Jessica KUNSTELLER, Köln

Zur Bedeutung von (Familien-)Ähnlichkeiten in mathematischen Lernprozessen

Dem Lernen von Ähnlichkeiten wird in der mathematikdidaktischen Forschung eine bedeutende Rolle zugeschrieben. In dem Beitrag wird mittels des Begriffs (Familien-)Ähnlichkeiten nach Ludwig Wittgenstein eine neue und verbindende Perspektive hinsichtlich der verschiedenen Forschungsansätze präsentiert. Hierzu werden außerdem verschiedene Arten und Funktionen von (Familien-)Ähnlichkeiten in mathematischen Lehr- und Lernprozessen herausgestellt.

Familienähnlichkeiten nach L. Wittgenstein (1953)

Der Begriff „Familienähnlichkeiten“ geht auf die Sprachspielphilosophie von L. Wittgenstein zurück. Betrachtet man Zeichen wie -5, 13 und ¾ so lassen sich aus Expertensicht Ähnlichkeiten feststellen, z.B. dass sie als „Zahlen“ bezeichnet und in verschiedene Zahlbereiche untergliedert werden können. Wittgenstein definiert den Begriff Familienähnlichkeiten an keiner Stelle seiner Werke - er exemplifiziert ihn anhand von Beispielen: „Und ebenso bilden z.B. die Zahlenarten eine Familie. Warum nennen wir etwas ‚Zahl’? Nun etwa, weil es eine - direkte - Verwandtschaft mit manchem hat, was man bisher Zahl genannt hat; [...]. (PU §67)“ Ähnlichkeiten oder „Verwandtschaften“, wie bei dem Begriff „Zahl“, bezeichnet Wittgenstein als Familienähnlichkeiten: „Ich kann diese Ähnlichkeiten nicht besser charakterisieren als durch das Wort ‚Familienähnlichkeiten’; denn so übergreifen und kreuzen sich die verschiedenen Ähnlichkeiten, die zwischen den Gliedern einer Familie bestehen: Wuchs, Gesichtszüge, Augenfarbe, Gang, Temperament, etc. etc. - Und ich werde sagen: die ‚Spiele‘ bilden eine Familie. (PU §67)“ Vergleichbar dazu, dass sich Mitglieder einer Familie durch verschiedene Eigenschaften ähneln können, ist dies auch bei den verschiedenen Zahlen der Fall (reelle Zahlen, Position auf dem Zahlenstrahl, ...): Während einzelne Eigenschaften gleich oder vergleichbar sind, unterscheiden sich andere voneinander. Neben Zeichen können auch Worte, Sätze oder (Sprach-)Spiele einander ähneln (s. Kunsteller 2015).

Empirie

Im Rahmen meines Dissertationsprojektes haben die Lernenden einer vierten Schulklasse die in Abb. 1 stehende Aufgabe erhalten.

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

a) Löse die folgenden Rechnungen möglichst geschickt.

$20 + 2 =$ ____	$16 + 7 =$ ____
$18 + 4 =$ ____	$3 + 20 =$ ____
$16 + 6 =$ ____	$17 + 6 =$ ____
$14 + 8 =$ ____	$7 + 16 =$ ____
$12 + 10 =$ ____	$20 + 3 =$ ____
$10 + 12 =$ ____	$13 + 10 =$ ____

b) Formuliert zusammen mindestens zwei Regeln.

c) Begründet eure Regeln.

Abb. 1: Erstes Arbeitsblatt

In dem an die Arbeitsphase anschließenden Unterrichtsgespräch wurde zunächst herausgestellt, dass die Ergebnisse spaltenweise gleich sind. Dieses Phänomen erklärte Lorena relativ zur linken Spalte mit folgendem allgemeinen Zusammenhang, welcher nachfolgend als „Regel“ bezeichnet wird: „wenn immer zwei abgezogen werden’ *(L nickt)* werden in der ersten Zeile dann- bei der plus halt immer zwei draufgetan [...] und dann kommt das gleiche Ergebnis raus.“[1] Nachdem das obenstehende Arbeitsblatt besprochen wurde, erhielten die Lernenden ein neues Arbeitsblatt (s. Abb. 2).

a) Löst die folgenden Rechnungen möglichst geschickt.

$24 \cdot 1 =$ ____
$12 \cdot 2 =$ ____
$8 \cdot 3 =$ ____
$6 \cdot 4 =$ ____
$4 \cdot 6 =$ ____
$3 \cdot 8 =$ ____
$2 \cdot 12 =$ ____
$1 \cdot 24 =$ ____

b) Formuliert zusammen mindestens zwei Regeln.
c) Begründet eure Regeln.

Abb. 2: Zweites Arbeitsblatt

Im Unterricht sprachen die Lernenden zunächst an, dass das Ergebnis immer 24 ist. Außerdem äußerten sie, dass sich die Zahlen entlang des ersten Faktors halbieren und die Zahlen des zweiten Faktors verdoppeln. Daraufhin gab Orla die folgende Regel an: „wenn bei der ersten Zahl immer geteilt- ist und bei der zweiten Zahl immer mal. ... [...] dann bleibt das Ergebnis gleich.“

Die Gegenüberstellung von Lorenas und Orlas Regeln verdeutlicht zahlreiche (Familien-)Ähnlichkeiten innerhalb der Äußerungen. Die Lernenden nutzen beispielsweise vergleichbare Worte oder Worthülsen, wie „ersten Zeile“ – „ersten Zahl“, „zwei“ – „zweiten“ oder „das gleiche Ergebnis“. Ähneln Lautbilder oder auch Worthülsen einander, werden diese als (*Fami-*

1 Die Transkriptionsregeln sind aus Meyer (2007, S. 118f) entnommen.

lien-)Ähnlichkeiten phonetischer Art betitelt. Die Ausdrücke „ersten Zeile" sowie „ersten Zahl" ähneln einander hinsichtlich der Wortbedeutung, insofern sich beide auf den ersten Operanden zu beziehen scheinen. Ähnlichkeiten, die sich auf den Wortgebrauch bzw. die Wortbedeutung beziehen, werden als (*Familien-)Ähnlichkeiten semantischer Art* bezeichnet. Weitere Ähnlichkeiten lassen sich auf der *inferentiellen* Ebene rekonstruieren. Entsprechend der Theorie der Abduktion (s. Meyer 2007) lässt sich bei Lorena eine Regel wie folgt rekonstruieren: „*Wenn erst zwei abgezogen werden und anschließend zwei draufgetan werden, dann bleibt das Ergebnis gleich.*" Hinsichtlich Orlas Äußerung lässt sich folgende Regel erkennen: „*Wenn erst geteilt und anschließend (mit der gleichen Zahl) mal gerechnet wird, dann bleibt das Ergebnis gleich*." Die Anlässe zu den Entdeckungen der Regeln sind in der Schülersprache identisch. Solche Ähnlichkeiten werden als (*Familien-)Ähnlichkeiten inferentieller Art* aufgefasst. Ausführlichere Betrachtungen und Arten von (Familien-)Ähnlichkeiten finden sich in Kunsteller (2015) sowie Kunsteller/Meyer (2014).

Nachdem Orla ihre Regel nannte, meldete sich Anja und führte an: „ich glaube das ist wie eben nur- mit mal und das war eben mit plus und minus und das hier ist mit- mal und geteilt'". Anja scheint hier eine Ähnlichkeit zwischen der ersten und der zweiten Aufgabe zu sehen, was ihr „wie eben" andeutet. Der vorherige Vergleich der Regeln zeigt, dass Lernende zahlreiche Ähnlichkeiten nutzen können und diese, wie Anjas Äußerung verdeutlicht, auch explizieren können.

Im Anschluss an die Nennung der Regel für die Multiplikation forderte die Lehrerin dazu auf das gleichbleibende Ergebnis bei der zweiten Aufgabe zu begründen. Hieraufhin äußerte Marco: „also ehm .. und das ist auch so halt- ehm das Ergebnis bleibt immer gleich, weil wir haben ja ehm .. [...] also bei den Zahlen ehm- links haben wir geteilt gerechnet und rechts haben wir- ehm mal gerechnet und dann kommts so dazu dass es immer, das gleiche Ergebnis ist weil das haben wir auch bei minus und plus gemacht' [...] die eine ehm- Aufgabe wird plus gerechnet und die andere wird minus gerechnet." Marco beschreibt zu der geforderten Begründung Ähnlichkeiten zwischen den beiden Aufgaben. Die Aufgaben werden als einander ähnlich herausgestellt, weswegen das gleichbleibende Ergebnis für die Multiplikation gelte. Um die Aussage als tragfähige Begründung zu erkennen, muss diese sehr optimistisch gedeutet werden, indem z.B. die Funktion einer Umkehrfunktion bzw. die Definitionen der verschiedenen Operationen hinzugezogen werden. Da dies bspw. aus zeitlichen Aspekten kaum im Horizont der Situation lag, zeigt dieser Ausschnitt, dass Lernende Ähnlichkeiten eine zu hohe Bedeutung beimessen können, sodass sie Lernprozesse auch behindern können.

Abschluss und Ausblick

Der Begriff (Familien-)Ähnlichkeiten und seine verschiedenen Kategorien ermöglichen die Rekonstruktion und somit das Verstehen von Schüleräußerungen und Lernprozessen. Die Analyse zeigt, dass Lernende (Familien-)Ähnlichkeiten erkennen und nutzen können, um inhaltlich Mathematik zu betreiben. Dieses Nutzen von Ähnlichkeiten kann jedoch auch negative Auswirkungen haben.

Die ambivalenten Auswirkungen des Nutzens von Ähnlichkeiten werden auch im Kontext von Metaphern angesprochen. Ähnlichkeiten beziehen sich bei Metaphern auf die partielle Übereinkunft von Eigenschaften zwischen dem herkömmlichen und dem (mathematischen) Begriff. Dem Vorteil für die konstituierende Eigenschaft einer Metapher steht der Nachteil gegenüber, dass ungleiche Eigenschaften als gleiche angesehen werden können. Dies lässt sich auch bei Sfard (2008, S. 35) wiederfinden: „[...] metaphors are often like Trojan horses that enter discourses with hidden armies of unhelpful entailments.” Vergleichbar verhält es sich beim „analogical reasoning“ (z.B. English/Sharry 1996), wo strukturelle Informationen von einem „Quellbereich“ auf einen „Zielbereich“ übertragen werden. Als Beispiel sei die von Marco konstruierte Analogie „-“ : „+“ :: „:“ : „•“ angeführt, wobei u.a. eine mögliche Relation „Umkehroperation sein zu“ zwischen „-“ und „+“ hergestellt werden müsste, um die Beziehung inhaltlich zu begründen und sie somit von der rein äußeren Form einer Vergleichbarkeit zu entbinden. Weitere Funktionen von (Familien-) Ähnlichkeiten werden in nachfolgenden Veröffentlichungen ausgebaut.

Literatur

English, L. & Sharry, P. (1996): Analogical reasoning and the development of algebraic abstraction. Educational Studies in Mathematics 30, S. 135-157.

Kunsteller, J. (2015): Familienähnlichkeiten und ihre Bedeutungen im Sprachspiel „Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht“. In: Linneweber-Lammerskitten, H. (Hrsg.): BzMU 2015. WTM-Verlag: Münster, S. 524-527.

Kunsteller, J. & Meyer, M. (2014): Zur Rolle von Familienähnlichkeiten bei der Einführung der Potenzfunktionen. In: Der Mathematikunterricht 60 (2), S. 50-57.

Meyer, M. (2007): Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Franzbecker: Hildesheim.

Sfard, A. (2008): Thinking as communication. Cambridge UP: New York.

Wittgenstein, L. (1984): Werkausgabe 1. Philosophische Untersuchungen. Suhrkamp: Frankfurt. (erstmals 1953 erschienen)