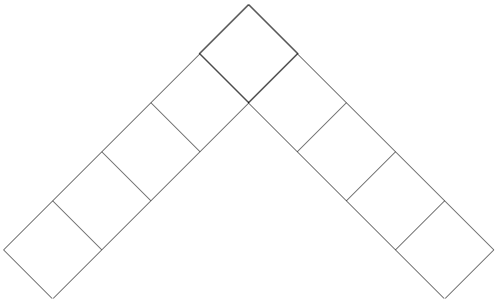
Stephan ROSEBROCK, Karlsruhe

Entdeckendes Lernen in der Sekundarstufe am Beispiel von Zahlenwinkeln

1. Entdeckendes Lernen und Zahlenwinkel

Nicht alle mathematischen Themen eignen sich gleichermaßen zum entdeckenden Lernen im Mathematikunterricht. Inhalte sind dann geeignet für Entdeckendes Lernen in der Schule, wenn es sich um einfach zu verstehende, motivierende Fragen handelt, wenn substanzielle Mathematik dahintersteckt und wenn die Fragen nicht zu schwer sind (Rosebrock 2011). Hier soll ein solches Thema aus dem Bereich Kombinatorik vorgestellt werden, welches mathematisch erstaunlich viel bietet.



Für die Grundschule gibt es eine schöne ‚Forschungsaufgabe' (Betzold 2012): Die Zahlen von 1 bis 9 sind so in den ‚Zahlenwinkel' links einzuschreiben, dass im rechten und linken Arm jeweils 4 Zahlen stehen und eine Zahl verbindet beide Arme. Dabei muss die Summe der Zahlen im linken Arm gleich der Summe der Zahlen im rechten Arm sein.

Deutlich schwieriger ist die Frage, wie viele Möglichkeiten es gibt, wenn n Zahlen so auf n Kästchen zu verteilen sind. Eine Strategie, die Schüler im Fall n=8 finden können, ist folgende: Schreibt man die 9 in die Ecke, so bleiben die Zahlen von 1 bis 8 zu verteilen. Die lassen sich in 4 Paare zerlegen mit jeweils Summe 9: (1,8), (2,7), (3,6), (4,5). Diese 4 Paare lassen sich in 3 Kombinationen verteilen. Sind das alle Lösungen für n=8?

Wir formalisieren das Problem: Sei $W_n=\{1, \dots , n+1\}$ und k ein Element aus W_n. Eine Zerlegung von $W_n\setminus\{k\}$ in zwei Mengen M_0 und M_1 heißt *zulässig*, wenn beide Mengen gleich mächtig sind und die Summe der Zahlen in beiden Mengen gleich groß ist. Sei $f_n(k)$ die Anzahl der zulässigen Zerlegungen von $W_n\setminus\{k\}$, wobei zwei Zerlegungen, bei denen nur die beiden Mengen vertauscht werden, nicht unterschieden werden sollen.

2. Ein paar mögliche Entdeckungen

n muss gerade sein, damit man nach dem Streichen der Zahl k zwei gleich mächtige Mengen bilden kann. Ist n durch 4 teilbar, so muss die zu streichende Zahl k ungerade sein, sonst ist die Summe der übrigen Zahlen unge-

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

rade und somit nicht durch 2 teilbar. Lässt n beim Teilen durch 4 den Rest 2, so muss aus demselben Grund k gerade sein.

Es gilt $f_n(k) = f_n(n+2-k)$. Zum Beweis definiert man eine bijektive Funktion $h: W_n \rightarrow W_n$ durch $h(m)=n+2-m$ und rechnet nach, dass eine Lösung mit der gestrichenen Zahl k auf eine Lösung mit der gestrichenen Zahl n+2-k abgebildet wird.

Es ist auch nicht sehr schwer, verschiedene Ungleichungen von folgendem Typ zu beweisen: $2 \cdot f_n(k) \leq f_{n+4}(k)$. Geschickt kann man hier zusätzliche Zahlen für eine zulässige Zerlegung der Menge $W_{n+4}\backslash\{k\}$ zu einer zusätzlichen Zerlegung der Menge $W_n\backslash\{k\}$ auf zwei verschiedene Arten hinzufügen.

Eine schöne Rekursion zur einfachen Ermittlung der Anzahl möglicher Lösungen bekommt man auf folgende Weise:

Sei $M = \{m_1, \ldots, m_j\}$ eine beliebige endliche Menge natürlicher Zahlen. Seien $s, t \in \mathbb{N}_0$ und sei g(M, s, t) die Anzahl der Möglichkeiten s als Summe von genau t Elementen aus M darzustellen.

Es gilt für s > 0: $g(M, s, t) = g(M\backslash\{m_j\}, s, t) + g(M\backslash\{m_j\}, s-m_j, t-1)$

Dabei beschreibt der erste Summand die Anzahl derjenigen Summen, die m_j nicht enthalten und der zweite Summand die Anzahl derjenigen Summen, die m_j enthalten. Es gibt drei Randbedingungen, mit denen dann schnell die Anzahl der zulässigen Zerlegungen gezählt werden können. Im Fall der Zahlenwinkel ist

$M = \{1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n+1\}$, $s = ((n+1)(n+2)/2-k)/2$ und

$f_n(k) = g(M, s, n/2) / 2$. Die letzte Division durch 2 kommt zustande, weil durch die Rekursion auch diejenigen Zerlegungen als zulässig gezählt werden, die sich durch Vertauschen der beiden Mengen ergeben.

Man kann, als Verallgemeinerung des ursprünglichen Problems, sich leicht klar machen, dass das gegebene Problem sich nicht wesentlich ändert, wenn man statt mit W_n mit einer Menge $\{m, \ldots, m+n\}$ startet.

3. Der Spezialfall k = n+1

In diesem Abschnitt untersuchen wir den Fall der gestrichenen Zahl n+1. Die Summe der übrigen Zahlen $\{1, \ldots, n\}$ ist n(n+1)/2. Aufgabe ist also, genau n/2 Zahlen auszuwählen, deren Summe n(n+1)/4 ist.

Wir kodieren eine zulässige Zerlegung auf folgende Weise: Wir betrachten Worte $w = x_1, \ldots, x_n$ mit $x_i \in \{0,1\}$ und gleich vielen Einsen wie Nullen, wobei $x_i = l$ heißt: $i \in M_l$. Z.B. bedeutet das Wort 11000011 für n=8: $M_0 = \{3, 4, 5, 6\}$ und $M_1 = \{1, 2, 7, 8\}$.

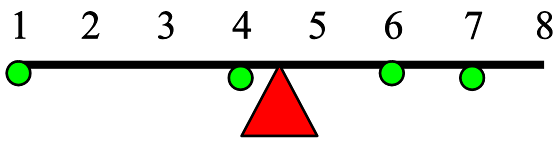
Ein solches Wort $w = x_1, \dots, x_n$ heißt *zulässig*, falls es die folgende Formel (1) erfüllt:

$$\sum_{i=1}^{n} i x_i = \sum_{i=1}^{n} i(1 - x_i)$$

Ein Wort ist damit zulässig, falls es zu einer zulässigen Zerlegung von $W_n \setminus \{n+1\}$ führt. Auf der linken Seite der Formel steht nämlich die Summe der Zahlen aus M_1 und auf der rechten Seite die Summe der Zahlen aus M_0.

Es gibt genau $\binom{n}{n/2}$ binäre Worte der Länge n mit genau n/2 Einsen. Dieser Binomialkoeffizient ist also eine obere Schranke für die Anzahl möglicher zulässiger Zerlegungen von $W_n \setminus \{n+1\}$.

Wir schildern ein, auf den ersten Blick, völlig anderes Problem: Wir haben eine Balkenwaage mit einem Balken der Länge n-1, der genau in der Mitte gelagert wird. Wir möchten n/2 gleich schwere Gewichte so an ganzzahligen Punkten lagern, dass die Waage im Gleichgewicht bleibt. Wir kodieren die Positionen einer solchen Gewichtsverteilung durch ein Wort $w = x_1, \dots, x_n$ mit $x_i \in \{0,1\}$ mit gleich vielen Nullen wie Einsen. Dabei bedeutet $x_i = 1$, dass an Position i ein Gewicht hängt.

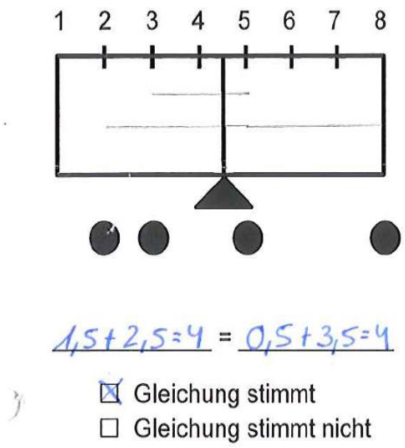


Zum Beispiel hat man für n=8 bei dem Wort 10010110 die Waage im Gleichgewicht. Es hängen Gewichte an Positionen 1, 4, 6, 7. Die Waage ist an der Stelle 4,5 gelagert. Die Abstände auf der linken Seite bis zur Mitte sind 3,5 und 0,5, zusammen 4. Die Abstände rechts sind 1,5 und 2,5 mit derselben Summe, so dass die Waage im Gleichgewicht ist. Gleichzeitig sehen wir, dass $M_0 = \{2, 3, 5, 8\}$ und $M_1 = \{1, 4, 6, 7\}$ eine zulässige Zerlegung von $W_8 \setminus \{9\}$ ist.

Was wir hier am Beispiel sehen, ist allgemein wahr: Die Waage ist genau dann im Gleichgewicht, wenn es sich um eine zulässige Zerlegung der zugehörigen Mengen handelt, genauer:

Satz: Ein Wort $w = x_1, \dots, x_n$ mit $x_i \in \{0,1\}$ mit gleich vielen Nullen wie Einsen interpretiert als Positionen in einer Balkenwaage führt genau dann zum Gleichgewicht in dieser Waage, wenn das Wort zulässig ist.

Der Beweis ist nicht schwierig, man muss nur die Gleichung zum Gleichgewicht der Balkenwaage hinschreiben und umformen bis man die Formel (1) erhält.



Der Autor hat mit einem Seminar in einer 8. Hauptschulklasse das Thema getestet. Wir sind dabei mit einer Balkenwaage gestartet und haben uns zu den Zahlenwinkeln vorgearbeitet. Links die Prüfung einer Schülerin, ob eine Waage im Gleichgewicht ist.

Die Balkenwaage führt uns zu einer unteren Schranke: Hängen wir links beliebig Gewichte, können die rechts immer symmetrisch ergänzt werden, d.h. $f_n(n+1) \geq \binom{n/2}{n/4}$.

Durchläuft n die Vielfachen von 4, so ergibt sich für $f_n(n+1)$ eine bekannte Folge (siehe OEIS): 1, 4, 29, 263, 2724, 30554, …

Barrow (Barrow 2010) fand folgende äquivalente Formulierung: Wie kann man die Ruder von n Ruderern so in einem Ruderboot platzieren (also jeweils links oder rechts vom Boot), dass beim Rudern das Boot nicht nach rechts oder links zieht?

Literatur

Barrow D., *Rowing and the Same-Sum Problem Have Their Moments*, arXiv:0911.3551, (2010).

Bezold A., Argumentationskompetenzen im Unterrichtsalltag fördern,analysieren und bewerten}, in: *Prozessbezogene Kompetenzen: Fördern, beobachten, bewerten. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2012*. Hrsg. A. Steinweg. University of Bamberg Press, Bamberg (2012), S. 9-22.

Rosebrock, S. (2011). Begabungs- und Kreativitätsförderung aus Sicht der Mathematikdidaktik, in Schenz/Rosebrock/Soff (Hg.). *Von der Begabungsförderung zur Begabungsgestaltung – Vom kreativen Umgang mit Begabungen in Mathematik*, LIT-Verlag, Berlin, S. 85 - 96.

OEIS. (2016) The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. A168238; https://oeis.org/A168238