Markus VOGEL, Heidelberg

Mentale Modelle – Ausgewählte Aspekte mathematikdidaktischer Adaptionen

In diesem Beitrag werden theoretische Grundlagen des psychologischen Konstrukts der mentalen Modelle umrissen, zum in der Mathematikdidaktik häufig gebrauchten Begriff der Grundvorstellung in Beziehung gesetzt und Adaptionen von empirischen Forschungsansätzen skizziert.

Motivation

Wenn die im Unterricht verwendeten Darstellungen eines Lerngegenstandes selbst bei „noch so guter Illustrierung und sprachlicher Vermittlung“ (Winter, 1983) der wesentlichen mathematischen Strukturen nicht an das Denk- und Vorstellungsvermögen der Schülerinnen und Schüler anknüpfen können, wird die unterrichtliche Vermittlung wenig Aussicht auf Erfolg bei dem haben, was Vogel und Wittmann (2010) den (sukzessiven) Aufbau tragfähiger Vorstellungen nennen. Dabei ist zu fragen, was dieser – aus praktisch-intuitiver Sicht womöglich klare – terminus technicus von tragfähigen Vorstellungen zu mathematischen Begriffen oder Verfahren meint. Tragfähige Vorstellungen werden in der Mathematikdidaktik häufig über Grundvorstellungen beschrieben, die ihrerseits mit dem kognitionspsychologischen Konstrukt der mentalen Modelle konnotiert werden.

Theorie

Grundvorstellungen: Die Frage, was im Mathematikunterricht an Strukturen mathematischer Begrifflichkeiten oder Verfahren gelernt werden soll, lässt sich durch stoffdidaktische Untersuchungen, d. h. fachlich-epistemologische Analysen von Lerninhalten beantworten. In diesem Zusammenhang wird häufig von den *Grundvorstellungen* mathematischer Begriffe und Verfahren gesprochen (Vom Hofe, 1995). Grundvorstellungen konkretisieren mathematische Strukturen überwiegend anhand von Sachkontexten und darin stattfindenden Handlungen. Sie stellen wesentliche mathematische Strukturen eines Begriffs oder Verfahrens auf eine Art und Weise dar, die für Schülerinnen und Schüler nachvollzogen werden können und daraus ihr didaktisches Potential entfalten. Zu einem mathematischen Begriff oder Verfahren gibt es häufig mehrere passende Grundvorstellungen, Beispiele sind: Grundvorstellungen zur Division als Verteilen und als Aufteilen (vgl. z. B. Vogel & Wittmann, 2010), Grundvorstellungen zu Funktionen (Zuordnung, Kovariation und Vorstellung als Ganzes, vgl. z. B. Vollrath, 2003) oder Grundvorstellungen bei Brüchen als „Bruch als Teil eines Ganzen“ einerseits und „Bruch als Teil mehrerer Ganzer“ andererseits (vgl.

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Padberg, 1978). In diesem Sinn werden Grundvorstellungen als instruktionale Modelle im Sinne von Seel (2003) verstanden, die nach didaktischen Gesichtspunkten gestaltet sind und in einer normativen Weise als Vorlagen für tragfähige Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler dienen. Grundvorstellungen werden jedoch auch in deskriptiver Weise für Erklärungsmodelle von Schülerinnen und Schülern verwendet, die in dem System individueller Erfahrungsbereiche verankert aktivierbar sind (Vom Hofe, 1995). Diese Doppelbedeutung hat dem Konzept der Grundvorstellungen verschiedentlich auch Kritik eingebracht (vgl. Weber, 2007) und macht die Klärung der begrifflichen Verwendung nötig, wenn damit gearbeitet wird (z. B. Prediger, 2008).

Mentale Modelle: Grundvorstellungen werden unter Rückgriff auf das Konstrukt der mentalen Modelle definiert: „Unter Grundvorstellungen werden mentale Modelle mathematischer Begriffe und Verfahren verstanden, die ausgebildet werden müssen, um zwischen Mathematik, Individuum und Realität zu vermitteln.“ (Bruder, Hefendehl-Hebeker, Schmidt-Thieme, & Weigand, 2015) oder „'Grundvorstellungen' are mental models of mathematical content.“ (Kleine, Jordan, & Harvey, 2005). Dieser Rückgriff auf das psychologische Konstrukt macht eine (zumindest in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik selten aufzufindende) begriffliche Klärung notwendig.

Mentale Modelle dienen in ihrer kognitiven Funktion dem Verstehen eines Ausschnitts der realen Welt und bilden eine Grundlage für die Planung und Steuerung von Handlungen (vgl. Dutke, 1994). In der weithin akzeptierten Definition von Schnotz und Bannert (1999) gehen alle konstitutiven begrifflichen Eigenschaften ein: „Ein mentales Modell [...] ist ein internes Quasi-Objekt, das in einer Struktur- oder Funktionsanalogie zu dem dargestellten Gegenstand steht und diesen aufgrund bestimmter inhärenter Struktureigenschaften repräsentiert.“ Mentale Modelle sind entweder wahrnehmungsnahe Analogien oder als Ergebnisse von Denkvorstellungen abstrakte Analogien (physical models vs. conceptual models, Johnson-Laird, 1983). Welche Eigenschaften eines Originals in die mentale Modellkonstruktion eingehen, hängt vom Vorwissen und von der Intention des modellbildenden Subjekts ab (Seel, 1991). Entscheidendes Merkmal ist die Prozessfähigkeit eines mentalen Modells (Seel, 2003), d.h. es erlaubt, ohne physischen, oder externen Rückgriff auf das Original mit dem dargestellten Inhalt qualitativ gedanklich zu arbeiten (z. B. einen Vorgang gedanklich zu simulieren und Vorhersagen zu treffen). Auf diese Weise kann auf der Basis vorhandenen Wissens über mentale Modelle neues Wissen durch Schlussfolgerungen aktiv erzeugt werden. Die Fähigkeit hierzu hängt außer von den individuellen Voraussetzungen noch von der Situation und der Problemkontextualisierung ab (vgl. Dutke, 1994). Mentale Modelle sind ein zentrales Element aktueller Theorien der Informationsverarbeitung multipler Repräsentationen (vgl. Schnotz & Bannert, 1999).

Bereits aus dieser sehr groben Zusammenfassung geht hervor, dass mentale Modelle in nicht normativer, sondern deskriptiver Weise das subjektive Wissen von Personen repräsentieren (vgl. Seel, 2003). Bezogen auf das begrifflich Verhältnis von Grundvorstellungen, mentalen Modellen und tragfähigen Vorstellungen lässt sich zusammenfassen: Grundvorstellungen (im normativen Sinn verstanden, s. o.) beschreiben als Teil einer didaktisch aufbereiteten instruktionalen Welt (vgl. Seel, 2003) aus einer fachlich-epistemologischen Perspektive, was in die Entwicklung mathematischer mentaler Modelle als Teil einer subjektiven Welt (vgl. Seel, 2003) eingehen soll: Wenn sie wesentliche mathematische Strukturen widerspiegeln (Strukturanalogie), sich beim mathematischen Arbeiten als flexibel und übertragbar erweisen (Funktionsanalogie) und deshalb eine Argumentationsgrundlage für belastbare Schlussfolgerungen bilden können, kann man von Tragfähigkeit sprechen (vgl. Vogel & Wittmann, 2010). Ob eine Vorstellung tragfähig ist oder nicht, entscheidet sich letztlich am Erfolg in einer konkreten Situation des Mathematikunterrichts.

Adaptionen im empirischen Forschungsfeld

Die Eigenschaften der Struktur- und Funktionsanalogie haben sich als nützlich erwiesen, um zum Zweck der Diagnose von primären statistischen Vorstellungen von jungen Schülerinnen und Schülern theoriegeleitet schwierigkeitsgestufte Aufgaben zu konstruieren, die darauf zielen, hinsichtlich zugrundeliegender Grundvorstellungen unterschiedlich elaborierte mentale Modelle aufzurufen: Eine Entscheidungssituation, deren Problemhaltigkeit sich einerseits aus der Analyse von gegebenen Daten sowie involvierten Personen und Objekten ergibt (Struktur) und andererseits der Erfordernis ergab, probabilistische mentale Simulationen anzustellen (Funktion) und darauf basierend prognostische Entscheidungen zu treffen (Schlussfolgerungen). Theoriegeleitet ließ sich eine Abstufung von vier Schwierigkeitsgraden ableiten, die sich im gegebenen Informationsgehalt zu verfügbaren Daten (gegeben: ja/nein) und Objekten (gegeben: ja/nein) einerseits sowie den Erfordernissen von mentaler Simulation (erforderlich: ja/nein) und Datengenerierung (sichtbar: ja/nein) andererseits bemisst. Die die so erfolgte Aufgabenkonstruktion ließ sich durch (auf 5%-Niveau) signifikant unterschiedliche Lösungshäufigkeiten und interpretative Evidenz von Transskriptanalysen als empirisch validiert betrachten (vgl. Eichler & Vogel, 2012). Während es sich im vorgenannten Fall eher um den Typus von wahrnehmungsnahen mentalen Modellen (s. o.) handelt, sind momentane interdisziplinäre Forschungsaktivitäten bei der strukturellen Adaption des Aufgabenkonstruktionsprinzips in den Themenfeldern der Aussagenlogik und der (Schul-)Algebra eher im Bereich der Denkvorstellungen anzusiedeln. Langfristiges Ziel sind theoriegeleitete und empirisch validierte Konstruktionsprinzipien, die für gezielte Aufgabenstellungen in themenspezifischen Diagnoseinstrumenten Verwendung finden können.

Literatur

Dutke, S. (1994). Mentale Modelle: Konstrukte des Wissens und Verstehens : kognitionspsychologische Grundlagen für die Software-Ergonomie. Arbeit und Technik: Bd. 4. Göttingen: Verlag für Angewandte Psychologie.

Kleine, M., Jordan, A., & Harvey, E. (2005). With a focus on 'Grundvorstellungen' Part 1: a theoretical integration into current concepts. ZDM, 37(3), 226–233.

Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B., & Weigand, H. G. (2015). Handbuch der Mathematikdidaktik: Springer Berlin Heidelberg.

Schnotz, W., & Bannert, M. (1999). Einflüsse der Visualisierungsform auf die Konstruktion mentaler Modelle beim Text- und Bildverstehen. Experimental Psychology (formerly \"Zeitschrift für Experimentelle Psychologie\"), 46(3), 217–236.

Eichler, A., & Vogel, M. (2012). Basic modelling of uncertainty: Young students' mental models. ZDM, 44(7), 841–854.

Seel, N. M. (1991). Weltwissen und mentale Modelle. Göttingen, Zürich [u.a.]: Hogrefe, Verl. für Psychologie.

Johnson-Laird, P. N. (1983). Mental models: Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness. Cognitive science series: Vol. 6. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. Learning and Instruction, 18(1), 3–17.

Vom Hofe, R. (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Texte zur Didaktik der Mathematik. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum, Akad. Verl.

Vogel, M., & Wittmann, G. (2010). So wird's klar - tragfähige Vorstellungen erarbeiten. Praxis der Mathematik in der Schule, 52(32), 1–8.

Winter, H. (1983). Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematilkunterricht. Journal für Mathematikdidaktik, 4(3), 175–204.

Vollrath, H.-J. (2003). Algebra in der Sekundarstufe (2., Aufl.). Mathematik Primar- und Sekundarstufe. Heidelberg, Berlin: Spektrum, Akad. Verl.

Weber, C. (2007). Mathematische Vorstellungen bilden: Praxis und Theorie von Vorstellungsübungen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II (1. Aufl.). Bern: Hep verl.

Seel, N. M. (2003). Psychologie des Lernens. München, Basel: Reinhardt.

Padberg, F. (1978). Didaktik der Bruchrechnung. Studienbücher Mathematik Didaktik. Freiburg: Herder.