Martin FRANK, Aachen

Christina ROECKERATH, Aachen

Wie funktioniert die Torlinientechnik beim Fussball? Und was hat das mit Mathe zu tun?

Eine der interessantesten Anwendungen der Bilddatenverarbeitung ist die Bestimmung des Ortes oder der Geschwindigkeit eines sich bewegenden Objektes aus einer oder mehrerer Videoaufnahmen, z.B. eines Tennis- oder Fußballs. Wie berechnet man die Position eines Objektes anhand seines Auftauchens in mehreren Bildern verschiedener Kameras? Wir beschreiben mögliche Lösungswege, und zeigen alternative Lösungsmöglichkeiten auf, bei denen u.a. der Rang von Matrizen eine Rolle spielt.

Abbildung 1. Damit es beim Aufstieg mit rechten Dingen zugeht, sollten reguläre Tore zählen.

1. Einleitung

Wie funktioniert die Torlinientechnik beim Fußball? Worauf basiert das Hawk-Eye beim Tennis, welches klärt, ob ein Ball im Aus war? Die Beantwortung dieser Fragen erfordert eine Vielzahl unterschiedlicher mathematischer Techniken. Zu diesen zählen: Bildverarbeitung in allen Facetten, Elementargeometrie, Vektor- und Matrizenrechnung, Geometrie, Optimierung. Diese Problemstellung stellt somit ein gutes Beispiel für Mathematisches Modellieren in realen und sinnhaften Kontexten dar. Die Problemstellung ist offen, bietet verschiedene Aspekte, auf die sich eine Lerngruppe konzentrieren kann, und ist daher auch an heterogene Gruppen anpassbar.

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

2. Lösungsmöglichkeiten

In einem vorangegangenen Artikel (Frank & Roeckerath 2015) haben wir Lösungsmöglichkeiten des obigen Problems mittels Elementargeometrie aufgezeigt. In dieser Arbeit möchten wir einige weitere Aspekte darstellen. Die folgenden Ausführungen sollen nicht *die Lösung* des Problems sein, sondern zeigen, wie man durch das Nachdenken über offene Modellierungsfragen auf interessante Mathematik geleitet werden kann.

Dazu machen wir folgende Annahmen: Wir verfolgen zwei Punkte eines Objekts (z.B. zwei Punkte auf einem Ball), welches sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit entlang einer Geraden im Raum bewegt. Die zwei Punkte des Objekts können also geschrieben werden als

$$x_1(t) = x_0 + \frac{1}{2}\Delta x_0 + tv, x_2(t) = x_0 - \frac{1}{2}\Delta x_0 + tv,$$

wobei t die Zeit, v der Geschwindigkeitsvektor, Δx_0 der Abstandsvektor mit Länge B, sowie x_0 der Mittelpunkt des Objekts zum Zeitpunkt 0 sind.

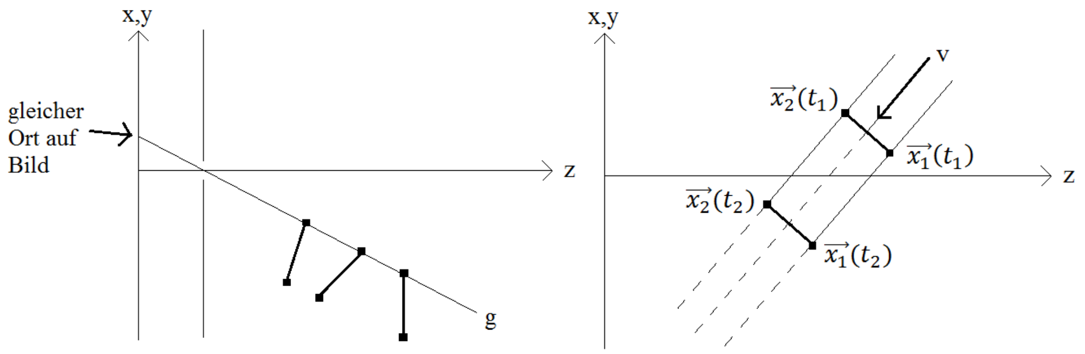

Abbildung 2. Objektpunkte in der gleichen Richtung werden auf den selben Bildpunkt von der Kamera abgebildet (links). Parametrisierung der Trajektorien der beiden Objektpunkte (rechts).

Zweitens idealisieren wir die Kamera als Lochkamera (was keine Einschränkung ist). Wir bemerken, dass man aus der Position eines Bildpunktes in der Bildebene darauf schließen kann, dass das Objekt sich in einer bestimmten Richtung ausgehend von der Linse befindet (siehe Abbildung 2). Wir nehmen nun weiterhin an, dass wir das Objekt zu zwei Zeitpunkten beobachten. Wir bezeichnen die Beobachtungsrichtungen beider Objektpunkte, ausgehend von der Kamera, zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 mit g_1, h_1, g_2, h_2. Dann ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$x_0 + \frac{1}{2}\Delta x_0 + t_1 v = r_1 g_1, \qquad x_0 - \frac{1}{2}\Delta x_0 + t_1 v = s_1 h_1$$

$$x_0 + \frac{1}{2}\Delta x_0 + t_2 v = r_2 g_2, \qquad x_0 - \frac{1}{2}\Delta x_0 + t_2 v = s_2 h_2$$

mit 12 Gleichungen für die 13 unbekannten Einträge von $x_0, \Delta x_0, v,\ r_1, s_1, r_2, s_2$. Zusätzlich gilt die nichtlineare Gleichung $|\Delta x_0| = B$.

Wir überlassen der geneigten Leserin, folgendes zu beweisen: Falls drei der vier Richtungsvektoren g_1, h_1, g_2, h_2 linear unabhängig sind, so besitzt das obige lineare Gleichungssystem eine eindimensionale Lösungsmenge (die zugehörige Matrix hat ithin vollen Zeilenrang). Der zu bestimmende Parameter in dieser Lösungsschar lässt sich eindeutig durch die nichtlineare Längenbedingung festlegen.

Aus der (präzisen) Aufnahme zweier Bahnpunkte eines gleichförmig bewegten Objekts zu zwei Zeiten lässt sich also dessen komplette Trajektorie rekonstruieren!

2. Modellierungshelix & wissenschaftlicher Kontext

Besonders wichtig ist unserer Ansicht nach, dass in einem Modellierungsprojekt die Abfolge von *realer Situation – vereinfachter Situation – mathematischer Formulierung – mathematischer Lösung – Abgleich mit realer Situation* mehrfach durchlaufen wird, und das Modell entsprechend verbessert wird. Dieser Ablauf ist allgemein als Modellierungskreislauf bekannt, jedoch finden wir das Bild der Modellierungshelix (unseres Wissens zuerst propagiert von der Initiative computerbasedmath.org) viel treffender. Beim Durchlaufen wird die Helix enger und steigt nach oben, d.h. man nähert sich der Lösung gleich auf zwei Ebenen.

Ähnliche Ideen verfolgen viele weltweite Initiativen, unter anderem CDIO (Conceive-Design-Implement-Operate) (Crawley et al. 2007), ICTMA (International Study Group for the Teaching of Mathematical Modelling and Applications), und Problem-Based Learning (Barrows 1997). Im deutschsprachigen Raum ist insbesondere das Zentrum KOMMS (Kompetenzzentrum für mathematische Modellierung in MINT-Projekten in der Schule, komms.uni-kl.de) zu nennen, aus dem unsere Aktivitäten entstanden sind.

3. Organisatorischer Rahmen

Projekte wie das oben beschriebene werden im Rahmen des Schülerlabors CAMMP (Computational And Mathematical Modeling Program, cammp.rwth-aachen.de) angeboten. Im Rahmen von CAMMP entwickeln wir problem-orientierte Projekte und führen diese mit Schülerinnen und Schülern durch. Dabei zielen wir auf den Übergang von Schule zur Hochschule. Die Projekte dauern von 90 Minuten (projektorientierte Übung) über einen Tag (CAMMP day) bis zu einer Woche (CAMMP week), und sind entsprechend mit längerer Dauer offener gestaltet.

4. Ausblick

Unserer Ansicht nach ist echte Modellierung (reale Probleme und Arbeit mit realen Daten) mit Schülerinnen und Schülern in viel weiterem Maße möglich als dies gemeinhin angenommen wird. Die Teilnehmenden zeigen sich begeistert von den wahren Anwendungen der Mathematik. Wir hoffen, einen Beitrag zur gesellschaftlichen Akzeptanz von Mathematik zu liefern, und Schülerinnen und Schüler für ein MINT-Studium zu interessieren. In der Zukunft werden wir verstärkt empirische Untersuchungen zur Wirkung von Modellierungsprojekten durchführen.

Die Arbeit im Schülerlabor wird in den kommenden Jahren im Rahmen eines Projekts in der Qualitätsoffensive Lehrerbildung in die Lehramtsausbildung an der RWTH Aachen integriert.

Alle Materialien sind auf Anfrage bei den Autoren erhältlich.

Literatur

Barrows, H.S. (1996), Problem-Based Learning in Medicine and Beyond: A Brief Overview, In: Bringing Problem-Based Learning to Higher Education: Theory and Practice.

Crawley, E., Malmqvist, J., Östlund, S. & Brodeur, D. (2007) Rethinking Engineering Education, The CDIO Approach, Springer-Verlag.

Frank, M. & Roeckerath, C. (2015). Wie kann man mit einer Handykamera Geschwindigkeiten messen? *Der Mathematikunterricht, 61*, 27-31.

Frank, M., Roeckerath, C. & Hattebuhr, M. (2015) Wie funktioniert eigentlich GPS und was hat das mit Mathe zu tun? – Projekttag des EducationLab CAMMP der RWTH-Aachen. Vortrag, GDM-Tagung, Basel.

Frank, M., Roeckerath, C. & Hattebuhr, M. (2015) Optimierung der Spiegel in einem Solarkraftwerk – Projekttag des EducationLabs CAMMP der RWTH Aachen. Vortrag, GDM-Tagung, Basel.

Kaiser, G. & Schwarz (2010), Authentic Modelling Problems in Mathematics Education-Examples and Experiences, *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*, 51-76.

Tarchini, A. (2015) Why creating algorithms is the 'new literacy', conference presentation at World Engineering Education Forum (WEEF) Florence.

Danksagung

Wir danken Kirsten Wohak für die Erstellung der Grafiken.