Leander KEMPEN, Paderborn

Beweisakzeptanz bei Studienanfängern: Eine empirische Untersuchung

Im Rahmen eines Forschungsprojekts wurde eine Operationalisierung des Konstrukts „Beweisakzeptanz“ erarbeitet, welche auf den Bewertungen der verschiedenen Funktionen eines Beweises in konkreten Beweisprodukten aufbaut. Die aus den entsprechenden Likert-Items gebildeten Skalen weisen hohe Reliabilitätswerte auf.

Generische Beweise in der Mathematikdidaktik

Generische Beweise haben sich im internationalen Kontext als didaktisch motivierte, beispielgebundene Begründungsform etabliert (etwa Dreyfus et al. 2012). Dabei wird an konkreten Beispielen ein beispielübergreifendes (generisches) Argument ausgemacht, mit dessen Hilfe allgemeingültige Verifikationen vollzogen werden können. Dieses Beweiskonzept wurde an der Universität Paderborn im Rahmen der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“ aufgegriffen.

Die Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“

Die Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“ wurde an der Universität Paderborn von Rolf Biehler entwickelt und im Wintersemester 2011/12 zum ersten Mal durchgeführt. Sie soll als Brückenveranstaltung den Einstieg in die universitäre Mathematik bereiten und ist eine Pflichtveranstaltung für Lehramtsstudierende für Haupt-, Real- und Gesamtschule. In dieser Lehrveranstaltung werden generischen Beweise (mit Zahlen und mit Punktmustern) verwendet, um den Studierenden u. a. den Übergang zu den formalen Beweisen der Hochschulmathematik zu erleichtern und um ihnen schuladäquate Begründungsformen für ihren späteren Lehrberuf zu vermitteln (Biehler & Kempen 2014). Damit auch in dem Diagrammsystem der Punktmuster ‚allgemeine‘ Darstellungen genutzt werden können, wurden so genannte geometrische Variable als Pendant zu den Buchstabenvariablen in der Algebra eingeführt (vgl. ebd.). Im Rahmen der Begleitforschung stellte sich allerdings die Frage, inwiefern die verschiedenen Beweisformen von den Studierenden ‚akzeptiert‘ werden.

Beweisakzeptanz: Konzeptualisierung und Operationalisierung

In der Literatur wird aufgrund verschiedener Parameter auf die Beweisakzeptanz Lernender geschlossen. So forderten Martin und Harel (1989) die Bewertung verschiedener Begründungen als „korrekte mathematische Beweise“ („valid mathematical proof“; ebd., S. 46) auf einer vierer Likert-

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Skala. Healy und Hoyles (2000) erhoben das Ausmaß, in dem Lernende die Funktionen Verifikation und Erklärung in vorgelegten Begründungen erfüllt sahen („… shows that the statement is always true“; „… shows you why the statement is true“; Healy & Hoyles 2000, S. 403). Die hier vorgeschlagene Konzeption von Beweisakzeptanz vereint diese beiden Grundpositionen (Passung einer Begründung mit dem individuellen Beweisbegriff und empfundenes Ausmaß verschiedener Funktionen eines Beweises). **Beweisakzeptanz** wird hier konzeptualisiert (und gleichsam operationalisiert) als *das Ausmaß, inwieweit bei einem vorgelegten Beweis vom Betrachter die Funktionen Verifikation, Überzeugung und Erklärung empfunden werden und inwieweit der Beweis durch den Betrachter als „korrekter und gültiger Beweis“ bewertet wird.*

Fragestellung, Testinstrumente und Durchführung der Untersuchung

Im Zentrum des Interesses steht die Frage, inwieweit die vier Beweisformen der Lehrveranstaltung (generischer Beweis mit Zahlen, generischer Beweis mit Punktmustern, Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen und formaler Beweis) von den Erstsemesterstudierenden des Lehramts Mathematik (HRG) akzeptiert werden. Innerhalb des vorliegenden Artikels soll allerdings nur auf die Akzeptanz des generischen Beweises mit Zahlen [„GenZ“] und des formalen Beweises eingegangen werden [„FB“]. Die Forschungsfrage ist: Wie unterscheiden sich die beiden Beweisformen der Lehrveranstaltung (der generische Beweis mit Zahlen und der formale Beweis) bzgl. ihrer Akzeptanz bei den Erstsemesterstudierenden zu Beginn der Lehrveranstaltung?

Für die Konstruktion des Testinstruments zur Erfassung von Beweisakzeptanz wurde je ein konkreter Beweis pro Beweisform ausgewählt (s.u.), der von den Studierenden anhand verschiedener Aussagen auf einer sechser Likert-Skala ([1] „stimme überhaupt nicht zu“ … [6] „stimme voll zu“) bewertet werden sollte. Hierzu gehören u. a. die Aussagen: Die Begründung… (i) „…überzeugt mich, dass die Behauptung wahr ist“ [Überzeugung], (ii) „…zeigt, dass die Behauptung 100-prozentig für alle Zeiten wahr ist“ [Verifikation], (iii) „… erklärt mir, warum die Behauptung wahr ist“ [Erklärung] und (iv) „… ist ein korrekter und gültiger Beweis“ [korrekter Beweis]. Die Erhebung fand im Rahmen einer Eingangsbefragung der Studierenden der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“ im Wintersemester 2014/15 statt.

Die zu bewertenden Beweise waren ein generischer Beweis mit Zahlen [Begründung (1)] zu der Behauptung „Addiert man zu einer ungeraden natürlichen Zahl ihr Doppeltes, so ist die Summe immer ungerade“ und ein formaler Beweis [Begründung (2)] zu der Behauptung „Für alle natürlichen

Zahlen a, b, c gilt: Wenn b ein Vielfaches von a ist und c ein Vielfaches von a ist, dann ist auch (b+c) ein Vielfaches von a.“ (s. Abbildung 1).

Begründung (1):

$$\begin{array}{rcll} 1 + 2\cdot 1 & = & 3\cdot 1 & = 3 \\ 5 + 2\cdot 5 & = & 3\cdot 5 & = 15 \\ 13 + 2\cdot 13 & = & 3\cdot 13 & = 39 \\ & (*) & (**) & (***) \end{array}$$

(*) Die Summe aus einer ungeraden natürlichen Zahl und ihrem Doppelten ist gleich dem Dreifachen der Ausgangszahl.

(**) Da die Ausgangszahl eine ungerade Zahl ist, erhält man somit immer das Produkt von zwei ungeraden Zahlen.

(***) Da das Produkt von zwei ungeraden Zahlen immer ungerade ist, muss das Ergebnis immer ungerade sein.

Begründung (2):

Seien a, b, c beliebige, aber feste natürliche Zahlen. b und c seien Vielfache von a.

Da b ein Vielfaches von a ist, gibt es eine natürliche Zahl n mit: $n \cdot a = b$.
Da c ein Vielfaches von a ist, gibt es eine natürliche Zahl m mit: $m \cdot a = c$.

Dann gilt:
$b + c = n \cdot a + m \cdot a = (n + m) \cdot a$.
Da $(n + m)$ eine natürliche Zahl ist, ist $(b + c)$ ein Vielfaches von a.
q.e.d.

Abb. 1: Die zu bewertenden Begründungen (oben: der generische Beweis mit Zahlen; unten: der formale Beweis)

Ergebnisse

In der Eingangsbefragung zur Lehrveranstaltung (WS 2015/16) wird der formale Beweis von den Erstsemesterstudierenden (n=71) bzgl. der Aspekte „Überzeugung“, „Verifikation“, „Erklärung“ und „korrekter Beweis“ höher bewertet als der generische Beweis mit Zahlen (vgl. Abbildung 2). Alle Medianunterschiede zwischen den Beweisformen sind statistisch hoch signifikant (p<,001, Wilcoxon-Test).

Durch eine explorative Faktoranalyse konnte zu jedem Beweis eine Skala zur „Beweisakzeptanz“, bestehend aus insgesamt acht Items, ausgemacht werden. Hierzu zählen die vier oben aufgeführten Items und vier weitere. Alle Faktorladungen liegen dabei über 0,5. In der Abbildung 3 werden die statistischen Daten zu den Akzeptanzskalen bzgl. der beiden hier betrachteten Beweisformen aufgeführt.

	Überzeugung	Verifikation	Erklärung	korrekter Beweis
Der generische Beweis mit Zahlen				
n	68	70	70	70
aMittel	3,49	1,97	3,74	2,81
Median	4,00	2,00	4,00	3,00
SD	1,634	1,262	1,431	1,427
Der formale Beweis				
n	67	67	67	67
aMittel	5,24	4,54	5,16	5,18
Median	6,00	5,00	6,00	6,00
SD	1,088	1,318	1,201	1,18

Abb. 2: Ergebnisse der Akzeptanzbewertungen zum generischen Beweis mit Zahlen und zum formalen Beweis (Erstsemesterstudierende)

	n	aMittel	Median	SD	Cronbachs Alpha
Akz_GenZ	67	2,8	2,63	1,134	,868
Akz_FB	67	5,05	5,25	,95	,912

Abb. 3: Statistische Daten der Akzeptanzskalen zum generischen Beweis mit Zahlen [„Akz_GenZ“] und zum formalen Beweis [„Akz_FB“]

Zu Beginn der Lehrveranstaltung liegt der Akzeptanzwert des formalen Beweises (aMittel: 5,05) statistisch hoch signifikant über dem des generischen Beweises mit Zahlen (aMittel: 2,8; $p<,001$; T-Test.)

Diskussion

Von den Studienanfängern wird der formale Beweis signifikant besser ‚akzeptiert‘ als der generische Beweis mit Zahlen. Es scheint sich somit bereits im schulischen Mathematikunterricht im Rahmen von Beweisen eine Präferenz für formale Darstellungen und eine Abkehr von beispielgebundenen Begründungen abzuzeichnen.

Literatur

Biehler, R., & Kempen, L. (2014). Entdecken und Beweisen als Teil der Einführung in die Kultur der Mathematik für Lehramtsstudierende. In J. Roth, T. Bauer, H. Koch & S. Prediger (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv gestalten. Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik* (S. 121-136). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Dreyfus, T., Nardi, E., & Leikin, R. (2012). Forms of proof and proving in the classrom. In G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (S. 191-214). Heidelberg u.a.: Springer Science + Business Media.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396-428.

Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 41-51.