

Thomas GAWLICK & Elisabeth LUCYGA, Hannover

## Entwicklungsstufen der Problemlösekompetenz

Kompetenzen verstehen wir mit Klieme/Weinert als kontextspezifische kognitive Leistungsdispositionen. Unser Stufenmodell für das Problemlösen ordnet sich ein in das Forschungsprogramm von Blömeke et al. (2015, S. 5) “We should be able to examine the developmental trajectories of competence, identify groups of students with differential developmental patterns, and determine effective educational strategies for development.”

### Der Ansatz

Aus Platzgründen können wir unser Modell nur skizzieren – Details siehe Gawlick & Lucyga (eingereicht). Die Grundidee ist: Die Kompetenzstufen entsprechen den Pólya-Phasen – allerdings sind diese so empirisch kaum nachweisbar (Kilpatrick 1967, p. 98), und auch bei Schoenfeld (1985) sind Planentwicklung und –durchführung kaum zu trennen. Statt der beiden mittleren Phasen unterscheiden wir daher drei. Wie Pólya gliedern wir den Problemlöseprozess in Abschnitte unterschiedlicher Qualität, die unterschiedliche, aufeinander aufbauende heuristische und epistemische Teilkompetenzen erfordern. Grundlegend dafür ist die Unterscheidung von Problem- und Routineaufgabe, etwa so: “A task is said to be a problem if its solution requires that an individual combine previously known data in a way that is new (to him). If he can immediately recognize the measures that are needed to complete the task, it is a routine task.” (Pehkonen 2004, S. 55) Basierend auf der Unterscheidung von **epistemischer** und **heuristischer** Struktur von Dörner (1976) charakterisieren wir Problemlösen durch das Anpassen von **Schemata** – gesteuert durch **Heurismen**: „Denkoperationen, die bei diesem Prozeß in typischer Weise von Nutzen sind.“ (Pólya 1949, S. 155) Wie in Gawlick (2013) erläutert, entsteht durch das Wechselspiel solcher **heuristischer** und **epistemischer** Aktivitäten ein **Denkprozess-typ**, der sich durch die Piagetschen Begriffe Assimilation, Akkommodation oder Akquisition beschreiben lässt: Die **epistemische Struktur** des Problemlösers wird bei Assimilation verwendet, durch Akkommodation verändert und durch Akquisition erweitert – letzteres erwarten wir indes bei Nichtexperten nicht. Die Akkommodation der Lösungsschemata kann dabei routiniert oder problemhaft ablaufen: Im ersten Fall etwa durch schrittweise **Zurückführung** der gestellten Aufgabe auf bereits gelöste – das ist **Schemaadaptation**; im zweiten durch tiefgreifendere strukturelle Veränderungen: **Schemarestrukturierung**. Die **Kompetenzstufen** werden nun durch die Prozessqualität der jeweiligen Phase definiert und verknüpfen die erwartete Prozessqualität mit der tatsächlich vom Probanden erbrachten:

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Zu einer Aufgabe existieren i.d.R. verschiedene zulässige, erwartbare Lösungswege, bestehend aus Teilschritten, deren Findung vom Bearbeiter unterschiedlich hohe heuristische und epistemische Kompetenzen erfordert:

- Die **Kompetenzstufe eines Lösungsweges** ist gleich der höchsten bei einem Schritt erforderlichen.
- Die **Kompetenzstufe einer Aufgabe** ist gleich der geringsten eines zulässigen, erwartbaren Lösungsweges.
- Die **Kompetenzstufe eines Bearbeiters** ist größergleich der höchsten gezeigten, d.h. die des höchsten zulässigen Schritts seines (u.U. unvollständiger, teils unzulässiger) Lösungswegs.

Diese Ablösung der Stufe vom Prozess zeigt Abb.1 bei Aebli's **Imker-Aufgabe**: „Ein Imker erntet in einen schlechten Honigjahr 16kg Honig. Er

füllt ihn in Gläser ab, die  $\frac{1}{4}$ kg fassen. Wie viele Gläser bekommt er?

Aufgabe verstehen	Schema identifizieren	Was ist unbekannt? Was ist gegeben?	$16 : \frac{1}{4} = \square$	Rec
Plan suchen	Schema instantiieren	... Aufgabe schon früher gesehen?	$16 : \frac{1}{4} = 16 \cdot 4/1 =$	Ass
Plan anpassen	Schema adaptieren	... gelöste Aufgabe gebrauchen?	$16 : \frac{1}{4} =$ $16000 : 250 =$	rAcc
Plan umstrukturieren	Schema rekonstruieren	... einfachere verwandte Aufgabe?	$1 : \frac{1}{4} = 4,$ weil $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$	pAcc
Rückschau	Schema bilden	... für andere Aufgabe gebrauchen?	Durch einen Bruch teilen heißt...	Acq

Abb. 1: Kompetenzstufeninterpretation bei der Imkeraufgabe

### Anwendung

Im Projekt HeuRekAP wurden 46 Neuntklässler eines Hannoveraner Gymnasiums beim Lösen der TIMSS-Aufgabe K10 videografiert (Gawlick 2014).

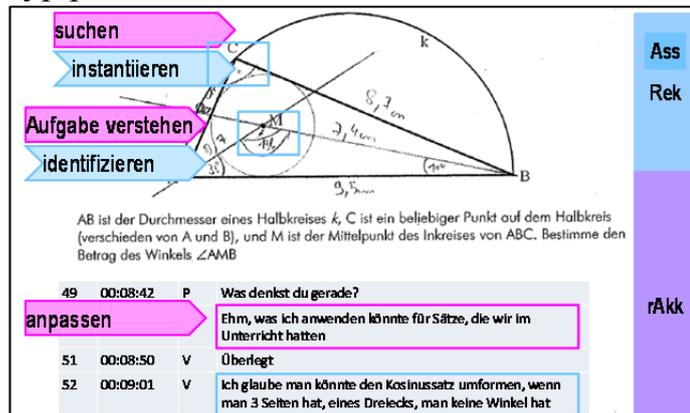
		K10-Aufgabe		Prozess	
Plan	Schema	#	Prozessschritt	Begründung	Typ
Aufgabe verstehen	identifizieren	1	Geg.: AB Durchmesser, C auf k, M Mittelpunkt des Inkreises Ges.: $\mu$	Aufgabenstellung	Rec
suchen	instantiieren				Ass
anpassen	adaptieren	2	$ \mu  = 180^\circ -  \alpha_1  -  \beta_1 $	IWS in ABM	rAkk
		3	AM, BM, WH	Svl: M Inkreismittelpunkt	
		4	$ \alpha_1  =  \alpha /2;  \beta_1  =  \beta /2$	2	
		5	$ \mu  = 180^\circ -  \alpha /2 -  \beta /2$	1,3	
		6	$ \alpha  +  \beta  +  \gamma  = 180^\circ$	IWS in ABC	
umstrukturieren	rekonstruieren	7	$ \gamma  = 90^\circ$	SdT: AB Durchmesser, C $\in$ k	pAkk
Rückschau	bilden	8	$ \alpha  +  \beta  = 90^\circ$	5,6	Akq
		9	$ \mu  = 180^\circ - (90^\circ/2) = 135^\circ$	4, 7	

Abb. 2: Heuristische und epistemische Aktivitäten bei der K10-Aufgabe

Wir wenden nun unser Modell bei den von Lucyga (in diesem Band) aus-

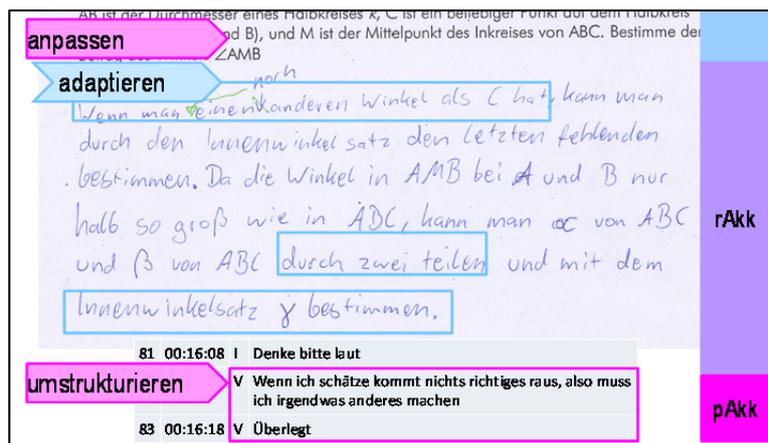
gewählten Problemlöseprozessen an, um auf die Kompetenz der Bearbeiter zu schließen. Betrachten wir zunächst die Kompetenzstufe von K10: Gefragt ist die Größe des Winkels  $\mu = \angle AMB$ , wobei ABC ein Thalesdreieck und M der zugehörige Inkreismitelpunkt ist. Abb. 2 zeigt die erwarteten heuristischen und epistemischen Aktivitäten des meistversuchten Lösungswegs. Er erfordert heuristische Impulse zum Umstrukturieren eines Plans, die epistemisch zu einer Schemarekonstruktion führen. Folglich wird bei K10 ein Teilprozess vom Typ problemhafter Akkommodation erwartet.

**Der Fall A05** Beim „Aufgabe verstehen“ identifiziert A05 neben dem Gesuchten auch teils das Gegebene und sucht einen dazu passenden Plan – er instantiiert das „Thales“-Schema. Innerhalb der Rekognition tritt damit eine Assimilation auf. Da A05 keinen Plan



finden kann, der die gesamte Aufgabe löst, versucht er ein Schema durch Umformen anzupassen (vgl. Abb. 3). Diese auf routinemäßige Akkommodation zielende heuristische Aktivität bewältigt A05 allerdings nicht epistemisch erfolgreich. Die höchste im Prozess gezeigte heuristische Aktivität ist „Plan anpassen“, die höchste epistemische „Schema instantiiieren“, damit hat A05 gezeigt, dass er mindestens die Kompetenzstufe der **routinemäßigen Akkommodation** erreicht hat.

**Der Fall A32** Wie auch bei A05 kommt es bei A32 innerhalb der Rekognition zu einer Assimilation - das „Thales“-Schema wird dabei instantiiert. Anschließend folgt eine routinemäßige Akkommodation, wobei der heuristischen Aktivität des



„Plan anpassen“ eine Schemaadaptation folgt (vgl. Abb. 4). A32 erkennt dann, dass dies nicht ausreicht um K10 zu lösen und beginnt mit der problemhaften Akkommodation –er stellt sich heuristische Fragen zum Umstrukturieren. Er vermag indes nicht, diese zu beantworten und damit sein

bereits adaptiertes Schema zu restrukturieren. Die höchste im Prozess gezeigte heuristische Aktivität ist „Plan umstrukturieren“, die höchste epistemische Aktivität „Schema adaptieren“. A32 hat also mindestens die Kompetenzstufe der **problemhaften Akkommodation** erreicht.

**Der Fall D11** Der Problemlöseprozess von D11 beginnt analog zu denen von A05 und A32. Allerdings schafft D11 es, sein adaptiertes Schema ( $\mu$  mit

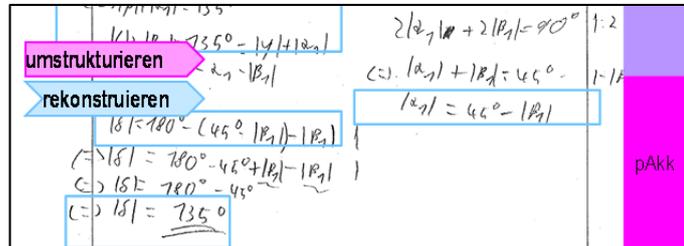


Abb. 5: Ausschnitt der Prozesseinteilung von D11

dem Innenwinkelsummensatz in ABM berechnen und dazu die Winkelhalbierendeneigenschaft nutzen, dafür werden  $\alpha$  und  $\beta$  benötigt) zu restrukturieren ( $2|\alpha_1| + 2|\beta_1| = 90^\circ$  umstellen und in  $|\mu| = 180^\circ - |\alpha_1| - |\beta_1|$  einsetzen). Der Problemlöseprozess zeigt, dass D11 mindestens die Kompetenzstufe der **problemhaften Akkommodation** erreicht hat, da er sowohl die heuristische Aktivität „Plan umstrukturieren“ als auch die zugehörige epistemische Aktivität „Schema rekonstruieren“ erfolgreich durchführt.

### Fazit

Unser Stufenmodell der Problemlösekompetenz fußt auf Dörners Unterscheidung von epistemischer und heuristischer Struktur und definiert entsprechende Teilkompetenzen. Die präzise Charakterisierung von deren Stufen erfolgt

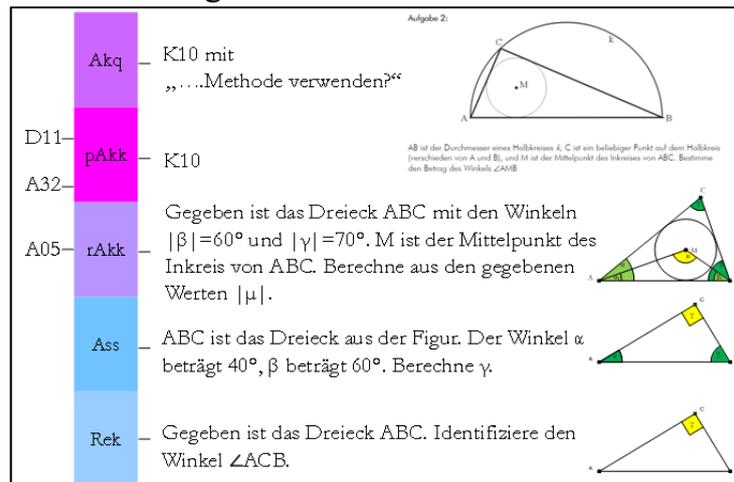


Abb. 6: Anbindung der Kompetenzstufen an Aufgabensequenz

durch einschlägige Impulse und Aktivitäten in Gawlick & Lucyga (eingereicht) über eine Ablösung von entsprechenden Prozessabschnitten und die Anbindung an Sequenzen aufeinander *aufbauender* Aufgaben (Abb. 6). Letzteres sehen wir qua Passung zum Unterrichtsverlauf als Vorteil gegenüber vorhandenen Kompetenzmodellen, in denen die Aufgaben aufgrund der Rasch-Modellierung voneinander unabhängig sein müssen (und nur dichotom bewertbar sind). In unserem Modell ist die Fähigkeit, Schemata restrukturieren zu können, die Kernkompetenz des Problemlösens.

### Literatur

Siehe Langfassung unter <http://www.idmp.uni-hannover.de/downloads.html>