Ysette WEISS-PIDSTRYGACH, Mainz

Auf der Suche nach Bildern im Buch der Geschichte der Mathematik

Viele mathematische Konzepte, z.B. universelle Ideen, haben verschiedene mathematische Darstellungen und können in unterschiedlichen mathematischen Gebieten und Kontexten formuliert und entwickelt werden (Schreiber, 1983). Die meisten derzeitigen mathematikdidaktischen Fragestellungen beschäftigen sich in diesem Zusammenhang mit dem Darstellungswechsel von einem Kontext in den anderen; im Vordergrund steht dabei der Übergang zur geometrischen Darstellung. Ikonische Bezeichner in der Form von Illustrationen, Veranschaulichungen, Verbildlichungen werden hier leider kaum von einem im geometrischen Kontext entwickelten Begriff unterschieden. So wird, z.B. beim Wechsel von der analytischen Darstellung der Ableitung einer Funktion in den geometrischen Kontext nicht zum geometrischen Objekt *Tangente* an eine Kurve gewechselt sondern zur Visualisierung des Differenzenquotienten des Graphen der Funktion. Die Auseinandersetzung mit der historischen Entwicklung des Begriffs kann hier viel dazu beitragen, nicht nur das bildhafte Objekt sondern auch geometrische Operationen, Invarianten und Problemstellungen mit in den Darstellungswechsel einzubeziehen. In diesem Beitrag widmen wir uns Fragen zur Begriffsentwicklung schulrelevanter mathematischer Konzepte mit verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten, die sich Lehrende *vor* dem Einüben des Darstellungswechsels oder der Analyse dabei auftretender Fehlkonzepte im Rahmen langfristiger Unterrichtsplanung stellen sollten:

- Auf welchem Gebiet (Algebra, Geometrie, Arithmetik, Analysis, Topologie, Numerik) sollte das mathematische Konzept in der Schule (oder im Lehramtsstudium) eingeführt werden?
- Falls man sich für eine Begriffsentwicklung auf mehreren Gebieten entscheidet, durch welche Reihenfolge und mit welchem überbrückenden Bezugssystem kann man derzeitig vorhandene erfolgreiche Orientierungsstrategien Lernender nutzen und kontextübergreifende Überlegungen fördern?
- Welche Problemstellungen, Kontexte und Bezugsgebiete eignen sich zum entdeckenden Lernen und erlauben die Entwicklung eigener kontextbezogener oder kontextübergreifender Fragestellungen bei Lernenden?

Wesentlich für unseren Ansatz zur Beantwortung dieser Fragen ist die Bezugnahme zur historischen Begriffsentwicklung. Geschichte der Mathematik wird hier genutzt, um mathematisches Verständnis zu fördern und weiterführende Fragestellungen der Lernenden zu inspirieren.

1. Begriffsentwicklung in mehreren Kontexten mit Darstellungswechsel: Verschiedene Kontexte mit unterschiedlichen Problemstellungen

Als Ausgangspunkt der Diskussion dienen uns die theoretische Fundierung (Berendonk, 2013) und die schulpraktische Umsetzung (Berendonk, 2014) einer Lernumgebung zum Eulerschen Polyedersatz. Berendonk entwickelt Formulierungen und den Beweis des Eulerschen Polyedersatzes anhand verschiedener Problemstellungen und in verschiedenen Kontexten. Die Begriffsentwicklungen in den unterschiedlichen Kontexten erfolgen unabhängig voneinander und basieren auf Aufgabenstellungen, die auf den ersten unvorbereiteten Blick nichts miteinander zu tun zu haben scheinen. Die Entdeckung des Zusammenhangs erfolgt durch die Entwicklung und Verwendung einer kontextübergreifenden Metapher und durch kontextübergreifende Überlegungen.

Die verschiedenen Problemstellungen helfen hier u.a. das systematische Nachzählen der Ecken, Kanten und Flächen eines Polyeders, welches für das Aufstellen der Vermutung notwendig ist, zu motivieren: Die am Polyeder nicht intuitiv erscheinende mathematische Tätigkeit *Zählen und ins Verhältnis setzen* wird in einen anderen Kontext verlagert, wo sie als Teil der Analyse einer Gewinnstrategie naheliegend erscheint. Die kontextübergreifende Begriffsentwicklung ist angeleitet und durch die Entwicklung einer uniformierenden Metapher geprägt. Die begleitende Anleitung und Systematisierung der Ergebnisse in den Kontexten unterstützen die Entwicklung einer kombinatorischen Sicht auf diese Kontexte und eine sich in allen Kontexten ähnelnde schematische Darstellung der Lösung. Auf letztere wird in den kontextübergreifenden Überlegungen mithilfe jener Metapher zurückgegriffen. Der Darstellungswechsel besteht hier in der Nutzung der Metapher als wiederkehrendes Muster in allen Kontexten. Die Schwierigkeit und der große Charme dieser Begriffsentwicklung bestehen in der Vereinheitlichung der Lösungen der durch ihre Kontexte motivierten unterschiedlichen Problemstellungen. Vor allem historische Exkurse[1] zu den verschiedenen Kontexten geben dieser durch Instruktion geprägten Begriffsentwicklung Raum für entdeckendes Lernen.

[1] Für Beispiele siehe Berendonk (2013), S. 23 – 41.

2. Begriffsentwicklung in mehreren Kontexten mit Darstellungswechsel: Verschiedene Kontexte mit gleicher Problemstellung

Ausgehend von der Analyse der vorangegangenen Begriffsentwicklung fragen wir uns, wie wir Stärken unserer Schüler und Studierenden in die Vorgehensweise einbeziehen können. Durch die starke Algebraisierung der Schulmathematik ist ihnen Algebra vertrauter als Geometrie. Algorithmisches Vorgehen und auf formalem Verständnis und Mustererkennung beruhende Strategien sind im Alltag erfolgreich und daher Teil routinierter Herangehensweisen. Die Output- und Testorientierung des Schulalltags fördern Reproduktionsfertigkeiten und operationalisierte Anwendungen von Lösungsschemata. Wir beginnen daher nicht mit problemorientierten Einstiegen, die zu einer kontextübergreifenden Struktur schematisiert und verallgemeinert werden müssten, sondern mit dem algebraischen Formalismus als Tätigkeit – einem *Algorithmus im Kontext der Algebra*. Dieser Algorithmus realisiert den Darstellungswechsel: Die Kontexte ermöglichen verschiedene Interpretationen des Ausgangsproblems bei deren Lösung die gleiche Problemlösemethode zur Anwendung kommt. Wie diese Kontextualisierungen erfolgen können, skizzieren wir am Beispiel des Problems *Lösen polynomialer Gleichungen* und der kontextübergreifenden Problemlösemethode *Hornerschema zur Bestimmung von Funktionswerten eines Polynoms*. Eine ausführliche Darstellung der Methode und der im folgenden diskutierten Kontexte findet der interessierte Leser in (Kalman, 2009).

$\tilde{x}$	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
	0	$b_{n-1}\tilde{x}$	$b_{n-2}\tilde{x}$	$\cdots$	$b_2\tilde{x}$	$b_1\tilde{x}$	$b_0\tilde{x}$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_1	b_0	$f(\tilde{x})$

$\tilde{x}$=2	1	6	11	6
		2	16	54
	1	8	27	60

Abbildung 1: Die Methode aus dem Jahr 1819 von William Horner (1786 – 1837): allgemein für $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ mit $a_0, a_n \neq 0$ (links) und im speziellen Beispiel für $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ (rechts).

Die Stärken unserer Schüler nutzend führen wir Horners Methode schematisch ein (Abb.1) und wenden sie an mehreren Beispielen an. Das Hornerschema und der Zusammenhang mit der Polynomdivision werden mit typisch algebraischen Methoden (Termumformung, Einführung von Indices) bewiesen, was die weitere Operationalisierung der Methode unterstützt. Im zweiten Schritt wird Lills Methode eingeführt. Die Objekte bei Lills Methode sind Polygonzüge; wir befinden uns also in einem geometrischen Kontext. Wir wählen dieselben Zahlenbeispiele und symbolischen Bezeichnungen für die Polygonzüge wie beim Hornerschema. Da der Beweis von Lills Methode Ähnlichkeit von Dreiecken und den Algorithmus des Hornerschemas verwendet, wird das Hornerschema nicht nur veranschaulicht, sondern geometrisch kontextualisiert. Letzteres führt zum geometrischen Ablesen von Nullstellen, also einer Ausweitung der Problemlösemethode, die nicht unmittelbar zurück in den algebraischen Kontext übertragen werden kann. Die Frage, ob der geometrische Zugang auch die Konstruktion von Wurzeln und – mittels Rückübersetzung in den algebraischen Kontext – Lösungsformeln für polynomiale Gleichungen liefert, erweitert den Darstellungswechsel zwischen Objekten auf einen Darstellungswechsel zwischen Kontexten. Lills Methode bietet Anlass, einen Exkurs in die Ingenieurmathematik des 19. Jahrhunderts zu unternehmen. Die Methode von Carlyle (DeTemple, 1991), ein Spezialfall von Lills Methode, bildet die Brücke zur geometrischen Konstruktion von Wurzeln quadratischer Gleichungen. Durch die Interpretation von Lills Methode bzgl. der Konstruierbarkeit von Wurzeln mit Zirkel und Lineal oder Papierfalten (Hull, 2011) erhalten wir zwei weitere Kontextualisierungen. Der Darstellungswechsel wird hier durch die im geometrischen Kontext interpretierte (und gegenüber der algebraischen erweiterte) Problemlösemethode gewährleistet. Unser Ansatz mit der modernen algebraischen Methode zu beginnen, bringt Geschichte der Mathematik als Quelle für andere Kontexte ins Spiel: Die Entdeckungen einer mathematischen Struktur in verschiedenen Kontexten und auf verschiedenen Gebieten erfolgen selten zeitgleich. Geometrische und arithmetische Problemstellungen sind häufig Vorläufer für die algebraische Formalisierung. Dies bietet die Möglichkeit Begriffsentwicklung in verschiedenen Kontexten mit historischen Exkursen zu verbinden. Die Einbeziehung von Geschichte der Mathematik gestattet uns außerdem verschiedene Kontexte durch eine zusätzliche zeitliche Komponente voneinander abzugrenzen. Letzteres ist wesentlich für die Entwicklung eigener kontextbezogener Fragestellungen.

Literatur

Berendonk, S. (2013). *Erkundungen zum Eulerschen Polyedersatz: Genetisch, explorativ, anschaulich*. Springer-Verlag.

Berendonk, S. (2014). Im Land des Eulerschen Polyedersatzes. MatheWelt, *Mathematik lehren 184*, 1-16.

DeTemple, D. W. (1991) Carlyle Circles and the Lemoine Simplicity of Polygon Constructions. *The American Mathematical Monthly Vol. 98, No. 2*, 97 – 108.

Hull, T. C. (2011). Solving cubes with Creases: The work of Beloch and Lill. *The American Mathematical Monthly,* Vol. 118, No. 4 , pp. 307-315.

Kalman, D. (2009). *Uncommon mathematical excursions: Polynomia and related realms* (No. 35). MAA.

Schreiber, A. (1983). Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken. *mathematica didactica* 6, S. 65-76.