Rainer KAENDERS, Bonn, Christoph KIRFEL, Bergen

Weiterentwicklung historischer Zugänge zur Infinitesimalrechnung über Elementargeometrie

Bei der Einführung der Integration in der Schule wird üblicherweise eine Herangehensweise verfolgt, bei der erst der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Berechnung der Integrale bei den Funktionen erlaubt, die in der Schule behandelt werden.

Die in der Schule vorkommenden Potenz- und Exponentialfunktionen sowie Logarithmen und die trigonometrischen Funktionen sind Realisierungen wichtiger funktionaler Eigenschaften, die häufig den Schülern bekannt sind, bevor sie den Integralkalkül angehen. Die Auseinandersetzung mit diesen Eigenschaften spezieller Funktionen spielt in der Schule eine größere Rolle als die abstrakte Behandlung aller (stetigen) Funktion. Dies bereitet auf die höhere Analysis und insbesondere die Behandlung von Differentialgleichungen vor, die wir als eine Form von Symmetriebedingung begreifen.

Entlang historischer Ideen des 17. Jahrhunderts (u.a. des Gregorius von St. Vincent) setzen wir Begriffe der Infinitesimalrechnung mit diesen Eigenschaften in Verbindung und zeigen einen Zugang zur Analysis, der wichtige Ideen der Geometrie vertiefend aufgreift und hiermit einen beziehungshaltigen Einstieg in die Infinitesimalrechnung ermöglicht. In Kaenders & Kirfel (2016) werden die Ergebnisse ausführlicher dargestellt.

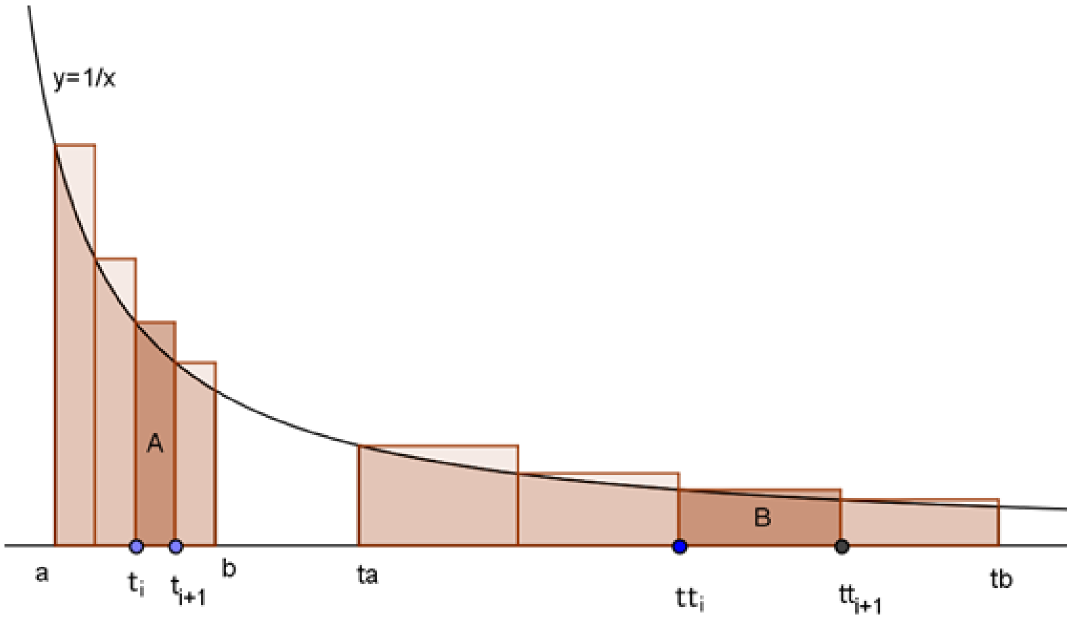
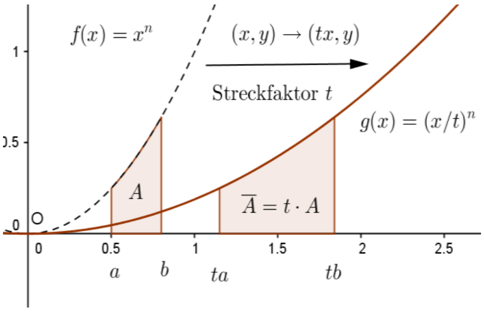


Abbildung 1: Gleicher Flächeninhalt der Rechtecke A und B unter der Hyperbel.

1. Integration à la Gregorius



Gregorius (*1584 Brügge, †1667 Gent) war ein flämischer Jesuit am St. Vincent Kloster, der als erster die Fläche unter der Hyperbel berechnen konnte.

Das Integral $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ war schon von Pierre de Fermat und Gilles Personn de Roberville berechnet worden, doch keine der Fermatschen Methoden können für die Hyperbel angewandt werden. Gregorius hatte beobachtet, dass für ein $t > 0$ ein Rechteck A mit Breite $t_{i+1} - t_i$ und Höhe $\frac{1}{t_i}$ denselben Flächeninhalt hat wie ein weiteres Rechteck B mit Breite $tt_{i+1} - tt_i$ und Höhe $\frac{1}{tt_i}$ (Abb. 1).

Wir folgern $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \int_{ta}^{tb} \frac{1}{x} dx$ und erhalten die fundamentale Regel:

$$\int_1^{ab} \frac{1}{x} dx = \int_1^{a} \frac{1}{x} dx + \int_a^{ab} \frac{1}{x} dx$$
$$= \int_1^{a} \frac{1}{x} dx + \int_1^{b} \frac{1}{x} dx .$$

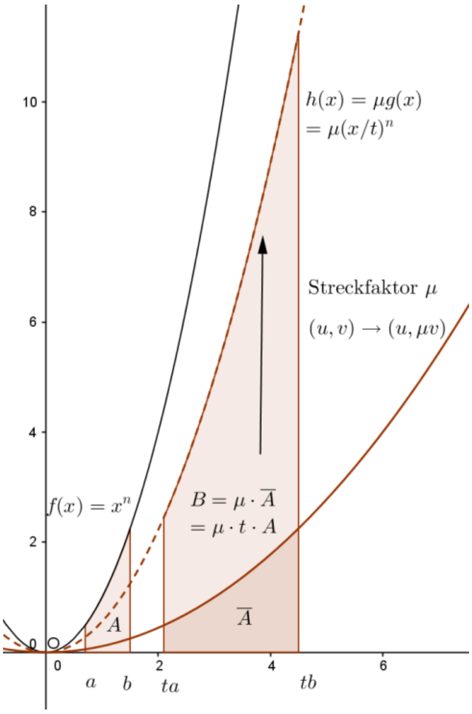


Abbildung 2: Der Funktionsgraph von $\boldsymbol{f(x) = x^n}$ wird durch Strecken und Stauchen in sich überführt.

Damit sind die Grundlagen für die Erkenntnis gelegt, dass der Logarithmus die Fläche unter einer Hyperbel beschreibt. In (Kirfel, 2014) wird dies im Detail ausgeführt. Diese Idee kann nun auch auf alle anderen Funktionen der Schule erweitert werden.

2. Strecken und Stauchen

Diese Idee des Gregorius kann nun auch auf alle anderen Funktionen der Schule erweitert werden, wie wir in Kaenders & Kirfel (2016) zeigen. Bei der Hyperbel kann man zu demselben Ergebnis wie Gregorius gelangen, wenn man den Graphen der Funktion über Strecken und Stauchen in sich selbst überführt. Analog können wir so auch bei allen anderen Funktionen der Schule über Strecken und Stauchen vorgehen. Wir deuten dies hier zunächst anhand von Potenzfunktionen an.

In Abb. 2 sehen wir, wie eine Flächenstück A unter dem Graphen von $f(x) = x^n$, das mit dem Faktor $t > 1$ nach rechts gestreckt wird und zu einem Flächenstück $\bar{A}$ mit Flächeninhalt tA wird. Die Streckung mit dem Faktor t^n nach oben führt zu einem Flächenstück $\bar{\bar{A}}$, das wieder genau unter den Ausgangsgraphen passt und den Flächeninhalt $t^n \cdot tA$ misst. Dies ergibt: $\int_0^t x^k dx = C_p \cdot t^{k+1}$, wobei wir $C_p = \int_0^1 x^k dx$ berechnen möchten (vgl. Kaenders, 2015). Dazu berechnen wir die Flächen über den Intervallen $[0,1]$und $[0,t]$ für $1 < t$. Den Unterschied $\int_0^t x^k dx - \int_0^1 x^k dx = C_p t^{k+1} - C_p$ zwischen diesen Flächen, den wir in Abb. 3 als schmalen Streifen erkennen können, schätzen wir jetzt nach oben und nach unten mit Rechteckstreifen ab und benutzen die Monotonie der Potenzfunktion:

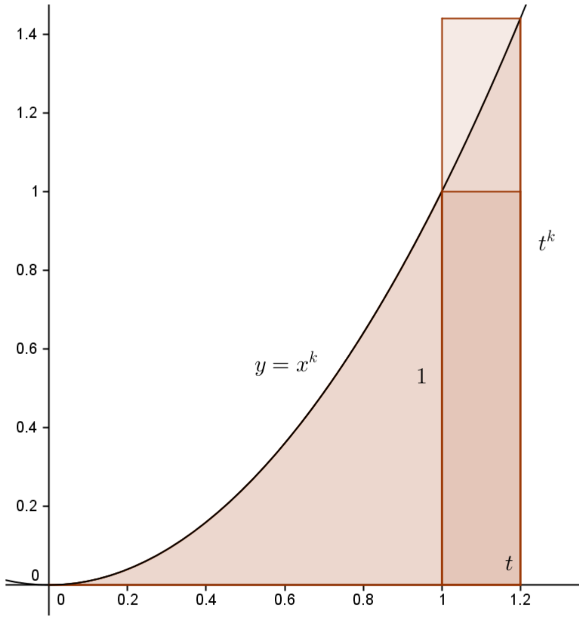


Abbildung 3: Berechnung der Konstanten C_p.

$$(t-1) \cdot 1 \leq C_p t^{k+1} - C_p \leq (t-1) \cdot t^k \Leftrightarrow 1 \leq \frac{t^{k+1} - 1}{t - 1} \ C_p \leq t^k$$

Mit $1 \leq (1 + t + t^2 + \cdots + t^k)\ C_p \leq t^k$ für alle $t > 1$ folgt $C_p = \frac{1}{n+1}$.

Bemerkung. Die hier vorgestellte Methode ist für alle reellen Werte von $k \neq -1$ erlaubt, nicht nur für ganzzahlige Exponenten.

3. Logarithmus

Besonders schön stellt sich die verallgemeinerte Methode des Gregorius im Fall des Logarithmus dar. Wenn wir die Fläche A unter dem Logarithmus$f(x) = \ln x$ über dem Intervall $[a,b]$ von der y-Achse aus mit dem Faktor t strecken, dann erhalten wir wieder eine Fläche $\bar{A} = tA$. Strecken wir den Graphen von f auf dieselbe Weise, erhalten wir den Graphen der Funktion $k(x) = \ln \frac{x}{t} = \ln x - \ln t$. Das bedeutet, dass wir in Abb. 4 den Unterschied der Flächen über $[ta, tb]$ zwischen den Graphen von $f$und k als ein ‚Rechteck' erkennen, d.h. einen Streifen gleicher Höhe $\ln t$.

Aus dieser Beobachtung lesen wir nun unmittelbar die folgende Regel ab:

$$\int_{t \cdot a}^{t \cdot b} \ln x \, dx = \bar{A} + \ln t \, (t \cdot b - t \cdot a)$$

$$= t \int_a^b \ln x \, dx + t \ln t \, (b - a).$$

Und damit haben wir die Logarithmusfunktion integriert:

$$\int_0^t \ln x \, dx = \int_0^{t \cdot 1} \ln x \, dx$$

$$= t \int_0^1 \ln x \, dx + t \ln t \, (1 - 0)$$

$$= C_L \cdot t + t \ln t.$$

Auch die Konstante C_L kann ähnlich wie bei den Potenzfunktionen bestimmt werden.

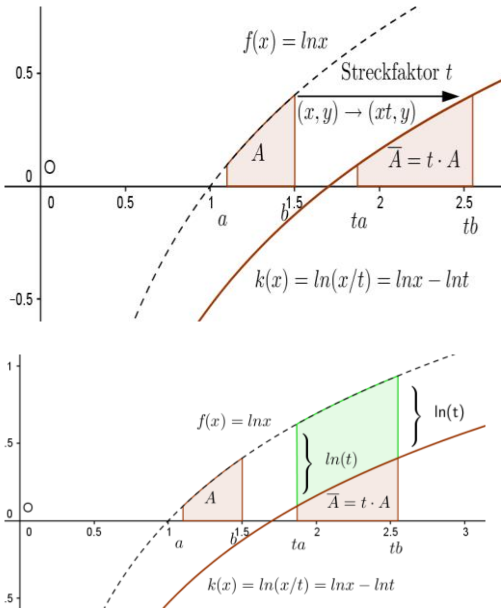


Abbildung 4: Herleitung des Integrals der Logarithmusfunktion.

4. Resumé

Auch auf die Funktionen Sinus und Kosinus ist der Gregorius Ansatz verallgemeinerbar. Eine viel detailliertere Darstellung mit ausführlichen Referenzen findet sich in Kaenders & Kirfel (2016).

Mit der „gregorianischen Methode“ kann man zwar nicht jede stetige Funktion an sich, jedoch aber alle in der Schule vorkommenden Elementarfunktionen geometrisch integrieren. Sie baut auf elementargeometrischen Vorstellungen auf, die auch an anderer Stelle in der Schule von Bedeutung sind. Sie erfordert keine abstrakten Grenzwertbetrachtungen. Eine Abhandlung über eine entsprechende Herangehensweise an die Ableitung von Elementarfunktionen ist in Planung.

Literatur

Kaenders, R. (2014): *Von einem kognitiven Konflikt zur Quadratur der Parabel*. Beiträge zum Mathematikunterricht, GDM-Tagungsbericht 2014, S. 583- 586.

Kaenders, R. (2015) Flächenbestimmung mit Ähnlichkeit als Alternative zur sogenannten “h-Methode”, Beiträge zum Mathematikunterricht, GDM-Tagungsbericht 2015, S. 440- 443.

Kaenders, R. & Kirfel, C. (2016): *Integration aller Basisfunktionen der Schule mit Elementargeometrie – Ein Ansatz aus einem Guss.* Zur Veröffentlichung eingereicht.

Kirfel, C., (2014): *Integration by geometrical means – a unified approach.* Mathematics Teaching 239. S. 23 – 25.