Benjamin ROTT, Essen

Zusammenhänge von Unterrichtsgestaltung und Beliefs zum mathematischen Problemlösen (ProKlaR)

Hintergrund

Im Rahmen des Projekts ProKlaR (Problemlösen im Klassenraum) werden Lehrkräfte gebeten, Problemlöse-Stunden zu planen, zu halten und zu reflektieren; Fragestellungen des Projekts lauten: *Wie gestalten Lehrerkräfte Unterricht mit dem Inhalt „Problemlösen“?* Konkreter: *Wie gehen sie dabei vor? Welche Schwerpunkte setzen sie? Wie viele Freiheiten geben sie ihren Lernenden?* Details zum Projekt finden sich z. B. in Rott (2015).

Im Anschluss an ihre Stunde werden die Lehrkräfte interviewt – u. a. um ihre Einstellungen zur Mathematik und zum Problemlösen zu identifizieren. Hier soll exemplarisch gezeigt werden, dass diese Überzeugungen große Erklärungskraft in Bezug auf das beobachtete Lehrverhalten besitzen.

Überzeugungen zur Mathematik

Ernest hat bereits Ende der 1980er Jahre verschiedene mögliche Überzeugungen (engl. Beliefs) zur Mathematik zusammengestellt und ausführlich diskutiert. Die Quintessenz dieser Arbeit fasst er wie folgt zusammen:

> “First of all, there is a dynamic, problem-driven view of mathematics as a continually expanding field of human inquiry. Mathematics is not a finished product, and its results remain open to revision (the problem-solving view).
>
> Secondly, there is the view of mathematics as a static but unified body of knowledge, consisting of interconnecting structures and truths. Mathematics is a monolith, a static immutable product, which is discovered, not created (the Platonist view).
>
> Thirdly, there is the view that mathematics is a useful but unrelated collection of facts, rules and skills (the instrumentalist view).” (Ernest, 1989, S. 21)

In Deutschland haben insb. Grigutsch und Törner die Überzeugungen von Mathematiklehrkräften untersucht. Sie unterscheiden zunächst zwei grundsätzliche Leitvorstellungen über Mathematik – „Prozess“ und „System“:

> „Mathematik [kann] in vereinfachter Form in statischer Sicht als System oder in dynamischer Sicht als Prozeß bzw. als Tätigkeit [aufgefasst werden]. Beide Standpunkte sind nicht einfach voneinander zu trennen, so daß man manchmal von einer Janus-Köpfigkeit der Mathematik spricht.“ (Grigutsch et al., 1998, S. 11)

In ihren empirischen (Fragebogen-) Untersuchungen haben Grigutsch und Törner die System-Vorstellung unterschieden in „Formalismus“ und „Schema“; zusätzlich erfassen sie den Anwendungsbezug der Mathematik, sodass sie auf vier Beliefdimensionen kommen: *Prozess*, *Schema*, *Formalismus* und *Anwendung*. Mit Bezug auf die Sichtweisen nach Ernest lässt

In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

sich „Mathematik als Prozess“ dem *problem-solving view of mathematics* zuordnen, „Mathematik als System“ ist recht passgenau zum *Platonist view* und der „Anwendungsaspekt“ entspricht dem *instrumentalist view of mathematics* (teilweise auch als „Mathematik als Toolbox“ bezeichnet).

Methodische Entscheidungen

Die Gestaltung von Unterrichtsstunden wird mithilfe des Kodierschemas (von zwei unabhängigen Ratern) für Unterricht aus der Schweizerisch-Deutschen Videostudie (Hugener, 2006) erfasst. In diesem Beitrag werden von den Stunden vereinfachend nur die kumulierten Dauern der Sozialformen angegeben, um auf die Schülerorientierung der Lehrkräfte zu schließen. Die Interviews werden im Team interpretiert.

Zur Teilnahme an der Studie konnten – zum Teil im Rahmen studentischer Abschlussarbeiten – bislang acht (Stand: November 2015) Lehrkräfte gewonnen werden. Drei typische Vertreter werden hier vorgestellt:

- Lehrerin A. Eine junge Lehrerin, die ihr Referendariat vor ca. 1,5 Jahren beendet hat und nun an einem Hannoveraner Gymnasium arbeitet. Gefilmt wurde eine Stunde zur „Sieben Tore“-Aufgabe in Jahrgang 6.
- Lehrerin D. Eine Lehrerin mit fast 25 Jahren Berufserfahrung, die an einem Gymnasium in Essen arbeitet. Gefilmt wurden zwei selbstgewählte Probleme in Jahrgang 9, die mithilfe einer Anwendung des Satzes des Pythagoras gelöst werden konnten.
- Lehrerin E. Eine Lehrerin mit etwa 8 Jahren Berufserfahrung, die an einem Essener Gymnasium arbeitet. Gefilmt wurde eine Stunde zur „Sieben Tore“-Aufgabe in Jahrgang 6.

Die beiden Lehrerinnen A und E haben jeweils aus drei für die Studie vorgegebenen Problemen die „Sieben Tore“-Aufgabe für ihre 6. Klassen ausgewählt. Lehrerin D hat ein eigenes Problem, das „Tunnelproblem“, für ihre 9. Klasse formuliert, um durch das Filmen „keine Stunde zu verlieren“.

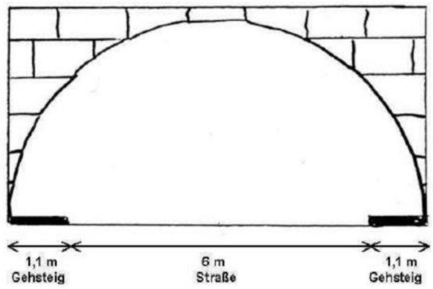
Sieben Tore

Ein Mann geht Äpfel pflücken. Um mit seiner Ernte in die Stadt zu kommen, muss er 7 Tore passieren. An jedem Tor steht ein Wächter und verlangt von ihm die Hälfte seiner Äpfel und einen Apfel mehr. Am Schluss bleibt dem Mann nur ein Apfel übrig.

Wie viele Äpfel hatte er am Anfang? [Quelle: Bruder et al. 2005]

Tunnelproblem

Kann ein LKW mit einer Höhe von 2,70m den halbkreisförmigen Tunnel passieren?



[Quelle: *Mathematik heute*, Text gekürzt]

Ausgewählte Ergebnisse

In den Daten (siehe Tabelle 1) fällt beispielsweise auf, dass insbesondere Lehrerin D sehr viel Zeit der Stunde im Plenum organisiert hat und dabei im Vergleich zu ihren Schülern den mit Abstand größeren Redeanteil hatte.

Sozialform	Lehrerin A	Lehrerin D	Lehrerin E
Einzelarbeit	05:35 (13,2%)	18:30 (32,0%)	17:14 (37,3%)
Partnerarbeit	11:30 (27,2%)	---	19:05 (41,4%)
Öffentl. Gespräch	25:10 (59,6%)	39:16 (68,0%)	09:50 (21,3%)
Redeanteile in öffentlichen Phasen	L: 08:50 (35%)	L: 20:19 (56%)	L: 07:51 (80%)
	S: 12:00 (48%)	S: 07:11 (20%)	S: 00:52 (09%)
	Still: 04:20 (17%)	Still: 09:55 (24%)	Still: 01:07 (11%)
Total	42:15 (100%)	57:46 (100%)	46:09 (100%)

Tabelle 1: Kumulierte Dauern der Sozialformen in den Unterrichtsphasen

Zusammenhänge von Unterrichtsgestaltung und Beliefs

Auf die Fragen, was für sie ein Problem sei und wie wichtig ihr diese Thematik im Unterricht sei, antwortete *Lehrerin A*: „[Ein Problem ist] eine Aufgabe, bei der der Lösungsweg nicht vorgeschrieben oder offensichtlich ist. Normalerweise gibt es mehrere Lösungswege.“ Im Unterricht wäre es so, dass „[Schüler] zu 100 Prozent […] Schema-F-Sachen [lernen], das ist leider so, entspricht aber nicht meinem Verständnis.“ Ihr ist es wichtig, dass die Lernenden Offenheit gegenüber verschiedenen Lösungswegen entwickeln und Werkzeuge besitzen, um sich mit Problemen auseinanderzusetzen. Ihre Überzeugungen zur Mathematik lassen sich insgesamt gut mit dem *problem-solving view* beschreiben. In der gezeigten Stunde spiegelt sich das insofern wider, dass sie den Schülern viel Zeit für das eigene Arbeiten einräumt und in der Besprechungsphase die verschiedenen Ansätze diskutieren lässt, ohne vorschnell auf eine „richtige“ Lösung zu drängen.

Für *Lehrerin D* ist ein Problem „irgendein Sachverhalt […], dessen Lösung man noch nicht weiß, wo es aber irgendwo ein Ziel, eine Lösung gibt, die man mit bekannten Mitteln erreichen soll.“ Ein gutes Problem ist ein „Sachverhalt, [den sich die Klasse] besonders gut vorstellen [kann], sodass die Umsetzung vom Text in die Aufgaben nicht zu schwierig ist.“ Im Gespräch wird deutlich, dass sie dem *instrumentalist view* zugeordnet werden kann. In der Aufgabenbesprechung werden (zeichnerische) Näherungslösungen der Schüler von ihr als „zu ungenau“ abgelehnt, sie selbst referiert abschließend eine rechnerische Lösung des „Tunnelproblems“ mithilfe des Satzes des Pythagoras und lässt alle Schüler den Rechenweg abschreiben.

Lehrerin E sagt: „ein Problem ist ein Sachzusammenhang, bei dem nicht sofort klar ist, welche Rechenschritte gemacht werden müssen, sondern bei dem ein bisschen Experimentieren erforderlich ist.“ Wichtig ist ihr das Herausfinden von Zusammenhängen. Ihre Aussagen sind sowohl mit dem *problem solving* als auch dem *Platonist view* vereinbar. In ihrem Unterricht lässt sich den Schülern einerseits viel Zeit zum eigenen Entdecken, andererseits steuert sie den Bearbeitungsprozess durch ausführliche Hilfekärtchen und referiert im abschließenden Unterrichtsgespräch die Lösung der Aufgabe, ohne ihre Schüler zu Wort kommen zu lassen. Spannend ist, dass Lehrerin E selbst den Eindruck hatte, „einen relativ niedrigen Redeanteil“ zu haben und dass die Schüler „viel selbstständig“ gearbeitet hätten.

Diskussion

In den ausgewählten Beispielen zeigt sich – wie in bislang allen im Rahmen der Studie analysierten Stunden und Interviews – eine sehr gute Passung zwischen den Beliefs zur Mathematik und der Gestaltung einer Problemlöse-Stunde. Z. B. geht der *problem-solving view* durchgängig mit hoher Schülerorientierung einher. Lehrerfortbildungen, die die Unterrichtsgestaltung insofern beeinflussen sollen, dass problem- und schülerorientiert (was insb. schülerzentrierte Sozialformen und Redeanteile in Plenumsgesprächen anbelangt) unterrichtet wird, sollten also auch (evtl. sogar vorrangig) auf eine Veränderung der mathematikbezogenen Überzeugungen der Lehrkräfte hinarbeiten. Letzteres kann nur langfristig und in aktiver Auseinandersetzung mit Mathematik gelingen, von einmaligen Fortbildungsangeboten kann man in diesem Zusammenhang kaum Effekte erwarten.

Literatur

Bruder, R., Büchter, A. & Leuders, T. (2005). Die „gute“ Mathematikaufgabe ein Thema für die Aus- und Weiterbildung von Lehrerinnen und Lehrern. In G. Graumann (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005* (S. 139-146). Hildesheim: Franzbecker.

Ernest, P. (1989). The Knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: a model. *Journal of Education for Teaching: International Research and Pedagogy, 15*(1), 13-33.

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik, 19*(1), 3-45.

Hugener, I. (2006). Kapitel 4 – Sozialformen und Lektionsdauer. In E. Klieme, C. Pauli & K. Reusser (Hrsg.), *Dokumentation der Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerisch-deutschen Videostudie. Teil 3 – Videoanalysen* (S. 55 – 61). Frankfurt am Main: Materialien zur Bildungsforschung.

Rott, B. (2015). Problemlösen im Klassenraum – Konzeption und erste Ergebnisse. In A. Kuzle & B. Rott (Hrsg.), *Problemlösen gestalten und beforschen. Herbsttagung des GDM-Arbeitskreises Problemlösen 2014* (S. 75 – 91). Münster: WTM-Verlag.