Ramona BEHRENS, Würzburg

Formulieren mathematischer Fragen – mit Unterstützung eines Taschencomputers

Im Mathematikunterricht, insbesondere beim forschend-entdeckenden Lernen, ist das Stellen von Fragen und Variieren gegebener Situationen ein wichtiger Aspekt (vgl. Behrens 2015). Die KMK-Bildungsstandards (2003) für den Mittleren Schulabschluss betonen unter der Kompetenz Problemlösen, dass Schülerinnen und Schüler lernen sollen, vorgegebene Probleme zu lösen sowie eigenständig Aufgaben zu formulieren.

Das Ziel beim Formulieren von Aufgaben ist es, dass Lernende mithilfe ihrer mathematischen Erfahrung sowie Sachkenntnis aus Situationen selbstständig gutstrukturierte mathematische Aufgaben formulieren. Unter gutstrukturiert wird dabei verstanden, dass der Zielzustand aus den gegebenen Elementen und deren Beziehungen zueinander bestimmt werden kann. (vgl. Stoyanova 1997, McCarthy 1956, Dörner 1987)

Es wird zwischen dem Erzeugen neuer Aufgaben und der Umformulierung gegebener Aufgaben unterschieden. Diese Prozesse können sowohl unabhängig vom Bearbeiten einer Aufgabe als auch vor, während oder nach dem Lösen einer Aufgabe stattfinden. (vgl. Silver 1994)

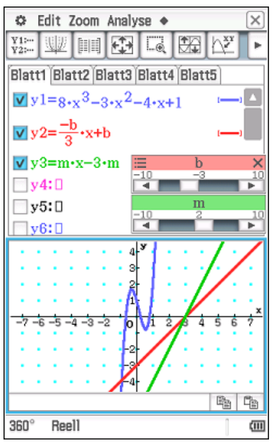
Es werden, abhängig von der Struktur der gegebenen Situationen, drei Ausgangssituationen für das Stellen mathematischer Aufgaben und Fragen unterschieden. Bei ganzstrukturierten Situationen sind Aufgaben oder auch deren Lösungen vorgegeben, zu denen neue Fragestellungen formuliert werden sollen. Halbstrukturierte Situationen sind dadurch gekennzeichnet, dass nicht alle Komponenten einer Aufgabe gegeben sind, beispielsweise könnte die Angabe des Zielzustands fehlen. Bei unstrukturierten Ausgangssituationen sollen Aufgaben zu Situationen formuliert werden, indem mögliche Elemente für die Situation gewählt und Verbindungen zwischen diesen Elementen erzeugt werden. Ein Beispiel dafür ist der Auftrag eine Aufgabe zu formulieren, die für einen Freund schwierig sein könnte. (vgl. Stoyanova 1997)

In dem Projekt sollen die Strategien, die Schülerinnen und Schüler beim Formulieren von mathematischen Fragestellungen und Variieren der gegebenen Situationen aus dem Bereich Funktionen verwenden, identifiziert werden. Dabei wird auch der Frage nachgegangen, ob und wofür die Lernenden, die im Mathematikunterricht einen Taschencomputer einsetzen, diesen auch beim Formulieren und Variieren verwenden. Als Taschencomputer werden in diesem Zusammenhang graphikfähige Taschenrechner

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

bzw. Graphikprogramme mit Computer-Algebra-System bezeichnet. Zudem soll untersucht werden, ob sich beim Formulieren von Fragen und Variieren einer gegebenen Situation Schwierigkeiten bzw. Lernchancen feststellen lassen. In der Untersuchung wurden als Ausgangspunkte vier halbstrukturierte Situationen verwendet, bei denen die Lernenden die nur teilweise vorgegebene Struktur der Situation untersuchen und diese mithilfe ihres Wissens und ihren Vorerfahrungen zu einer strukturierten Aufgabe vervollständigen sollten. Halbstrukturierte Situationen wurden gewählt, damit durch verschiedene Interpretationen der vorliegenden Situation Diskussionsbedarf in den einzelnen Gruppen besteht und unterschiedliche Fragen und Aufgabenstellungen entstehen. (vgl. u. a. auch Behrens 2015)

An der Untersuchung nahmen 33 Schülerinnen und Schüler der 10. bzw. 11. Klassenstufe von drei Gymnasien teil, die im Mathematikunterricht einen Taschencomputer einsetzen. Diese wurden in elf Dreiergruppen eingeteilt. Für jede Gruppe standen insgesamt 45 Minuten Zeit zur Verfügung und die Teilnehmer hatten die Möglichkeit, einen Taschencomputer zu verwenden. Zunächst erhielten die Lernenden in Einzelarbeit eine der vier halbstrukturierten Situationen mit dem Arbeitsauftrag sich mathematische Fragestellungen zu überlegen. Danach sollten sie in Gruppenarbeit ihre Fragen zusammentragen und sich Variationen der Situation überlegen. Abschließend wurde ein Gruppeninterview durchgeführt, bei dem die Teilnehmer u. a. nach ihrem Vorgehen und ihren Überlegungen, den aufgetretenen Schwierigkeiten und der Verwendung des Taschencomputers befragt wurden. Zudem sollten sie eine der selbstformulierten Fragestellungen beantworten. Nach der Durchführung mit den einzelnen Gruppen hat mit den Lehrpersonen ebenfalls ein Interview stattgefunden, welche die Situationen in Bezug auf die Vorkenntnisse und Vorerfahrungen der Teilnehmer einschätzen sollten. Die Gruppenarbeit sowie die Interviews wurden jeweils mithilfe einer Videokamera aufgezeichnet und anschließend transkribiert. (vgl. ebd.)



Die folgende halbstrukturierte Situation wurde in der Untersuchung verwendet: Gegeben sind eine Funktion f mit $f(x) = 8x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ und eine Gerade g, die durch den Punkt $P(3|0)$ verläuft. Mithilfe eines Taschencomputers kann die Situation veranschaulicht werden, indem beispielsweise verschiedene Geraden durch den Punkt P gezeichnet und durch Verwenden eines Schiebereglers verändert werden können. Dadurch kann u. a. geprüft werden, ob entdeckte Zusammenhänge auch bei anderen Fällen Gültigkeit haben. Als mögliche Variationen könnten Exponenten der Funktion f geändert oder zusätzliche Parameter hinzugefügt, sowie die Geradengleichung verändert werden. (vgl. ebd.)

Für die Untersuchung wurde zudem auch die folgende Ausgangssituation verwendet: Eine Parabel mit der Gleichung $p(x) = -0{,}5x^2 + 12{,}5$ mit $-5 \leq x \leq 5$ schließt mit der x-Achse ein Rechteck ein. Die Koordinaten zweier Eckpunkte des Rechtecks sind $A(-2|0)$ und $B(2|0)$. Welche mathematischen Fragestellungen fallen euch zu der gegebenen Situation ein?

Im Folgenden wird beispielhaft auf einige Fragestellungen eingegangen, die eine Gruppe zu dieser Situation formuliert hat. Die Fragestellungen deuten an, dass die Schülerinnen und Schüler die Situation unterschiedlich interpretiert und dabei verschiedene Schwerpunkte gesetzt haben. In der Einzelarbeit haben zwei der Teilnehmer zum einen Fragen zur Untersuchung der Parabel gestellt, die sie aus dem Mathematikunterricht kannten. Darunter finden sich Fragen nach Nullstellen, Scheitelpunkten, Symmetrie sowie Definitions- und Wertemenge der Parabel. Zum anderen wurden auch Fragestellungen formuliert, die sich nur auf das Rechteck bezogen, wie die Bestimmung von Flächeninhalt und Länge der Seiten des Rechtecks. Die Fragen von zwei Versuchsteilnehmern, welche in der Einzelarbeit formuliert wurden, beziehen sich hauptsächlich entweder auf die Parabel oder auf das Rechteck, weshalb dabei auch kaum Verknüpfungen zwischen diesen Objekten erkennbar sind. Diese Versuchsteilnehmer haben die Situation größtenteils statisch betrachtet. Des Weiteren wurden Fragen formuliert, welche die Lernenden mit ihren Vorkenntnissen nur näherungsweise beantworten konnten. Darunter fällt die Frage nach der Fläche, die die Parabel über der x-Achse abdeckt bzw. mit etwas anderem Fokus die Frage nach dem Anteil des Rechtecks an der Gesamtfläche. „Durch Hinzufügen welchen Faktors kann man den Scheitelpunkt der Parabel auf die x-Achse verschieben?“ sowie „Finde das Rechteck mit der größtmöglichen Fläche [...]“ zeigen, dass die beiden betrachteten Lernenden auch eine dynamische Sichtweise auf die Situation haben. Der dritte Teilnehmer dieser Gruppe hat während der Einzelarbeit keine Frage formuliert, die sich ausschließlich auf die Parabel bezieht, sondern hat den Fokus vor allem auf das Rechteck gelegt. Jede der Fragestellungen beginnt mit der Formulierung „Wo müssen die Punkte C/D liegen, damit ...?“ Beispielsweise wurde nach der Lage der Eckpunkte C und D des Rechtecks gefragt, damit das Rechteck einen bestimmten Flächeninhalt besitzt oder der Umfang des Rechtecks am größten ist. Hierbei wurde die Situation nur dynamisch betrachtet. Auch während der Gruppenarbeit dieser beispielhaft betrachteten Gruppe, bleibt eine Unterscheidung von Fragen zu der Parabel und dem

Rechteck erkennbar. Zu der Parabel werden Standardfragen zur Untersuchung von Funktionen zusammengetragen. Eine Frage hat sich im Laufe der Gruppenarbeit ergeben. Dabei geht es darum, die Winkel zu bestimmen, welche sich durch den Schnitt der Parabel mit der x-Achse ergeben. Im anschließenden Interview haben die Lernenden erklärt, wie sie die Größe des Winkels durch Einfügen von zusätzlichen Dreiecken näherungsweise bestimmen würden. Zum Rechteck haben die Lernenden vor allem Fragen bezüglich der Veränderung des Rechtecks formuliert. Hier wurden insbesondere die Fragestellungen notiert, die der oben als dritte Versuchsteilnehmer bezeichnete Lernende in der Einzelarbeit formuliert hatte. Eine weitere Fragestellung, die aus der Diskussion entstanden ist, bezieht sich darauf, wie viele Quadrate in die Parabel über der x-Achse passen, ohne dass weitere Bedingungen, beispielsweise bezüglich der Größe der Quadrate, genannt werden. Die Strategien, die diese Gruppe bei der Formulierung und Variation verwendet hat, lassen sich mit Extremalisieren, Dynamisieren, Spezialisieren (Hinzufügen von Bedingungen) und Verallgemeinern (Weglassen von Bedingungen) bezeichnen (vgl. auch Schupp 2002).

Literatur

Behrens, R. (2015): Formulieren von mathematischen Fragestellungen – unterstützt durch Taschencomputer. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2015 (S. 124–127). Münster: WTM-Verlag

Dörner, D. (1987): Problemlösen als Informationsverarbeitung. Stuttgart: Kohlhammer.

Kultusministerkonferenz (2003): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.

http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf [15.02.2016]

McCarthy, J. (1956): The Inversion of Functions Defined by Turing Machines. http://www-formal.stanford.edu/jmc/inversion.pdf [15.02.2016]

Schupp, H. (2002). Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker.

Silver, E. A. (1994). On Mathematical Problem Posing. In: For the Learning of Mathematics, 14, 1, FLM Publishing Association, Vancouver, British Columbia, Canada. 19–28. http://flm-journal.org/Articles/2A5D152778141F58C1966ED8673C15.pdf [15.02.2016]

Stoyanova, E. N. (1997): Extending and exploring students' problem solving via problem posing. A study of years 8 and 9 students involved in Mathematics Challenge and Enrichment Stages of Euler Enrichment Program for Young Australiens. Edith Cowan University, Perth, Australia. http://ro.ecu.edu.au/theses/885/ [15.02.2016]