Dörte HAFTENDORN, Lüneburg

Dynamik bringt die Mathematiklehre voran

Es geht in diesem Beitrag um die "`vorwärtstreibende Kraft"', mit der bewegliche Darstellungen der DMS (Dynamischen Mathematik-Systeme) das Verstehen von Mathematik fördern. Damit muss auch die Lehre von Mathematik die allzu statische Sicht überwinden und wirklich "`vorankommen"', in eine gute Zukunft gegen. Die folgenden Beispiele beziehen sich auf das Verstehen der Ableitungsfunktion, Anwendung bei der Modellierung von Wirtschaftsfunktionen, Hinführung zur e-Funktion und auf Kurven in polar-kartesischer Darstellung. Ein interaktives Beispiel zum Verständnis des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung muss hier aus Platzgründen entfallen. Sie finden dieses aber im Buch (Haftendorn 2015). Entsprechendes gilt für die dynamische Betrachtung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

1. Die digitalen Werkzeuge für die Mathematiklehre

Die hier vorgestellten Beispiele verwenden das frei verfügbare DMS (Dynamisches Mathematik-System) GeoGebra, das in etwa 50 Sprachen übersetzt ist und weltweit in der Mathmatiklehre eingesetzt wird. Es enthält untereinander vernetzte Ebenen für die Arbeit in Geometrie, Analysis, Numerik, Diskreter Mathematik, Stochastik und Algebra. Man kann mehrere dieser Ebenen nebeneinander oder in beweglichen Fenstern sichtbar machen. Das ist didaktisch insbesondere für das CAS-Fenster, das Tabellenkalkulations-Fenster oder das Wahrscheinlichkeits-Fenster sinnvoll. Die Kunst des Mathematiklehrens besteht -- wie in der Einleitung zu dieser Sektion schon erläutert -- darin, einerseits sinnvoll auszuwählen, andererseits flexibel auf die Bedürfnisse der Lernenden durch Wechsel der Sichtweise eingehen zu können. Zu unterscheiden sind zwei Arten des Einsatzes von digitalen Werkzeugen: Erstens gibt es die von der Lehrkraft vorbereiteten Dateien, die zu einem Begriff oder einer mathematischen Aussage hinführen und sie ggf. von verschieden Seiten beleuchten. Dieses kann in ein Klassen- oder Kursgespräch eingebunden sein oder mit Hilfe von „elektronischen Arbeitsblättern“ erfolgen, wie es G. Seebach und H.-J. Elschenbroich schon mit den allerersten DMS vorgeschlagen haben.

Zweitens gibt es die freie Arbeit von Lernenden, bei der sie digitale Werkzeuge in eigener Entwicklung und Regie einsetzen, um mathematische Fragestellungen oder Zusammenhänge zu erkunden oder zu lösen. M. E. kann dieses aber nur gelingen, wenn die Lernenden den klugen Einsatz, der ihr

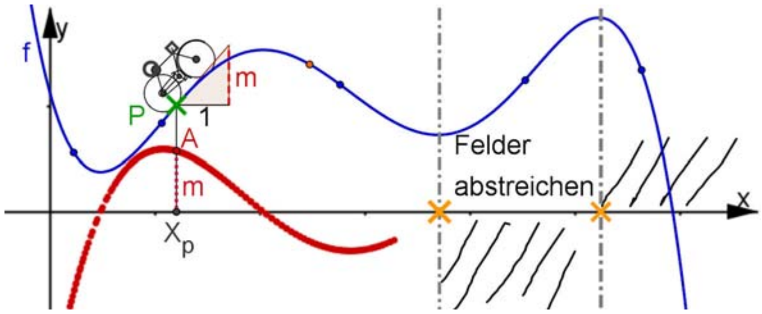
In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Verstehen befördert hat, in der Lehre „erfahren“ haben. Dieses gilt im Schulalter, aber auch im Studium, insbesondere im Lehramtsstudium. Hier setzt dieser Beitrag an.

Anmerkung: Als Leser dieses Textes müssen Sie nicht nur auf die **Farbigkeit** der Darstellungen verzichten, sondern auch auf die **Dynamik**, die, laut Titel, das Wesentliche ist. Die finden die farbigen und beweglichen Darstellungen auf den beiden Websites (Haftendorn Web 1) und (Haftendorn Web 2).

2. Verstehen der Ableitungsfunktion

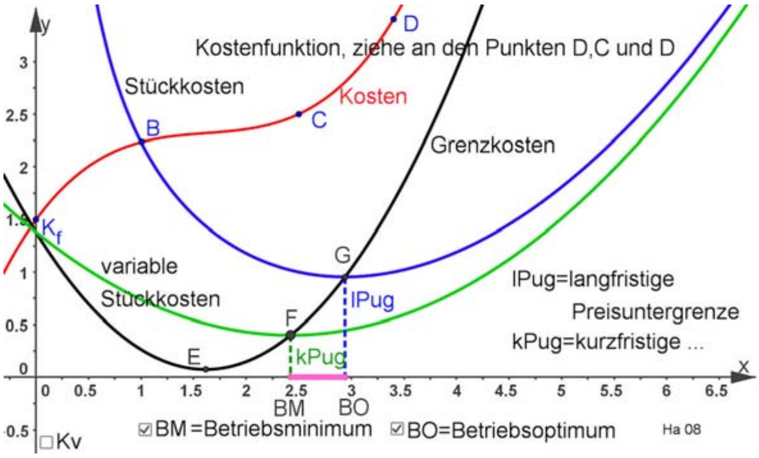
Dieses Besipiel soll bewusst machen, dass es bei solchen glatten Kurven in jedem Punkt eine Steigung gibt. Die Tangente kann mit einem Schalter zugeschaltet werden. Ob man die Steiung in einem (festen) Punkt P z.B. der Parabel vorher behandelt oder nicht, ist eine didaktische Entscheidung. Lernpsychologisch erscheint es mir sinnvoll, zunächst begreiflich zu machen, worum es im Ganzen geht, bevor man sich den Einzelheiten widmet. Jedenfalls wird die Tangente selbst von einem GeoGebra-Befehl geliefert und ein Steigungsdreieck kann angefordert werden. Der Steigungswert kann als Zahl oder geometrisch an der Stelle x(P) als Ordinate des Punktes A eingetragen werden. Bewegt man nun P, so zeichnet der Punkt A seine Spur. Übrigens ist das Fahrrad, bei dem sich sogar die Pedale drehen, von meinem Kollegen Dieter Riebesehl vollständig in GeoGebra konstruiert. In der Datei zu obigem Bild gibt es verschiebliche Stangen die man „nach Sicht“ an die Extremstellen oder die Wendestellen ziehen kann. Zum Beispiel tut dies jemand von den Lernenden an einem Whiteboard. Lässt man A weiterlaufen, prüft man interaktiv die richtige Stellung der Stangen. Diese können zusätzlich dazu dienen, „Felder abzusteichen“, in welche die Steigungsfunktion nicht gelangen kann. Mit dieser Methode können bei einer Klausur auch qualitative Ableitungsgraphen verlangt werden (siehe Haftendorn 2015, S.177).



Als nächsten Schritt schaltet man die Spur aus und lässt die **Ortslinie von A** (bezüglich P) anzeigen. Das Ausgangspolynom ist ein Newton’sches Interpolationspolynom durch die hier sichtbaren Punkte, die frei verschoben werden können. Tut man dieses, so ändert nicht nur das gegebene Polynom seine Form, sondern natürlich auch die Orstlinie von A. Es ist eindrucksvoll, wie sie auf jede Bewegung sofort reagiert. An dieser Stelle kann begriffen werden, warum die Steigungskurve **Ableitungsfunktion** genannt werden kann.

3. Modellierung von Wirtschaftsfunktionen

In diesem Beispiel ist eine Kostenfunktion durch frei verschiebliche Punkte K_f, B,C, D gelegt, der Befehl Polynom[Liste] leistet das. Solche monotonen Polynome dritten Grades sind in Büchern zur Wirtschaftsmathematik häufig ohne Begründung der Start in eine Aufgabe. In Wahrheit stammen die Kostenfunktionen aus der Disziplin „Kostenrechnung", aber auch da sind sie eine **Modellierung** einer ökonomischen Gegebenheit. Mit x bezeichnet



man die produzierte Menge, das ganze Bild folgt *allein* aus der Kostenfunktion.

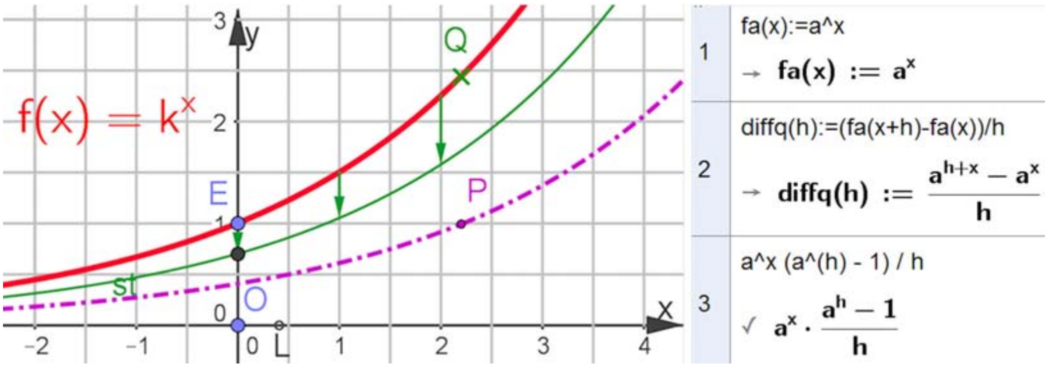
Für Nicht-Ökonomen reicht es, wenn man zur Kenntnis nimmt, dass das Ziel letzlich die „Entscheidungsgrößen" BM und BO sind. Verblüffend ist, dass schon kleine Änderungen der Stellung von C oder D „wilde" Bewegungen dieser Wirtschaftsparameter zur Folge haben. Gerade die **Dynamisierung** erschüttert das naive Vertrauen auf die erzeugten Betriebsgößen nachhaltig.

4. Hinführung zur e-Funktion

Die Euler'sche e-Funktion ist zweifellos die wichtigste Exponentialfunktion und sie wird in den Naturwissenschaften der Sek II sehr bald gebraucht. Daher ist es sinnvoll, gleich nach dem Ableitungsbegriff zu dieser Funktion hinzuführen. Das kann und sollte natürlich unter Betonung ihrer herausragenden Eigenschaften für die Differentialrechnung erfolgen. Hierfür macht dieses Beispiel einen dynamischen Vorschlag. Als erstes betrachtet man Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis k und stellt fest, dass sie alle, aber mit unterschiedlicher Steigung, durch den Punkt E=(0,1) verlaufen.

Setzt man einen Punkt P zugfest auf die Exponentialfunktion, kann man mit A -wie im ersten Beispiel- die Ableitungskurve als Ortslinie erhalten (Strichpunkt-Kurve). Könnte dies eine Stauchung sein? Eine gegenüber der Ausgangskurve gestauchte Exponentialfunktion mit variablem Stauchfaktor verformt sich, bis sie auf der Ableitungskurve liegt. Erhöht man nun die

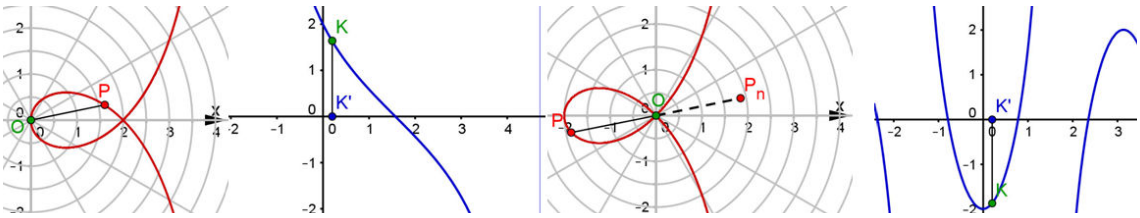
Basis k, so rückt die Ableitung immer näher an die Ausgangskurve, bis beide aufeinander liegen. Das geschieht für die Basis 2.7183. Diese Genauigkeit kann man experimentell erhalten, man weist auf das wahre e hin.



Diese Basis ist also tatsächlich die **bequemste Basis** für die Analysis der Exponentialfunktionen. Rechts ist mit GeoGebra CAS der Differenzenquotient gechrieben. Ist er dann im Unterricht eingeführt, kann man den Stauchfaktor auch wrklich als Steigung der Ausgangskurve in E deuten.

5. Ist das dieselbe Schlaufe? Kurven in polar-kartesischer Darstellung

Man sieht im Bild die Strophoide und eine spezielle Cissoide. Sie haben die Polargleichungen $r(\theta)=\dfrac{a}{\cos(\theta)}-a\tan(\theta)$ bzw. $r(\theta)=\dfrac{a}{\cos(\theta)}-2a\cos(\theta)$



In zwei Grafikfenstern sind jeweils die Punkte K und P „gekoppelt“ und man kann den „Durchlauf“ dynamisch verfolgen. Das führt zu allerlei Beobachtungen und Vermutungen, die an dieser Stelle zu weit führen. (siehe Haftendorn Web 2).

6. Fazit

Dynamik bringt „Leben“ in die Mathematik, lebendige Mathematik spricht uns mehr an und was wir mögen, können wir besser lernen.

Literatur

Haftendorn, D. (2015, 2. Aufl.). Mathematik sehen und verstehen. *Schlüssel zur Welt,* Kap 6, 10 und S. 381. Heidelberg: Springer Spektrum

Haftendorn Web 1. Website zum Buch http://www.mathematik-sehen-und-verstehen.de

Haftendorn, D. (Erscheinen vermutlich 2016/17). Kurven erkunden und verstehen. Heidelberg: Springer

Haftendorn Web 2. Website zum Buch http://www.kurven-erkunden-und-verstehen.de