

Brigitte LUTZ-WESTPHAL, Alexander SCHULTE, Berlin

Mathematische Forschung – Was Forschendes Lernen im Mathematikunterricht aus der Praxis lernen kann

Forschendes Lernen im Mathematikunterricht ist in den letzten Jahren immer mehr in den Fokus didaktischer Grundlagenforschung gerückt (vgl. Lutz-Westphal, 2014; Roth/Weigand, 2014). Es zeichnet sich eine klare Abgrenzung von forschendem Lernen in den Naturwissenschaften ab, da die betrachteten Objekte in der Mathematik meist abstrakt und nicht direkt beobachtbar sind. Dies hat Konsequenzen auf die Arbeits- und Kommunikationsformen (vgl. Heintz, 2000). Das Explorieren und vielfältige Hantieren mit mathematischen Strukturen muss einen breiten Raum einnehmen. Dazu kommt eine explizite Hervorhebung des Fragenstellens in eigenständiger und inhaltlich vielfältiger, mathematisch substantieller Weise (Lutz-Westphal 2014). Die Diskussion und Publikation der Erkenntniswege und Ergebnisse in geeigneter Form vervollständigen den Rahmen eines tatsächlich an Forschung angelehnten Unterrichts.

Um ein fundiertes didaktisches Konzept entwickeln zu können, muss die mathematische Forschungspraxis aus didaktischer Sicht untersucht und charakterisiert werden. Zudem interessiert die Vorstellung von Lernenden bezüglich mathematischer Forschung, um geeignete didaktische Brücken zwischen Vorstellung und Praxis bauen zu können.

1. Was verbinden Lernende mit mathematischer Forschung?

Zunächst muss geklärt werden, mit welchen Vorstellungen zu mathematischer Forschungspraxis Schülerinnen und Schüler in den Unterricht kommen. In einer ersten Untersuchung wurden insgesamt 60 Schülerinnen und Schüler aus den Jahrgangsstufen 5 und 9 sowie der Oberstufe eines Berliner Gymnasiums befragt. Eine erste Auswertung der Antworten auf die offenen Fragen ergab: Mathematik und mathematische Forschung werden von den Lernenden als Hilfsmittel wahrgenommen. In den Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler kann das Erforschen von Mathematik helfen, die Welt zu verstehen, dient aber keinem Selbstzweck. Mathematik wird durch eine hohe Anwendungsorientierung charakterisiert und nicht um ihrer selbst willen betrieben. Die Lernenden nehmen Mathematik als etwas wahr, das in Forschungsarbeit entdeckt und beschrieben werden kann, aber nicht im eigentlichen Sinne „gemacht“ wird. Auffällig ist dabei die Gleichsetzung von *Rechnen* und *Mathematik*. Forschungsanlässe könnten in der Untersuchung von besonderen Zahlen (bspw. Primzahlen) und der Vereinfachung von

„komplizierten“ Rechnungen bestehen. Ansonsten wird Mathematik überwiegend als abgeschlossenes Themenfeld wahrgenommen, in dem schon „alles“ erforscht ist. Allerdings hebt ein Großteil der Schülerinnen und Schüler durch alle befragten Jahrgangsstufen hindurch hervor, dass das Nachdenken über und das Erforschen von Mathematik unabhängig von räumlichen Gegebenheiten überall stattfinden könne. Mathematik finde vorwiegend im Kopf statt. Die Vorstellungen von mathematischer Forschung scheinen sich kaum von den Weltbildern zur Mathematik selbst (vgl. Grigutsch/Raatz/Törner, 1998) zu unterscheiden.

2. Wie kann mathematische Forschungspraxis charakterisiert werden?

Um mathematische Forschungspraxis zu beschreiben und darauf aufbauend forschendes Lernen authentisch zu gestalten, ist ein didaktischer Blick auf die Forschungspraxis nötig. Es ist dabei von Interesse, was in der Praxis erforscht wird und wie Mathematikerinnen und Mathematiker zu ihren Forschungsthemen kommen. Um der Funktionsweise mathematischer Forschung auf den Grund zu gehen, soll außerdem die alltägliche forschende Tätigkeit charakterisiert werden. In Vorbereitung einer qualitativen Studie wurden Selbstbeschreibungen verschiedener Mathematikerinnen und Mathematiker ausgewertet.

Es ist zu beobachten, dass bei der Wahl der Forschungsthemen das persönliche Interesse zwar eine gewisse Rolle spielt, aber nicht entscheidend zu sein scheint. Vielmehr werden die Themen häufig durch äußere Gegebenheiten und Vorgaben (beispielsweise Forschungsaufträge aus Drittmittelfinanzierungen) sowie die Relevanz des Themas für die Community und die damit verbundenen Möglichkeiten zur Profilierung vorgegeben. Forschungsalltag besteht nicht nur darin, Ideen zu entwickeln und zu konkretisieren. Fachlicher Austausch auf kollegialer Ebene und der Abgleich von Erwartungen und Möglichkeiten mit Industriepartnern scheinen ebenso wichtig wie Recherche und Überarbeitung von Ergebnissen und Veröffentlichungen. Erfolgreiche Forschung scheint häufig weniger von der Begabung als von Zielstrebigkeit und Fleiß abzuhängen. Vor der Gewinnung neuer Erkenntnisse steht das Aneignen von Wissen. Auf Grundlage eines etablierten Wissenskanons werden Fragen und Anknüpfungspunkte entwickelt, Intuition und Erfahrung helfen dabei. Eigene Ergebnisse stehen dabei in einem ständigen Abgleich mit anderen veröffentlichten Ansätzen. Forschung muss nicht zwangsläufig bedeuten, etwas völlig Neues zu schaffen oder zu entdecken. Oft wird bereits Bekanntes modifiziert, indem Variationen gefunden und Alternativen beachtet werden.

Zusammenfassend lässt sich schlussfolgern, dass mathematische Forschung nicht zwingend aus intrinsischer Motivation heraus erfolgt und meist in einem engen inhaltlichen Rahmen geschieht. Eigenes Nachdenken ist ebenso entscheidend wie fundiertes Recherchieren. Forschungsarbeit ist oft sehr kleinschrittig und basiert auf der Grundlage fundierten Wissens.

3. Welche Rückschlüsse ergeben sich für den Mathematikunterricht?

Authentisches forschendes Lernen im Mathematikunterricht sollte den Lernenden mathematische Arbeitstechniken vermitteln, indem eine Orientierung an der Forschungspraxis stattfindet, und auf einem fachlichen Bezugsrahmen aufbauen, der von den Lernenden durchdrungen wurde. Vor allem Schülerinnen und Schüler, die wenig Erfahrungen mit forschendem Lernen haben, benötigen eine fördernde Begleitung. Die Lernenden sollten eine Vorstellung über mögliche Vorgehensweisen beim Forschen haben und es muss Klarheit darüber herrschen, was der fachliche Rahmen ist. Die Vorgabe der Forschungsthemen durch die Lehrkraft beeinträchtigt dabei nicht die Authentizität des Forschungsvorhabens. Der Unterricht ist so auszugestalten, dass Raum und Anleitung für das Entwickeln von Forschungsfragen gegeben wird und es Phasen für den fachlichen Austausch mit den Mitschülerinnen und Mitschülern gibt. Auch wenn forschendes Lernen in der Regel ein Nach Erforschen von subjektiv unbekanntem Inhalt ist, kann authentische Forschungsarbeit stattfinden (vgl. Roth/Weigand, 2011; Messner, 2009).

4. Wie kann Unterricht darauf aufbauend konkret ausgestaltet werden?

Im Folgenden wird ein Unterrichtsprojekt vorgestellt, welches das Konzept des forschenden Lernens nutzt, um die erarbeiteten Unterrichtsinhalte zu wiederholen und zu vertiefen.

Das Unterrichtsbeispiel führt anhand des bekannten Sudoku-Rätsels in die mathematische Programmierung ein. Die Einheit wurde in einem Wahlpflichtkurs Mathematik (9. Schuljahr) an einem Berliner Gymnasium durchgeführt. Das methodische Ziel der Einheit ist die Vermittlung von wissenschaftlichen mathematischen Arbeits- und Denkweisen. Die inhaltlichen Ziele sind die Einführung in die (ganzzahlige) mathematische Modellbildung und der Umgang mit Baumsuchalgorithmen (Propagierung, Probing, Branching). Das Thema Sudoku knüpft an die Lebenswelt der Lernenden an, denn die Regeln und die gängigen „händischen“ Lösungsstrategien des Sudoku-Rätsels sind den meisten Schülerinnen und Schülern bekannt. Zunächst wurde lehrkraftgesteuert ein ganzzahliges Modell von Sudoku entwickelt (vgl. Kaibel/Koch, 2006) und eine Einführung in die gängigen Baumsuchalgorithmen durchgeführt. Anschließend folgte eine Phase der selbstständigen Forschung. Dabei bearbeiteten die Schülerinnen und Schüler selbst gestellte

Fragen wie „Nach welchen Kriterien wird ein Sudoku als ‚schwer‘ oder ‚einfach‘ bezeichnet?“ oder „Welche ‚Spezialregeln‘ sind denkbar und welchen Einfluss haben diese Regeln darauf, ob das Sudoku eindeutig lösbar ist, wie viele Zahlen mindestens dazu angegeben werden müssen und wie viele verschiedene Sudokus es gibt.“ Diese Phase wies einen hohen Grad an Selbstdifferenzierung auf. Die Lernenden arbeiteten gemäß ihren Fähigkeiten und wählten selbst den Komplexitätsgrad der Forschung. Durch den fachinhaltlichen Fokus der Einheit und die Beschäftigung mit einem aus der Schule unbekanntem Teilgebiet der Mathematik, das aktuell von herausragender wissenschaftlicher Bedeutung ist, erfuhren die Lernenden ein sehr authentisches Forschungserlebnis. Durch den forschenden Ansatz fand ein produktiver Umgang mit dem Lerngegenstand statt, der zu einem tiefen Verständnis führte. Die Mathematik sowie die Arbeitsweisen wurden sichtbar gemacht und systematisiert.

5. Fazit

Forschendes Lernen hat neben dem Ziel der Vermittlung von Forschungsmethodik und einer hinterfragenden Haltung die Funktion der fachlichen Auseinandersetzung. Es sollte in fachlich klar gestecktem Rahmen passieren und benötigt eine Wissensbasis zum Thema, die durchaus durch die Lehrkraft vermittelt werden kann. Auf dieser Basis kann dann eine authentische forschende Tätigkeit geübt und praktiziert werden und gleichzeitig eine fundierte Durchdringung des Lerngegenstandes stattfinden.

Literatur

- Grigutsch, S., Raatz, U., Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 19, 3–45.
- Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Wien: Springer.
- Kaibel, V., Koch, T. (2006). Mathematik für den Volkssport. *Mitteilungen der DMV*, 14, 93–96.
- Lutz-Westphal, B. (2014). Das forschende Fragen lernen. Pflasterungen: scheinbar Bekanntes neu durchdringen. *Mathematik lehren*, 184, 16–19.
- Messner, R. (2009). Forschendes Lernen aus pädagogischer Sicht. In Messner, R. (Hrsg.), *Schule forscht. Ansätze und Methoden zum forschenden Lernen* (S. 15-30). Hamburg: Edition Körber-Stiftung.
- Roth, J., Weigand, H.-G. (2014). Forschendes Lernen im Mathematikunterricht. In Roth J., Ames, J. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 999–1002). Münster: WTM-Verlag.