

Christian SPREITZER, Baden (Österreich)

Modellieren mit dem Smartphone oder wie sich der Modellierungskreislauf schließen lässt

Alle gängigen Smartphones sind mittlerweile mit verschiedensten Sensoren ausgestattet, deren Messdaten in Hundertstelsekunden-Intervallen ausgelesen und abgespeichert werden können. Damit eröffnen sich neue Möglichkeiten in der Modellierung realer Prozesse, insbesondere das Testen und Verfeinern eines mathematischen Modells anhand realer Daten. Als Beispiel für eine solche Smartphone-Modellierung wird die Nutzung der im Gerät eingebauten Beschleunigungssensoren zur Aufzeichnung von Pendelschwingungen vorgestellt. Die gemessenen Daten können problemlos auf einen Rechner übertragen und in einer Tabellenkalkulation weiterverarbeitet werden.

Warum sich der Modellierungskreislauf nicht immer schließen lässt

Mithilfe eines mathematischen Modells möglichst präzise Vorhersagen für ein reales System zu erstellen, ist meist das eigentliche Ziel von Modellierungen in der angewandten Mathematik. Typische Beispiele dafür sind etwa die Wettervorhersage, die Positionsbestimmung mittels Satellitennavigation, die Modellierung von Kapitalmärkten, die Risikoabschätzungen von Versicherungsunternehmen oder die modernen bildgebenden Verfahren in der medizinischen Diagnostik (Computertomographie, Magnetresonanztomographie). Ein wesentlicher Aspekt der Modellentwicklung ist dabei stets die ständige Verbesserung des Modells durch das Vergleichen seiner Vorhersagen mit neuen Daten über das zu beschreibende reale System. Das Sammeln neuer Daten durch Messungen oder Erhebungen erlaubt es, ein Modell zu testen und in der Folge zu modifizieren bzw. zu verfeinern. Dieser Prozess lässt sich symbolisch durch einen "Modellierungskreislauf" darstellen.

Modellierungsaufgaben können durch ihren Anwendungsbezug den Mathematikunterricht bereichern und die Motivation der Lernenden steigern. Realitätsnahe Aufgaben sollten im besten Fall alle Phasen des Modellierungskreislaufs abbilden. Insbesondere das Testen des Modells am realen System ist jedoch bei vielen bzw. typischen Modellierungsaufgaben in Lehrbüchern prinzipiell nicht möglich, wodurch der Modellierungskreislauf unterbrochen wird und daher kein solcher mehr ist.

Das Modell kann (aus praktischen Gründen) häufig nur anhand derselben (und oft nicht realen) Daten überprüft werden, die bereits zur Modellentwicklung herangezogen wurden. Reproduziert das Modell die gegebenen

Daten, ist eine weitere Modellverbesserung oder -korrektur damit grundsätzlich nicht mehr möglich. Mehr als das Beschreiben der zur Verfügung stehenden Daten durch mathematische Strukturen oder Objekte (z.B. Funktionen) dürfen wir von einem solchen Modell also nicht erwarten. Völlig verschiedene Modelle können durch geeignete Anpassung von Parametern schließlich dieselben Datensätze hervorragend reproduzieren (z.B. unterschiedliche nichtlineare Regressionsfunktionen). Ob ein auf diese Weise gewonnenes Modell die Realität einigermaßen vernünftig beschreibt, wissen wir nicht (dies schließt mitunter auch die Aufgabensteller*innen ein).

Ein Wettervorhersagemodell in Form einer Polynomfunktion, die durch Interpolation der Tagestemperaturen des Vorjahres gewonnen wird, gibt den Temperaturverlauf des Vorjahres zwar exakt wieder, wird sich in der Vorhersage der Temperaturen des heurigen Jahres jedoch für viele Tage als nicht zufriedenstellend erweisen (z.B. aufgrund einer anderen Großwetterlage als am selben Tag des Vorjahres). Entscheidend für die Güte eines Modells ist aber gerade seine Fähigkeit, Vorhersagen über das reale System unter geänderten Bedingungen zu machen.

Smartphones lassen sich als Messinstrumente einsetzen

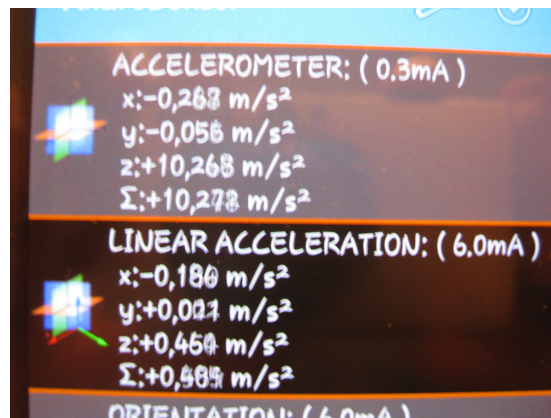
Neue Daten in anderen Zuständen des realen System zu akquirieren, ist in der Unterrichtspraxis allerdings meist sehr aufwendig oder gar unmöglich, außer

- das zu untersuchende System ist direkt zugänglich (z.B. ein physikalisches System, das im Klassenzimmer auf- oder nachgebaut werden kann) und
- die Datenerfassung erfolgt nicht von Hand bzw. analog, sondern automatisiert bzw. digital mithilfe von Sensoren, deren Messdaten elektronisch aufgezeichnet und übertragen werden.

In Smartphones ist ein Sammelsurium verschiedenster Sensoren eingebaut (zur Messung von Beschleunigungen, magnetischer Feldstärke, Lichtstrom, Distanz, Geräuschpegel, Luftdruck, Temperatur etc.); vor allem die Beschleunigungssensoren besitzen eine hohe Genauigkeit. Die Sensordaten werden typischerweise in Hundertstelsekunden-Intervallen ausgelesen (die Intervallgrößen sind einstellbar) und lassen sich mit kostenlosen Apps (z.B. AndroSensor, GeoGebra Sensors App) in csv-Dateien speichern, die wiederum mittels USB oder Bluetooth auf einen Laptop oder PC übertragen werden können. Smartphones eignen sich daher hervorragend als digitale Messinstrumente, die die gemessenen Daten unmittelbar in elektronischen Standardformaten bereitstellen.

Modellierung mit Feedback: Das Smartphone-Pendel

Ein Modellierungsproblem, das die Sensortechnik von Smartphones nutzt, um Messdaten zu gewinnen, soll im Folgenden kurz vorgestellt werden. Die Aufgabe besteht darin, den zeitlichen Schwingungsverlauf eines Pendels zu modellieren. Ein Smartphone kann als Pendelkörper und gleichzeitig als Messinstrument verwendet werden, um die während des Schwingungsvorgangs wirkenden Beschleunigungen aufzuzeichnen. Das Smartphone muss dazu nur in einer Box am Ende einer Schnur oder einer Stange befestigt werden.



	A	B	C	T	U	V
1	ACCELEROMETER X	ACCELEROMETER Y	ACCELEROMETER Z	Time since start in ms	YYYY-MO-DD HH-MI-SS_SSS	
2	-0.568	1.175	9.612	4	2015-04-02 20:20:16:806	
3	-0.651	1.331	10.151	63	2015-04-02 20:20:16:865	
4	-0.554	1.443	9.439	113	2015-04-02 20:20:16:915	
5	-0.554	1.443	9.439	167	2015-04-02 20:20:16:969	
6	-0.176	1.563	9.323	227	2015-04-02 20:20:17:029	
7	-1.897	2.358	11.079	294	2015-04-02 20:20:17:096	
8	-1.584	2.061	9.48	361	2015-04-02 20:20:17:163	
9	-3.367	1.146	11.78	412	2015-04-02 20:20:17:214	
10	-2.957	1.444	9.293	468	2015-04-02 20:20:17:270	
11	-3.792	0.632	10.048	525	2015-04-02 20:20:17:327	
12	-5.701	2.9	9.579	579	2015-04-02 20:20:17:381	

Abb. 1: Smartphone als Pendelkörper, Sensor-App, Rohdaten der Beschleunigungssensoren nach Import in Tabellenkalkulation.

Ist das Display stets senkrecht zur Pendelschnur orientiert, dann ist die Beschleunigungskomponente orthogonal zur Displayebene (dies ist in der Regel die z-Komponente) unabhängig von etwaigen Rotationen des Smartphones durch Torsion der Pendelschnur während des Schwingungsvorgangs (was durch Verwendung einer Pendelstange vermieden werden kann).

Zu Beginn des Experiments wird in der Sensor-App die Aufzeichnung der Sensordaten gestartet, am Ende des Experiments wieder gestoppt. Die Rohdaten (z.B. im csv-Format) werden dann in eine Tabellenkalkulation exportiert und grafisch dargestellt.

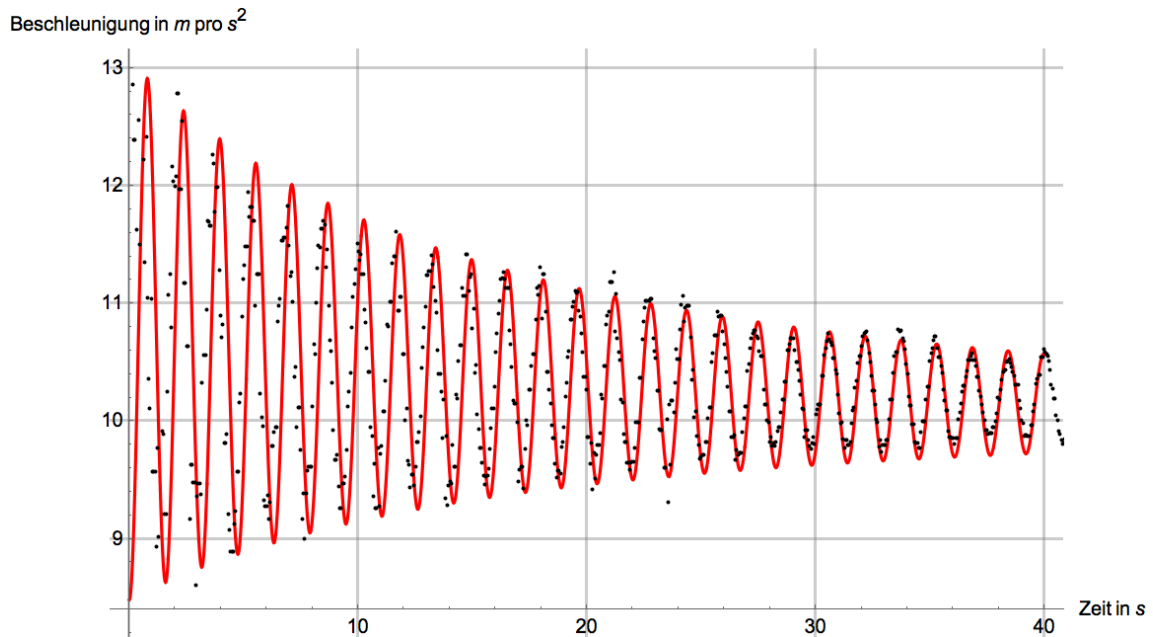


Abb. 2.: Gemessene Beschleunigungsdaten (Punkte) und berechnete Kurve (numerische Lösung der entsprechenden Differentialgleichung)

Ausgehend von den Messdaten wird ein mathematisches Modell entwickelt. Die Modellierung kann im einfachsten Fall rein phänomenologisch erfolgen, indem nach einer zeitabhängigen Funktion gesucht wird, die die Daten am besten beschreibt. Anspruchsvoller ist die Entwicklung eines die physikalischen Zusammenhänge berücksichtigenden Differentialgleichungsmodells. In jedem Fall enthält das gewonnene Modell Parameter, die den Anfangsdaten der Schwingung bzw. charakteristischen Größen wie der Pendellänge zugeordnet werden können. Mithilfe dieses Modells lassen sich nun Vorhersagen erstellen, wie Schwingungsverläufe mit anderen Anfangsdaten bzw. Pendellängen aussehen sollten.

Diese Vorhersagen können umgehend experimentell überprüft werden, indem entsprechende Schwingungsvorgänge mit dem Smartphone aufgezeichnet werden. Das Modell kann also sofort getestet und durch neue Messungen am Pendel falsifiziert bzw. weiter verbessert werden, wodurch sich der Modellierungskreislauf schließt. Es wird hier auch erfahrbar, was es eigentlich bedeutet, ein mathematisches Modell für ein reales Phänomen zu entwickeln und dass dabei immer auch Kenntnisse aus anderen Disziplinen einfließen müssen, um ein funktionierendes Modell zu erhalten.

Literatur

Spreitzer, C. (2015). Numerische Modellierung der gedämpften Pendelschwingung und des Falls aus großer Höhe. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG, Heft 48*, 119–135 (online unter <http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/>)