

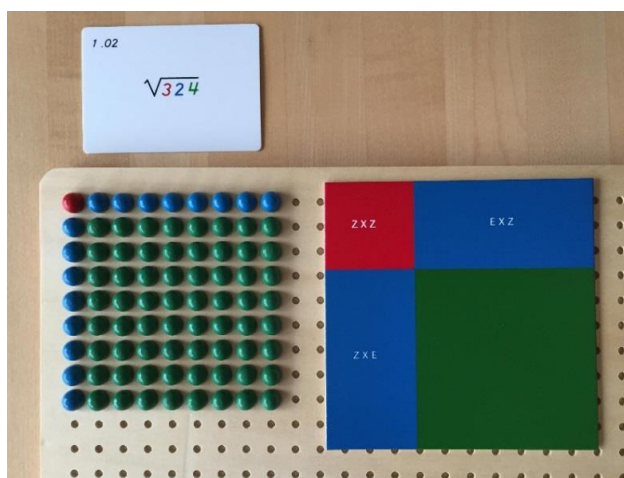
Sandra THOM, Metjendorf

Von der fortgesetzten Addition zum Wurzelziehen in der Grundschule. Jérôme S. Bruner zum 100. Geburtstag

Es waren zwei neunjährige Mädchen, die eines Tages kurz vor Beginn der Mathematikstunde zu mir kamen und stolz die Wurzeln zweier Zahlen nannten, die sie bei einem großen Bruder „aufgeschnappt“ hatten. Durch Ordnung der von beiden Mädchen unsystematisch genannten Zahlen und ihrer Wurzeln („Die Wurzel von 4 ist 2, die Wurzel von 9 ist 3, die Wurzel von 16 ist ...?“) konnten sie diese arithmetische Reihe fortsetzen und damit den Zusammenhang zu den im zweiten Schuljahr im Zusammenhang mit der Erarbeitung des Kleinen Einmaleins behandelten Quadratzahlen herstellen: Sie wollten unbedingt noch mehr ‚Wurzeln ziehen‘. Dies ist auch schon in der Grundschule möglich.

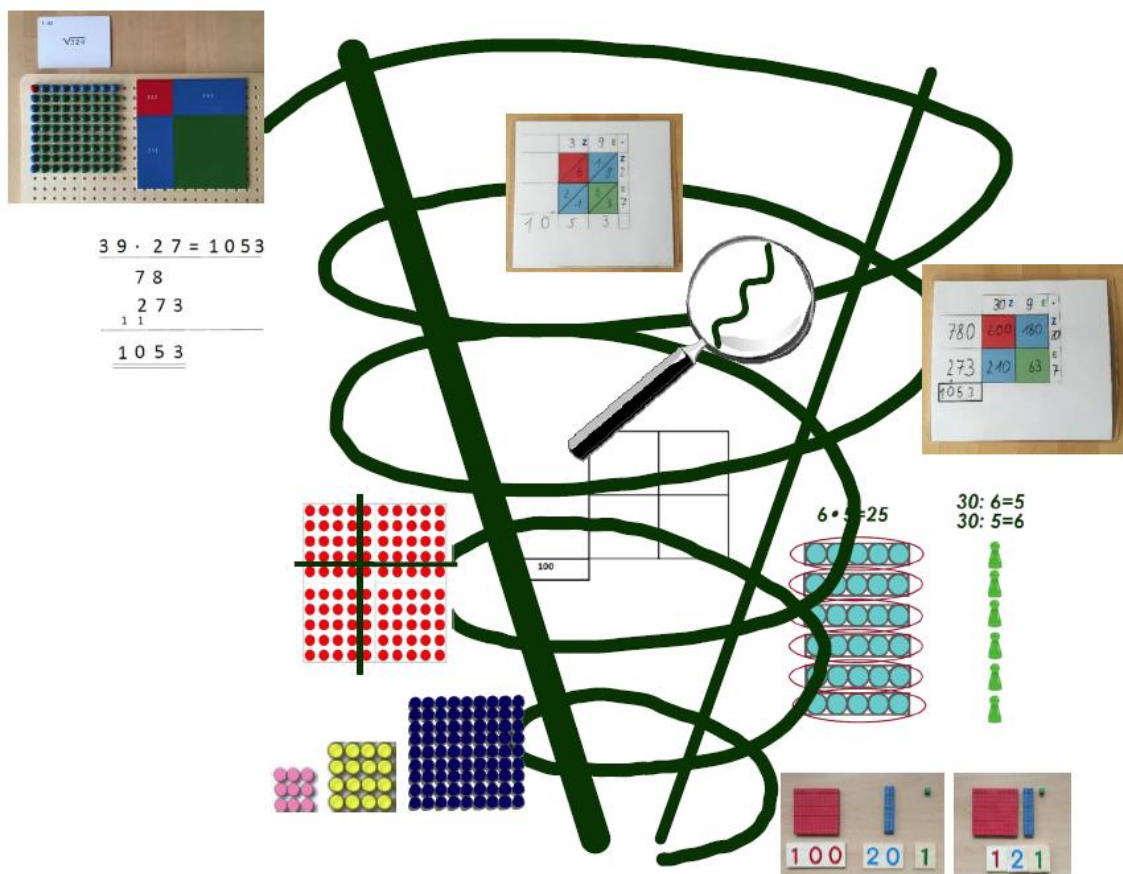
Jede beliebige Quadratzahl kann z.B. mit Plättchen bei ausreichend Platz und Zeit und Material als Quadrat ausgelegt werden; über die Seitenlänge als Menge der verwendeten Plättchen ließe sich damit die Wurzel bestimmen. Da jedoch die genannten Ressourcen bekanntlich beschränkt sind, muss bei großen Zahlen eine „Abkürzung“ her, ein Algorithmus zum Wurzelziehen.¹

Das Wurzelbrett Montessoris materialisiert Wurzeln als flächige Darstellung (bei zweistelligen Wurzeln von Zahlen zwischen 101 und 9.999 auf Basis der binomischen Formel), wie am Beispiel der $\sqrt{324}$ bildlich dargestellt. Kinder können bei entsprechendem Vorwissen mit dem Material durch einen Verteil-Algorithmus unter Nutzung der distributiven Zerlegung der Stellenwertdarstellung Wurzeln ziehen: „Jedes Kind kann auf jeder Entwicklungsstufe jeden Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form erfolgreich gelehrt werden.“ (Bruner (1973b) 44)). Voraussetzung ist ein Unterrichten im Sinne des Spiralcurriculums (Bruner (1973b) 27ff.), zu dessen Konstruktion die Lehrkraft vor allem eine vertiefte Analyse mathematischer Inhalte durchführen und Kenntnisse fundamentaler Ideen, kognitions- und entwicklungspsychologischer Zusammenhänge sowie individueller Lernvoraussetzungen besitzen muss.



¹ Vergleiche vertiefend zum Algorithmus und möglichen Ebenen des Verstehens Winter (2011).

Um das Wurzelbrett verstehend nutzen zu können, braucht das Kind grundlegende Vorstellungen mathematischer Inhalte, so zur Rechteckdarstellung der Multiplikation, besonders Quadratzahlen, wie sie u.a. mit Perlenmaterial erzeugt werden können, zum Verteilen und Aufteilen (z.B. auch mit Perlenmaterial), zur Zerlegung von Zahlen als Teil des Stellenwertverständnisses (z.B. durch Mehrsystemmaterial und Zahlenkarten) sowie zur distributiven Zerlegung im Bereich der Multiplikation sowohl an flächigen ikonischen Darstellungen (Hunderterfeld z.B.) einerseits als auch symbolischen Notationen andererseits (Malkreuz). Damit entspricht dieses Spiralcurriculum für das Wurzelziehen weitgehend dem der schriftlichen Multiplikation, was durch den operativen Zusammenhang zwischen Multiplizieren und Wurzelziehen als Spezialfall der Division bedingt ist, bei dem Divisor und Quotient als gesuchte Größe(n) gleich groß sind und durch ein Verteilverfahren algorithmisch ermittelt werden können.



Lernen und insbesondere Entdeckungslernen geht mit Vorgängen ‚im Kopf‘ des Menschen vor sich, mit Um- oder Neustrukturierungen der kognitiven Struktur, die aktiv vom lernenden Individuum vorgenommen werden ((Bruner (1973a) 16). Die in obige Darstellung einer möglichen Curriculumspirale eingebrachte Lupe soll darauf hinweisen, dass Lernvorgänge mit Anstrengung(sbereitschaft) durch das Kind verbunden sind, um die Stufe der von

Vygotskij so genannten Zone der gegenwärtigen zur Zone der nächsten Entwicklung (Lompscher / Kühn (1977⁴) 22ff.) zu erklimmen. *Scaffolding* entspricht dabei einer Lenkung von Entdeckungslernen. Grundlage für Entdeckungen ist erst einmal die Fokussierung der Aufmerksamkeit. Bereits Bruner ((1971) 47ff.) hatte auf die Problematik der individuellen Dispositionen des Kindes hinsichtlich möglicher Transfers hingewiesen. Der Einsatz von *Analogiebrücken* (Thom (2010) 255ff.) ist daher ein wichtiger Bestandteil von *scaffolding*. Analogiebrücken werden zum Teil als ‚stummer Impuls‘ in einem auf Entdeckungen ausgerichteten Unterricht eingesetzt. Sie sind jedoch nicht nur methodisch, sondern vielmehr didaktisch zu sehen: Sie nutzen Oberflächenähnlichkeit u.a. durch verbindende Farben oder Handlungen oder gleiche Aufgaben und verbinden im Hinblick auf das Spiralcurriculum im Zuge aufsteigender Abstraktion sowohl verschiedene Repräsentationsebenen (intermodaler Transfer) als auch zunehmend abstrakter Inhalte auf einer einzelnen Darstellungsebene (intramodaler Transfer).

Ähnlich ist dies für die Einführung des Wurzelziehens möglich: Indem die beiden o.g. Mädchen zunächst nach dem ihnen vertrauten Multiplikationsschema des Malkreuzes eine entsprechende Malaufgabe ($18 \cdot 18$) rechneten, konnten sie dieses Schema anschließend auf dem Wurzelbrett mit den ihnen seit dem zweiten Schuljahr vertrauten Stellenwertfarben als Stecker nachlegen, so dass sie die Wurzel wie bei den Quadratzahlen einstelliger ‚Wurzeln‘ ablesen konnten. Sie abstrahierten sodann das Schema für andere drei- bis vierstellige (Quadrat-)Zahlen und bestimmten so direkt ohne den ‚multiplikativen Umweg‘ deren Wurzeln. Durch Ausloten der Grenzen (u.a. durch Quadrieren der kleinsten dreistelligen Zahl) konnten sie den Zahlenraum begrenzen. Im Laufe der nächsten Tage legten die beiden Viertklässlerinnen zunächst die Wurzeln aus zuvor bereit gestellten und später aus selbst durch Quadrieren von ‚Wurzeln‘ errechneten Quadratzahlen und mussten sich dabei ein Vorgehen für das Umgehen mit ‚Resten‘ überlegen. Voller Begeisterung tauchten sie absolut konzentriert in diese *für sie* überhaupt nicht abstrakte Welt ein und erreichten damit *flow* (Csikczenhimalyi (1985) 61ff.) als Punkt optimaler Passung kindlicher Interessen, Fähigkeiten und Lernvoraussetzungen der Zone der gegenwärtigen Entwicklung und den an sie gestellten Anforderungen des Wurzelziehens in der Zone der künftigen Entwicklung.

Wurzeln müssen für Lehrende und Lernende nicht die abstrakten und nebulösen mathematischen Gebilde im Elfenbeinturm algebraischen Operierens sein, die sie beispielsweise für Lehramtsstudierende nur allzu häufig sind. Versteht man sie geometrisch-algebraisch als ‚Ursprung einer Seite‘ und als ‚Wurzel‘ der Quadratzahlen, wie es historisch bei zahlreichen Mathemati-

kern von Euklid in der griechischen Mathematik über Āryabhata und Brahmagupta, al-Khwarizmi und al-Uqlīdīsī in der indisch-arabischen Mathematik bis hin zu Mathematikern des europäischen Mittelalters und der Neuzeit wie u.a. Fibonacci in der einen oder anderen Variante zu erkennen ist, so kann dieses Wissen und Verständnis als Verbindung historisch-genetischen Lernens mit psychologisch-genetischem Lernen genutzt werden (Thom (2013) 10ff.), um ein Spiralcurriculum zu entwerfen, das auf Grundlage inter- wie intramodalen Transfers Mathematiklernenden wie den beiden oben genannten Mädchen erlaubt, ‚intellektuell ehrlich‘ Wurzeln *verstehen* und ziehen zu können.

Es ist das Verdienst Jerôme S. Bruners, diese Begrifflichkeiten – entdeckendes Lernen, EIS-Prinzip, Spiralcurriculum – in die Mathematikdidaktik eingebracht und sie damit wie kein anderer nachhaltig geprägt zu haben. Die weitere Erforschung der Gelingensbedingungen entdeckenden Lernens vermag zu seiner Konkretisierung und damit zur weiteren Professionalisierung von Lehrkräften beizutragen. Analogiebrücken sind Teil von *scaffolding* als Lenkung von Entdeckungslernen, sie sind der kognitive Leim entdeckenden Lernens, um *jedem Kind* aktiv-entdeckendes Lernen möglich zu machen – nicht nur bei Wurzeln.

Literatur

- Bruner, J. S. (1973a). Der Akt der Entdeckung. In H. Neber (Hrsg.): *Entdeckendes Lernen*. Weinheim / Basel: Beltz, 15-27
- Bruner, J.S. (1973b³). *Der Prozeß der Erziehung*. Düsseldorf: Berlin Verlag / Pädagogischer Verlag Schwann
- Bruner, J. S. (1971). Über kognitive Entwicklung. In ders. et al. (Hgg.). *Studien zur kognitiven Entwicklung. Eine kooperative Untersuchung am "Center for Cognitive Studies" der Harvard-Universität*. Stuttgart: Ernst Klett, 21-53
- Csikszentmihalyi, M. (1985). *Das Flow-Erlebnis. Jenseits von Angst und Langeweile: im Tun aufgehen*. Stuttgart: Klett-Cotta
- Lompscher, J. / Kühn, H. (1977⁴). Das Lernen als Grundvorgang der Persönlichkeitsentwicklung. In: J. Lompscher et al. (Hgg.). *Psychologie des Lernens in der Unterstufe*. Berlin: Volk und Wissen, 11-74
- Thom, S. (2013). Geschichte der Mathematik in der Grundschule. In dies. (Hrsg.). *Historisch-genetisches Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule. Forschen – Fördern – Fordern*. Hildesheim: Franzbecker, 1-26
- Thom, S. (2010). *Kinder lernen entdeckend. Eine hermeneutische Untersuchung zur Konzeption und Realisierung des Mathematikunterrichts Maria Montessoris*. Hildesheim: Franzbecker
- Winter, M. (2011). Ebenen des Verstehens: Überlegungen zu einem Verfahren zum Wurzelziehen. In M. Helmerich et al. (Hgg.). *Mathematik verstehen. Philosophische und Didaktische Perspektiven*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 189-198