°*). (8) Jedes räumliche Viereck besitzt genau eine Umkugel. Sie ist die Umkugel des aus dem räumlichen Viereck und seinen Diagonalen gebildeten Tetraeders. (9) Jedes räumliche Viereck besitzt für jede seiner Seiten unendlich viele Ankugeln, deren Mittelpunkte jeweils auf einer Achse liegen und deren jeweilige Berührpunktlagen variieren.

Symmetrien räumlicher Vierecke: Betrachtet man die ebenen Vierecke als räumliche Objekte, so gehen ihre ebenen in entsprechende räumliche Symmetrie-Eigenschaften über. Beim Auffalten eines ebenen zu einem räumlichen Viereck bleiben die räumlichen Symmetrie-Elemente erhalten (Beispiel in Abbildung)



Abbildung

Man erhält so das „Haus der symmetrischen räumlichen Vierecke“ (Diagramm).



Diagramm

Klassifikation nach Berührungskugel-Eigenschaften: (10) Die winkelhalbierenden Ebenen eines räumlichen Vierecks *ABCD* mit der Eigenschaft $a + c = b + d$ schneiden einander in einer Achse, deren Punkte Mittelpunkte jener Kugeln sind, welche die Seiten bzw. Seitengeraden des Vierecks berühren. Man nennt ein solches Viereck Umkugelviereck. (11) Lassen sich die Seiten eines räumlichen Vierecks mit *A*, *B*, *C*, *D* so bezeichnen, dass $a + b = c + d$, dann schneiden die Innenwinkelhalbierenden der Ecken *A*, *C* und die Außenwinkelhalbierenden der übrigen Ecken in einer gemeinsamen Achse, die Ort der Mittelpunkte jener Kugeln sind, welche die Seiten bzw. Seitengeraden des Vierecks berühren. Man nennt ein solches Viereck Ankugelviereck. (12) Jedes räumliche Viereck, das weder ein Inkugelviereck noch ein Ankugelviereck ist, besitzt genau 8 besondere Berührungskugeln … (Schumann 2015).

Literatur

Bainville, E. & Laborde, J.-M. (2004-2015). *Cabri 3D* (Software). Grenoble: Cabrilog.

Gonschorek, G. & Schneider, S. (2005). *Einführung in die Schulpädagogik und die Unterrichtsplanung*. 4. Aufl., Auer Donauwörth 2005.

Reiss, K. & Hammer, Ch. (2012). *Grundlagen der Mathematikdidaktik*. Basel: Birkhäuser

Roth, H. (1963). *Pädagogische Psychologie des Lehrens und Lernens*. 12. Aufl., Hannover: Schroedel

Schumann, H. (2015). Zur Klassifikation räumlicher Vierecke. *Informationsblätter der Geometrie* (IBDG), Jg. 34, 2, 32 – 44