Emese VARGYAS, Mainz

Euklids Flächenlehre: Eine Herausforderung für die Schule?

Motivation

In der Schulmathematik wird der Eindruck vermittelt, dass jede ebene Figur einen zahlenmäßigen Flächeninhalt hat, womit dann problemlos algebraisch gerechnet wird. Die *Elemente* von Euklid bilden auch für den heutigen Geometrieunterricht in vieler Hinsicht die Grundlage. Dort erfolgt aber das "Rechnen" mit Flächen geometrisch ohne Verwendung von Maßzahlen. Ziel des vorliegenden Artikels ist es, den Einstieg in die Flächenlehre im heutigen Schulunterricht und in Euklids *Elementen* kurz darzustellen. Von einer Lehrbuchaufgabe ausgehend, wird eine Methode für Zerlegung und Zusammensetzung aufgezeigt, mit deren Hilfe man ohne Rechnung zum Satz des Pythagoras gelangen kann.

Flächenlehre in der Schule

Die Anfänge der Flächenlehre kann man schon in der Grundschule in Form von Kästchen-Zählen aufspüren. Diese Vorerfahrungen werden in der Sekundarstufe I weiter ausgebaut, wobei der Flächenvergleich durch Zerlegung eine wichtige Rolle spielt. Der Flächenvergleich durch Ergänzung wird auch erwähnt, später wird aber kein Unterschied mehr zwischen Zerlegungs- bzw. Ergänzungsgleichheit gemacht. Die Formel für den Flächeninhalt eines Rechtecks, deren Seitenlängen natürliche oder Bruchzahlen sind, wird bis Ende des 6. Jahrgangs formuliert. Ausgehend davon, dass man ein Parallelogramm durch Zerlegen in ein flächengleiches Rechteck umwandeln kann, wird die Flächenformel auch für das Parallelogramm aufgestellt. Dieser Übergang vom Rechteck zum Parallelogramm wird ohne Rücksicht auf die Art der neu entstandenen Seitenlängen gemacht. Die ganz schiefen Parallelogramme werden meistens nicht mehr zerlegt. Auf sie wird nur die Formel „Basis mal Höhe“ angewendet, wodurch die Herangehensweise durch Zerlegen und Zusammenfügen zu schnell auf dem Altar der Formel-Anwendung geopfert wird. Diese Tendenz eines frühen Übergangs zur Formel ist auch im Falle des Dreiecks (bzw. Trapezes) zu beobachten.

Euklids Flächenlehre

Schaut man dagegen in Euklids *Elemente*, wird man bei der Suche nach Flächenformeln nicht fündig. Die Anfänge der Flächenlehre sind bei Euklid im

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Buch I (§ 35) zu finden, diese Lehre wird dann im Buch VI unter der Verwendung der eudoxischen Proportionenlehre erweitert. Eine arithmetische Flächenmessung erfolgt weder im Buch I noch im Buch VI. Am Beginn (§ 35) steht ein elementargeometrischer Flächenvergleich, welcher sich auf die Axiome aus Buch I stützt. Zuerst werden Parallelogramme miteinander verglichen. Mit dem Axiom 7 „Was einander deckt, ist einander gleich“ (vgl. Thaer (1969) S. 3.) wird vorausgesetzt, dass Deckungsgleichheit Flächeninhaltsgleichheit impliziert, auch wenn der Begriff *Flächeninhalt* nicht explizit definiert wird. Bei dem Vergleich der Parallelogramme (bzw. weiterer einfacher Polygone) wird kein Unterschied zwischen Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit gemacht, sondern unterstellt, dass diese äquivalent sind. Diese Tradition wird, wie schon oben festgestellt, auch heutzutage in der Schule fortgesetzt. (Mehr Information zu dieser Äquivalenz findet der Leser in Hilbert (1956)). An dieser Stelle lohnt es sich, einen Blick auf die anderen Axiome zu werfen. Wie Abb. 1 zeigt, bieten diese Axiome eine gute Gelegenheit dazu, darüber nachzudenken, was mit einigen Begriffen eigentlich gemeint ist: In welchem Sinne ist *gleich* zu verstehen? Welche Bedeutung haben die Worte *Halbes*/*Halbierung, Doppeltes/Verdoppelung* u.s.w.?

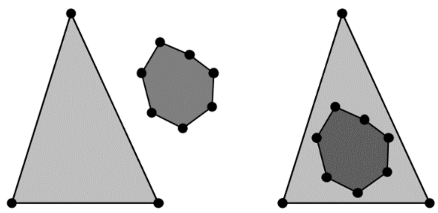
Ax. 3 Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich.

Ax. 6 Die Halben von demselben sind einander gleich.

Abb. 1

Ein gesonderter Blick gebührt dem Axiom 8: „Das Ganze ist größer als der Teil.“

Dieses Axiom wird oft bei den Beweisen verwendet, wobei keiner der Begriffe *Ganze* und *größer* explizit geklärt wird. Abb. 2 gibt ein Beispiel für die Notwendigkeit einer solchen Klärung.



Relation : Summe der Eckzahlen

Das Ganze ist größer als der Teil?

Abb. 2

Zerlegungen

Bei dem Flächenvergleich zweier einfacher Polygone durch Zerlegung besteht die größte Hürde darin, eine geeignete Zerlegung zu finden.

Die folgende Aufgabe (Abb. 3) ist dem Lehrbuch „Neue Wege Mathematik 8 RP“ entnommen. Sie wurde im Kapitel „Flächen vergleichen“ gestellt, bevor die Flächenformeln für Parallelogramme und Dreiecke eingeführt wurden.

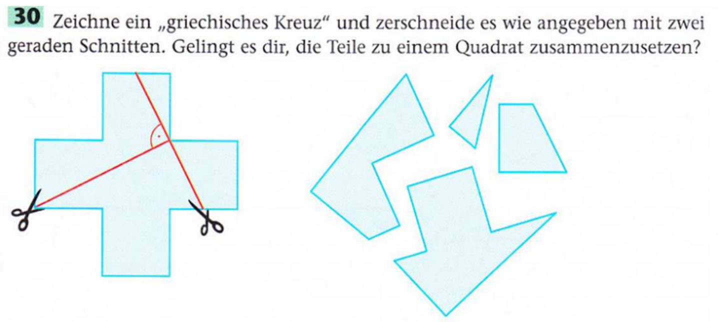

30 Zeichne ein „griechisches Kreuz“ und zerschneide es wie angegeben mit zwei geraden Schnitten. Gelingt es dir, die Teile zu einem Quadrat zusammenzusetzen?

Abb. 3 (Neue Wege Mathematik 8 RP. Bildungshaus Schulbuchverlage Braunschweig 2005. ISBN 978-3-507-85568-7, S. 161.)

Wie man im rechten Bild leicht erkennt, wird die Aufgabe durch die besondere Anordnung der einzelnen Teile derart trivialisiert, dass den Schülern nur noch das Zusammenschieben der Teile übrig bleibt.

Die Umformulierung der Aufgabe „Wandle das griechische Kreuz in ein flächengleiches Quadrat um“ gestattet bei der Bearbeitung einen größeren Spielraum. Die Aufgabe ist in einer ähnlichen Form als Klassiker in vielen Büchern für Unterhaltungsmathematik zu finden (z.B. Dudeney (1970)). Abb. 4 zeigt eine Lösung, die minimale mathematische Kenntnisse erfordert. Ist eine Lösung (vgl. Abb. 4) nicht so einfach zu finden wie im Falle des griechischen Kreuzes, stellt sich die Frage, ob man für die Behandlung von Aufgaben, bei denen es um Zerlegen und Zusammenfügen geht, eine Methode entwickeln könnte. Eine Möglichkeit dafür bietet Abb. 5. Man legt die Ebene, falls möglich, mit der zu zerlegenden Figur aus.

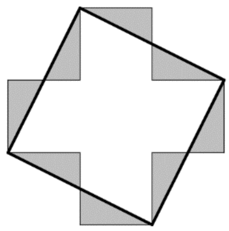


Abb. 4

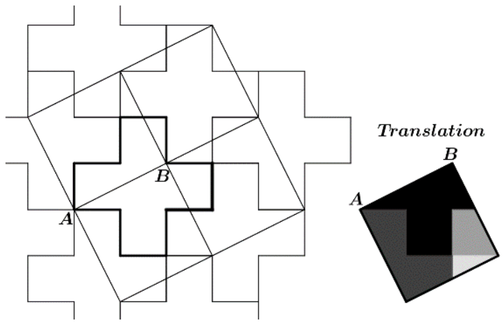


Abb. 5

Auf das so entstandene Gitter legt man das gesuchte (Quadrat)gitter wie in Abb. 5. Die Seitenlänge *AB* des Quadrates kann man entweder aus der Abb. 4 ablesen und z.B. mit dem Zirkel abtragen oder aus der Gleichung $|AB|^2 = 5$ (durch Zählen der Einheitsquadrate im griechischen Kreuz) ermitteln und anschließend konstruieren (falls der Satz oder die Satzgruppe des Pythagoras schon bekannt sind). Aus der Kreuzung dieser Gitter liest man dann einfach die Lösung ab. Durch die Verschiebung des oberen Quadratgitters entstehen weitere Lösungen (siehe Abb. 6). Alle diese Lösungen erhält man durch Translation der einzelnen Teile, einige davon lassen sich auch durch Rotation um bestimmte Punkte erzeugen (Abb. 6b und 6c). Dafür befestigt man das schwarze Vieleck, alle anderen Vielecke werden nacheinander um die gekennzeichneten Punkte gedreht, bis sie sich zum Quadrat zusammenfügen.

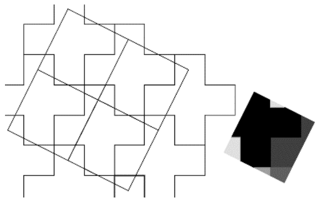


Abb. 6a

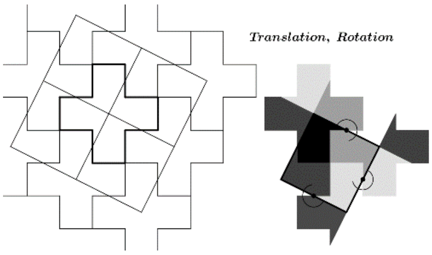


Abb. 6b

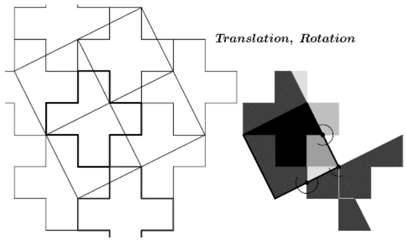


Abb. 6c

Der oben erarbeiteten Idee folgend, kann man sich auch dem Satz des Pythagoras nähern. Dazu pflastert man die Ebene gemäß Abb. 7 mit zwei beliebigen Quadraten. (Der Leser ist eingeladen, die Möglichkeit einer solchen Pflasterung zu prüfen.) Legt man auf

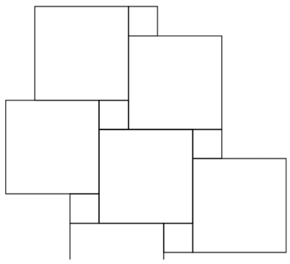


Abb. 7

das so entstandene Muster das Quadratgitter, dessen „Einheitsquadrat“ die Summe der gegebenen zwei Quadrate ist, so sieht man, dass das Quadrat über die Hypotenuse gleich der Summe der Kathetenquadrate ist (Abb. 8).

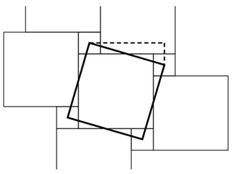
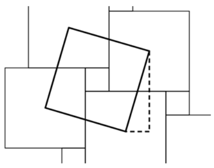


Abb.8



Literatur

Dudeney, H. E. (1970). *Amusements in Mathematics*. New York: Dover Publications, Inc.

Hilbert, D. (1956). *Grundlagen der Geometrie*. Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft.

Neue Wege Mathematik 8 RP. Bildungshaus Schulbuchverlage Braunschweig 2005. ISBN 978-3-507-85568-7, S. 161.

Thaer, C. (1969). *Euklid: Die Elemente*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.