Wolfgang PFEFFER, Passau, Matthias BRANDL, Passau

Mentales Modell zum Abbildungsbegriff bei Studienanfängerinnen und –anfängern.

Dieser Beitrag behandelt einen Ausschnitt eines Forschungsprojekts an der Universität Passau. Ziel dieses Projekts ist es, mehr über die Schwierigkeiten im Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik herauszufinden, welche in den letzten Jahren sowohl national (vgl. etwa Dieter & Törner (2010)) als auch international (vgl. etwa Clark & Lovric (2009)) aufgezeigt wurden. Die in der Literatur geschilderten Probleme zeigen sich auch an der Universität Passau. In Pfeffer & Brandl (2015) haben wir bereits über erste Ergebnisse eines Fragebogens zum Hintergrundwissen Mathematik von Studienanfänger/innen berichtet. In diesem Artikel stellen wir Ergebnisse einer qualitativen Untersuchung der Begriffsbildung von Studierenden im ersten Semester vor. Wir beschränken uns hierbei auf den Abbildungsbegriff.

1. Concept-Image und Concept-Definition

Die theoretische Grundlage für unsere Untersuchung bilden die von Tall & Vinner (1991) eingeführten Begriffe Concept-Image und Concept-Definition. Im Wandel von der Schul- zur Hochschulmathematik und dem damit einhergehenden steigenden Abstraktionsgrad kommt der Begriffsbildung bzgl. mathematischen Definitionen und Konzepten eine wichtige Rolle zu. In diesem Zusammenhang meint Concept-Image die „(…) cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes“ (Tall & Vinner, 1981, S. 152). Unter dem Begriff Concept-Definition wird die formale mathematische Definition verstanden. Engelbrecht (2010) argumentiert in Anlehnung an Alcock & Simpson (1999), dass Studenten beim Argumentieren nicht nur auf die formalen Definitionen von Begriffen zurückgreifen, sondern ihr mentales Modell auf ihrem Concept-Image aufbauen, welches sich von der Definition unterscheiden kann. Folglich ist es umso wichtiger, sowohl die formale Definition zu kennen, als auch ein möglichst kohärentes Concept-Image dazu aufzubauen (vgl. Engelbrecht, 2010, S. 146). Für Rösken & Rolka ist vor allem die Entwicklung des Concept-Image entscheidend: „When working on problems, students do not consider any concept definition. They base their decisions on the concept image“ (Rösken & Rolka, 2007, S. 185). Demnach ist es besonders in der Studieneingangsphase wichtig, dass die Studierenden zu zentralen mathematischen Definitionen und Konzepten ein Concept-Image aufbauen und lernen, auf dieses zurückzugreifen.

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

2. Methode und Stichprobe

Zu Beginn des Wintersemesters 2014/2015 wählten wir unter den Studienanfängerinnen und -anfängern an der Fakultät für Informatik und Mathematik der Universität Passau eine möglichst heterogene Stichprobe von 31 Studierenden aus. Im Rahmen einer längsschnittlich angelegten qualitativen Interviewstudie (EMMA) wurden diese Studierenden im Lauf der ersten beiden Semester zu drei unterschiedlichen Zeitpunkten befragt. Bei den Befragungen stand vor allem das mentale Modell (insbesondere Concept-Image) zu ausgewählten, zentralen Begriffen aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und Analysis I und dessen Entwicklung im Fokus. Wir möchten etwa herausfinden, was sich Studienanfängerinnen und -anfänger nach rund 7 Wochen Studium unter den Begriffen Abbildung, Injektivität sowie Surjektivität vorstellen und wie sich diese Vorstellung im Laufe der ersten beiden Semestern verändert. In diesem Artikel beschränken wir uns auf einen Interviewausschnitt zum Abbildungsbegriff nach rund 7 Wochen Mathematikstudium.

3. Funktion und Abbildung

Abbildungen sind ein zentraler Bestandteil der ‚Linearen Algebra I'-Vorlesung. Diese ist zugleich die einzige Mathematikvorlesung im ersten Semester für Studiengänge mit vertieftem Mathematikanteil. Nach der Definition von Abbildungen werden weiter Eigenschaften von Abbildungen (z.B. Injektivität, Surjektivität) sowie insbesondere lineare Abbildungen behandelt. Diese Eigenschaften werden von den Studierenden in den Übungsveranstaltungen eingeübt und vertieft. Der Abbildungsbegriff nimmt an dieser Stelle eine Sonderrolle ein, da er im Gegensatz zu vielen anderen Begriffen bereits in der Schule unter dem Funktionsbegriff vorkommt.

Zuordnungen und Funktionen

Eine **Zuordnung** weist jedem Wert aus einer Menge einen Wert oder mehrere Werte aus einer anderen Menge zu.
Wird stets genau ein Wert aus der anderen Menge zugewiesenen, so spricht man von einer **eindeutigen Zuordnung** bzw. von einer **Funktion**.

Die **Zuordnungsvorschrift** einer Funktion f gibt an, wie zu jedem Wert x der **Definitionsmenge** D_f der zugehörige Wert y der anderen Menge gefunden wird.
Kurz: $f\colon x \mapsto y$

Eine **Abbildung** $\varphi : M \to N$ ist eine Zuordnung, die jedem Element von M genau ein Element von N zuordnet (φ: Abbildungsname, M: Definitionsbereich, N:Zielbereich, $\to$: Abbildungspfeil).
Ist $a \in M$, so schreiben wir $\varphi(a)$ für **Bildelement** von a unter φ (oder kurz das **Bild** von a unter φ).
Schreibweise:

$$\begin{aligned} \varphi : M &\to N \\ a &\mapsto \varphi(a) \end{aligned}$$

M heißt **Definitionsbereich** von φ. N heißt **Zielbereich** von φ. $\mathrm{Bild}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in M\}$ heißt das **Bild** von φ und wird mit $\mathrm{Im}(\varphi)$ bezeichnet.

Abb. 1: Gegenüberstellung der Definition einer Funktion im Schulbuch (Fokus Mathematik 8 - Gymnasium Bayern) und der Definition einer Abbildung im Vorlesungsskript zur ‚Linearen Algebra I'.

Wir stellen an dieser Stelle der Definition einer Funktion im Schulbuch (Fokus Mathematik 8) die Definition einer Abbildung im Lineare-Algebra-Skript (Uni Passau, WS 14/15) gegenüber (Abb. 1).

4. Ergebnisse

Von den 27 Teilnehmer/innen am zweiten Interviewtermin wiesen lediglich fünf Studierende ein konsistentes und vollständiges Abbildungskonzept auf. Hierzu exemplarisch die Antwort von S21 auf die Frage, was für ihn eine Abbildung ist:

S21: Also eine Abbildung ist für mich erst einmal eine Relation, das heißt man hat (.)/ ja wir haben das eingeführt mit Mengen ((Mhm))) und dann wird die eine Menge auf die andere abgebildet ((Mhm)). Das heißt wir haben hier sowas und dann ordnet man ein Element x (.)/ ahm/ einem Element von Y zu. Das ist so der erste Teil und irgendwann hab ich dann festgestellt, dass das mit Funktionen auch zusammenhängt. Also eine Abbildung ist eine Funktion, mit Funktion mein ich jetzt, wie in der Schule. Da haben wir das nicht Abbildung genannt. Das verstehe ich unter Abbildung und Funktion. [...] Ja ich habe eine Vorstellung, dass in einer Abbildung eine bestimmte Wertemenge, also Werte einer bestimmten Menge einer anderen Menge zugeordnet werden und das in einem bestimmten Raum ((Mhm)). Wenn es eine Funktion sein soll, dann darf nur jedem x genau ein y zugeordnet werden ((Mhm)). [...] Ja Abbildung ist äquivalent zu einer Funktion ((Mhm)), aber nicht zur Relation.

Die Antwort von S21 enthält alle wesentlichen Inhalte. Er spricht zwar zunächst von einer Relation auf zwei Mengen – ein Indiz dafür, dass er sich zunächst auf die Definition einer Abbildung als Teilmenge des kartesischen Produkts zweier Mengen bezieht. Weiter bezeichnet er eine Abbildung als Zuordnung von Elementen einer Menge X zu Elementen einer Menge Y, stellt dann allerdings den Bezug zu Funktionen her, die ihm aus der Schule bekannt sind. Über den Funktionsbezug leitet er sich die Eigenschaften einer Abbildung ab, dass jedem x genau ein y zugeordnet wird. Der Großteil der Studierenden hatte lediglich ein fragiles und zudem unvollständiges Verständnis des Abbildungskonzepts.

S17: Oh Gott, das wird nichts. [...] (...) Hmm hmm hmm. Oh Gott in so was bin ich schlecht. Ahm/ (..) ja (..) das ist eine gute Frage ja. Eine Abbildung (..) ich weiß jetzt nicht, wie ich das erklären soll. [...] Ahm/ (..) ich weiß nicht, man hat da irgendwelche/ irgendwie/ ahm/ ich weiß jetzt nicht, wie ich das sagen soll (..). Ja hmm. Ich sag jetzt mal Grundlage ((Mhm)). Und (.) die wird halt dann mit Hilfe irgendeiner Vorschrift auf/ ahm/ ja auf irgendwas Neues in Anführungszeichen abgebildet ((Mhm)). Ja ((S17: lacht)) ich weiß nicht, was ich noch sagen soll.

S28: Ne/ ahm/ okay. Eine Abbildung ist eigentlich zwischen zwei Mengen/ klar die Definition ist halt/ die jedem Element aus der einen Menge/ ahm/ ein Element aus der anderen Menge zuordnet und/ ahm/ das kann so eine, so eine so eine ganz hingebogene Abbildung sein sag ich mal so. Das Element bekommt das und das das und so. Oder halt so eine lineare oder so was, die dann irgendwie einen Zusammenhang haben, die dann eine Formel quasi abbildet ((Mhm)). Also ja, also ich kann halt hier so Pfeile und so.

Bei S17 liegt ein sehr vages Bild von einer Abbildung vor. Er erwähnt den Begriff „Vorschrift", ohne diesen näher zu spezifizieren. Weiter spricht er von einer „Grundlage" sowie von „irgendwas Neues". Es ist ihm (in diesem Moment) nicht möglich, diese beiden Begriffe näher zu charakterisieren. Eine mathematische Beschreibung mit Mengen und Elementen ist so-mit nicht möglich. In diesem Punkt ist S28 mit seiner Vorstellung deutlich weiter. Für ihn ist eine Abbildung „zwischen zwei Mengen“, die „jedem Element aus der einen Menge ein Element aus der anderen Menge zuordnet“. Während er die Linkstotalität einer Abbildung erwähnt, fehlt die Rechtseindeutigkeit, welche auch auf Nachfragen hin nicht genannt wird.

Vier Teilnehmer wiesen überhaupt keine Vorstellung zu einer Abbildung auf. Gleichzeitig fehlte ihnen die Verbindung zur Funktion aus der Schule.

5. Ausblick

Das mentale Modell von Studienanfänger/innen zu zentralen Begriffen aus den Anfängervorlesungen soll charakterisiert und beschrieben werden. Ähnlich zu einer vergleichbaren Studie von Hänisch (2011) wird dabei besonders Wert auf vorhandene Fehlvorstellungen sowie formale Fertigkeiten gelegt. Darüber hinaus steht insbesondere die Entwicklung des mentalen Modells im Laufe der ersten beiden Semester im Forschungsfokus.

Literatur

Alcock, L. & Simpson, A. (1999). The rigour prefix. In O. Zaslavsky (Hrsg.): *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 17-24.

Clark, M. & Lovric, M. (2009). Understanding secondary-tertiary transition in mathematics. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 40(6)*, 755-776.

Dieter, M. & Törner, G. (2010). *Zahlen rund um die Mathematik.* Preprint der Fakultät für Mathematik (Universität Duisburg-Essen). Nr. SM-DU-716.

Engelbrecht, J. (2010). Adding structure to the transition process to advanced mathematical activity. In *International Journal of Mathematical Education*, 41(2), 143-154.

Hänisch, C. (2011). Denkformen des formalen Denkens – Eine qualitative empirische Studie zur spezifischen Kognition von Studienanfängern im Fach Mathematik. *Dissertation.*

Pfeffer, W. & Brandl, M. (2015). Schwierigkeiten beim Übergang Schule – Hochschule in Mathematik. Eine qualitative Längsschnittstudie. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015.*

Rösken, B. & Rolka, K. (2007). Integrating Intuition: the Role of Concept Image and Concept Definition for Students‘ Learning of Integral Calculus. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 3, 181-204.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(7), 151-169.