

SPONTAN versus LOGIK

Vorbemerkung

It is by logic that we prove, but by intuition that we discover (Henri Poincaré, 1908). Do we also need both when working on problem solving, brauchen wir beides auch beim Aufgabenlösen? Im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen unbewusst ablaufende mentale Prozesse, die uns spontan eine Lösung suggerieren, welche aber nicht immer übereinstimmt mit einer korrekten Lösung.

Kognitive Konfliktsituationen

Wir beginnen mit einfachen Beispielen, den sog. Kapitänsaufgaben:

- (1) Auf einem Schiff befinden sich 26 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?
- (2) In Klasse 2b sind 11 Jungen und 14 Mädchen. Wie alt ist die Lehrerin?
- (3) Ein 52 Jahre alter Hirte hat 23 Schafe und 32 Ziegen. Wie alt ist der Hirte?

Die Angabe von zweistelligen Zahlen in Verbindung mit dem Thema Addition im aktuellen Arithmetikunterricht verleitet den Schüler schnell zu einer spontanen Reaktion. Kapitänsaufgaben sind ein Ärgernis, wenn man in die „Falle“ hineintappt und eine Freude, wenn man die „Falle“ rechtzeitig erkennt. Hier zwei weitere Aufgaben dieses Typs:

- (4) Um 3 Eier zu kochen, braucht man 6 Minuten. Wie lange braucht man für ein Ei?
- (5) Ein Wanderer braucht drei Stunden vom See bis zur Hütte. Wie lange werden zwei Wanderer brauchen?

Falsche Algorithmen

(6)	72	(7)	951	(8)	132	(9)	551
	<u>- 49</u>		<u>- 67</u>		<u>14</u>		<u>+ 37</u>
	37		916		272		88

Wie entstehen solche Fehler? Menschliche Erfahrungen werden im Gedächtnis in individuell organisierten Mikrowelten bzw. Subjektiven Erfahrungsbereichen abgespeichert (Lawler 1981, Bauersfeld 1983). Je nach Stimuli von außen wird dann ein "passender" Subjektiver Erfahrungsbereich (SEB) aufgerufen und es werden ggf. *things and processes* für diese

Situation unbewusst so angepasst (oder ignoriert), dass sie zu der ausgewählten Mikrowelt passen. So beschreibt Lawler (1981), wie Miriam die Aufgabe *How much is seventy-five plus twenty-six?* abzählend in ihrer Zählwelt beantwortete, die darauf folgende Frage *How much is seventy-five cents and twenty-six?* aber unmittelbar in der Geldwelt mit „*That's three quarters, four and a penny, a dollar one*“.

Fehlerursachen

Unsere Beispiele zeigen Fehler auf verschiedenen Niveaus. Zunächst wird ein passender SEB gesucht, in der Regel unbewusst und spontan. Bei den Aufgaben (6) bis (9) erfolgt nach der Entscheidung "SEB Schriftliches Rechnen" (bzw. "Papiersummen-Welt" bei Miriam) subjektiv die Auswahl von "passenden" Teil-Algorithmen.

Bei den Beispielen (1) bis (3) dominiert evtl. der "SEB Addition zweistellige Zahlen", wobei diese Fixierung so intensiv sein kann, dass eine Zusatzinformation ggf. ignoriert wird (hier im Beispiel (3)). Antworten zu den Beispielen (4) und (5) dagegen können unbewusst immer wieder von dem im Alltag sehr dominanten "SEB Proportionalität" gesteuert werden.

Alltag und Mathematik

Eines der Hauptziele vom Sachrechnenunterricht ist die Erarbeitung von Sachwissen und die Verflechtung mit Alltagserfahrungen. Mathematik ist dabei ein Hauptwerkzeug, dessen geschickte Benutzung jedoch immer wieder Probleme bereitet:

- (10) Schulausflug mit 4 Bussen und 147 Kindern, Schüler-Antworten:
- Jeder Bus muss 36,75 Kinder fassen
 - Die Aufgabe ist nicht lösbar
 - Dies ist mathematisch möglich - aber in Wirklichkeit ist es unmöglich, weil man Kinder nicht zerteilen kann
- (11) Zwei Glas Wasser von je 10^0 Celsius werden zusammengeschüttet.
Welche Temperatur hat die Mischung?
- It's different when you use numbers

Viele Schüler und Erwachsene entscheiden (meist unbewusst) viel zu schnell, welcher SEB für die Bearbeitung einer Aufgabe in Frage kommt. Und wenn das dann gefundene Ergebnis plausibel erscheint und keine spontanen Konflikte auslöst, wozu braucht man dann noch eine "Probe"? Zweifeln an sich selbst als Unterrichtsziel? Besser wäre das automatische Aufflackern einer roten Warnlampe als Signal für eine Konfliktsituation:

!! HALLO !! *Dein Rechenergebnis stimmt nicht überein mit deinen Erfahrungen.* Notwendig dazu wäre ein Erfahrungsschatz an Stützpunktwissen, welcher unbewusst aufgerufen wird (siehe auch DIEPHAUS 2013, S. 45ff).

U-Shaped Behavior

Es ist naheliegend, dass Sachwissen und Alltagserfahrungen vom Alter abhängen. STRAUSS (1980) hat dies näher untersucht und festgestellt, dass es z. B. bei Aufgabe (11) Kinder gab mit der Antwort 20⁰ Celsius, während jüngere und ältere Kinder korrekt antworteten. Dieses Phänomen fand er auch bei zwei weiteren Aktivitäten:

(12) *Subitizing* (Anzahl der Elemente einer Menge erkennen durch kurzes Hinschauen, ohne Zeit zum Abzählen)

(13) *Quantitätsvergleich* von zwei Mengen: Welche der zwei nebeneinander vorgegebenen Mengen hat mehr Elemente (ohne Zeit zum Abzählen)

Nach STRAUSS können Kinder bereits vor Schulbeginn vergleichbare Fragen mit dem gesunden Menschenverstand lösen (*common sense knowledge*), während dann in der Schule ein wissenschaftliches, geschultes Verständnis aufgebaut wird (*cultural knowledge*). Auf diese Dualität wird schon von VYGOTZKIJ (2002, *Alltägliche vs. Wissenschaftliche Begriffe*) oder GINSBURG (1980, *informal vs. formal mathematics*) hingewiesen.

Zusammengefasst, beim Aufgabenlösen können zwei Arten von Vorstellungen aktiviert werden, intuitiv-spontane Vorstellungen und logisch-analytische. Letztere sind hoch dominant im Mathematikunterricht.

Dual Process Theories (DPT)

Die Analyse von Denkprozessen beim Aufgabenlösen sollte sich jedoch stärker auch mit den intuitiv-spontanen Vorgängen beschäftigen. In der Kognitionspsychologie hat sich hierzu ein neuer Schwerpunkt entwickelt, die Dual Process Theories (DPT): „Dual-process theories of thinking and reasoning quite literally propose the presence of two minds in one brain“ (EVANS 2003, S. 458). Kahnemann (2002) in seiner Nobelpreisrede:

- SPONTAN-Denkprozesse sind schnell, parallel, automatisch, anstrengungslos, locker, assoziativ und schwer veränderbar.
- LOGIK-Denkprozesse sind langsam, seriell, kontrolliert, aufwendig, Regeln-folgend und flexibel veränderbar.

Versuchen und Probieren

Aufgabenlösen ist mehr als der erfolgreiche Ablauf von LOGIK-Denkprozessen. Anspruchsvolles Aufgabenlösen wird unbewusst begleitet von einer Fülle spontaner Entscheidungen (Thesen testen, SEB auswählen,

Größenordnungen vergleichen, . . .). Man braucht Zusatz-Ideen. Eine im SPONTAN-System häufig genutzte, aber im LOGIK-System verpönte Technik ist *Versuchen und Probieren*, vgl. Meißner (1985).

Wir schlagen vor, dass für den Unterricht ganz bewusst häufiger Aufgaben ausgewählt werden, die SPONTAN-Denkprozesse auslösen und Versuchen und Probieren als Arbeitstechnik fördern. Aufgaben vom Typ *Zahlenmauern*, *Rechendreiecke* oder *Rechenfenster* erfüllen dies nur selten.

Taschenrechner und Computer

Taschenrechner und Computer sind exzellente Werkzeuge für den Ausbau des SPONTAN-Systems. Leider können wir aus Platzmangel hier nur ein Beispiel geben. (Für mehr Details siehe Meißner 2003, Diephaus 2013):

<p>(14) <i>Dezimalzahl-Eigenschaften</i></p> <p>gesucht: Weg von A nach B mit kleinstem Produkt.</p> <p>Regeln: Weg suchen mit Richtungswechsel an jeder "Kreuzung" und zugehörige Wege-Zahlen multiplizieren.</p>	
--	--

Für viele Schüler (und Lehramtsstudenten) ist es total überraschend, dass (auf der LOGIK-Ebene) für das "kleinste Produkt" unterschiedliche Ergebnisse genannt werden und dass das berechnete Produkt zusätzlich angibt, welcher Weg und damit welche SPONTAN-Strategien gewählt wurden.

Literatur

Diephaus, A. (2013): *Zahlengefühl 2000*. Münster: WTM-Verlag.

Evans, J. St.B.T. (2003): *In two minds: dual-process accounts of reasoning*. Trends in Cognitive Sciences, 7(10)/2003, S. 454-459.

Meißner, H. (1987): *Schülerstrategien bei einem Taschenrechnerspiel*. Journal für Mathematik-Didaktik, 8(1/2)/1987, S. 105-128.

(aus Platzmangel hier verweisen wir auf das ausführliche Literaturverzeichnis in Diephaus (2013), wo alle hier genannten Veröffentlichungen auch aufgelistet werden.)