

Tempelbilder zur Visualisierung in/von Problemlöseprozessen

Der Lösungsgraph nach Pólya und König wurde in Gawlick (2014) als Visualisierungswerkzeug für heuristische Impulse vorgestellt – sowohl in der Rückschau („Was hat uns geholfen?“) als auch zur Unterrichtsplanung mit Heuristischer Rekonstruktion. Hier erläutern wir anhand der Rekonstruktion des „Thales“-Beweises, wie die „Flussüberquerung“ von der Voraussetzung zur Behauptung durch Tempelbilder erleichtert wird – diese unterlegen wir den Lösungsgraphen, um die Gliederung der Argumentation, den Zusammenhang der Argumente und den Beweisfluss stärker zu verdeutlichen. Zudem sind sie für den Prozess des Verallgemeinerns nutzbar, wie an der Sequenz „Thales – Umfangswinkelsatz – K10“ gezeigt wird.

Wie a.a.O. erläutert, geht es bei der Heuristischen Rekonstruktion darum, den Beweisgang durch geeignete Zwischenziele vorzustrukturieren, die die SuS über *heuristische Impulse* und dadurch angestoßene *epistemische Aktivitäten* möglichst selbstständig ansteuern können. Wie dort zeigen wir dies am Beweis des IWS (Innenwinkelsummensatzes), bei dem in „Elemente der Mathematik 7“ (Griesel et al 2010, S.145) in der Rückschau die Metapher vom Beweisen als Flussüberquerung eingeführt wird (Abb. 1):

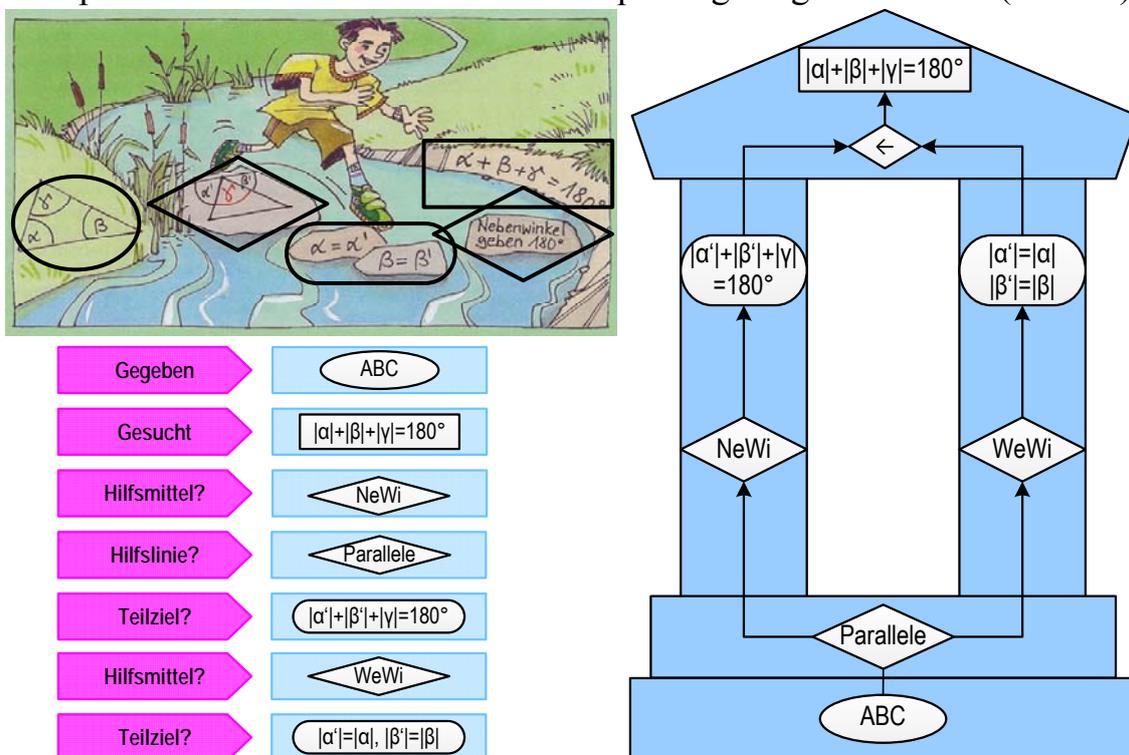


Abb. 1: IWS-Beweis als Folge von durch heuristische Impulse gefundener Teilziele

Zunächst fragt man mit Pólya nach dem Gegebenem (Graph-Symbol: Oval)

und dem gesuchten (Rechteck) und sucht dann rückwärts arbeitend nach Teilzielen als „Trittsteinen“, um die Entfernung zwischen den Ufern zu überbrücken. Dazu dient Königs Frage nach geeigneten (HM?) um eine solche Winkelbeziehung zu erhalten, die den Operator NeWi (Nebenwinkelsatz) liefert (im Graph: Raute). Um ihn anwenden zu können, müssen zunächst die Voraussetzungen geschaffen werden, dazu dient die Frage nach der Hilfslinie (HL?), die die Parallele ins Spiel bringt, aus der mit Königs Teilzielfrage (TZ?) die gesuchte Gleichung $|\alpha'|+|\beta'|+|\gamma|=180^\circ$ erhellt. Um zum Ziel zu kommen, muss man die Ausgangswinkel ins Spiel bringen, was wiederum mit HM? gelingt. Diese „Finde-Reihenfolge“ entspricht aber noch nicht der „Aufschreib-Reihenfolge“ des Beweises! Um daher in der Rückschau den Beweisgang zu visualisieren, unterlegen wir dem Graphen in Abb.1 eine **Tempelstruktur**: Sie besteht aus einem **Sockel** (enthält die Voraussetzungen), den **Säulen** (die Argumente linear *verketteten*) und **Architraven** (die mindestens zwei Säulen argumentativ *verknüpfen*) – deren letzter ist das **Tympanon** (für die Behauptung).

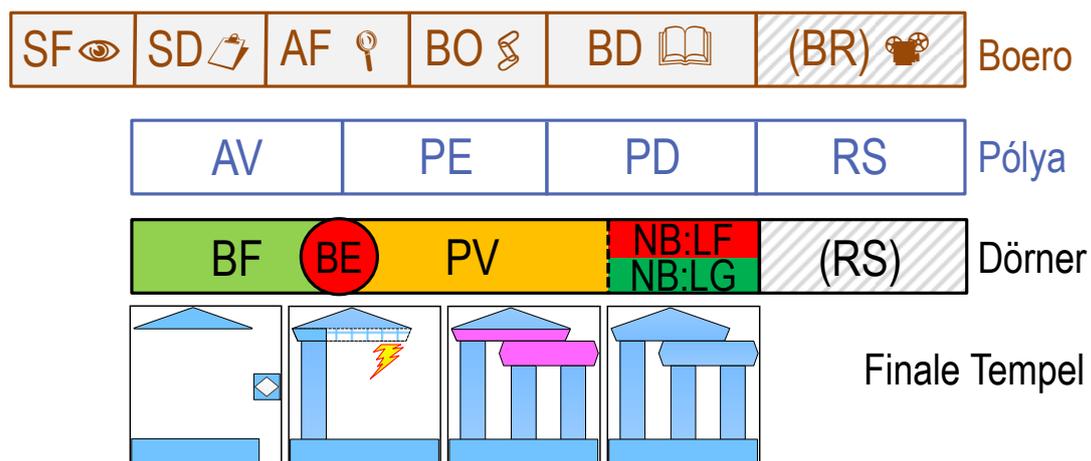


Abb. 2: Prozessabschnitte nach Pólya, Boero und Dörner

Im Prozess des Beweisens unterscheiden wir nach Boero (vgl. Brockmann-Behnsen 2014) die Phasen (SF) Satzfindung, (SD) Satzdarstellung, (AF) Argumentfindung, (BO) Beweisorganisation (*Verketteten* und *Verknüpfen* von Argumenten) und (BD) Beweisdarstellung, ergänzt um (BR) Beweisreflexion. Für AF taugen die König-Fragen am Lösungsgraphen, für BO und BR Pólya-Fragen, die anhand skizzierter Tempel gestellt und beantwortet werden können. Dem Beweisen als Spezialfall des Problemlösens entsprechend stellen wir in Abb. 2 die Boero-Phasen den Pólya-Phasen (AV) Aufgabe verstehen, (PE) Plan entwickeln, (PD) Plan durchführen und (RS) Rückschau gegenüber. (SF geht AV voraus, da Pólya nur geschlossene Probleme betrachtet.) Probleme sind nach Dörner (1976, S.10) gekennzeichnet durch das Auftreten von Barrieren im Bearbeitungsprozess, was diesen in Abschnitte untergliedert: Kurze Abschnitte werden als Ereignisse

bezeichnet, wie beispielsweise das Erreichen einer Barriere (BE). Vor dem Erreichen der Barriere liegt ein barrierefreier Abschnitt (BF), nach dem Erreichen der Barriere erfolgt ein Passageversuch (PV) der gefolgt wird oder übergehen kann in einen Abschnitt NB (Nachbarriere-Stadium) mit den Ausprägungen LG (Lösungsweg gefunden) oder LF (Lösungsweg fehlt).

<p>Aufgabe 1</p> <p>SF</p>	<p>Rechts siehst du eine Zirkusarena mit zwei gegenüber liegenden Ein- bzw. Ausgängen. Julia sitzt an der Stelle C und will den Auftritt des Clowns filmen. Sie erwartet ihn am Eingang A. Doch der Clown betritt die Arena bei B.</p> <p>a) Um wie viel Grad muss Julia ihre Filmkamera drehen?</p>	
<p>SD</p>	<p>Untersuche das auch für andere Stellen am Rand der Arena. Formuliere dein Ergebnis.</p> <p>b) Beweise deine Vermutung.</p>	
<p>AF</p>	<p>Anleitung: Zeichne einen Radius \overline{MC} und zerlege das Dreieck ABC dadurch in zwei Teildreiecke. Suche gleich große Winkel.</p>	
<p>Lösung</p>	<p>a) Die Zeichnung lässt vermuten: Julia muss die Kamera um 90° drehen. Auch an anderen Stellen auf dem Rand ergibt sich die gleiche Winkelgröße.</p>	
<p>BO und BD</p>	<p>b) Wir wissen: Der Punkt C liegt auf dem Halbkreis über AB. Wir wollen zeigen: $\gamma = 90^\circ$. Die Strecken \overline{MA}, \overline{MB} und \overline{MC} sind Radien des Kreises um M und daher gleich lang. Folglich sind die Dreiecke AMC und MBC gleichschenklige Dreiecke. Mithilfe des Basiswinkelsatzes folgt:</p> <p>(1) $\alpha = \gamma_1$; (2) $\beta = \gamma_2$</p> <p>Dann gilt: $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \alpha + \beta$</p> <p>Nach dem Winkelsummensatz gilt: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Wegen $\alpha + \beta = \gamma$ folgt: $\gamma + \gamma = 180^\circ$ $2 \cdot \gamma = 180^\circ$ $\gamma = 90^\circ$</p>	

Abb. 3: Hypothetische Boero- und Dörner-Phasen beim „Thales“-Beweis in „Elemente“

Wie verläuft in diesen Modellen der „Thales“-Beweisprozess? Die Darbietung in „Elemente der Mathematik 6“ (Griesel et al 2006, S.64) lässt sich gut nach Boero gliedern (Abb. 3) und suggeriert einen barrierefreien Verlauf. Eine Heuristische Rekonstruktion des Lösungsgangs erweist jedoch: Selbst wenn die AF-Impulse fruchten und zu einer vorwärtsarbeitenden BO führen, ist erwartbar, dass SchülerInnen der Klasse 6 im entscheidenden Verkettungsschritt stecken bleiben (Abb.5): Um das Ziel im Tympanon zu erreichen, müssen sie die IWS-Säule und den Architrav $|\gamma| = |\alpha| + |\beta|$ verknüpfen – dazu müssten sie sich aber von der eingeübten Sichtweise „IWS als Rechenausdruck“ lösen, in der eine Winkelgröße durch Einsetzen in die anderen beiden berechnet wird. Da $|\alpha|$ und $|\beta|$ variabel sind, lässt sich hier nur mit ihrer Summe operieren – das erfordert einen Sichtwechsel zur „IWS als Gleichung“, in der Terme substituiert werden können. Dies ist aber in Klasse 6 noch gar nicht verfügbar. Über diese Problematik wird in Schulbüchern mehr oder weniger hinweggegangen – dass es hier aber einer heuristischen Aufarbeitung bedarf, lehrt die empirische Forschung: Hätten

die SchülerInnen den Sichtwechsel beim „Thales“ erlernt, könnten sie ihn z.B. bei der TIMSS-Aufgabe K10 wieder abrufen – dies ist aber nur ansatzweise der Fall, vgl. Lucyga (in diesem Band). Wir erwarten also eher einen Verlauf wie in Abb. 5! (Prozessband-Farben in Konkordanz mit Abb.3.)

Abhilfe verspricht der Ansatz von Elschenbroich & Seebach (2002), die den nun über die IWS in AMC und BMC geführten Beweis dynamisch entdecken lassen (Abb.6):

„Ziehe an C.

- Was fällt dir an den eingezeichneten Winkeln auf?
- Warum muss das so sein? Tipp: Beobachte das Dreieck AMC.
- Verfahre entsprechend mit dem Dreieck BMC.
- Was ergibt sich für die Größe des Winkels γ ?

So lässt sich der Beweis *barrierefrei* vorwärtsarbeitend aufbauen (Abb.7) – und *nach* Behandlung des Umfangswinkelsatz in der *Rückschau* auch für diesen verwenden! Man muss lediglich die rechte Säule ($|\mu| = 180^\circ$, da AB ein Kreisdurchmesser ist) weglassen. Details dazu, zur Übertragung auf K10 und die Literatur in der Langfassung auf der Homepage bzw. in MU 4/17.

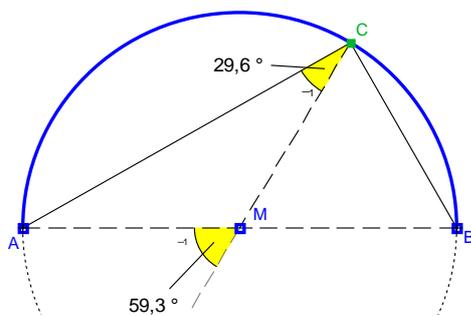


Abb. 6: Elektronisches Arbeitsblatt

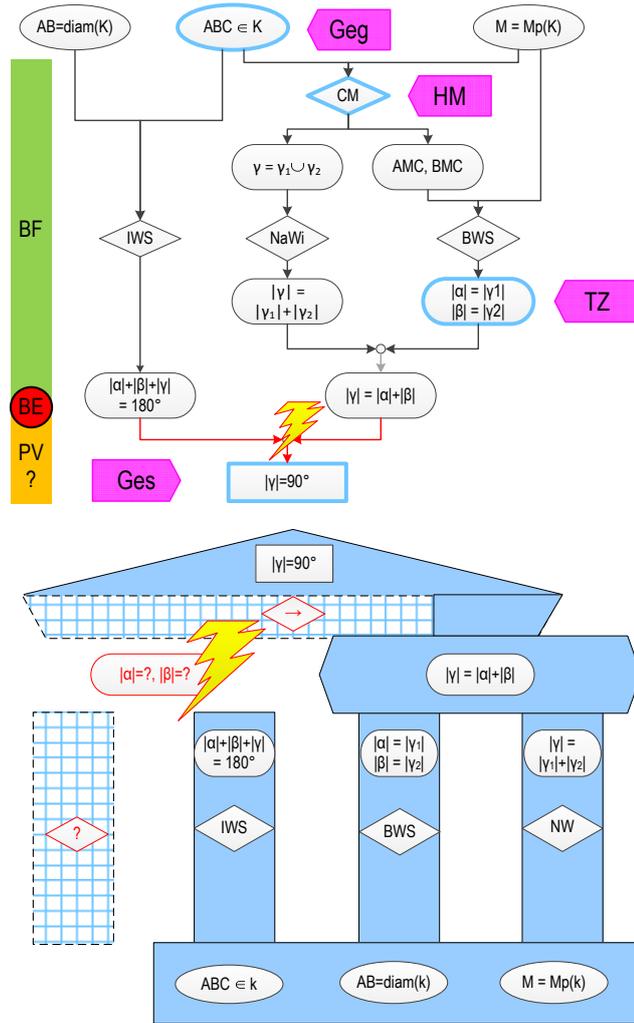


Abb. 5: Vermuteter tatsächlicher Prozessverlauf

Abb. 7: Heuristische Impulse zur BO mit Abb. 6

