

## Eröffnungsszenarien unterrichtlichen Problemlösens

Mathematische Probleme zu lösen, gehört zum Selbstverständnis derjenigen, die sich mit Mathematik befassen. Aus mathematikdidaktischer Sicht ist es daher von großem Interesse, wie mathematisches Problemlösen gelingen kann und wie von Schülerinnen und Schülern entsprechende Kompetenzen erworben werden können (vgl. Heinrich et. al. 2015, S. 279). Anregungen zur Beantwortung dieser Fragen können aus Analysen von Problemlöseunterricht gewonnen werden. Vor diesem Hintergrund berichten wir im Weiteren über eine empirische Erkundungsstudie in der Jahrgangsstufe vier. Sie befasste sich u. a. mit der Frage, wie Lehrpersonen mit ihren Schülerinnen und Schülern die Arbeit am Problem beginnen.

### Die Eröffnungsphase beim „herkömmlichen“ Problemlösen

Phasenverlaufsmodelle mathematischen Problemlösens haben Tradition. Das Modell von Pólya (1949) kann als das bekannteste seiner Art angenommen werden. Die Phase „Verstehen des Problems“ kennzeichnet dabei den Arbeitsbeginn. Sie und entsprechende Phasen in verwandten Modellen, z. B. von Mason, Burton & Stacey (2008) werden insbesondere durch diejenigen Inhalte und Tätigkeiten charakterisiert, die in der folgenden Übersicht angegeben sind. Zudem finden sich in der Literatur methodische Ratschläge zur Gestaltung dieser Tätigkeiten.

#### Verstehen des Problems:

... mit dem Problem vertraut werden, es verstehen und durchdringen ...

#### *Inhalte/Elemente/Tätigkeiten*

- Wortlaut des Problems verstehen,
- Hauptteile des Problems herausarbeiten (Gegebenes/Bekanntes, Gesuchtes/Unbekanntes, Bedingungen)
- nicht selten auch technische Vorbereitungen für die Lösungsdurchführung treffen (Bezeichnungen, Skizzen, ...)

#### *Methodische Empfehlungen, z. B.*

- Text wiederholen,
- ihn mit eigenen Worten wiedergeben,
- ihn fließend formulieren,
- bei sehr vielen Informationen diese schon ordnen,
- Unklarheiten und missverständliche Aussagen ausräumen,
- Kern der Frage erfassen

In der Literatur wird die Bedeutung dieser Phase nachdrücklich unterstrichen. Beispielsweise heben Mason, Burton & Stacey (2008, S. 29) hervor, dass sich einige Problembearbeiter auf die erste beste Idee stürzen, ohne sich vorher Gedanken zu machen. Dieser erste Ansturm führt oft deswegen

ins Leere, weil sie die Frage nicht richtig verstanden haben. In einer auf die Grundschule bezogenen Schrift verweisen Schnabel & Trapp (2012, S. 21) darauf, dass aktuelle internationale Studien zeigen, dass gerade auch das Textverständnis ganz erheblichen Einfluss ausübt, eine Aufgabe zunächst zu verstehen und dann lösen zu können. Es besteht Konsens, dass es sinnvoll ist, einige Überlegungen zu einem effektiven Start anzustellen und dadurch Grundlagen für eine erfolgreiche Lösungsdurchführung zu legen.

### **Die Eröffnungsphase beim unterrichtlichen Problemlösen**

Wegen der oben geschilderten Bedeutung der „Verstehensphase“ sind wir der Frage nachgegangen, in welcher Weise wir beim Problemlösen im Klassenraum die als bedeutsam angesehenen Inhalte bzw. Tätigkeiten dieser Phase (s.o.) aufgegriffen finden. Unser Blick richtet sich dabei auf das Verhalten der Lehrperson.

Wir haben im Rahmen einer explorativen Studie untersucht, wie Lehrende (von uns vorgegebene) Probleme in einer Mathematikunterrichtsstunde behandeln und werden uns im Weiteren insbesondere den jeweiligen Eröffnungsphasen zuwenden. Dazu wurden 16 Stunden des Problemlöseunterrichts videografiert und analysiert. Den auf freiwilliger Basis teilnehmenden Lehrpersonen wurde zwei Wochen vor Unterrichtsdurchführung die jeweilige Problemformulierung ausgehändigt. Lösungen, Bearbeitungs- oder Unterrichtshinweise erhielten sie nicht. Der Unterricht wurde mithilfe zweier Kameras aufgezeichnet. Zudem wurden die Lehrenden unmittelbar vor der jeweiligen Unterrichtsstunde nach Zielen und geplantem methodischen Vorgehen befragt. Darüber hinaus hatten sie im Anschluss an die Stunde Gelegenheit über den Unterrichtsverlauf zu reflektieren. Es kamen zwei (bekannte) Probleme vom Typ „problemhaltige Textaufgaben“ (Rasch 2001) zum Einsatz, je 8 Lehrpersonen unterrichteten das gleiche Problem.

#### **Kühe-Enten-Problem (KE)**

*Auf einer Wiese stehen Kühe und Enten. Zusammen haben sie 26 Beine. Wie viele Kühe und wie viele Enten können es sein?*

#### **Teufelsproblem (T)**

*Der Teufel sagte zu einem armen Manne: „Wenn du über die Brücke gehst, will ich dein Geld verdoppeln. Doch jedes Mal, wenn du zurückkommst, musst du für mich 8 Taler ins Wasser werfen.“ Als der Mann das dritte Mal zurückkehrte, hatte er keinen blanken Taler mehr. Wie viele Taler hatte er am Anfang? Begründe deine Antwort!*

Wir konnten feststellen, dass 6 der 16 Lehrpersonen nach der Darbietung des Problems mit den Kindern keine Verstehens- bzw. Analysephase im Sinne von Pólya durchgeführt haben. Beim KE-Problem war das bei vier

Lehrpersonen der Fall und beim T-Problem bei zwei Lehrkräften. Wegen der oben hervorgehobenen Bedeutung der Pólyaschen Verstehensphase verwundert es zunächst, dass im Kontext Unterricht vor dem eigentlichen Lösen des Problems mögliche Elemente dieser Phase lehrerseitig nicht erkennbar thematisiert worden sind. Wir kommen darauf zurück.

Hinsichtlich der Eröffnungsphasen der anderen Lehrpersonen konnten wir die folgenden Elemente/Tätigkeiten herausarbeiten, die auf das Durchdringen und Verstehen des Problems gerichtet waren: 1-Inhaltswiedergabe mit anderen (auch eigenen) Worten, 2-Herausstellen von Gegebenem, Gesuchtem und von Bedingungen, 3-Sachverhalt anders darstellen, 4-Klärung auftretender Fragen, 5-Absicherung grundlegender Wissens Elemente (mathematischer Art, aber auch Allgemeinwissen). Am häufigsten fanden die Elemente 2, 3 und 4 Verwendung; 1 und 5 traten hingegen nur peripher auf. Diese Ergebnisse können der Spezifika der beiden verwendeten Probleme geschuldet sein. Zudem war die Breite des Einbezugs solcher Tätigkeiten von Lehrkraft zu Lehrkraft unterschiedlich. So kamen pro Lehrkraft zwischen ein und vier Elemente zum Einsatz. Das kann unterschiedlichen Gründen geschuldet sein. Ob Lehrpersonen existieren, die nahezu immer bemüht sind, Verstehenselemente in großer Breite einzubeziehen; und ob es solche gibt, die sich auch in anderen Problemlösesituationen in der Regel auf wenige Verstehenselemente besinnen, muss weiteren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

### **Verstehenselemente während und nach der Arbeit am Problem**

Da bei einem großen Anteil der an der Studie beteiligten Lehrpersonen keine Verstehens- bzw. Analysephase vor dem eigentlichen Lösungsbeginn auszumachen war (s. o.), sind wir der Frage nachgegangen, warum das so ist. Wir vermuteten, dass es unter anderem der didaktischen Absicht der Lehrperson geschuldet ist, d. h. der Frage, welche Lernziele mit der Bearbeitung des Problems angesteuert werden. Die Vermutung wurde zumindest teilweise bestätigt. So äußerten mehrere Lehrpersonen in einem Interview vor der jeweiligen Unterrichtsstunde sinngemäß, dass das selbständige Lösen einzeln oder in Gruppen praktiziert wird bzw. dass eine bekannte Schrittfolge zum Lösen von Text- bzw. Sachaufgaben selbständig angewendet werden soll. In beiden Fällen geht es um selbständige Schülertätigkeit, was erklären kann, dass die Lehrpersonen das Problem von den Kindern bearbeiten lässt, ohne vorher eine Verstehensphase im Unterricht zu platzieren.

Vor diesem Hintergrund stellte sich die Frage, ob an späterer Stelle im jeweiligen Problemlöseunterricht auf Tätigkeiten des Verstehens eingegangen wurde, vielleicht im Rahmen einer Rückschau nach Beendigung der

Problemlösebemühungen. Hier könnte von der Lehrperson die Wichtigkeit solcher Tätigkeiten an Beispielen (wiederholend) aufgegriffen bzw. bewusst gemacht werden. Auch diese Vermutung wurde bestätigt. So haben zwei der sechs Lehrpersonen, die für die Kinder keine Analyse- bzw. Verstehensphase gestaltet hatten, entsprechende Tätigkeiten während des Suchens und Findens einer Lösung und/oder nach Beendigung der Lösungsbemühungen thematisiert. Dieser Befund regte uns an zu prüfen, ob auch bei denjenigen Lehrkräften, die das Problemlösegeschehen mit einer Verstehensphase eröffnet haben, Elemente dieser Phase zudem noch an späterer Stelle im Lösungsprozess auftreten bzw. wiederkehren. Wir stellten fest, dass dies für einige zutrifft. Sowohl während der eigentlichen Arbeit am Problem (also während des Suchens und Findens einer Lösung), als auch im Rahmen retrospektiver Befassung mit dem Getanen (also im Rahmen einer Rückschau) bezogen Lehrpersonen Analyse- und Verstehens-elemente in den Unterricht ein. Zumeist handelte es sich dabei um Maßnahmen zum Textverständnis.

Wir halten fest, dass beim unterrichtlichen Problemlösen Elemente der Pólyaschen Verstehensphase nicht nur vor dem eigentlichen Bearbeiten zum Einsatz gelangen können, sondern auch an späteren Stellen, also während oder nach der Problembearbeitung, lehrerseitig thematisiert werden. Es hat sich aber auch herausgestellt, dass in vier von 16 Problemlösestunden über den gesamten Bearbeitungsprozess hinweg keinerlei Lehreraktivitäten von uns erkannt wurden, die sich als Tätigkeiten des Durchdringens und Verstehens des Problems ausweisen lassen. Hier sind unseres Erachtens weiterführende Untersuchungen nach dem „Warum?“ angezeigt.

## **Literatur**

- Heinrich, F., Bruder, R. & Bauer, C. (2015). Problemlösen lernen. In: R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.): Handbuch der Mathematikdidaktik, S. 279-301. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- Mason, J., Burton, L., Stacey, K. (2008). Mathematisch denken<sup>5</sup>. München: Oldenbourg.
- Pawlitzki, A. (2011). Empirische Erkundungen zur Behandlung des „Teufelsproblems“ im Mathematikunterricht der Grundschule. Masterarbeit, TU Braunschweig.
- Pólya, G. (1949). Schule des Denkens. Bern: Francke.
- Rasch, R. (2001): Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Hildesheim: Franzbecker.
- Schnabel, J. & Trapp, A. (2012): Problemlösendes Denken im Mathematikunterricht. Donauwörth: Auer.
- Schuck, L.-D. (2011). Empirische Erkundungen zur Behandlung des „Enten-Kühe-Problems“ im Mathematikunterricht der Grundschule. Masterarbeit, TU Braunschweig.