Eva Müller-Hill, Marburg

Warum „immer“ so und nicht anders? Erklären-warum im Mathematikunterricht mittels operativer Invarianz entlang kontrastiver und kontrafaktischer Leitfragen

Im Folgenden stehen inhaltlich-epistemologische Merkmale von Erklären-warum im Fokus. Betrachtet man Erklären-warum als Heranziehen spezifischer, nämlich entscheidender allgemeiner Gründe für das Bestehen eines Sachverhaltes, so lautet die Frage, woran man solche entscheidenden Gründe, also allgemeine Gründe mit Erklärkraft, erkennen kann. Dabei dient eine wissenschaftstheoretische Sicht als Ausgangspunkt:

> Whether or not a generalization can be used to explain has to do with whether it is *invariant* (Woodward 2000, S. 198)

Mit Rückbezug auf eine Erklärsituation aus dem Unterricht sollen solche charakteristischen Invarianzen hier erläutert werden.

Erklären-warum im Mathematikunterricht – ein Beispiel

Die nachfolgende Unterrichtssequenz ist (Erath 2016) entnommen (Transkripte gekürzt): Die Schülerinnen und Schüler einer 5. Klasse eines Gymnasiums arbeiten an der Aufgabe $19{,}8 \cdot 0{,}708 = 14{,}0184$. Thasin wundert sich über die Diskrepanz zwischen seiner gerundeten Rechnung $19 \cdot 0 = 0$ und dem exakten Ergebnis. Der Lehrer greift Thasins Frage auf:

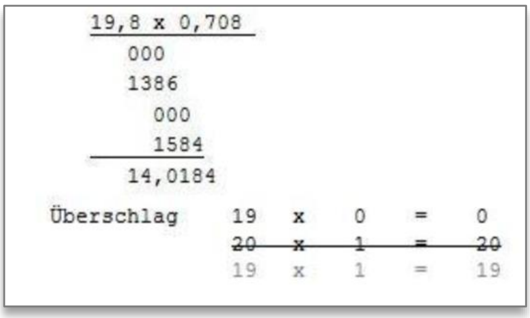
Lehrer: Thasin sagt ja; Mensch, eigentlich multiplizieren heißt ja ich mache was Größer; außer dann bei null ne; dann kommt null raus; das ist immer kleiner; aber hier jetzt auf einmal – kommt vierzehn raus; Super gesehen Thasin; nimm mal ein zwei Leute dran die dafür ma ne Erklärung suchen sollen;

Nach zwei Anläufen von Mitschülerinnen versucht es Thasin selbst.

Thasin: Also (geht zur Tafel) null mal neunzehn ist ja null; aber hier ist ja noch ein Komma, und das macht die null größer; und danach steht ja noch was; und null ist ja immer das es kleiner wird, und weil‘s nicht mal eins ist, sondern weniger; ist es kleiner als neunzehn;

Einige Mitschüler können Thasins erstem Erklärungsversuch nicht folgen.

Lehrer: versuch’s nochmal; aber Moment; bevor der Thasin die Erklärung nochmal startet, mach ich hier mal das hin; (*ändert den Überschlag 20 · 1 = 20 in 19 · 1 = 19, vgl. Abb. rechts*) vielleicht kannst du das nutzen Thasin;



Thasin: Okay; neunzehn mal null ist null; und neunzehn, neunzehn mal eins ist neunzehn; und hier ist es ja null komma

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

siebenhundertacht; das liegt ja ähm – das ist nicht mal eins, aber auch nicht mal null; deswegen muss es zwischen die neunzehn und die null liegen – es ist kleiner als neunzehn, aber ist größer als null;

Die von Thasin zur Erklärung herangezogenen Gründe beantworten bestimmte kontrastive oder kontrafaktische Fragen, weil sie entsprechende Invarianzen aufweisen. Auf die vom Lehrer pointiert formulierte Frage „Eigentlich macht multiplizieren größer, warum kommt hier jetzt auf einmal etwas Kleineres heraus?“ zeigt Thasins Erklärung, warum genau für Faktoren zwischen 0 und 1 das Ergebnis der Multiplikation mit 19,8 kleiner als 19,8 wird, und sonst nicht. Die Anregung des Lehrers „Was wäre, wenn du andere Überschläge verwendest?“ kann Thasin aufnehmen.

Erklären aus der epistemologischen Perspektive

Die Grundfrage der epistemologischen Perspektive lautet: Wie kann man erklärende Gründe prinzipiell erkennen und prüfen? Mit Blick auf den eingangs zitierten allgemeinen wissenschaftstheoretischen Ansatz, dass erklärende Gründe sich durch geeignete Invarianzen ausweisen, und in Anlehnung an mathematikphilosophische Charakterisierungen speziell mathematischen Erklärens kann man präziser von erklärenden im Sinne von invarianten Mustern sprechen.

> [Explanations] make reference to a characterizing property of an entity or structure mentioned in the [explanandum]. (vgl. Steiner 1978)

Solche charakteristischen, essentiellen Eigenschaften mathematischer Objekte lassen sich als „konditionale Vermögen“ in Bezug auf ihre Repräsentationen auffassen. (Nur) auf diese hat man operativen Zugriff. Erklärende Muster beruhen auf solchen Vermögen. Hierin besteht eine epistemologische Analogie zwischen mathematischem und empirischem Erklären.

Ein **potentiell erklärendes Muster** für einen mathematischen Sachverhalt *P* ist *(im einfachen Fall)* eine geeignete Generalisierung einer konditionalen Aussage der Form:

> *Wenn bestimmte Manifestationsbedingungen aufträten/hergestellt würden, manifestierte(n) sich Eigenschaft(en) φ in Form einer geeigneten Repräsentation bzw. Interpretation von P.*

Erfüllt das Muster gewisse epistemische Invarianzkriterien, so ist es (aus epistemologischer Perspektive) ein **erklärendes Muster**. Es beschreibt, in welcher Form und unter welchen prinzipiell interventionsfähigen, spezifischen Bedingungen, Setzungen, Operationen (Manifestationsbedingungen) sich der zu erklärende mathematische Sachverhalt an der betrachteten Repräsentation als Manifestation einer oder mehrere charakteristischer mathematischer Eigenschaften erweist.

Konkretisierung am Beispiel

Thasins erster Erklärungsversuch läuft ein wenig ins Leere und wird von seinen Mitschülern nicht recht verstanden. Man kann diesen Versuch als eine „algebraische“ Erklärung rekonstruieren, die auf der Distributivität (φ) der Körperverknüpfungen Multiplikation und Addition beruht. Von Thasin werden die zugehörigen Manifestationsbedingungen (stelle 0,708 dar als 0+x und 1–y) aber nur im Ansatz formuliert („*aber hier ist ja noch ein Komma, und danach steht ja noch was*“, „*weil's nicht mal eins ist, sondern weniger*“) – es fehlen ihm dazu ja nicht zuletzt die algebraischen Darstellungsmittel. Im zweiten Versuch liefert Thasin auf Anregung des Lehrers eine „analytischere“ Erklärung, die auf Rundungseigenschaften bzw. der Monotonie der Funktion $x \mapsto x \cdot 19{,}8$ beruht (also auf anderen φ). Thasin kann diese Erklärung vollständiger und für die anderen verständlicher formulieren, dabei dient ihm der Tafelanschrieb teilweise als visuelle Stütze. Thasins potentiell erklärendes Muster lässt sich so rekonstruieren:

> *Wählte man zwei Zahlen $a < 0{,}708 < b$, so manifestierte sich die Monotonieeigenschaft darin, dass $a \cdot 19{,}8 < 0{,}708 \cdot 19{,}8 < b \cdot 19{,}8$.*

Für Thasins Erklärung ist a=0 und b=1. Das Explanandum P = „Das Ergebnis von 0,708 · 19,8 ist nicht null, aber kleiner als 19,8“ ergibt sich dann als „0,708 · 19,8 liegt zwischen 0 · 19,8 und 1 · 19,8“. Vermutlich hängt die Repräsentation, die Thasin „tatsächlich“ für sich nutzt, an den vom Lehrer an die Tafel geschriebenen Überschlagsrechnungen.

Operative epistemische Invarianzkriterien für erklärende Muster

Zwei wesentliche epistemische Invarianzkriterien für erklärende mathematische Muster sind die **Interventions-** und die **Objektinvarianz** (vgl. im Detail und zu weiteren Invarianzkriterien Müller-Hill, eingereicht). Damit sind jeweils Invarianzen unter (potentiell oder aktual) herbeiführbaren Variationen gemeint (in diesem Sinne sind es „operative“ Kriterien). Die Prüfung und Bewertung dieser Kriterien ist vom jeweiligen Hintergrundwissen und den verfügbaren Variationsmöglichkeiten abhängig, wodurch ein dialektisches Verhältnis zwischen Hintergrundwissen und Erklären entsteht. *Interventionsinvarianz* bedeutet Invarianz des Musters unter aktivem Eingriff an den Manifestationsbedingungen. Letztere sollen insbesondere für das Herstellen bzw. das Auftreten des Explanandums entscheidend, mit Woodward gesprochen *difference maker* in Bezug auf das Explanandum sein. Dies ist in Thasins Beispiel der Fall, denn es besteht eine entsprechende funktionale Abhängigkeit zwischen Manifestationsbedingungen und Manifestation, insbesondere: Wählte man *nicht* a=0 und b=1, so manifestierte sich die Monotonieeigenschaft auch *nicht* in Form einer geeigneten Repräsentation von *P*. *Objektinvarianz* bedeutet, dass das Muster unter Variation der Objekte gültig bleibt. Das rekonstruierte Muster zu Thasins Erklärung ist objektinvariant, denn es gilt nicht nur für 0,708 und 19,8, sondern sogar für zwei beliebige Zahlen in $\mathbb{R}$. Variiert man *P* entsprechend mit, so liefert das Muster gerade für Faktoren zwischen 0 und 1 eine Erklärung, denn genau dann repräsentiert sein Konsequenz für a=0 und b=1 das (variierte) Explanandum (kontrastive Objektinvarianz).

Ausblick zur pragmatischen Perspektive

Eine pragmatische Charakterisierung fasst Erklären-warum als das Antworten auf situativ herausfordernde, kontrastive Warum-Fragen und kontrafaktische Was-wäre-wenn-Fragen auf. Operative epistemische Invarianzkriterien liefern dabei eine inhaltsbezogene Basis, z.B.:

Warum tritt das Phänomen gerade für diese Objekte auf und für andere nicht? Was wäre, wenn ich eingreife, z.B. die Objekte verändere? Bleibt die Erklärhypothese gültig? (Objektinvarianz)

Warum besteht gerade dieser und nicht ein anderer Sachverhalt? Was wäre, wenn ich in Bezug auf die Manifestationsbedingungen etwas anders mache, tritt das Phänomen erneut auf, schwächt es sich ab, tritt eine wesentliche Veränderung ein? (Interventionsinvarianz)

Erklären in diesem Sinne hat stets einen dialogisch-argumentativen Kern (man kann hier etwa den Bezug zu Toulmins Theorie substantieller Argumentation herstellen, vgl. Müller-Hill 2015). Gleichzeit verweist die pragmatische Perspektive darauf, dass Erklären im Unterricht keine durchgängig argumentativ-sprachliche Struktur haben muss, denn solche Fragen können (zunächst) auch handelnd angegangen werden.

Literatur

Erath, K. (2016), *Mathematisch diskursive Praktiken des Erklärens in unterschiedlichen Mikrokulturen. Rekonstruktive Analyse von Unterrichtsgesprächen*. Dissertation, TU Dortmund, im Druck.

Müller-Hill, E. (2015), Mathematisches Erklären und substantielle Argumentation im Sinne von Toulmin, In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015 [S. 640-643]*. Münster: WTM-Verlag.

Müller-Hill, E. (eingereicht), Eine handlungsorientierte didaktische Konzeption nomischer mathematischer Erklärung.

Steiner, M. (1978). Mathematical explanation. *Philosophical Studies* 34, 135–151.

Woodward, J. (2000). Explanation and invariance in the special sciences. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 51(2), 197-254.