Rainer KAENDERS, Bonn

Schnecke im Sofa beim Umzug mit Stern

Vor hundert Jahren, im Jahr 1916, ist in Zürich die Dada-Bewegung gegründet worden. Das wäre Grund genug für den Titel dieses Vortrags; doch der Titel ist sogar ernst gemeint. Wir versuchen eine kurze Besprechung und einen Beitrag zum so genannten Sofaproblem. Das ist ein seit 50 Jahren offenes Problem mit einer einfachen und originellen Fragestellung, die als Grundlage des *macht mathe* Schülerwettbewerbs *Mathematik B-Tag* im November 2015 (Berendonk et al., 2015) gedient hat, der in den Niederlanden, Flandern und in NRW durchgeführt wird. Anhand des Titels stellen wir eine eigene Variation auf das Sofaproblem vor, bei der wir über Aspekte der Geschichte klassischer Kurven zu einem neuen Sofadesign gelangen.

1. Schnecke

Der Kurventyp der Pascalschen Schnecke oder des Limaçon geht zurück auf Étienne Pascal (1588–1651). Die große Vielfalt der Erzeugungsmöglich-keiten dieser Kurven gehört zu den Wundern der Elementargeometrie, die ohne weiteres in der Schule untersucht und verstanden werden können. So kann etwa die Pascalsche Schnecke als Kreiskonchoide oder als Hüllkurve konstruiert werden. Sie ist das Spiegelbild einer Hyperbel an einem Kreis um einen ihrer Brennpunkte oder Fußpunktkurve zu Kreis und Punkt. Auch ist sie mit einer einfachen Winkelbedingung definierbar und sie ist auf zwei Weisen eine Rollkurve (Hypotrochoide und Epitrochoide) und ist Dürersche Spinnenkurve. Die Kardioide oder die Trisektrix sind spezielle Limaçons.

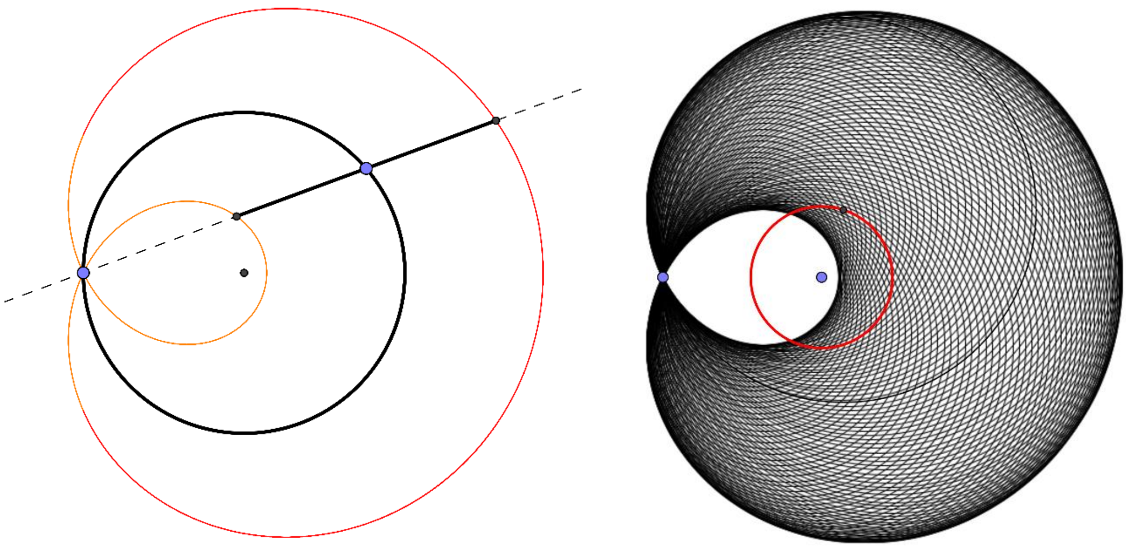

Abbildung 1: Zwei Erzeugungen der Pascalschen Schnecke als Kreiskonchoide und als Hüllkurve von Kreisen durch einen festen Punkt, deren Mittelpunkte einen Kreis formen.

2. Sofa

Leo Moser (1966) stellte vor 50 Jahren in der Rubrik *Problems and Solutions* der SIAM –Review die Frage: „Problem 66-11*, Moving Furniture Through a Hallway, […] What is the largest area region which can be moved through a "hallway" of width one (see Fig. 1)?"

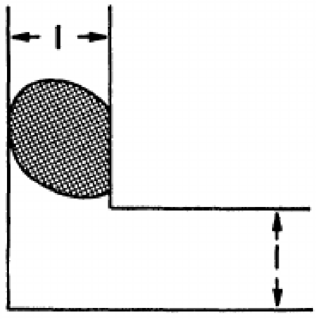

FIG. 1

Abbildung 2: Sofaproblem

Daraufhin entwarf John Hammersley (1968) ein Sofa, das von Kreissegmenten und Strecken begrenzt wird und das sich über eine verblüffende Bewegung um die Ecke des Korridors bewegt, die in der ansprechenden Animation[1] von Claudio Rocchini illustriert ist. Die Fläche dieses Hammersley Sofas beträgt A=π/2 + 2/π ≈ 2,2074 und mit ihr begann ein Wettlauf um Sofas mit einer jeweils besseren *Sofakonstante*, der mit dem Sofa von Joseph Gerver (1992) und seinem Sofa mit A = 2,2195 zu einem vorläufigen Höhepunkt gelangte. Hierbei handelt es sich um einen achsensymmetrischen Umriss, der aus 18 einzelnen Kurven besteht (Kreisevolventen, Kreissegmente und Strecken) und der einem abgerundeten Hammersleys Sofa ähnelt. Gerver vermutete, dass sein Sofa optimal sei, doch ein Beweis steht bislang aus. Als obere Schranke für die Sofakonstante hatten Conway & Guy die Zahl 2√2≈2,8284 bestimmt (vgl. Gerver, 1992).

3. Umzug

Betrachten wir derartige Umzugsprobleme, so liegt es nahe erst einmal einfache geometrische Formen ‚umzuziehen'. Das einfachste ist vielleicht ein Kreis oder ein Quadrat. Fragen wir uns nach der längsten Strecke, die wir ‚um die Ecke bringen' können, so wird das Problem schon kniffliger. Wir lassen eine Strecke die Wand entlang rutschen und fragen uns, welches Gebiet diese Strecke dabei überstreicht und wie die Hüllkurve bestimmt werden kann, die dieses Gebiet begrenzt. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass für eine Strecke optimal ist an der Wand entlang bewegt zu werden.

Stellen wir uns nun eine konkrete Position der Strecke ED (Abb. 3) vor, so fragen wir uns, welcher Punkt dieser Strecke zur Hüllkurve beitragen könnte. Betrachten wir zu der festen Strecke ED eine bewegliche Strecke GF, so sehen wir, dass der Teil von ED, der unter der Strecke GF liegt, sicher nicht zur Hüllkurve beiträgt. Bewegen wir GF, dann bleibt lediglich der Grenzwert des Schnittpunktes der Strecke ED mit der Strecke GF als Kandidat für einen Punkt der Strecke ED auf der Hüllkurve übrig. Nun existiert eine Drehung,

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Sofaproblem

die ED in GF überführt. Der Drehmittelpunkt ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf EG und FD. Damit ist es nun ein leichtes zu zeigen, dass die Hüllkurve als Rollkurve (siehe Abb. 3) dargestellt werden kann.

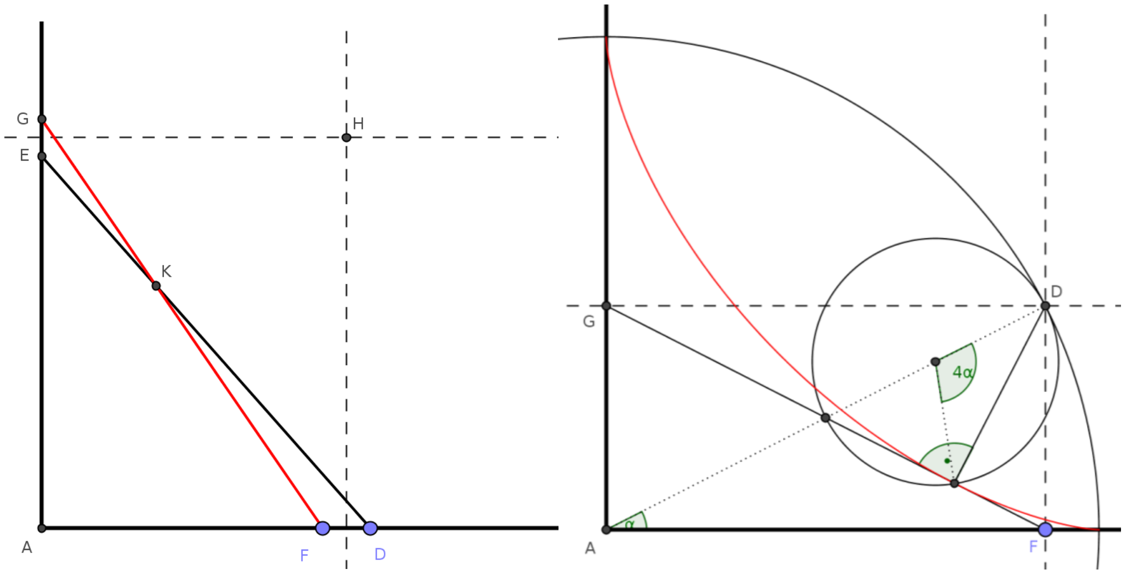

Abbildung 3: Die Astroide als Hüllkurve und Hypozykloide.

4. Stern

Jetzt stellen wir uns ein Sofa vor, das eine feste Strecke als Rückseite und dessen Seiten rechtwinklig dazu verlaufen (siehe Abb. 4). Wir möchten nun unter allen solchen das maximale Sofa bestimmen unter der Bedingung, dass die Rückseite an der Außenwand entlang verschoben wird.

Um dies zu untersuchen, lassen wir nicht das Sofa durch den Korridor rutschen, sondern bewegen den Korridor gegenüber dem Sofa – eine Idee, die auch Gerver (1992) allgemeiner zur Bestimmung seines Sofas verwendet hat. Welcher Teil des Sofas wird durch den Korridor bei der Bewegung weggewischt? Führen wir die Konstruktion mit GeoGebra aus, finden wir die folgende Sofaform (Abb. 4), die uns zunächst vor ein Rätsel stellt. Welche Kurve wird durch die Begrenzung dieses Sofas beschrieben?

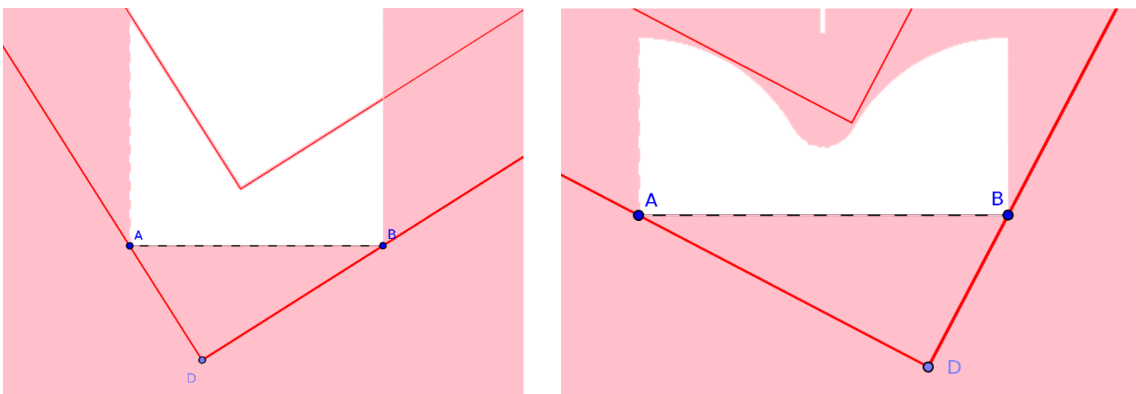

Abbildung 4: Ein Sofa mir einer Strecke als Rückseite, die an der Wand entlang rutscht.

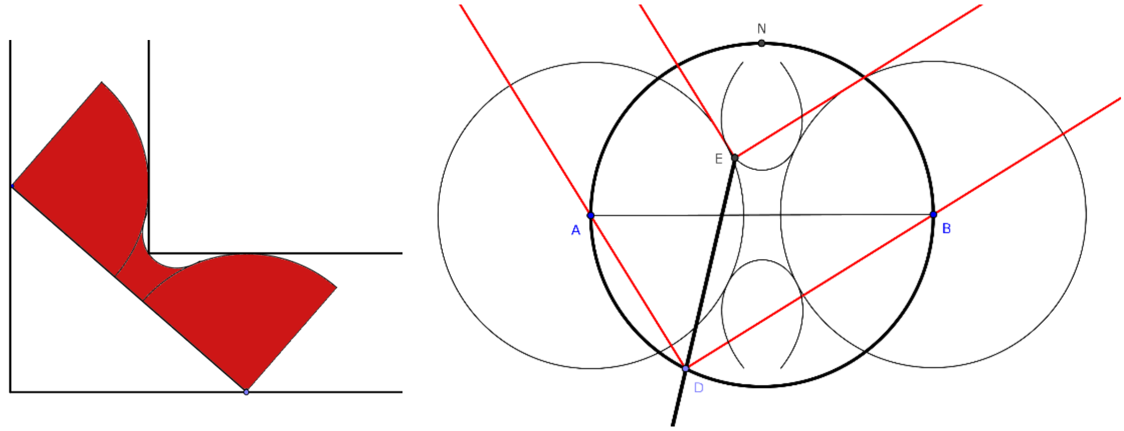

Abbildung 5: Sofa mit Pascalscher Schnecke (links). Beweisskizze der Aussage (rechts).

Recht schnell sieht man, dass es sich bei den äußeren Rundungen des Sofas um Kreissegmente handeln muss. Und das Kurvenstück zwischendrin? Tatsächlich finden wir hier eine Pascalsche Schnecke als Kreiskonchoide. Dazu können wir uns mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes (bzw. Satz vom Südpol) klar machen, dass die Winkelhalbierende des rechten Winkels $\angle ADB$ immer durch den Punkt N verläuft. Die Strecke DE bleibt dabei gleich lang und also beschreibt der Punkt E eine Pascalsche Schnecke.

5. Schnecke im Sofa beim Umzug mit Stern

Der Kontext des Sofaproblems gibt Anlass zu verschiedensten – teilweise einfachen – Untersuchungen, wie sie die Schülerinnen und Schüler beim Mathematik B-Tag vielfältig angestellt haben. Wenn wir von Schülern erwarten, dass sie eigenen Fragen nachgehen, sollten wir das selbst auch gelegentlich tun. Hierzu ist eine detailliertere Veröffentlichung geplant (Kaenders, 2016).

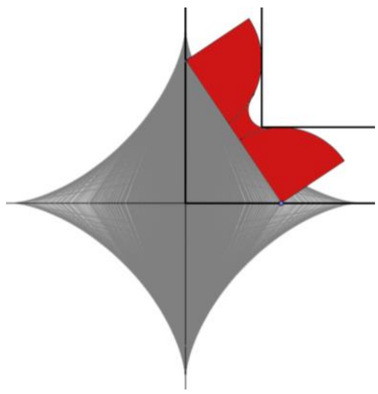

Abbildung 4: Schnecke im Sofa beim Umzug mit Stern.

Literatur

Berendonk, S., Beukers, F., Bos, R., Deprez, J., Van Eijmeren, M., Goddijn, A., Herremans, A., Kaenders, R., Van der Kooij, H., Lippert, M., Van Oord, R., Rijnierse, M., Tak, S. (2015). Um die Ecke – Mathematik B-Tag 2015. http://www.machtmathe.de/.

Gerver, J. L. (1992). On Moving a Sofa Around a Corner. *Geometriae Dedicata* 42 (3): 267–283.

Hammersley, J. M. (1968). On the enfeeblement of mathematical skills by "Modem Mathematics" and by similar soft intellectual trash in schools and universities. *Bull. Inst. Math. Appl.* 4, 66-85.

Kaenders, R. (2016). The Snail in the Sofa. *geplante ausführlichere Veröffentlichung*.

Moser, L. (1966). Problem 66-11: Moving furniture through a hallway. *SIAM Rev.*, 381.