Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Korschenbroich

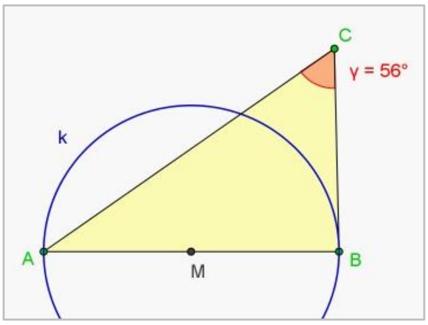
Perspektivwechsel durch dynamische Software

Zu vielen mathematischen Themen hat sich (nicht nur in der Schule) eine jeweils typische Sichtweise eingebürgert, die dann oft andere Sichtweisen an den Rand drängt. Manchmal ist es gut und hilfreich, diese ‚eine' Sichtweise zu wechseln und eine andere Perspektive einzunehmen. Dazu kann man das mathematische Gebiet wechseln, z.B. Geometrie statt Algebra, aber auch das Werkzeug. Waren in der jüngeren Vergangenheit die (auch in den Bildungsstandards angesprochenen) typischen mathematischen Software-Werkzeuge wie DGS, Funktionenplotter, Tabellenkalkulation und CAS noch getrennte Programme mit je eigenen Dateiformaten, so hat sich das mit dem Aufkommen von Multirepräsentationssoftware wie GeoGebra oder TI-Nspire geändert. Der Wechsel des Werkzeugs, der Repräsentationsform und damit auch der Perspektive auf das jeweilige Thema wird einfach und ohne Programm- und Dateiwechsel möglich.

Der klassische Blick auf mathematische Themen ist - wesentlich geprägt durch die seinerzeit verfügbaren Werkzeuge - oft statischer Natur gewesen. Insbesondere dynamische Software bietet heutzutage Anlass zur Neu- oder Rückbesinnung. Dies soll im Folgenden an einigen schultypischen Beispielen aufgezeigt werden.

1. Satz des Thales und Satz des Pythagoras

Eine typische Schulbuchformulierung zum Satz des Thales lautet: „Liegt der Punkt C auf dem Kreis über der Strecke AB, dann ist das Dreieck ABC rechtwinklig in C." (Fokus Mathematik 8 (2008), S. 107)



Bei einer dynamischen Betrachtung wird man sich aber nicht auf die Rechtwinkligkeit beschränken. Konstruiert man einen Thaleskreis über $\overline{AB}$, so kann man im Zugmodus untersuchen, wie sich der Winkel γ im Dreieck ABC verändert, je nachdem wohin man C zieht. Damit kommt man zu der umfassenderen Erkenntnis:

- Für $\gamma < 90°$ liegt C außerhalb des Thaleskreises
- Für $\gamma = 90°$ liegt C auf dem Thaleskreis
- Für $\gamma > 90°$ liegt C im Thaleskreis.

Das gleiche Vorgehen bietet sich beim Satz des Pythagoras an. Eine typische Schulbuchformulierung hat wieder statische Sicht: „Im rechtwinkligen

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate flächengleich mit dem Quadrat über der Hypotenuse.“ (Schnittpunkt 9 (2004), S. 118)

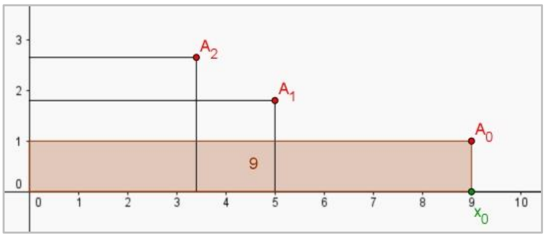
In der dynamischen Sicht erhält man dann im Zugmodus:

- Für $\gamma < 90°$ ist $a^2 + b^2 > c^2$
- Für $\gamma = 90°$ ist $a^2 + b^2 = c^2$
- Für $\gamma > 90°$ ist $a^2 + b^2 < c^2$.

Hier wird eine deutlich stärkere Betonung der Schüleraktivität, der Satzfindung, gegenüber dem klassischen Beweis sichtbar.

2. Verfahren von Heron

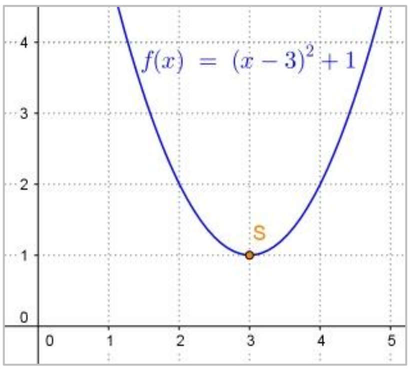
Der Algorithmus von Heron zur Berechnung einer Quadratwurzel ist aus heutiger Sicht die Programmierung einer algebraischen Formel in einer Schleife. Das war sicher nicht der Ansatz von Heron. In der damaligen Sicht der Mathematik und Geometrie wurden Produkte von Zahlen als Flächeninhalte von Rechtecken verstanden und das Wurzelziehen war der Übergang vom Flächeninhalt eines Quadrates zu seiner Seitenlänge.



Ein geometrischer Ansatz könnte dann sein: Starte mit einem passenden Rechteck (Seitenlängen a und 1) und mache dieses Rechteck bei gleichem Flächeninhalt sukzessive quadratförmiger.

Dazu bildet man den Mittelwert der beiden Seitenlängen und wählt dann die noch fehlende Seite für den Flächeninhalt passend. Wenn man dies mehrmals durchführt, sieht man, wie schnell das Verfahren konvergiert, wie schnell das Rechteck ‚quadratischer‘ wird. Desweiteren wird hier eine neue, funktionale Fragestellung möglich: Betrachtet man bei jedem Iterationsschritt den oberen rechten (hier rot markierten) Punkt, so kann man untersuchen, auf welchem Funktionsgraphen diese Punkte liegen.

3. Scheitelpunktform



Bei quadratischen Funktionen geschieht die Herleitung der Scheitelpunktform üblicherweise algebraisch, mit Termumformungen.

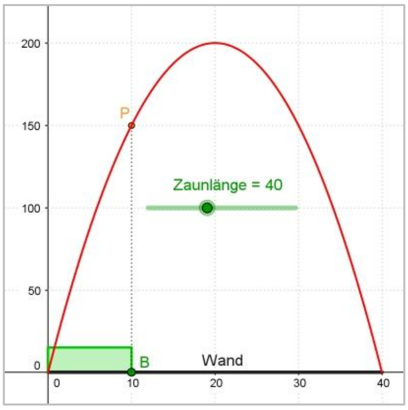
„Jeden Term der Form $ax^2 + bx + c$ kann man mit Hilfe der quadratischen Ergänzung auf die Form $a(x-d)^2 + e$ bringen.“ (Lambacher Schweizer 9 (1996), S. 88).

Um die Scheitelpunktform dynamisch zu verstehen, kann man einfach graphisch mit der Normalparabel starten und diese im Zugmodus im Koordinatensystem ziehen, zunächst längs der y-Achse, dann längs der x-Achse, dann quer durch das Koordinatensystem. Insbesondere bei ganzzahligen Gitterpunkten wird der Zusammenhang zwischen Lage des Scheitelpunktes und dem Funktionsterm offensichtlich.

4. Elementare Optimierung bei quadratischen Problemen

Typischerweise werden Extremwertaufgaben erst nach Abschluss der Differenzialrechnung mit entsprechenden Werkzeugen thematisiert. In etlichen Fällen kann man aber schon auf dem Niveau der Sekundarstufe I diese Probleme angehen.

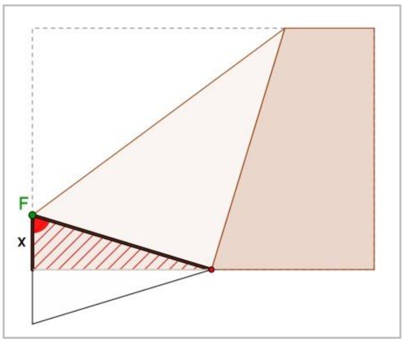
In der klassischen ‚Hühnerstall'-Aufgabe soll an einer Wand mit einem Zaun gegebener Länge ein möglichst großer Hühnerstall gebaut werden. Bei einer geeigneten Konstruktion mit dynamischer Software kann man dann das Rechteck, das den Hühnerstall repräsentiert, unter Beibehaltung der Zaunlänge verändern und den jeweiligen Flächeninhalt messen oder



ausrechnen. Diesen Flächeninhalt kann man als y-Koordinate in einen Punkt P exportieren und dessen Bahn untersuchen. Dabei stellt man fest, dass diese Bahn eine Parabel ist (was man leicht algebraisch begründen kann), dass der Flächeninhalt sich symmetrisch verhält, dass am Rande Nullstellen sind und dass der gesuchte Maximalwert da zu finden ist, wo die Parabel ihr Maximum hat (in der Mitte zwischen den Nullstellen).

5. Geometrie statt CAS

Faltet man ein DIN-A4-Blatt so, dass eine Ecke auf der gegenüberliegenden langen Seite des Blattes liegt, so entsteht ein (hier schraffiertes) Dreieck. Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks?
Und wie muss man falten, dass ein solches Dreieck maximalen Flächeninhalt hat? (Barzel (2016), S. 157)

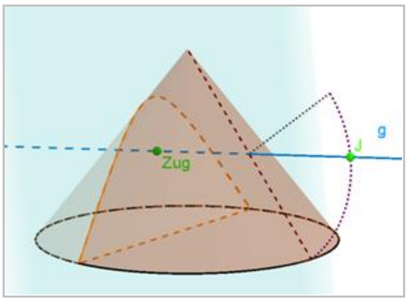


Beim für die Differenzialrechnung typischen Ansatz kommt man zur Zielfunktion $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{(21-x)^2 - x^2}$, die man dann ableitet.

Geht man elementar vor, kann man sich auf die geometrische Untersuchung des schraffierten Dreiecks beschränken. Die fett hervorgehobenen Seiten haben zusammen die Länge der kurzen Blattseite (= 21 cm). Spiegelt man dieses Dreieck, so erhält man insgesamt ein Dreieck mit konstantem Umfang (= 42 cm). Es ist bekannt (bzw. muss in der Klasse bekannt sein), dass davon das flächengrößte gleichseitig ist. Damit hat das optimale Dreieck die Seitenlängen 7 cm und 14 cm und der Winkel bei F beträgt 60°.

6. Kegelschnitte

Wenn Kegelschnitte überhaupt noch ein Thema in der Schule sind, dann werden Parabel, Ellipse, Hyperbel als ebene funktionale Objekte im Rahmen der Analytischen Geometrie thematisiert. Den raumgeometrischen Aspekt des tatsächlichen Schneidens von Kegeln, der früher in jeder mathematischen Sammlung präsent war, kann man heute mit dynamischer 3D-Software wiederbeleben.



7. Rotationskörper

Rotationskörper werden meist durch Rotation einer Fläche unter dem Graphen einer Funktion f um die x-Achse eingeführt. Ein alternativer, einsichtiger und mit Software leicht verständlicher und gut visualisierbarer Zugang nutzt die Querschnittflächen (Elschenbroich 2016, in diesem Band).

8. Fazit

Durch Perspektivwechsel, kombiniert mit Werkzeugwechsel, erhält man dynamische Sichtweisen von Sätzen, ermöglicht Verallgemeinerungen und kann von der algebraischen Sichtweise von Formeln und Gleichungen zu einer dynamischen geometrischen Sichtweise kommen, verlagert den Ansatz vom Funktionsterm auf Graphen, entlastet von Kalkül und stärkt das Entdecken (Elschenbroich 2017).

Literatur

Barzel; B. (2016): Arbeiten mit CAS aus fachdidaktischer Perspektive. In: Heintz, G. & Pinkernell, G. & Schacht, F.: *Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht*. MNU, Verlag K. Seeberger, Neuss.

Elschenbroich, H.-J. (2017): Perspektivwechsel durch dynamische Software. Erscheint in: Müller-Hill, E. (Hrsg.): *„Visualisieren – Transformation und Transfer“. Der Mathematikunterricht 6/2017*. Friedrich Verlag, Velber.

Elschenbroich, H.-J. (2016): Ein neuer Vorschlag zur Vermittlung von Grundvorstellungen der Integralrechnung. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016*. WTM-Verlag, Münster.