Beiträge zum Mathematikunterricht 2016

VORTRÄGE AUF DER 50. TAGUNG FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK
VOM 07.03.2016 BIS 11.03.2016
IN HEIDELBERG

FÜR DIE GDM HERAUSGEGEBEN
VOM
INSTITUT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK
DER
PÄDAGOGISCHEN HOCHSCHULE HEIDELBERG

BAND 1

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Vorwort

Im Jahr 2016 fand die 50. Jahrestagung der Gesellschaft der Didaktik der Mathematik an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg statt. Zahlreiche Beiträge haben gezeigt, was derzeit nicht nur in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik und -praxis geforscht und erprobt wird. Besonders auffällig war ein hoher Anteil an Beiträgen aus dem Beriech der Hochschuldidaktik. Es sieht so aus, dass sich hier ein vielversprechendes Feld fachdidaktischer Forschung auftut.

Wie in jedem Jahr gab es auch in Heidelberg einen Lehrertag. Die hier stattfindenden Vorträge und Workshops hatten einen besonderen Bezug zur Praxis, der für die Kolleginnen und Kollegen an Schulen von besonderem Interesse waren. Die Themen reichten vom kompetenzorientiertem Lernen mit konkreten Arbeitsmitteln in Arithmetik und Geometrie bis hin zum Einsatz digitaler Werkzeuge in Primar- und beiden Sekundarstufen. Neu im Programm war der sogenannte Work-In-Progress-Tag („WIP-Tag") statt. Ähnlich wie am traditionellen Nachwuchstag hatten hier solche Beiträge ihren Platz, die über neue Projekten berichten, die noch in den Kinderschuhen stehen. Jedem WIP-Beitrag wurde soviel Zeit beigemessen, dass mehr Zeit für Vorstellung und Diskussion ist. Schon einer längeren Tradition folgend gab es auch eine Posterausstellung mitsamt Wettbewerb.

Zu unseren Hauptvortragenden in Heidelberg Folgendes: Am Montag der Konferenzwoche sprach Gabriella Ambrus (Eötvös-Loránd-Universität Budapest) über die traditionsreiche ungarische Mathematikdidaktik und ihre Beziehungen zur deutschsprachigen Mathematikdidaktik. Am Dienstag diskutierte Michael Gaidoschik (Universität Klagenfurt) Möglichkeiten und Grenzen der Mathematikdidaktik bei der Bewältigung eines zentralen Phänomens des Unterrichts nicht nur der Primarstufe, nämlich das der mathematischen Lernschwierigkeiten. Am Mittwoch begrüßten wir Henning Körner (Studienseminar Oldenburg), der mit dem Übergang Lehramtstudium-Referendariat eine von Felix Klein schon früh problematisierte Schnittstelle in den Blick nahm. Am Donnerstag gab Jürg Kramer (Humboldt Universität Berlin) Einblicke in die Hochschulmathematik, ausgehend von einem auch in der Schule wohlbekannten Sachverhalt: dem Satz von Pythagoras. Am Freitag schließlich war eine weitere Schnittstelle Gegenstand des Vortrages von Kathrin Winter (Europa-Universität Flensburg), wenn Möglichkeiten der Unterstützung im Bereich Mathematik zu Beginn von Studium, Ausbildung und Beruf vorgestellt werden.

Das Institut für Mathematik und Informatik der PH Heidelberg

Inhaltsverzeichnis

Band 1: Seite 1 bis 524

1 Einführung und Hauptvorträge

Rudolf VOM HOFE
Eröffnungsvortrag des 1. Vorsitzenden zur GDM-Jahrestagung in Heidelberg 2016 33

Gabriella AMBRUS
Vergangenheit und Gegenwart der ungarischen Mathematikdidaktik – unter besonderer Berücksichtigung der Bezüge zu Deutschland und Österreich 41

Michael GAIDOSCHIK
Prävention von „Rechenschwächen“: Was Fachdidaktik kann und könnte 49

Henning KÖRNER
Vom Studium ins Referendariat: Kontinuität oder Diskontinuität? 57

Jürg KRAMER
Variationen zum Satz des Pythagoras: Mathematik an der Schnittstelle Schule – Hochschule 65

Kathrin WINTER
Diagnose, Förderung und Beratung an den Schnittstellen von Schule, Ausbildung, Studium und Berufsalltag 73

2 Einzelbeiträge

Ergi ACAR BAYRAKTAR
Die Beziehung zwischen Diagrammatizität und Interaktionale Nische mathematischer Denkentwicklung im familialen Kontext 83

Catharina ADAMEK
Der Lösungsplan als Strategiehilfe beim mathematischen Modellieren – Ergebnisse einer Fallstudie 87

Natascha ALBERSMANN
Mathematik mit Eltern erleben – Eltern-Kind-Hausaufgaben im Mathematikunterricht des unteren Sekundarbereichs 91

Helmut ALBRECHT
Satellitennavigation – dem GPS auf der Spur. 95

Stefanie AREND
Eine semiotische Perspektive vor dem Hintergrund des RBC-Modells auf den Umgang von Studienanfängern mit der ε-δ-Definition von Stetigkeit *97*

Daniela AßMUS, Torsten FRITZLAR
Mathematische Begabung und Kreativität im Grundschulalter *101*

Dörte BALCKE
Schulbuchvergleich der Sekundarstufe I im Fach Mathematik zwischen Bayern und Tschechien *105*

Johannes BECK
Ein Entwicklungsmodell zum Dokumentieren beim Einsatz von digitalen Technologien *109*

Melanie BECK
Perspektivenwechsel in mathematisch kreativen Prozessen von Kindern im Grundschulalter *113*

Daniela BEHRENS, Angelika BIKNER-AHSBAHS
Die digitale Stellenwerttafel: Aufgabendesign zur Einführung von Dezimalbrüchen *117*

Frances BEIER
„Ganz ehrlich? Finde ich Mathe eigentlich ziemlich blöd" – Ein Projekt zu mathematikbezogener Angst.. *121*

Ralf BENÖLKEN
Wünsche von Mädchen und Jungen zur Gestaltung des Mathematikunterrichts – Erste Ergebnisse einer qualitativen Studie.. *125*

Stephan BERENDONK
10-adische Zahlen vom niederen Standpunkte aus.................................... *129*

Ann-Kathrin BERETZ, Katja LENGNINK, Claudia V. AUFSCHNAITER
Wie diagnostizieren Lehramtsstudierende das Verstehen und Lernen von Schülerinnen und Schülern? *133*

Margit BERG & Bettina JANKE
Mathematische Entwicklung sprachgestörter Kinder in Klasse 1 und 2: Anforderungen an Schüler und Lehrer im inklusiven Unterricht *137*

Sarah BEUMANN
Welchen Einfluss haben mathematische Schülerexperimente auf das Erleben der Basic Needs? *141*

Christina BIERBRAUER
Digitale Medien zur Unterstützung beim Lösen von Textaufgaben.......... *145*

Angelika BIKNER-AHSBAHS, Lisa große KAMPHAKE,
Jan BÜSSING, Jennifer DITTMER, Annika WIEFERICH
Mathematikunterricht inklusiv gestalten:
Die Drei-Elemente-Methode *149*

Johannes BLAUERT, Hinrich LORENZEN
Analytische Geometrie – schlicht und natürlich *153*

Jan BLOCK
Strategien und Fehler beim Lösen quadratischer Gleichungen im
Kontext flexiblen algebraischen Handelns *157*

Katrin BOCHNIK, Stefan UFER
Die Rolle (fach-)sprachlicher Kompetenzen für den
mathematischen Kompetenzerwerb von Lernenden mit
(nicht-)deutscher Familiensprache *161*

Matthias BÖCKMANN, Stanislaw SCHUKAJLOW, Janina KRAWITZ
Realität oder Mathematik? Wie bewerten zukünftige Lehrer
Schülerlösungen zu realitätsbezogenen Aufgaben? *165*

Nadine BÖHME
Studieneingangsvoraussetzungen von angehenden
Grundschullehrkräften *169*

Matthias BÖRRNERT, Ulrich KORTENKAMP
Zum dezimalen Stellenwertverständnis von Schülerinnen und Schülern
der Klassenstufe 7 .... *173*

Alexander BÖRSCH, Rolf BIEHLER, Tobias MAI
Der Studikurs Mathematik NRW – Ein neuer Online-Mathematikvorkurs –
Gestaltungsprinzipien am Beispiel linearer Gleichungssysteme *177*

Claudia BÖTTINGER
Lineare Algebra für das Lehramt Grund-/ Haupt-/ Realschule *181*

Birgit BRANDT und Sarah KEUCH
Sprachförderung in mathematischen Erkundungssituationen *185*

Johanna BRANDT
Entwicklung und Erforschung einer Lernumgebung zum Erlernen von
Diagnose und Förderung im Rahmen einer mathematikdidaktischen
Großveranstaltung der Primarstufe *189*

Katinka BRÄUNLING, Lars HOLZÄPFEL, Wolfgang ROLLET
Präsenzveranstaltung, Unterrichtsmaterial oder Coaching –
verschiedene Konzepte der Lehrerfortbildung im Vergleich *193*

Nils, BUCHHOLTZ
Welchen Beitrag können Mixed Methods Studien zur
mathematikdidaktischen Forschung leisten? *197*

Andreas BÜCHTER
Zur Problematik des Übergangs von der Schule in die Hochschule – Diskussion aktueller Herausforderungen und Lösungsansätze für mathematikhaltige Studiengänge 201

Gerda Elisabeth BUHL
Projekt Förderzentrum Mathematik: Lehramtsstudierende fördern Kinder individuell 205

Christian BÜSCHER
Entwicklung von informellen statistischen Maßen zwischen Werkzeugen und Objekten 209

Christoph COLBERG, Rolf BIEHLER, Reinhard HOCHMUTH, Niclas SCHAPER, Michael LIEBENDÖRFER, Mirko SCHÜRMANN
Wirkung und Gelingensbedingungen von Unterstützungsmaßnahmen für mathematikbezogenes Lernen in der Studieneingangsphase 213

Jenny Christine CRAMER, Christine KNIPPING
Das „Lexicon“-Projekt: Weltweite Begriffssysteme zur Beschreibung von Mathematikunterricht 217

Eva DECKER, Offenburg; Barbara MEIER
Schulprojekte zum Einsatz einer Mathe-App als Vorbereitung auf ein MINT-Studium 221

Lucia DEL CHICCA, Linz; Sandra REICHENBERGER
Einführungskurs in das Lehramtstudium Mathematik 225

Eva DIETZ
Erprobung eines fachlich-orientierten Fortbildungskonzeptes für Grundschullehrkräfte 229

Christian DORNER
Finanzmathematik im Unterricht – Was soll unterrichtet werden? ein Zugang über zentrale Ideen 233

Anika DREHER, Anke LINDMEIER, Aiso HEINZE
Professionelles Fachwissen von Lehrkräften der Sekundarstufen im Spannungsfeld zwischen akademischer und schulischer Mathematik 237

Christina DRÜKE-NOE, Henriette HOPPE, Kerstin METZ
Aufgabenanalysekompetenz von Lehrkräften 241

Hans-Jürgen ELSCHENBROICH
Ein neuer Vorschlag zur Vermittlung von Grundvorstellungen der Integralrechnung 245

Franz Embacher
Gleichungen, Ungleichungen, Unbekannte, Variable – Auffassungen angehender Lehrkräfte 249

Joachim ENGEL
Mathematische Bildung und Gesellschaft: Die Rolle von Zivilstatistik ... 253

Heiko ETZOLD
Neue Zugänge zum Winkelbegriff – Vorstellung eines Promotionsprojektes ... 257

Christian FAHSE, Ralf WAGNER
„Propädeutischer" Grenzwertbegriff - eine erprobte Konkretisierung für die Unterrichtspraxis ... 261

Maria FAST
Folgerungen aus einer Längsschnittstudie zum Addieren und Subtrahieren von Klasse 2 bis Klasse 4 ... 265

Marei FETZER
Argumentationsfähigkeit fördern – Toulmin in der Lehrerfortbildung ... 269

Vincenzo FRAGAPANE, Mutfried HARTMANN, Thomas BORYS
Mobilising and Transforming Teacher Education Pedagogies - Entwicklung eines Frameworks für mobile Lernumgebungen ... 273

Andreas FRANK, Stefan KRAUSS
Wie werden Schülerüberzeugungen (Beliefs) zu Mathematik durch die neuen Unterrichtsformate der gymnasialen Oberstufe beeinflusst? ... 277

Julia FRIEDLE
Inklusion im Mathematikunterricht – Empirische Studie zur Zusammenarbeit von Regelschul- und Förderschullehrkräften ... 281

Torsten FRITZLAR, Frieder HÖCHE, Karin RICHTER
Wie funktioniert Mathematiklernen – zu Vorstellungen von Studienanfängern zum Lehren und Lernen von Mathematik ... 285

Daniel FROHN & Alexander SALLE
Gruppenpuzzle als Methode in Tutorien – Eine Untersuchung zu Einstellungen von Lehramtsstudierenden im Rahmen einer Fachvorlesung „Arithmetik und Algebra" ... 289

Julia GAA, Kaiserslautern; Jürgen ROTH
Inputs im Flipped-Classroom-Konzept eines Mathematikvorkurses ... 293

Stefan GARCIA
Massnahmen zur Lernbegleitung und ihre Bedeutung für mathematische Aktivitäten von Kindern in der Vorschule (Dissertationsprojekt) ... 297

Hedwig GASTEIGER, Osnabrück, Christiane BENZ
Mathematikdidaktische Kompetenz von Fachkräften im Elementarbereich – ein theoriebasiertes Kompetenzmodell ... 301

Thomas GAWLICK & Elisabeth LUCYGA
Entwicklungsstufen der Problemlösekompetenz *305*

Boris GIRNAT
Mathematikbezogene Selbstwirksamkeitserwartung: Eine Reanalyse der PISA-Skala anlässlich der Überprüfung der mathematischen Grundkompetenzen in der Schweiz *309*

Lisa GÖBEL, Bärbel BARZEL
Vergleich verschiedener dynamischer Visualisierungen zur Konzeptualisierung von Parametern bei quadratischen Funktionen *313*

Robin GÖLLER
Zur lernstrategischen Bedeutung von Übungsaufgaben im Mathematikstudium *317*

Robin GÖLLER, Michael LIEBENDÖRFER
Eine alternative Einstiegsvorlesung in die Fachmathematik – Konzept und Auswirkungen *321*

Stefan GÖTZ, Evelyn SÜSS-STEPANCIK
Was soll LehrerInnenausbildung im Fach Mathematik leisten? Einsichten in das Wesen fach- und schulmathematischer Lehrveranstaltungen *325*

Martina GREILER-ZAUCHNER
Helfen Kindern die Ableitungsstrategien des kleinen Einmaleins, wenn es um das große Einmaleins geht? *329*

Birgit GRIESE, Michael KALLWEIT
Lernverhalten und Klausurerfolg in der Ingenieurmathematik - Selbsteinschätzung und Dozentensicht *333*

Martin GUGGISBERG
Mathematisches Experimentieren mit „Jupyter notebook“ - Forschendes Lernen in der Sek II *337*

Roland GUNESCH
Wie wirken sich Vorlesungsaufzeichnungen auf die Anwesenheit der Studierenden in der Präsenzvorlesung aus? *341*

Roland GUNESCH
Forschendes Lernen als Zugang zu mathematisch anspruchsvollen Stellen in der Studierendenausbildung *345*

Kristina HÄHN
Individuelle Lern- und Kooperationsprozesse in einer geometrischen Lernumgebung im inklusiven Mathematikunterricht der Grundschule *349*

Thomas HAHN, Andreas EICHLER
Einfluss der Reflexion von Schülerdokumenten in Lehrerfortbildungen auf fachdidaktische Aspekte der Motivation *353*

Tanja HAMANN
Zur sogenannten Mengenlehre in der Grundschule – Einordnung einer Reform 357

Sabine HAMMER, Stefan UFER
Professionelle Kompetenz von Mathematiklehrkräften im Umgang mit Aufgaben in der Unterrichtsplanung 361

Uta HAESEL-WEIDE
»Mathematik inklusive«: Lernchancen im inklusiven Anfangsunterricht 365

Mathias HATTERMANN, Alexander SALLE, Stefanie SCHUMACHER
Erste Ergebnisse aus dem Projekt mamdim – mathematik lernen mit digitalen medien 369

Reinhold HAUG
Lernbegleitung in individualisierten und gemeinsamen Lernphasen 373

Petra HAUER-TYPPELT
Problemlösen mit den Mathe-Fans 377

Lea HAUSMANN, Udo KAMPS
Darstellung und Messung von Konzentration mit Lorenzkurve und Gini-Koeffizient in einem Schüleruni-Workshop 381

Marleen HEID
„Weil eine Badewanne doppelt so groß ist wie eine Gieß-kanne" – Vorgehensweisen und Fehlvorstellungen beim Schätzen von visuell-wahrnehmbaren Größen 385

Sabrina HEIDERICH
Charakterisierungen von Situationen mit den Begriffen der linearen, proportionalen und antiproportionalen Funktionen aus inferentialistischer Perspektive 389

Cathleen HEIL
Vergleich räumlicher (Orientierungs-)Fähigkeiten von Grundschulkindern im Mathematikunterricht und im Realraum 393

Matthias HEINRICH
Umsetzung eines Diagnose- und Förderprozesses durch angehende Mathematiklehrpersonen im Schulpraktikum 397

Gaby HEINTZ, Henning KÖRNER, Guido PINKERNELL, Florian SCHACHT
Basis- und Werkzeugkompetenzen von Klasse 5 bis 12 401

Friederike HEINZ
Spielend diagnostizieren? 405

Esther HENSCHEN, Martina TESCHNER
Angehende KindheitspädagogInnen und die Mathematik – Dokumente aus einem Grundlagenseminar 409

Diana HENZ; Wolfgang I. SCHÖLLHORN, Reinhard OLDENBURG
Förderung visuell-räumlicher Lösungsstrategien bei Algebra und Geometrie durch Bewegung: wie viel Bewegung ist optimal? 413

Diana HENZ; Wolfgang I. SCHÖLLHORN
Förderung mathematischer Lösungskompetenz durch Bewegung bei ADHS-Patienten im Jugendalter 417

Raja HEROLD-BLASIUS
Das Potential von Strategieschlüsseln beim Problemlösen 421

Corinna HERTLEIF; Gilbert GREEFRATH
Mathematisches Modellieren mit digitalen Werkzeugen – Eine Fallstudie mit Dynamischer Geometrie-Software 425

Stefan HOCH, Frank REINHOLD, Kristina REISS
Repräsentationen von Bruchzahlen verstehen: Lernen mit dem Tablet in Jahrgangsstufe 6 429

Natalie HOCK
Professionalisierung von angehenden und praktizierenden Mathematiklehrkräften durch die Förderung der fehlerdiagnostischen Kompetenz 433

Andrea HOFFKAMP, Sabine LÖHR
Ein Diagnosetest zum Zahl- und Operationsverständnis in Klassen mit einem hohen Anteil förderbedürftiger Kinder zu Beginn der Sekundarstufe I 437

Rita HOFMANN, Jürgen ROTH
Schüler/innen analysieren und erstellen Funktionsgraphen – Diagnostische Fähigkeiten von Lehramtsstudierenden mit Videovignetten fördern 441

Markus HOHENWARTER
GeoGebra Groups - Zusammenarbeit für SchülerInnen und LehrerInnen 445

Kathrin HOLTEN
Erkenntnistheoretische Parallelen im Mathematik- und Physikunterricht? Zugänge über vergleichende Schul- und Lehrbuchanalysen 449

Axel HOPPENBROCK
Kooperationsarten von Studenten beim Diskutieren über Votingfragen in einer Analysis I Vorlesung 453

Martin Erik HORN
Inverse von Rechteck-Matrizen 457

Martin Erik HORN
Wie groß ist der Flächeninhalt eines Parallelogramms? *461*

Karina HÖVELER
4 Mannschaften, jede spielt dreimal, aber es sind 6 Spiele!?- Strategien und Denkwege von Drittklässlern beim Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme *465*

Hans HUMENBERGER
Auf dem Weg zum Satz von Anne – durch Variationen bei einem elementargeometrischen Problem *469*

Ingrid HUPP
Historische Multiplikationsverfahren im Mathematikunterricht der Grundschule *473*

Yoshinari INABA, Tetsushi KAWASAKI
A practical study of problem solving based on data by using of a paper helicopter for 5th 6th and 7th graders *477*

Viktor ISAEV, Andreas EICHLER
Auswege aus der doppelten Diskontinuität – Die Vernetzung von Fach und Fachdidaktik im Lehramtsstudium Mathematik *481*

Tobias JASCHKE, Christine BESCHERER
Konstruktion guter Einführungsaufgaben – Entwicklung einer Lehrerfortbildung zur Planungskompetenz von Mathematiklehrkräften .. *485*

Solveig JENSEN
Handlungsbasierte Begriffsbildung mithilfe einer Mathematischen Spielwelt – Analyse von Einsichten von Schulanfängern zur Zahlkonstruktion *489*

Armin JENTSCH, Lena SCHLESINGER
Mathematikdidaktische Unterrichtsqualität – Herausforderungen bei Konzeption und Messung eines theoretischen Konstrukts *493*

Julia JOKLITSCHKE; Benjamin ROTT & Maike SCHINDLER
Erfassung mathematischer Kreativität – Herausforderungen valider Untersuchungsmethoden *497*

Benjamin JORGA, Stefanie SCHNEBEL, Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER, Charlotte RECHTSTEINER
Effekte individueller Voraussetzungen auf den Kompetenzaufbau in einer Fortbildungsreihe (PRIMA) im mathematischen Anfangsunterricht *501*

Judith JUNG, Marcus SCHÜTTE
Die Bedeutung der sprachlichen Aushandlung beim inklusiven Lernen von Mathematik in der Grundschule *505*

Ekaterina KAGANOVA
Was lehren Schulbuchlehrtexte im Fach Mathematik? 509

Belgüzar KARA
Der Einfluss sozialer Herkunft beim Umgang mit mathematischen Problemen 513

TAKASHI KATO, SEIJI MORIYA, TOSHIHIKO SHINDO
Effects of diagrams showing relationships between variables in solutions to problems concerning relative values. 517

Leander KEMPEN; Miriam KRIEGER; Petra Carina TEBAARTZ
Über die Auswirkungen von Operatoren in Beweisaufgaben...................521

Band 2: Seite 525 bis 1092

Karin KEMPFER
„Gott würfelt nicht" - Das Konstrukt „Zufall" aus mathematik- und religionsdidaktischer Perspektive 525

Marcel KLINGER
Vorstellungsorientiertes Verständnis im Bereich des funktionalen Denkens und der frühen Analysis: Entwicklung und Erprobung eines Testinstruments...529

Christian KLOSTERMANN
Herausforderungen angehender Lehrkräfte im Umgang mit Begründungsaufgaben...533

Olaf KNAPP
Dynamische Raumgeometrie-Systeme für die Schule?.............................537

Heike KNAUBER, Laura MARTIGNON, Hannes SCHRAY, Jonathan NELSON & Björn MEDER
Informationssuche und Kodierung: Heuristiken von Viertklässlern 541

Kathrin KOEHLER, Hedwig GASTEIGER
Strategieverwendung bei Aufgaben zum kleinen Einmaleins – Ergebnisse einer Interviewstudie...545

Sebastian KOLLHOFF
Analyse von Transferprozessen in kollaborativen Lernsituationen..........549

Nicole KOPPITZ, Gießen
Einschätzung von Studierenden zu den eigenen fachbezogenen Fähigkeiten und zur Motivation 553

Jörg KORTEMEYER
Mathematikverwendung in ingenieurwissenschaftlichen Grundlagenfächern am Beispiel der „Grundlagen der Elektrotechnik“ 557

Laura KORTEN
Entwicklung und Erforschung eines Lehr-Lernarrangements für den inklusiven Mathematikunterricht zur Anregung des Gemeinsamen Lernens und des flexiblen Rechnens 561

Ulrich KORTENKAMP, Oliver LABS
Bausteine in digitalen Lernumgebungen vernetzen: Technologie zur Gestaltung und Analyse von kreativen Lernprozessen 565

Maria KÖTTERS
Materialgestütztes inklusives Lernen am außerschulischen Lernort zum Themenkreis Mathematik 569

Theresa KRASSNIGG
Eltern- und SchülerInnenbeliefs zu Mathematik(unterricht) 573

Christina M. KRAUSE
DeafMath - Ein Projekt zum Einfluss der Gebärdensprache auf Mathematikverständnis 577

Eduard KRAUSE
Erkenntnistheoretische Parallelen zwischen Schulmathematik und –physik aus mathematikdidaktischer Sicht 581

Kerstin KRIMMEL
Materialien aus dem Projekt MAKOS – Eine kompetenzorientierte Behandlung von Prognose- und Konfidenzintervallen 585

Thomas KROHN, Karin RICHTER
Spielend lernen: zur Vernetzung geometrischer Grundbegriffe 589

Julian KRUMSDORF
Visual Proving 593

Jessica KUNSTELLER
Zur Bedeutung von (Familien-)Ähnlichkeiten in mathematischen Lernprozessen 597

Sebastian KUNTZE
Professionelles Wissen und Überzeugungen von Lehrkräften zum Modellieren im Mathematikunterricht als Bezugspunkte für spezifische Analysekompetenz 601

Jenny KUROW
Von- und miteinander lernen: Vernetzungsmöglichkeiten von Schule und Hochschule im Bereich Mathematik 605

Ronja KÜRTEN
(Mathematische) Selbstwirksamkeitserwartung von Ingenieurstudierenden in der Studieneingangsphase – Entwicklungen während des Mathematik-Vorkurses 609

Ana KUZLE
Im Forderunterricht Problemlösen lehren und lernen: Entwicklung von praxisorientierten und theoriegeleiteten Materialien mittels Design-Based Research 613

Xenia LAMPRECHT
Multiplikatives Verständnis fördern – Einblicke in das Projekt FeDeR 617

Matthias LEHNER, Kristina REISS
Erfassung des Fachwissens von Studierenden im ersten Semester: Einschätzung des kognitiven Anspruchs eines Tests in Einzelinterviews 621

Denise LENZ
Relationales Denken und das Umgehen mit Unbekannten. Eine qualitative Studie mit Vor-und Grundschulkindern 625

Susanne LERMER, Leonhard RIEDL
Aktivierende Methoden für heterogene Lerngruppen – ein Vergleich zweier konzeptioneller Ansätze 629

Andreas LINDNER
Differential- und Integralrechnung mit GeoGebra3D 633

Peter LUDES
Förderung überfachlicher Fähigkeiten durch informatische Grundbildung im Mathematikunterricht der Primarstufe 637

Jürgen MAASZ
Modellieren im Mathematikunterricht 641

Tobias MAI, Rolf BIEHLER, Alexander BÖRSCH, Christoph COLBERG
Über die Rolle des Studikurses Mathematik in der Studifinder-Plattform seine didaktischen Konzepte 645

Günter MARESCH
Smartphones und Boolesche Operationen – Via QR-Codes zu einem digitalen Lernpfad 649

Michael MARXER
Was hat Geld umtauschen mit Trigonometrie zu tun? Verhältnismäßig: viel! 653

Hartwig MEISSNER, Annabella DIEPHAUS
SPONTAN versus LOGIK 657

Johannes MEISTER, Andreas FILLER, Annette UPMEIER ZU BELZEN
Funktionales Denken im Biologieunterricht: Konstruktion von Liniendiagrammen 661

Dennis MEYER
Detailanalysen zum Lehrerprofessionswissen und dessen Entwicklung bei Grundschullehrkräften im Rahmen der Lehrerbildungsstudie TEDS-Follow Up 663

Michael MEYER und Susanne SCHNELL
Was ist ein „gutes“ Argument? Bewertung von Schülerargumenten durch Lehrkräfte 667

Angel MIZZI
Raumvorstellung und Sprache: Eine empirische Studie über die Bewältigung von räumlich-geometrischen Anforderungen und die Rolle der Sprache 671

Renate MOTZER und Adrian SCHLOTTERER
Wurzelziehen mit dem Malkreuz 675

Thomas MÜLLER
Ein freier Raumvorstellungstest für Schulen, Projekt RIF-3D 679

Stefanie MÜLLER-HEISE
Grundschüler reflektieren ihren eigenen Problembearbeitungsprozess 683

Sebastian MUNGENAST
Metakognition bei Studienanfängern im Bereich Mathematik – Entwicklung eines Kategoriensystems anhand qualitativer Interviews 687

Dmitri NEDRENCO
Axiomatisieren lernen mit Papierfalten 691

Inga NIEDERMEYER, Ann-Katrin VAN DEN HAM, Aiso HEINZE, Meike GRÜSSING
Welche Rolle spielt das Schulbuch für die Kompetenzentwicklung im arithmetischen Anfangsunterricht? 695

Engelbert NIEHAUS, Melanie PLATZ, Miriam KRIEGER, Kathrin WINTER
Elektronische Beweise in der Lehre 699

Renate NITSCH, Felix JOHLKE
Stabilität von Fehlermustern bei funktionalen Zusammenhängen 703

Anna NOLL, Jürgen ROTH, Markus SCHOLZ
Wie sollten Lernmaterialien in Inklusionsklassen gestaltet sein? – Instruktionsmaterialien und Arbeitsprozesse 707

Edyta NOWINSKA
Entwicklung eines schulfachübergreifenden hoch inferenten Ratingsystems zur reliablen Beurteilung metakognitiv diskursiver Unterrichtsqualität..711

Hans Peter NUTZINGER
Wie viel Kreativität sehen Studierende in ihrem mathematischen Tun? – Nutzen der Interdisziplinarität zwischen Musik und Mathematik 715

Rolf OECHSLER, Jürgen ROTH
Qualitative Analyse von Fachkommunikation in einem Schülerlabor Mathematik...719

Barbara OTT
Textaufgaben grafisch darstellen – Entwicklung eines Analyseinstruments, Intervention und Evaluation...723

Lena PANKOWBENECKE
Wahrnehmung von Schülerfehlern unter Zeitdruck - Ergebnisse aus TEDS-FU...727

Pelagia PAPADOPOULOU, Christine BESCHERER
Einsicht in das Sprachhandeln angehender Mathematiklehrkräfte mit Hilfe von Podcasts...731

Walther PARAVICINI, Anja PANSE
Leseverhalten und Rationalität von Studienanfängerinnen und -anfängern 735

Tobias PEFFER, Kristina PENAVA
„Zufall und Wahrscheinlichkeit – das sind doch so was wie Gegenteile“ - eine qualitative Studie zu Vorstellungen bei Grundschulkindern.............743

Roland PILOUS, Timo LEUDERS, Christian RÜEDE
Untersuchung des Zusammenhangs mathematikbezogener fachlicher und fachdidaktischer Wissensfacetten bei angehenden Primarlehrpersonen 747

Jennifer PLATH
Auswirkung von sprachlicher und situationaler Komplexität auf den Bearbeitungsprozess von mathematischen Textaufgaben.........................751

Melanie PLATZ, Engelbert NIEHAUS
What can we derive from South Africa in the field of Mobile Learning? . 755

Cornelia PLUNGER
Modell- und kontextorientierte Reflexion – Anregungen für den Mathematikunterricht...759

Jennifer POSTUPA
Schulbuchaufgaben – gestern und heute..763

Renate RASCH, Kerstin SITTER
Module für den Geometrieunterricht der Jahrgangsstufen 1-6................767

Xenia-Rosemarie REIT, Matthias LUDWIG
Winkeldetektivaufgabe: Mit Hilfslinien zur Lösung 771

Andreas RICHARD, Windisch; Markus CSLOVJECSEK
Sounding Ways into Mathematics – Ein Entwicklungsprojekt an der Schnittstelle von Mathematik und Musik 775

Roland RICHTER
Darstellungsformen von funktionalen Abhängigkeiten und Funktionen...779

Michael BRUNNHUBER, Janina GERTIS, Leonhard RIEDL
Problemlöseschule nach Pólya für Studierende 783

Judith RIEGERT; Roland RINK, Grit WACHTEL
"Wie stark ist eine Ameise?" - Überlegungen zur Gestaltung von mathematischen Lernumgebungen in inklusiven Settings.........................787

Ulrike RODER
Entwicklung eines Förderkonzepts zu Grundwissen und Grundkönnen am Übergang in die Sekundarstufe II 791

Ulrike RODER, Regina BRUDER
Das hessische Projekt MAKOS zur Implementierung des neuen Kerncurriculums (KC) Oberstufe...795

Tobias ROLFES, Jürgen ROTH, Wolfgang SCHNOTZ
Der Einfluss von Repräsentationsformen auf die Lösung von Aufgaben zu funktionalen Zusammenhängen...799

Katrin ROLKA, Natascha ALBERSMANN
„Das einem die Probleme der beiden selbst helfen“ – Das Schreiben von Briefen als bilinguales Projekt im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I 803

Anna-Katharina ROOS
Probleme Studierender mit dem Begriff Extrempunkt 807

Hana RUCHNIEWICZ
Mehr als richtig oder falsch – Entwicklung eines digitalen Tools zur Selbstdiagnose und -förderung im Bereich Funktionales Denken............811

Christian RÜEDE
Gleichungen flexibel lösen – und zwar von Anfang an.............................815

Christian RÜEDE, Christine STREIT
Auswertung schriftlich vorliegender Lernstandein-schätzungen – ein kontrastiver Experten-Novizen Vergleich 819

Christian RÜTTEN
„Null ist in Wirklichkeit eine Tausend“ – Sichtweisen von Grundschulkindern auf negative Zahlen 823

Alexander SALLE, Christina M. KRAUSE
Grundvorstellungen und Gesten – eine exemplarische Analyse im Bereich linearer Funktionen 827

Thorsten SCHEINER
PCK im Spannungsfeld zwischen Transmission und Konstruktion 831

Bruno SCHEJA
Aktivierungspotentiale vom Mathematikaufgaben des Gymnasialtests im reformierten polnischen Bildungssystem 835

Alexandra SCHERRMANN, Heike SCHÄFERLING
Differenzierende Aufgabenformate für heterogene Lerngruppen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I – eine Herausforderung für die Lehrerweiterbildung 839

Michaela SCHEURING, Jürgen ROTH
Funktionales Denken fördern - Realexperimente oder Simulationen? 843

Katrin SCHIFFER
Eine Schulbuchanalyse im Bereich der Algebra 847

Achim SCHILLER
Entwicklung von Modulen zur Förderung von Statistical Literacy an der Hochschule 851

Sabine SCHLAGER, Jana KAULVERS, Andreas BÜCHTER
Zum Zusammenhang von Sprachkompetenz und Mathematikleistung – Ergebnisse einer Studie mit experimentell variierten sprachlichen Aufgabenmerkmalen 855

Simeon SCHLICHT
Zur Entwicklung des Mengen- und Zahlbegriffs – Eine Beschreibung der Entwicklung mittels Empirischer Theorien 859

Christine SCHMEISSER
Sind die Bildungsstandards in den Mathematikschulbüchern der Sekundarstufe I angekommen? 863

Stephanie SCHMID
Begründen als Anforderung in Geometrieaufgaben der Grundschule 867

Oliver SCHMITT
Konzept zur Vermittlung von Reflexionswissen aus tätigkeitstheoretischer Perspektive 871

Silvia SCHÖNEBURG
Wer spielt, gewinnt und lernt – Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens durch den Einsatz von Lernspielen *875*

Stephanie SCHULER, Gerald WITTMANN
Entwicklung von Bildvignetten zur Erhebung mathematikdidaktischer Überzeugungen von Lehrkräften.. *879*

Axel SCHULZ
Inverses Schreiben und Zahlendreher – Eine empirische Studie zur inversen Schreibweise zweistelliger Zahlen... *883*

Jan SCHUMACHER
Erkunden mathematischer Strukturen anstatt Interpretation in Modellen – Ein innermathematischer Zugang zu negativen Zahlen............................ *887*

Heinz SCHUMANN
Das räumliche Viereck – eine Sachanalyse *891*

Natascha SCHUPP, Sebastian VOGEL, Julia SCHWABE, Stella PEDE, Rita BORROMEO FERRI, Frank LIPOWSKY
Förderung adaptiver Strategiewahl durch verschachteltes Lernen? – Die Interventionsstudie LIMIT in der Grundschule.................................. *895*

Uwe SCHÜRMANN
Kritische Diskursanalyse als Methode der Mathematikdidaktik *899*

Christoph SELTER, Verena PLIQUET, Laura KORTEN
Aufgaben adaptieren *903*

Johann SJUTS
Mit Vignetten forschendes Lernen stimulieren *907*

Elke SÖBBEKE
Analyse sprachlicher Mittel bei der Interpretation mathematischer Anschauungsmittel in der Grundschule *911*

Anna-Christin SÖHLING
Das Lernen von Mathematik beim Problemlösen.................................... *915*

Christian SPREITZER
Modellieren mit dem Smartphone oder wie sich der Modellierungskreislauf schließen lässt.. *919*

Mark SPRENGER
Erste Ergebnisse einer Interventionsstudie über die Wirksamkeit von Lehrerfortbildungen zum Thema Rechenschwäche *923*

Ute SPROESSER, Markus VOGEL, Tobias DÖRFLE, Andreas EICHLER
Lernschwierigkeiten bei elementaren Funktionen - Ergebnisse einer Pilotstudie und Entwicklung einer Lehrerfortbildung *927*

Anna Susanne STEINWEG
Grundideen algebraischen Denkens in der Grundschule 931

Peter Stender
Heuristische Strategien zur Überwindung der doppelten Diskontinuität in der Lehrerbildung 935

Thomas STENZEL
Förderung mathematikspezifischer Lern- und Beweisstrategien in der Studieneingangsphase 939

Gero STOFFELS
Auffassungswechsel als eine wesentliche Hürde beim Übergang Schule – Hochschule: Ein Blick aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung 943

Hannes STOPPEL
Veränderungen epistemologischer Beliefs von Schülerinnen und Schülern in Relation zu unterrichtlichen Inhalten 947

Waldemar STRAUMBERGER
Selbstdiagnosebögen als Grundlage für individuelles Üben 951

Anselm STROHMAIER, Kristina REISS, Stefan UFER, Frank FISCHER
Einsatz heuristischer Lösungsbeispiele mit Selbsterklärungsprompts zur Förderung von Beweis- und Argumentationskompetenz an der Schnittstelle Schule-Hochschule 955

Nina STURM
„Ich kann das nicht!“ Ein Zugang zum Lösen problemhaltiger Textaufgaben mit externen Repräsentationen 959

Neruja SURIAKUMARAN, Maike VOLLSTEDT, Christoph DUCHHARDT
Sinn und Motivation im Kontext schulischen Mathematik-lernens 963

Kinga SZŰCS
Umgang mit Heterogenität unter Verwendung von (digitalen) Medien im Mathematikunterricht 967

Petra Carina TEBAARTZ
Aufgabentypen bei der Mathematik-Olympiade 971

Eva THANHEISER, Portland und Silke LADEL
Flexibles Verstehen der ganzen Zahlen und Operationen im Kontext der Grundschullehrerausbildung 975

Benjamin THIEDE, Lars HOLZÄPFEL, Timo LEUDERS
Von der Textaufgabe zum Ergebnis – Der Prozentstreifen als Hilfsmittel bei Prozentaufgaben 979

Sandra Thom
Wie unterrichte ich „Flüchtlingskinder“ in Mathematik? 983

Daniel THURM
Was bleibt? – Effekte einer Fortbildungsreihe zu digitalen Werkzeugen auf technologiebezogene Überzeugungen von Lehrkräften 987

Kerstin TIEDEMANN
„Ich habe mir einfach die Rechenmaschine in meinen Kopf gebaut!“ Zur Entwicklung fachsprachlicher Fähigkeiten bei Grundschulkindern . 991

Melanie TOMASCHKO, Markus HOHENWARTER
GeoGebra Grafikrechner App für Smartphones 995

Philipp ULLMANN
Die Energiewende modellieren – Statistical Literacy in der Wissensgesellschaft 999

Elisabeth UNTERHAUSER, Hedwig GASTEIGER
Begriffsverständnis von Viereck und Dreieck bei Kindern im Alter von 4 bis 6 Jahren – eine Pilotstudie 1003

Lara VANFLOREP
Das professionelle Selbst angehender Mathematiklehrkräfte in der Praxisphase – Annäherung an eine Definition 1007

Ingrida VEILANDE
Tasks on orthogonal configurations in extracurricular activities 1011

Anna-Marietha VOGLER
Lernendenperspektiven als methodisches Element im vignettenbasierten Professionalisierungsprozessen 1015

Nicolai VON SCHROEDERS
Abhängigkeiten zwischen typischen Fehlern bei einer Rechenschwäche in der Mitte des 2. Schuljahres 1019

Luisa WAGNER, Antje EHLERT, Annemarie FRITZ
Förderung arithmetischer Basiskompetenzen in höheren Grundschulklassen 1023

Hans WALSER
Umwörter 1027

Candy WALTER
Eine empirische Untersuchung über die Planung und Durchführung statistischer Datenerhebungen von Lernenden der 9. und 10. Schuljahrgänge 1031

Beat WÄLTI
Produktives Spielen 1035

Josephine WEGENER, Reinhard HOCHMUTH
Mathematikbezogene Problemlöseprozesse in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen 1039

Markus WEHRLE
Wie steht es ums Kopfrechnen in den verschiedenen Schularten der Sekundarstufe? – Vorstellung einer geplanten Studie 1043

Christian WERGE
Hilfen für Schüler der Sekundarstufe mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen: Erfahrungen mit der Kla^P PS-Regel in der Lerntherapie 1047

Birgit WERNER & Margit BERG
Sprache im Mathematikunterricht - Stolpersteine oder Ressource? 1051

Gerda WERTH
Ziehen und Beweisen mit DGS – Welche Beweiskraft haben für Studierende die Erkenntnisse, die sie im Zugmodus gewinnen? 1055

Lena WESSEL, Nadine WILHELM
Zusammenhänge zwischen Sprachkompetenz und verstehensorientierter Leistung beim Umgang mit Brüchen 1059

Annika M. WILLE
„Die Analysis ist also etwas Unerreichbares" – Wie sich Studierende zentralen Begriffen der elementaren Analysis nähern. 1063

Stefanie WINKLER
Möglichkeiten einer differenzierten Erfassung mathematik-spezifischer Begabungsausprägungen im Klassenunterricht (3./4. Jgst.) 1067

Eva-Maria WIßING
Kinder deuten Beziehungen zwischen Phänomenen und Strukturen in arithmetisch-symbolischen Zahlenmustern 1069

Ingo WITZKE, Kathleen CLARK
Der Übergangsproblematik Schule-Hochschule im Fach Mathematik begegnen. Das Kooperationsprojekt „Überpro". 1073

Susanne WÖLLER, Simone REINHOLD
Konzeptionelles Begriffsverständnis von Drittklässlern zu den Begriffen Würfel und Quader 1077

Roland RINK; Elke BINNER; Christoph SELTER
Primarstufe Mathematik kompakt: PriMakom - Eine webbasierte Selbstlernplattform mit praktischen Impulsen für guten Mathematikunterricht 1081

Julia ZERLIK
Struktur-Lege-Technik als empirisches Instrument in der mathematikdidaktischen Professionsforschung 1085

Anja ZERRENNER, Anke LINDMEIER
Messung fachspezifischer Kompetenzen von Lehrkräften im Mathematikunterricht *1089*

Band 3: Seite 1093 bis 1560

3 Moderierte Sektionen

Analyse und Förderung mathematischen Argumentierens: theoretische Grundlagen und empirische Erkenntnisse

Esther BRUNNER; Stefan UFER, Daniel SOMMERHOFF
Analyse und Förderung mathematischen Argumentierens: theoretische Grundlagen und empirische Erkenntnisse *1101*

Esther BRUNNER
Beweistypen: Ihre unterschiedlichen kognitiven Anforderungen und ihr didaktisches Potenzial *1103*

Svenja GRUNDEY; Christine KNIPPING
„Condition of transparency“ - ein theoretisches Modell zur Einsicht in eigenständige Beweisprozesse von Lernenden *1107*

Leander KEMPEN
Beweisakzeptanz bei Studienanfängern: Eine empirische Untersuchung *1111*

Christine KNIPPING; Jenny Christine CRAMER
Partizipation an Argumentation *1115*

Eva MÜLLER-HILL
Warum „immer“ so und nicht anders? Erklären-warum *im Mathematikunterricht mittels operativer Invarianz entlang kontrastiver und kontrafaktischer Leitfragen* *1119*

Sarah OTTINGER, Stefan UFER, Ingo KOLLAR
Mathematisches Argumentieren und Beweisen in der Studieneingangsphase – Analyse inhaltlicher und formaler Qualitätsindikatoren *1123*

Daniel SOMMERHOFF, Stefan UFER; Ingo KOLLAR
Validieren von Beweisen – Probleme von Studierenden und die Rolle von mathematischen und übergreifenden Voraussetzungen *1127*

Design Research in der Mathematikdidaktik

Mareike BEST, Angelika BIKNER-AHSBAHS
„From past to future“ – wie der Vorunterricht das Lernen beschränkt. *1133*

Stephanie WESKAMP
Design einer Lernumgebung für differenzierenden Mathematikunterricht der Grundschule und Erforschung diesbzgl. Bearbeitungsprozesse *1137*

Diagnostische Testaufgaben (DTA)

Regina BRUDER, Kathrin WINTER
Diagnostische Testaufgaben – DTA.. *1143*

Katja DERR, Reinhold HÜBL, Tatyana PODGAYETSKAYA
Formatives eAssessment in Online-Brückenkursen: Potentiale und Grenzen und die Rolle des Feedback *1145*

Nora FELDT-CAESAR
Konzeptualisierung und Operationalisierung von Mindest-standards – von der Zielformulierung zum digitalen Diagnoseverfahren.................. *1149*

Michael KALLWEIT
Der Computer als Tutor - technikbasierte Diagnostik mit Freitextaufgaben *1153*

Christoph NEUGEBAUER, Sebastian KRUSEKAMP
„Im Bereich der Statistik verfügen Sie nur über geringe Vorkenntnisse.“ – Hilfreiches Feedback im Rahmen von Online-Self-Assessments (OSAs) *1157*

Marcel SCHAUB, Darmstadt
Die DTA unter einem tätigkeitstheoretischen Blickwinkel *1161*

Entdeckend- forschendes Lernen

Matthias LUDWIG, Brigitte LUTZ-WESTPHAL
Entdeckend-Forschendes Lernen.. *1167*

Ramona BEHRENS
Formulieren mathematischer Fragen – mit Unterstützung eines Taschencomputers... *1173*

Stephan ROSEBROCK
Entdeckendes Lernen in der Sekundarstufe am Beispiel von Zahlenwinkeln *1177*

Brigitte LUTZ-WESTPHAL, Alexander SCHULTE
Mathematische Forschung – Was Forschendes Lernen im Mathematikunterricht aus der Praxis lernen kann *1181*

Sandra THOM
Von der fortgesetzten Addition zum Wurzelziehen in der Grundschule. Jerôme S. Bruner zum 100. Geburtstag *1185*

Christine GÜNTHER; David PLOOG; Bernd WOLLRING
Der Mathematikkreis – kompetenzorientiertes Erarbeiten mathematischer Fragen mit drei- bis zehnjährigen Kindern *1189*

<u>Erkundungsstudien zum unterrichtlichen Problemlösen</u>

Frank HEINRICH
Erkundungsstudien zum unterrichtlichen Problemlösen *1195*

Maria BEYERL
Empirische Erkundungen zum Umgang mit Wechseln von Lösungsanläufen beim Bearbeiten mathematischer Probleme im Mathematikunterricht der Sek I *1197*

Frank HEINRICH, Anika JERKE, Lara-Denise SCHUCK
Eröffnungsszenarien unterrichtlichen Problemlösens *1201*

Julia LÜDDECKE
Zum Umgang der Lehrkraft mit Fehlern beim Problemlösen im Mathematikunterricht *1205*

Meike OHLENDORF
Zur Phase Rückschau im Problemlöseunterricht *1209*

Benjamin ROTT
Zusammenhänge von Unterrichtsgestaltung und Beliefs zum mathematischen Problemlösen (ProKlaR) *1213*

<u>Facetten des Bildungsbegriffs in der Mathematikdidaktik</u>

David KOLLOSCHE
Entdeckendes Lernen in der Kritik *1219*

Andreas VOHNS

<u>Geschichte der Mathematik und Mathematikunterricht</u>

Ysette WEISS-PIDSTRYGACH
Geschichte der Mathematik und Mathematikunterricht *1229*

Rainer KAENDERS
Schnecke im Sofa beim Umzug mit Stern *1231*

Rainer KAENDERS, Christoph KIRFEL
Weiterentwicklung historischer Zugänge zur Infinitesimalrechnung über Elementargeometrie *1235*

Emese VARGYAS
Euklids Flächenlehre: Eine Herausforderung für die Schule? *1239*

Ysette WEISS-PIDSTRYGACH
Auf der Suche nach Bildern im Buch der Geschichte der Mathematik .. *1243*

Lehrerinnen und Lehrer (LuL) und Multiplikatorinnen und Multiplikatoren (MuM) im Fokus – DZLM

Axel M. BLESSING, Ulrich KORTENKAMP, Christian DOHRMANN
Mathematikfortbildungen mit E-Learning gestalten 1249

Luise EICHHOLZ
Mathe kompakt – Entwicklung und Erforschung eines Fortbildungskurses für fachfremd unterrichtende Mathematiklehrpersonen in der Primarstufe 1253

Martina HOFFMANN
Video-vignettenbasierte Untersuchung förderdiagnostischer Kompetenzen von Grund- und Förderschullehrpersonen im inklusiven Mathematikunterricht 1257

Larissa ZWETZSCHLER
„Beispiele den Kollegen mitzugeben – das verstehe ich unter einer Mathefortbildung“ – Multiplikator_Innen qualifizieren!? 1261

Lehr-Lern-Labore Mathematik

Katja LENGNINK, Jürgen ROTH
„Lehr-Lern-Labor Mathematik“ als Ort der Forschung 1267

Marie-Elene BARTEL, Jürgen ROTH
Begriffsbildungsprozesse von Schüler/innen mit Videovignetten diagnostizieren und unterstützen 1269

Ann-Katrin BRÜNING
Untersuchungen zur Profilbildung und Evaluation von Lehr-Lern-Laboren im Entwicklungsverbund „Schülerlabore als Lehr-Lern-Labore“ der DTS 1273

Katja LENGNINK
Reflektieren im Mathematikunterricht als Beitrag zur Mathematischen Bildung – Anspruch und Realisierung 1277

Mathematik im Beruf: Herausforderungen und Ergebnisse der For-schung - Nicht für die Schule, sondern für das Leben lernen wir?

Kathrin WINTER, Maike VOLLSTEDT, Aiso HEINZE
Mathematik im Beruf: Herausforderungen und Ergebnisse der Forschung – Nicht für die Schule, sondern für das Leben lernen wir? 1283

Christoph DUCHHARDT, Maike VOLLSTEDT
Die Rolle von Selbstberichten zur Nutzung von Mathematik im Beruf 1285

Hansruedi KAISER
Mit Lernenden die rechnerisch/mathematische Bewältigung von beruflichen Alltagssituationen erarbeiten *1289*

Ulrike SIEBERT, Aiso HEINZE
Modellierung mathematischer Kompetenzen von Industriekaufleuten am Übergang in die berufliche Erstausbildung *1293*

<u>Mathematik und Sprachkompetenz</u>

Helmut LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN
Sektion „Mathematik und Sprachkompetenz“ *1299*

Sabrina JANZEN
„In solche Kästen würde ich so wenig wie möglich reinmachen, was aber möglichst viel abdeckt.“ - Textsortenwissen im sprachsensiblen Mathematikunterricht *1301*

Alexander SCHÜLER-MEYER, Taha KUZU
Vorstellungsentwicklungsprozesse zu Brüchen unter Nutzung der Erstsprache Türkisch *1305*

Selina PFENNIGER, Andreas RICHARD, Helmut LINNEWEBER-LAMMERKITTEN
Implementierung mathematischer Videoclips zur Förderung der Sprachkompetenz *1309*

Sebastian REZAT
Argumentationen von Grundschulkindern durch profilierte Aufgaben anregen? *1313*

Florian SCHACHT
Sprache im Mathematikunterricht mit digitalen Werkzeugen am Beispiel von Konstruktionsbeschreibungen *1317*

Marc SCHÄFER
Autonomous learning - the role of appropriate language and discourse *1321*

Birgit WERNER
Inklusiver Mathematikunterricht aus sonderpädagogischer Perspektive - Befunde und Konsequenzen für die Unterrichtsgestaltung *1325*

Carina ZINDEL
„Was heißt ‚in Abhängigkeit von‘?“ – Fach- und sprachintegrierter Förderansatz zum Umgang mit funktionaler Abhängigkeit *1329*

Mathematisches Modellieren im projektorientierten Unterricht

Martin BRACKE, Hans-Stefan SILLER
Mathematisches Modellieren im projektorientierten Unterricht *1335*

Martin BRACKE, Katherine NEßLER
Das Math Talents Programm - Forschendes Lernen in Langzeitprojekten *1337*

Irene GRAFENHOFER, Vanessa KLÖCKNER
Der KOblenzer Modelling-Trail KOMT - Ein Online-Lehr-Lern-Portal für Schülerinnen/Schüler und Studierende *1341*

Münstersche Studien zu mathematisch begabten Kindern in verschiedenen Altersbereichen

Friedhelm KÄPNICK
Münstersche Studien zu mathematisch begabten Kindern in verschiedenen Altersbereichen *1347*

Jana BUGZEL
„Sie hat das Mathebuch gesehen und war total enttäuscht.“ - Untersuchungen zum Übergang mathematisch begabter Kinder von der Kita in die Grundschule *1349*

Vera KÖRKEL
Mathematik in der Freizeit - informelles Mathematiklernen mathematisch begabter Sechst- und SiebtklässlerInnen *1353*

Britta SJUTS
Untersuchungen zu mathematisch begabten Fünft- und Sechstklässler/innen *1357*

PriMaMedien - Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien

Christof SCHREIBER, Silke LADEL
Sektion ‚PriMaMedien‘ *1363*

Christof SCHREIBER
Mathematik in Ton und Bild darstellen *1365*

Daniel WALTER
Potentiale von Tablet-Apps und wie ‚rechenschwache’ SchülerInnen sie nutzen *1369*

Psychologische Theorien zur Erklärung von Strategien beim Bearbeiten mathematischer Aufgaben

Andreas OBERSTEINER, Jana BEITLICH
Psychologische Theorien zur Erklärung von Strategien beim Bearbeiten mathematischer Aufgaben *1375*

Markus VOGEL
Mentale Modelle – Ausgewählte Aspekte mathematikdidaktischer Adaptionen... *1377*

Anke LINDMEIER, Aiso HEINZE
Strategien bei der Anzahlerfassung in strukturierten Zahldarstellungen – eine vergleichende Eye-Tracking Studie... *1381*

Andreas OBERSTEINER, Matthias BERNHARD, Kristina REISS
Strategien bei der Analyse von Vierfeldertafeln in der Grundschule: Die Rolle von Intuition und Bias... *1385*

Jana BEITLICH, Kristina REISS
Blickbewegungen von Studierenden auf Text und Bild beim Lesen mathematischer Beweise *1389*

Heike KNAUBER, Laura MARTIGNON, Hannes SCHRAY, Jonathan NELSON & Björn MEDER
Informationssuche und Kodierung: Heuristiken von Viertklässlern *1393*

<u>Theoriegeleitete und empirisch fundierte Kompetenzstufenmodelle</u>

Torsten LINNEMANN
Matur (CH), Abitur (D) und Reifeprüfung (A) – Studierfähigkeit und die Festlegung basaler Kompetenzen *1399*

Eva SATTLBERGER, Jan STEINFELD, Regina BRUDER, Tina HASCHER, Torsten LINNEMANN, Hans-Stefan SILLER
Ergebnisse der Österreichischen Matura 2015 aus der Perspektive des Kompetenzstufenmodells O-M-A.. *1403*

<u>Vernetzungen im Mathematikunterricht</u>

Matthias BRANDL, Astrid BRINKMANN, Thomas BORYS
Sektion „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ *1409*

Thomas BORYS
Innovatives Lehrkonzept in der Lehramtsausbildung - Studierende entwickeln und betreuen einen interaktiven Stand auf einem Science-Festival *1411*

Matthias BRANDL
Narrative Mathematik-Didaktik mittels Elementen bildender Kunst *1415*

Astrid BRINKMANN
Maps als Hilfe beim Problemlösen und beim Modellieren.................... *1419*

Wolfgang PFEFFER, Matthias BRANDL
Mentales Modell zum Abbildungsbegriff bei Studienanfängerinnen und -anfängern. *1423*

Videobasierte Erhebung von fachdidaktischem Noticing bei ange-henden und praktizierenden Mathematiklehrkräften

Marita FRIESEN, Sebastian KUNTZE
Videobasierte Erhebung von fachdidaktischem Noticing bei angehenden und praktizierenden Mathematiklehrkräften *1429*

Marita FRIESEN, Sebastian KUNTZE, Markus VOGEL
Videos, Comics oder Texte? Vergleich verschiedener Vignettenformate zur Erhebung fachdidaktischer Analysekompetenz von Lehrkräften in Ausbildung und Praxis *1431*

Kim-Alexandra RÖSIKE
Wahrnehmung von Potenzialen in Bearbeitungsprozessen von Lernenden - Eine qualitative Studie zur Professionalisierung von Lehrkräften *1435*

Visualisieren unter der Perspektive der Gestaltung und Analyse von Lehr-Lern-Prozessen

Eva MÜLLER-HILL
Sektion „Visualisieren unter der Perspektive der Gestaltung und Analyse von Lehr-Lern-Prozessen“ *1441*

Ulrike DREHER, Timo LEUDERS, Lars HOLZÄPFEL
Welche Rolle spielen Überzeugungen beim Arbeiten mit verschiedenen Repräsentationen von Funktionen? *1443*

Hans-Jürgen ELSCHENBROICH
Perspektivwechsel durch dynamische Software *1447*

Thomas GAWLICK
Tempelbilder zur Visualisierung in/von Problemlöseprozessen *1451*

Dörte HAFTENDORN
Dynamik bringt die Mathematiklehre voran *1455*

Elisabeth LUCYGA
Klippen in Problemlöseprozessen sichtbar machen *1459*

Guido PINKERNELL, Markus VOGEL
DiaLeCo – Lernen mit dynamischen Multirepräsentationen von Funktionen *1463*

Visualisierungen mathematischer Konzepte

Karin BINDER, Stefan KRAUSS, Georg BRUCKMAIER
Visualisierung komplexer Bayesianischer Aufgaben *1469*

Katharina BÖCHERER-LINDER; Andreas EICHLER; Markus VOGEL
Empirische Befunde zum Vergleich von Visualisierungen im Bereich der bedingten Wahrscheinlichkeiten *1473*

Julia OLLESCH, Markus VOGEL, Tobias DÖRFLER
Beurteilung computergestützter Visualisierungen für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I durch angehende Lehrkräfte *1477*

Tobias ROLFES, Jürgen ROTH, Wolfgang SCHNOTZ
Dynamische Visualisierungen beim Lernen mathematischer Konzepte . *1481*

4 Posterbeiträge

Sebastian KUNTZE, Marita FRIESEN
Kriterienbezogene Awareness und professionelles Wissen als Voraussetzung für Noticing und Analysekompetenz *1487*

Nadine BÖHME
Zusammenhang von Beliefs und ausgewählten lernrelevanten Merkmalen von Mathematikstudierenden im ersten Semester *1489*

Nils BUCHHOLTZ, Sebastian SCHORCHT,
Erste Ergebnisse aus ÜberLeGMa – Überzeugungen von Lehramtsstudierenden zur Geschichte der Mathematik *1491*

Barbara DROLLINGER-VETTER, Kathleen PHILIPP, Alex BUFF
Fachdidaktisches Wissen und Motivation: Das Thema «Wahrscheinlichkeit» in der Ausbildung von Lehrerinnen und Lehrern der Primarstufe *1493*

Nora FELDT-CAESAR, Ulrike RODER
Digitale Testinstrumente zur Diagnose von Grundwissen und Grundkönnen für die Sek. II *1495*

Julia FLEISCHER
Entwicklung und Erforschung einer digitalen Lernumgebung zum Thema Operationsverständnis *1497*

Christine GÄRTNER, Kathrin CORNETZ, Esther DOUMBOUYA-HOFFMANN, Mareile SHAW, Jochen LAUBROCK
Comicaufgaben vs. Textaufgaben im Mathematikunterricht *1499*

Christoph PIGGE, Irene NEUMANN, Aiso HEINZE
Mathematische Lernvoraussetzungen für MINT-Studiengänge aus Hochschulsicht – eine Delphi-Studie *1501*

Alexander JOHN; Diana HENZ; Wolfgang I. SCHÖLLHORN
Wirkung des Fahrens auf NeuroBikes auf die mathematische Lösungskompetenz und die EEG Gehirnaktivität: eine Interventionsstudie 1503

Nicole KOPPITZ
Mentoring im ersten Studienjahr für eine positive Einstellung 1505

Stephan BERENDONK
Examples of Elementary Mathematical Discoveries 1507

Stephan KREUZKAM
Routinefertigkeiten bei Studienanfängern - Erste Ergebnisse einer Fehleranalyse 1509

Anika WITTKOWSKI, Ursula CARLE, Gerald WITTMANN
Mathematik im Elementarbereich: Begründungsdimensionen und bedeutsame Rahmenbedingungen für das (mathematik-) didaktische Handeln von ErzieherInnen 1511

Nicola OSWALD & Nadine BENSTEIN
Network Maps als Visualisierungstool 1513

Selma PFENNIGWERTH, Simone DUNEKACKE, Aiso HEINZE, Susanne KURATLI, Miriam LEUCHTER, Anke LINDMEIER, Elisabeth MOSER OPITZ, Franziska VOGT, Andrea WULLSCHLEGER
Effekte fachspezifischer Erzieherinnenkompetenz auf den Kompetenzzuwachs 4-6jähriger Kinder 1515

Johanna RUGE
Erwartungen an das Mathematiklehramtsstudium 1517

Lena SCHLESINGER, Kirsten BENECKE, Armin JENTSCH
Unterrichtsbeobachtungen zur Messung der Unterrichtsqualität im Rahmen der Studie TEDS-Unterricht 1519

Anselm STROHMAIER, Jana BEITLICH, Matthias LEHNER, Kristina REISS
Blickbewegungen beim Lösen mathematischer PISA-Items und der Zusammenhang zu den Lösungsraten dieser Aufgaben 1521

Daniel THURM
Essener Modellierungstag (EMTA) - Design eines Ausbildungsmoduls zum mathematischen Modellieren in der Lehrerausbildung. 1523

Katrin VORHÖLTER, Alexandra KRÜGER, Lisa WENDT
Förderung metakognitiver Modellierungskompetenzen von Schülerinnen und Schülern 1525

Katrin VORHÖLTER, Nils BUCHHOLTZ
Beschulung von Flüchtlingskindern in Hamburg 1527

Candy WALTER
Wie entstehen die 3D-Gebäudemodelle bei Google Earth? – SketchUp: Modellieren im virtuellen Raum *1529*

Alexander WILLMS, Stefan UFER
Mathematiklernen mit Arbeitsmitteln in der Sekundarstufe *1531*

Anna KÖRNER
Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen in der Grundschule *1533*

5 Berichte der Arbeitskreise

Matthias BRANDL; Astrid BRINKMANN; Thomas BORYS,
Bericht des Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ *1537*

Katja EILERTS, Gilbert GREEFRATH, Johanna RELLENSMANN, Hans-Stefan SILLER, Katharina SKUTELLA
ISTRON-Gruppe: Realitätsbezüge im Mathematikunterricht *1541*

Anselm LAMBERT, Guido PINKERNELL
Arbeitskreis Mathematikunterricht und Informatik – jetzt: Arbeitskreis Mathematikunterricht und Digitale Werkzeuge *1545*

Benjamin ROTT; Ana KUZLE
Bericht des Arbeitskreises „Problemlösen“ *1547*

6 Beiträge vergangener Jahrestagungen

Julia MEINKE
Subjektive Theorien von Lehrerinnen und Lehrern zur Algebra der Sekundarstufe I *1553*

Anna Luisa HUCHTING, Malte JETZKE, Luisa KOCKISCH, Kolja PUSTELNIK
Repräsentationswechsel mit Eye-Tracking beobachten – Eine Studie im Rahmen eines forschungsorientierten Didaktikseminars *1555*

Andreas OBERSTEINER, Stanislaw SCHUKAJLOW
Visuelle Repräsentationen in Mathematik *1557*

Markus RUPPERT; Jan F. WÖRLER
Die Lehrerfortbildungsreihe »TiMu«: Kurzveranstaltungen statt Ganztagesfortbildung *1559*

Teil 1:
Einführung und Hauptvorträge

Rudolf VOM HOFE

Eröffnungsvortrag des 1. Vorsitzenden zur GDM-Jahrestagung in Heidelberg 2016

Sehr geehrte Gäste, liebe Kolleginnen und Kollegen, liebe Mitglieder der GDM,

ich freue mich, hier in Heidelberg die 50. Jahrestagung der GDM offiziell eröffnen zu dürfen. Es ist eine Jubiläumstagung. Ein halbes Jahrhundert gibt es sie nun schon und ich möchte daher unsere Jahrestagung auch zum Thema meines heutigen Eröffnungsvortrags machen und dabei drei Bereiche ansprechen: Die Vorgeschichte, die Entstehung und Entwicklung und die Zukunft unserer Tagung.

Vorgeschichte und Entstehung einer mathematikdidaktischen Community

Die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik wurde im März 1975 in Saarbrücken gegründet. Die Jahrestagungen sind aber älter; die erste fand bereits acht Jahre früher statt. Dies mag zunächst einmal erstaunen, könnte man doch denken, dass man normalerweise zunächst eine Gesellschaft gründet und dann – nach der Gründungstagung – ein Tagungskonzept entwickelt.

Wie ist das zu erklären? Und wie sah es überhaupt aus mit der Situation der Mathematikdidaktik vor der Gründung der GDM?

Wie wir alle wissen, ist die wissenschaftliche Mathematikdidaktik eine recht junge Disziplin. Im deutschsprachigen Bereich hat sie im Wesentlichen zwei Wurzeln: Die gymnasiale Mathematikdidaktik und die Rechenmethodik der Volksschule. In beiden Traditionen hatten es sowohl das Fach Mathematik als auch die Mathematikdidaktik nicht leicht, sondern eher schwer.

Zunächst ein Blick auf die Rechenmethodik. Hier ging es im Wesentlichen um die unterrichtliche Einführung elementarer Inhalte wie Zahlen, Operationen und das, was man damals bürgerliches Rechnen nannte. Ihre Vertreter waren meist geisteswissenschaftlich orientiert und standen pädagogischen und psychologischen Konzepten von jeher näher als der Mathematik. Die Ausbildung der Volksschullehrer fand bis in die zwanziger Jahre in Lehrerseminaren, danach an Pädagogischen Akademien statt. Intention dieser Akademien war die Ausbildung zukünftiger Volksschullehrer als schulische Erzieher, fächerspezifische Aspekte im wissenschaftlichen Sinne spielten eine eher untergeordnete Rolle. Dies galt insbesondere auch für das Fach Rechnen. Rechnen und Rechenmethodik wurde zwar gelehrt, ihnen wurde jedoch kein hoher Stellenwert zugemessen. Eine deutlich wichtigere Rolle spielte z. B. die Ausbildung in Musik und darstellender Kunst. Dies änderte sich in den 60er Jahren im Zusammenhang mit einer Umgestaltung des deutschen

Schulsystems. Die alte Volksschule wurde abgeschafft, die Grundschule für alle eingeführt; danach kamen dann die weiterführenden Schulen: Hautschule, Realschule, Gymnasium und schließlich – je nach Bundesland – auch Gesamtschulen. Im Zuge dieser Veränderungen wurde die Lehrerausbildung reformiert, sie wurde fachspezifischer und wissenschaftlicher, aus den Pädagogischen Akademien wurden Pädagogische Hochschulen. Und schließlich wurde im Zuge weiterer Umgestaltungen die Lehrerausbildung der Grund-, Haupt- und Realschullehrer auch zunehmend in die Universitäten integriert. Hierzu wurden nun Professuren für Rechendidaktik bzw. Didaktik der Mathematik geschaffen. Zur Lehrverpflichtung kam damit auch die Aufgabe der Forschung.

Und wie entwickelte sich die gymnasiale Mathematikdidaktik? Diese war traditionell sehr von den Fachwissenschaften geprägt, befasste sich aber von jeher auch mit Fragen der unterrichtlichen Umsetzung; z. B. Anschaulichkeit versus Strenge oder genetische versus systematische Begriffsbildung. In der gymnasialen Lehrerausbildung, die an den Universitäten stattfand, spielten didaktische Aspekte aber höchstens am Rande eine Rolle. Professuren für Fachdidaktik gab es daher zunächst nicht.

Doch auch dies änderte sich im Zuge der Entwicklung der 60er Jahre, die zu einer Annäherung der Traditionen der Rechendidaktik und der gymnasialen Mathematikdidaktik führte. Dies ist insofern bemerkenswert, als diese beiden Traditionen bislang – weitgehend unbeachtet von der jeweils anderen Seite – nebeneinander hergelaufen waren. Die bislang getrennten Kulturen von Grund- bzw. Volksschule und Gymnasium wurden nun von einer übergeordneten mathematischen Perspektive aus gesehen, was für manche Grundschuldidaktiker den Blick auf die weiterführende Schule und für manchen Gymnasialdidaktiker den Blick auf die mathematische Frühausbildung öffnete.

Diese Entwicklung führte insgesamt zu einem Aufblühen der Mathematikdidaktik, zu einem neuen Selbstbewusstsein und zu neuen Aktivitäten, so auch zu der Idee, erstmals eine größere Tagung zur Didaktik der Mathematik für den deutschsprachigen Raum durchzuführen, um ein Forum für wissenschaftlichen Austausch zu schaffen. Diese Idee entstand 1966 bei einer Zusammenkunft der Fachdidaktiker am Rande des pädagogischen Hochschultages in Berlin. Im Rahmen solcher pädagogischen Hochschultage trafen sich die Fachdidaktiker bereits seit längerem. Sie bildeten allerdings nur eine kleine Gruppe innerhalb einer insgesamt pädagogisch ausgerichteten Veranstaltung.

Ursula Viet, Professorin für Didaktik der Mathematik in Osnabrück, übernahm die Organisation für diese erste Tagung, die dann im Jahre 1967 an der Universität Osnabrück stattfand. Diese Tagung bildete den Startpunkt für die weitere inhaltliche und organisatorische Entwicklung der jungen Community.

Gründung und Entwicklung der GDM

Die folgenden Tagungen wurden von Mathematikdidaktikern organisiert, die sich nach Absprache dazu bereiterklärten, zunächst ohne einen festen institutionellen Rahmen. Dies zu organisieren wurde aber zunehmend schwieriger. Man brauchte klare Entscheidungsstrukturen um Aktivitäten längerfristig zu planen. Und man benötigte eine finanzielle Absicherung. So war es für die Saarbrücker Tagung 1975 erforderlich, im Vorfeld etliche Auslagen zu begleichen. Hans Schupp hatte in diesem Jahr das benötigte Geld von seinem Privatkonto vorgestreckt, in der Hoffnung dieses Darlehen durch die zu erwarteten Tagungsbeiträge wieder zurückzuerhalten. Dies hat auch geklappt. Dennoch wurde klar, dass nicht nur aus diesen äußeren Gründen, sondern auch zur inhaltlichen Weiterentwicklung die Gründung einer wissenschaftlichen Gesellschaft die bessere Lösung war.

Die DMV betrachtete diese Pläne zunächst mit einer Mischung aus Desinteresse und Skepsis. Es gab Vertreter der Fachmathematiker, die darin eine Fehlentwicklung sahen, da es sich aus ihrer Sicht hier um Fragen handelte, die vielleicht für Hauptschullehrer von methodischem Nutzen sein konnten, die jedoch für die gymnasiale Bildung völlig irrelevant waren. Es gab jedoch auch Professoren für Mathematik, die der Entwicklung einer eigenen Fachdidaktik positiv gegenüber standen und diese unterstützten. So bildeten sich an einigen Universitäten, z. B. Münster, Gießen und Karlsruhe Seminare für Didaktik der Mathematik, die wesentlich zur Weiterentwicklung der gymnasialen Mathematikdidaktik beitrugen.

Wie sollte nun der Verein aussehen? Wäre es nicht sinnvoll, eine GDM als Untergruppe innerhalb der DMV zu gründen? Diese Idee wurde diskutiert, aber dann verworfen. Die junge Community wollte ihre Selbstständigkeit, die sie gerade von den Pädagogen erstritten hatte, nicht gleich wieder in Frage stellen. Hinzu kam, dass nach den damaligen Aufnahmebedingungen der DMV ein großer Teil der Fachdidaktiker überhaupt nicht der DMV beitreten konnte. So kam es acht Jahre nach der ersten Tagung zur Gründung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, der heutigen GDM.

Die Teilnehmerzahlen haben sich seit den Anfängen erheblich vergrößert, wobei die genauen Zahlen der frühen Tagungen schwer zu ermitteln sind, da es ja noch keine institutionalisierten Aufzeichnungen gab. Nach Berichten waren es auf der ersten Tagung in Osnabrück etwa 50 Teilnehmer. Auf der 9. Bundestagung 1975 in Saarbrücken – also dem offiziellen Gründungsjahr der GDM – waren es dann bereits, wie wir aus einer Pressemitteilung wissen, schon mehr als 300 Wissenschaftler, die sich in über 50 Vorträgen über neue

Forschungs- und Entwicklungsergebnisse auf dem Gebiet des mathematischen Unterrichts aller Alters- und Niveaustufen austauschten. Im Jahr 2004 auf der 38. Jahrestagung in Augsburg waren es über 400 Teilnehmer. Heute, zur 50. Jahrestagung in Heidelberg, sind 662 Teilnehmer angemeldet.

Genaueres wissen wir über die Entwicklung der GDM-Mitgliederzahlen:

Es gab 129 Gründungsmitglieder, von denen heute immer noch 55 Mitglied der GDM sind. Einer von ihnen, nämlich der erste erste Vorsitzende war Heinz Griesel, dem ich zahlreiche Informationen zur Geschichte verdanke. Heinz Griesel kann heute aus gesundheitlichen Gründen nicht anwesend sein, hat mich aber gebeten, seine Grüße auszurichten und seine Freude darüber, dass sich die Gesellschaft bis heute so gut entwickelt hat.

Zehn Jahre später waren es bereits 460, in den Jahren zwischen 1995 und 2005 schwankten die Zahlen zwischen 500 und 600. Danach stiegen sie fast auf das Doppelte an, d. h. dass wir etwa die Hälfte der aktuellen Mitglieder in den letzten 10 Jahren neu hinzugewonnen haben. Heute haben wir ca. 1100 Mitglieder.

Bei der Durchsicht dieser Zahlen, fielen mir zwei Dinge auf, die ich erstaunlich bzw. denkwürdig finde und die ich hier kurz erwähnen möchte.

(1) Bei der Gründungsversammlung 1975 waren laut Protokoll 131 Mitglieder anwesend. Das ist insofern merkwürdig, als es laut Mitgliederstatistik 1975 lediglich 129 Mitglieder gab. Die Mitglieder waren also auf der ersten Mitgliederversammlung zu mehr als 100 % vertreten. Nun ist hier vielleicht falsch gezählt worden, das kann natürlich sein. Jedenfalls war die erste Mitgliederversammlung – gemessen an der Gesamtzahl der Mitglieder – ausgesprochen gut besucht, es waren alle da, sogar zwei Mitglieder, die es gar nicht gab.

(2) Interessant ist aber dann die weitere Entwicklung: Bei den Mitgliederversammlungen der folgenden Jahrestagungen bis heute blieb die Anzahl der Mitglieder, die zur Mitgliederversammlung gingen, nahezu konstant: Sie schwankte eigentlich immer zwischen 110 und 140 Mitgliedern; letztes Jahr waren es etwa 130. Und dies, obwohl sich die Anzahl der Mitglieder von 1975 bis heute mehr als verachtfacht hat. Der Grund dieser scheinbaren Diskrepanz ist mir noch nicht ganz klar. Vielleicht ist es so, dass sich mit einer Verdopplung der Mitgliederzahlen die Tendenz, zur Mitgliederversammlung zu gehen, halbiert. Aber warum? Hier braucht man wohl eine genauere Datenanalyse und ich habe mir vorgenommen, diese Sache demnächst mit Rolf Biehler zu erörtern.

Gemeinsame Tagungen mit der DMV

Liebe Kolleginnen und Kollegen, ich möchte nun noch zu einem anderen Punkt kommen, nämlich zum Verhältnis der GDM zur Mathematik und insbesondere zur DMV. Dieses Verhältnis war von jeher von besonderer Bedeutung für uns. Dies liegt nicht zuletzt daran, dass die gesellschaftliche Akzeptanz der GDM aufs Engste zusammenhängt mit der Bedeutung, die man der Didaktik für einen erfolgreichen Mathematikunterricht zumisst. Und erfolgreicher Mathematikunterricht ist auch eines der genuinen Interessen der DMV.

Es gab bislang zwei gemeinsame Tagungen mit der DMV, eine in Berlin und eine in München. Zu diesen Tagungen gab es neben Zustimmung auch manche Kritik. So wurde beispielweise die Frage gestellt, ob sich der zusätzliche organisatorische Aufwand einer solchen Doppeltagung wirklich lohnt. Manche hatten mitunter den Eindruck, dass es durch die Größe dieser Tagung schwieriger wurde, sich – wie sonst üblich – zwischen den Veranstaltungen und am Rande des Programms zu treffen und auszutauschen. Hinzu kam vielleicht auch, dass dies in großen Städten wie Berlin oder München ohnehin schwieriger ist als an kleineren Orten.

Zurzeit ist wieder eine gemeinsame Tagung geplant, sie wird im Jahr 2018 in Paderborn stattfinden. Und wir werden versuchen, aus den Erfahrungen der vorhergehenden Doppeltagungen zu lernen und eine Tagungsstruktur zu entwickeln, die genügend Raum für die Einzelverbände lässt und gleichzeitig neue Kontaktmöglichkeiten zwischen den Verbänden eröffnet.

Liebe Kolleginnen und Kollegen, die Planung dieser Tagung war nicht ganz unproblematisch, und ich möchte an dieser Stelle ganz offen über dieses Problem reden. Es ging zunächst um den Zeitpunkt der gemeinsamen Tagung. Die GDM-Jahrestagungen finden traditionell im Februar oder März statt, die DMV-Tagung im September. Zweimal hatte die DMV bereits auf ihren traditionellen Septembertermin verzichtet und sich nach der GDM gerichtet. Nun erwartete man Seitens der DMV, dass wir auch mal auf den September gehen.

Nun ist eine solche Verlegung für uns nicht einfach und ohne einen erheblichen Aufwand kaum zu realisieren. Entsprechend skeptisch war ich vor Beginn der Planung dieser Doppeltagung. Lohnt sich wirklich der organisatorische Aufwand oder ist es nicht besser, den Kontakt mit der DMV auf andere Weise zu pflegen?

Meine zunächst skeptische Haltung änderte sich nach einem Gespräch mit der DMV-Spitze. Hier wurde deutlich, dass die DMV ein erhebliches Interesse an der Zusammenarbeit mit der GDM hat. Dieses betrifft insbesondere Fragen der Lehrerbildung und des Übergangs Schule/Hochschule. In den

Gesprächen wurde deutlich, dass beides für die DMV wichtige Problemfelder sind, in denen sie die Zusammenarbeit und Abstimmung mit der GDM sucht. Und ein weiterer wichtiger Aspekt, der Seitens der DMV für eine gemeinsame Tagung angeführt wurde, ist die Außenwirkung einer solchen Doppeltagung, die ein weit größeres Gewicht hat als es etwa gemeinsame Kommissionen haben können.

Liebe Kolleginnen und Kollegen, die positive und interessierte Haltung der DMV hat mich beeindruckt und überzeugt. Ich denke, dass die aktuellen und zukünftigen Probleme der mathematischen Bildung ohne die DMV kaum zu lösen sind und dass eine verstärkte Zusammenarbeit in diesen Bereichen auch ein vitales Interesse der GDM ist.

Die DMV hat unsere Argumentation, dass wir für eine Verlegung der Tagung in den September einen längeren Vorlauf benötigen, akzeptiert. Wir haben der DMV allerdings signalisiert, dass wir in den kommenden Jahren über einen möglichen Wechsel nachdenken werden, der dann die übernächste gemeinsame Tagung betreffen könnte. Um es noch etwas deutlicher zu sagen, ich habe der DMV signalisiert, dass ich mich als Vorsitzender der GDM für weitere gemeinsame Tagungen einsetzen werde, dass eine Entscheidung in dieser Sache aber lediglich die Mitgliederversammlung treffen kann.

Für die Zukunft sehe ich drei Möglichkeiten:

(1) Wir teilen der DMV mit, dass wir auf absehbare Zeit nicht bereit sind, auf unseren traditionellen Märztermin zu verzichten. Das wäre dann das Ende von gemeinsamen Tagungen und kein gutes Signal an die DMV.

(2) Wir verlegen unsere Tagung einmalig oder vielleicht alle 5 Jahre auf den September. Dies würde gemeinsame Tagungen mit der DMV ermöglichen, würde aber zu Problemen innerhalb der GDM führen, da zum einen Wahlperioden erheblich verkürzt oder verlängert würden und da zum anderen zwei Tagungen im Abstand eines halben Jahres folgen würden.

(3) Wir verlegen unsere Tagung generell auf den September, am besten auf die letzte Septemberhälfte. Die Herbsttagungen unserer Arbeitskreise könnte man dann im Gegenzug auf das Frühjahr verlegen.

Liebe Mitglieder, wir müssen das nicht heute und auch nicht in diesem Jahr entscheiden. Aber ich möchte Sie ganz herzlich bitten, darüber nachzudenken und die damit zusammenhängenden Aspekte zu diskutieren. Eine Entscheidung sollten wir dann nach der Tagung 2018 in Paderborn treffen.

Ich möchte dem nicht vorgreifen, aber als Vorsitzender soviel sagen: Ich halte die Beziehung zwischen GDM und DMV für eine grundlegende Säule für erfolgreiche Arbeit. Daher plädiere ich dafür, die ausgestreckte Hand der

DMV anzunehmen und zu sagen: „Ok, der September ist auch ein schöner Monat“.

Nun aber zurück zum März 2016 und zurück nach Heidelberg. Wir freuen uns, in dieser schönen Stadt zu Gast sein zu dürfen, und bedanken uns bereits jetzt für die umfangreiche Arbeit und Gastfreundschaft der Organisatoren.

Ich wünsche uns allen eine erfolgreiche und spannende Tagung. Herzlichen Dank!

Gabriella AMBRUS, Budapest

Vergangenheit und Gegenwart der ungarischen Mathematikdidaktik – unter besonderer Berücksichtigung der Bezüge zu Deutschland und Österreich

Auf Ungarns Geschichte haben die deutschen und österreichischen Beziehungen in mehreren Hinsichten eingewirkt. Beispielsweise können hier erwähnt werden: die Einsiedlung deutschsprachiger Bürger − in ungarischen Gebieten, die nach der 150-jährigen osmanischen Besetzung verödet waren − im 18. Jahrhundert und die Jahrzehnte der Österreichischen-Ungarischen Monarchie im 19. und 20. Jahrhundert. Die deutsche Sprache war also jahrhundertelang nicht nur im politischen, wirtschaftlichen, kulturellen und wissenschaftlichen Leben, sondern für viele Leute auch im Alltag da.

Für die Entwicklung des ungarischen Mathematikunterrichts waren die letzten zwei Jahrhunderte entscheidend. Im Hintergrund stehen einerseits die wirtschaftlich-politischen und gesellschaftlichen Änderungen und andererseits der Aufschwung des wissenschaftlichen Lebens, hauptsächlich der mathematischen Forschungen.

Wegen des in mehreren Beziehungen gemeinsamen, geschichtlich-kulturellen Hintergrundes waren die deutschen und österreichischen Einwirkungen sehr bedeutend; allerdings wurden diese Zusammenhänge auf den Mathematikunterricht bezogen bislang kaum analysiert.

Vorgeschichte

Bis zum 18. Jahrhundert war Latein die Sprache der Wissenschaften in Europa; im 18. Jahrhundert erschienen aber schon − den Ansprüchen der Zeit entsprechend − Werke mit grundlegenden arithmetischen Kenntnissen auch auf Ungarisch. Unter diesen Rechenbüchern ist besonders die „Arithmetica“ von **György Maróthi** (1715-1744) aus 1743 erwähnenswert. Maróthi kann auch als ein „Didaktiker” aus alten Zeiten betrachtet werden, da er im Vorwort seines Buches auch seine didaktischen Positionen in mehreren Punkten zusammenfasst. Das Buch „Eine kurtze und grundliche anlaytung zu der rechten verstand Geometriae” (1563) von **Kristóf Pühler (Puehler)** (geboren in Ungarn, Studium in Ingolstadt, genaue Daten unbekannt) ist hervorragend in der geometrischen Literatur dieser Jahrhunderte.

János András Segner (1704-1777) war der erste aus Ungarn abstammende und Europaweit anerkannte Mathematiker. Seine Lehrbücher sind im Allgemeinen von höherem Niveau und verständlicher als die vorangehenden Lehrbücher der Mathematik (Szénássy, 1970). Einige lateinische und deutsche Fachwörter von Segner (z. B.: Faktor, echte und unechte Brüche), werden in vielen Sprachen im Allgemeinen noch immer in wörtlicher Übersetzung seiner Wortbildungen gebraucht (Szénássy, 1970, S. 90).

1777 (Ratio Educationis) - 1867 (Der Ausgleich, Österreichisch-Ungarische Monarchie)

Im 18. Jahrhundert wurde die Entwicklung stark von den letzten Kriegen am Ende der osmanischen Herrschaft sowie von den dadurch entstandenen Verlusten an Menschen und Gütern beeinflusst. In den westlichen Ländern Europas war in dieser Epoche schon eine starke industrielle und bürgerliche Entwicklung seit langer Zeit im Gange; in Ungarn vollzog sich aber dieser Vorgang später und viel langsamer.

Ab Mitte des 18. Jahrhunderts änderte sich auch das Unterrichtswesen immer mehr, und in diesem Prozess war die *Ratio Educationis* in 1777 entscheidend. In den Klassen der Mittelschulen erreichte aber die Anzahl der Mathematikstunden nicht einmal ein Drittel der Stundenanzahl der lateinischen Sprache (Oláhné, 1977).

Obwohl in Ungarn in den Volksschulen auf Ungarisch unterrichtet wurde, war bis 1844 – abgesehen von einer kurzen Periode – die Sprache des Unterrichts in den Mittelschulen überwiegend Latein. In 1844 wurde die Sprache des Unterrichts an allen Schulstufen offiziell ungarisch. Unter den Lehrbüchern in Mathematik sind die Bücher des Mathematikers **Pál (kerekgedei) Makó** (1723-1793) die bedeutendsten. Makó‘s auf Ungarisch verfasste Lehrbücher für die Volksschulen und seine deutschsprachige Lehrbücher für die höheren Klassen wurden mehrere Jahrzehnte lang gebraucht (Szénássy, 1970). In den protestantischen Schulen wurde schon früh (18. Jh.) begonnen Mathematik auch auf Ungarisch zu unterrichten.

Die zwei Ratio, (1777, 1806) haben sich mit den didaktischen Fragen des Mathematikunterrichtes sehr wenig beschäftigt, aber in den Lehrplänen der protestantischen Schulen sind an mehreren Stellen auch didaktische Hinweise zu finden (Oláhné, 1977).

Im zweiten Teil des 19. Jahrhunderts war die Wirkung auf den Unterricht in Mittelschulen des „*Entwurf der Organisation von Gymnasien und Realschulen*“ bedeutungsvoll. Der Lehrplan „Entwurf ...“, konzipiert aufgrund des österreichischen Lehrsystems nach dem preußischen und französischen Muster wurde erst in 1949 veröffentlicht.

Aus diesem Zeitraum soll unbedingt **Farkas Bolyai** (1775 - 1856) erwähnt werden. Er studierte in Göttingen, befreundete sich hier mit Gauss, und diese Beziehung spielte eine wichtige Rolle auch im Leben seines Sohnes János (Johannes). Nachher wurde er Lehrer der Mathematik, Physik und Chemie im Kollegium (Gymnasium) von Marosvásárhely (heute in Rumänien). Bolyai war, neben seiner bedeutenden mathematischen Tätigkeit ein Polyhistor; er beschäftigte sich auch regelmäßig mit pädagogischen und didaktischen Fragen sowie Problemen des Unterrichtswesens. Er war nicht nur der erste Lehrer seines berühmten Sohnes, sondern er unterstützte auch dessen wissenschaftliche Tätigkeit. In 1834 erschien die erste Auflage seines Lehrbuchs "Arithmetikának, geometriának és physikának eleje" [Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Physik].

Die Tätigkeiten der „zwei Bolyai” sind hervorragend in der Geschichte der Mathematik des 19. Jahrhunderts *„das aber nicht als Ausgangspunkt der Entwicklung im 19. Jahrhundert betrachtet werden kann, da sich die rückständigen Gesellschaftsstrukturen Ungarns und insbesondere die Isolation Transsylvaniens innerhalb des Habsburgerreiches auf die Aufnahme ihrer Werke in Ungarn und in Europa überhaupt sehr ungünstig auswirkten.“* (Deák, 2002.)

1867 - 1920 (Vom Ausgleich bis 1920)

Nach dem Ausgleich von 1867 wurde Ungarn in der Monarchie offiziell gleichberechtigt mit Österreich, aber die Beurteilung dieser Periode ist umstritten. Die wirtschaftlichen, gesellschaftlichen Veränderungen hatten sich auch auf das Schulwesen anregend ausgewirkt. Im zweiten Teil des 19. Jahrhunderts erschienen mehrere Lehrpläne (1860-er Jahre, 1871, 1879, 1899), darunter der Lehrplan von Wlassics (1899), wodurch endlich eine Änderung auch bei dem Unterricht der Anwendungen herbeigeführt wurde, die früher in den Mittelschulklassen sehr wenig beachtet wurden (Beke/Mikola,1909, S.13).

Der Physiker **Loránd Eötvös** (1848-1919) und der Mathematiker **Gyula Kőnig** (1849-1913) − hervorragende Persönlichkeiten dieser Zeiten − haben in 1891 die Mathematikai és Physikai Társulat [Gesellschaft für Mathematik und Physik] begründet. Ab 1904 war Kőnig Hauptdirektor des Franklin Verlages in Budapest; bei diesem Verlag erschienen seine Lehrbücher für Mittelschulen (fünf höhere Klassen) die später von Manó Beke überarbeitet wurden.

Ein Student von Gyula Kőnig war **Manó (Emmanuel) Beke** (1862-1946), ursprünglich Lehrer für Mathematik und Physik in Budapest (seit 1900 Universitätsprofessor). Beke beschäftigte sich schon ganz am Anfang seiner Lehrerkarriere mit Fragen des Unterrichtswesens und des mathematischen Unterrichtes, aber seine Begegnung mit Felix Klein (und mit dessen Reformen des Mathematikunterrichtes) hatte später eine entscheidende Auswirkung auf seine weitere Tätigkeit. Auf die Initiative von Beke wurde 1912 das ungarische Komitee für die Reform des Mathematikunterrichts ins Leben gerufen (Beke/Mikola 1912); Sekretär des Komitees war Sándor Mikola). Die Hauptbestrebung des Komitees war das Auftreten gegen den formalen und für einen, auf die Tätigkeit der Schüler basierten Mathematikunterricht.

An der internationalen Mathematiker-Konferenz 1914 in Paris hat Beke – im Auftrag von F. Klein − einen Hauptvortrag gehalten mit dem Titel: „Einführung der Differential- und Integralrechnung in den Mittelschulen“, wobei er über eine seiner wichtigsten Positionen gesprochen hat: es sollte keinen Mathematikunterricht in Mittelschulen ohne Differential- und Integralrechnung geben.

Beke hat sogar seine wissenschaftliche Tätigkeit etwas vernachlässigt um zwischen 1890 und 1900 zehn Lehrbücher zu schreiben; diese waren jahrzehntelang in den ungarischen Schulen im Gebrauch.

Unter den Mathematiklehrern dieses Zeitraums ist **László Rátz** (1863-1930), Lehrer für Mathematik und Physik, hervorragend. Seine Schüler waren zum Beispiel der Physiker Jenő (Eugen) Wigner und der Mathematiker János (Johann) Neumann. Rátz hat – gemeinsam mit Sándor Mikola − die Methoden und das Lehrmaterial des auf der Tätigkeit der Schüler basierten Mathematikunterrichts – ausgearbeitet. Im berühmten Gymnasium „Fasori“ in Budapest wurde die Mathematik ab 1912 offiziell nach diesen Prinzipien unterrichtet.

In 1894 wurde die auch noch heute existierende mathematische Schülerzeitschrift KÖMAL (Kurzwort) ins Leben gerufen, mit bedeutender Auswirkung auf die Begabtenförderung in Ungarn; László Rátz war die führende Persönlichkeit bei dieser auch für Europa ausgangs des 19. Jahrhunderts bedeutende Initiative.

1920 - 1945 (Zwischen den Weltkriegen)

Nach dem 1. Weltkrieg geriet Ungarn in eine schwierige Situation, da infolge des Friedensabkommens in Trianon zwei Drittel seiner Gebiete abgetrennt und den benachbarten Ländern zugefügt wurden; das erzeugte viele Spannungen mit schwerwiegenden politischen Folgen. Obwohl um die Jahrhundertwende ein lebhaftes wissenschaftliches Leben schon auch in Mathematik vorhanden war, kamen zwischen den Weltkriegen im Unterricht die geisteswissen-schaftlichen Disziplinen in den Vordergrund. In dieser Epoche verließen − wegen des Mangels an Arbeitsstellen, aus politischen Gründen und wegen des institutionalisierten Antisemitismus − viele Mathematiker und Mathematik-lehrer Ungarn, darunter Pál Dienes, Pál Erdős, János Neumann, György Pólya.

Im gymnasialen Mathematikunterricht (Klassen 5-12) nahm die Wichtigkeit der „Wissenschaftler-Lehrer” beträchtlich zu, und in einigen Schulen wurde die Begabtenförderung zum Schwerpunkt des mathematischen Unterrichts.

Die Tätigkeit des Mathematikers **Lipót Fejér** (1880-1959) soll hier aber auch erwähnt werden. Seine Professoren an der Universität waren unter anderen Gyula Kőnig, Gusztáv Rados, József Kürschák, Manó Beke und Loránd Eötvös. In 1899 -1900 studierte er in Berlin, und in 1908 war er schon Mitglied der ungarischen Akademie der Wissenschaften. Obwohl viele Wissenschaftler Ungarn verlassen haben, konnte Fejér eine „mathematische

Schule” errichten, wo solche Persönlichkeiten wie Pál Erdős, László Kalmár, Pál Turán, oder Pál Szász ausgebildet wurden. In seinen Vorlesungen versuchte er seine Gedanken möglicherweise in einer solchen Form erscheinen zu lassen, dass die Zuhörer das Gefühl haben konnten: diese Idee könnte sogar ich haben. *This idea, “let the reader or the student think that ‘even he or she could have done that”, returns several times in the writings of Kalmár and Rózsa Péter as well as in How to solve it? by Pólya or in the work of Tamás Varga* (Gosztonyi). Seine gesammelten Werke erschienen 1970 auch auf Deutsch, betreut von Pál Turán und Ervin Deák.

Der Name von **György Pólya** (1887- 1985) ist auch wegen seiner didaktischen Tätigkeit im Problemlösen und dessen Unterricht bekannt. In der Mittelschule war Pólya ein Schüler von M. Beke, danach studierte er in Wien und Göttingen (1910-14). Pólya‘s Tätigkeit war u. a. von F. Klein, D. Hilbert, und O. Toeplitz stark beeinflusst. In seinem bekannten Buch „How to solve it” und in mehreren anderen didaktischen Werken hat er die Grundlagen der „Heuristik” (in Mathematik) ausgearbeitet. Sehr effektiv waren auch seine interaktiven Vorträge.

1945-48 (Die ersten Nachkriegsjahre)

Diese Zeit der stürmischen Demokratisierung war von progressiven Ideen durchdrungen mit einer Auswirkung auf das ganze Unterrichtswesen – die seit langem fällige Einführung der achtklassigen allgemeinbildenden Schule war eine der ersten Maßnahmen. Die neue Lehrbuchserie für das Gymnasium – verfasst von ausgezeichneten Mathematikern und Didaktikern wie Rózsa Péter, Tibor Gallai, und János Surányi – brachte neue Inhalte und Methoden *„mit denen auch viele spätere, wertvolle Erkenntnisse der europäischen mathematikdidaktischen Forschung vorweggenommen wurden. Dieses Werk blieb aber außerhalb Ungarns unbekannt und in Ungarn mussten die Reformen nach einigen Jahren wegen des Widerstandes großer Massen der Lehrer abgedämpft werden.“* (Deák, 2002.)

1948 - 1989 (vom zweiten Weltkrieg bis zur Wende)

In 1950 erschien ein neuer Lehrplan für die achtklassige Grundschule. Nach diesem Dokument wurde in den Klassen 1–7, Arithmetik und Geometrie (Messungen) unterrichtet und nur in der letzten Klasse (Klasse 8) kam es zu etwas Algebra. In den sechziger-siebziger Jahren wurden – hauptsächlich für die allgemeinbildenden Schulen, aber auch für die Mittelschulen – Unterrichtsversuche in Mathematik in Gang gebracht. Im Hintergrund der Versuche standen einerseits die Auswirkungen der Bestrebungen für die Erneuerung des mathematischen Unterrichtes in Europa und in den USA und andererseits die Möglichkeit für die Beteiligten, ihre Ideen frei zu erproben. Hervorragend war darunter der Versuch von Tamás Varga.

Tamás Varga (1919-1987) war Lehrer für Mathematik und Physik, unterrichtete in einer Mittelschule, arbeitete danach zuerst im Unterrichtsministerium, nachher an der Universität ELTE und im Landesinstitut für Pädagogik. Anfang der sechziger Jahre lernte Varga auch ausländische Bestrebungen für Reformen des Mathematikunterrichts kennen, und seine Beziehungen zu vielen namenhaften Didaktikern, in erster Reihe zu **Zoltán Dienes** waren entscheidend in der Gestaltung der Konzeption seines in 1963 beginnenden Versuches „Komplexer Mathematikunterricht”.

Das Hauptziel des Versuches war die Erneuerung des Lehrmaterials und der Methoden im Unterricht der Klassen 1-8. Varga‘s Mitarbeiter waren Mathematiker, Mathematiklehrer und Grundschullehrer. *„Dieses weltweit anerkannte Projekt – in dem die Selbstständigkeit der Kinder, die innere Motivation, die Einbeziehung neuer Gebiete der Mathematik (wie z.B. der Stochastik) in die achtjährige Grundschulbildung, die minuziöse Ausarbeitung induktiver und genetischer Erkenntnisprozesse einen hohen Stellenwert einnehmen – ist wohl das wertvollste, was die ungarische Mathematikdidaktik je geschaffen hat.“* (Deák, 2002.)

Die Lehrbücher und Arbeitsblätter für den Versuch wurden von Lehrern konzipiert und unter anderen auch von T. Varga begutachtet. Sogar Freudenthal schrieb anerkennend über die Arbeitsblätter für die Klassen 1−4*: „Die vorzüglichen ungarischen Rechenbücher, das Beste, was es in der Welt auf dem Gebiete gibt,…”* (Freudenthal, 1973, S.222). In Ungarn wurden auch internationale didaktische Veranstaltungen organisiert; aus einem unveröffentlichten Vortrag von Varga in Eger (Ungarn, 1973) zitiert z.B. E. Ch. Wittmann in seinem bekannten Buch (Wittmann, 1981, S. 52).

Varga hat über den Mathematikunterricht ab der Grundschule in einem übergreifenden Bogen gedacht (wie z. B. auch M. Beke), und betrachtete seine Versuche als Verwirklichung früherer Reformgedanken. (Varga, 1975).

Später gab es auch für die Mittelschulen Unterrichtsversuche nach der Konzeption von T. Varga. In 1979 erschien für den Lehrplan der Gymnasien eine neue, parallele (frei wählbare), inhaltlich auf das Material des Versuchs ausgerichtete Lehrbuchserie; der Mathematikunterricht wurde aber dabei nicht so umfassend verändert, wie es in der allgemeinbildenden Schule geschah.

Es war nicht leicht nach der Konzeption von Varga zu unterrichten, besonders für jene Lehrer, die früher mit dem herkömmlichen Lehrmaterial und mit den traditionellen Methoden arbeiteten; teils darum wurde der Lehrplan von 1978 schon in der zweiten Hälfte der 1980-er Jahre überarbeitet. Aber die Methode von Varga hat auch weiterhin eine starke Auswirkung auf den Mathematikunterricht, besonders im Unterricht in der Kombinatorik und in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Mathematikunterricht nach der Wende

Ende der achtziger Jahre kam es zu einer großen politischen Änderung; diese Periode kann durch schwere Krisen in der Wirtschaft, durch große Inflation und riesige Arbeitslosigkeit, aber auch durch neue Möglichkeiten charakterisiert werden. Mit dem Öffnen der Grenzen erweiterten sich die internationalen Beziehungen, auch zu den deutschsprachigen Gebieten.

Die Fragen des Unterrichtswesens wurden von den verschiedenen Regierungen verschiedentlich behandelt, und die raschen Änderungen können nicht immer Gutes in einem System bringen, wofür Stabilität, zuverlässige Funktionierung und eine harmonische Mischung von Traditionen und Neuigkeiten besonders wichtig wären. Nach langer Vorbereitung erschien 1995 das erste NAT (Nationalcurriculum), womit nicht mehr unmittelbar der Unterricht reguliert, sondern die rechtlichen Rahmen für den Unterricht festgesetzt wurden; als Vorbereitung eines kompetenzbasierten Unterrichts wurden die zu entwickelnden Gebiete angegeben. In den neunziger Jahren wurde auch die frühere starre Unterrichtsstruktur geändert: nach vier Klassen (oder 6 Klassen) der achtjährigen allgemeinbildenden Schule kann auch ein achtjähriges bzw. sechsjähriges Gymnasium gewählt werden, wobei aber auch die vierjährigen Mittelschulen weiterhin bestehen.

Mit dem NAT in 2003 und den weiteren Lehrplanrevisionen wurden die rechtlichen Rahmen eines kompetenzorientierten Unterrichts festgesetzt; für die Verwirklichung wurden Rahmenlehrpläne und lokale Lehrpläne (in den Schulen) angefertigt. Der neue Lehrplan in 2012 beinhaltet nicht nur eine ausführliche Beschreibung der relevanten Kompetenzen, sondern auch wiederum das obligatorische Lehrmaterial für die ersten 10 Klassen. Zum Lehrplan gehören auch zentrale Rahmenlehrpläne für die verschiedenen Schultypen und auch für die Klassen mit speziellen Ausbildungszielen.

Im Mathematikunterricht und seiner Didaktik hat auch das letzte Jahrzehnt viel Neues gebracht, mit vielen positiven Zügen der Unterstützung einerseits des Unterrichtes und der Lehrer, andererseits der didaktischen Forschungen.

Literatur

Beke, M. (1896): *Vezérkönyv a népiskolai számtani oktatáshoz.* [Leitfaden für den Arithmetikunterricht in Volksschulen, ung.], Budapest.

Beke, M., Mikola, S. (1909): *A középiskolai matematikai tanítás reformja*. Budapest, 1909; [*Abhandlungen über die Reform des mathematischen Unterrichts in Ungarn*, Teubner, 1911]

Deák, E. (2002): Die besondere Verflechtung der mathematischen Forschung, des Mathematik-Unterrichts und der Mathematikdidaktik Ungarns im 19. und 20. Jahrhundert, *Mitteilungen der GDM*, Nr. 74.

Freudenthal, H. (1973): *Mathematik als Pädagogische Aufgabe*, Klett

Gosztonyi, K. (in press), Mathematical Culture and Mathematics Education in Hungary in the XXst century. In. B. Larvor (Ed.), *Mathematical Cultures*. Basel: Springer Birkhäuser.

Kántor, T. (2014): Arcképek a 20. század magyar matematikusairól: Beke Manó, [Porträts über ungarischen Mathematiker im 20. Jh.: Emmanuel Beke, ung.] *Polygon*, 22 (1.-2), 3-20

Kovács, L.(2006): Teacher László Rátz, In. Némethné, P.K.: Rátz László tanár úr, [Der Lehrer László Rátz, ung.], *Studia Physica*, *Savariensia* XIII. Szombathely 68-74

Oláhné, E. M. (1977): Az 1777-es Ratio Educationis *A Matematika Tanítása*, 3. 75-79

Szénássy, B. (1970): *A magyarországi matematika története*, Akadémiai K., Budapest

Varga, T. (1975): *Komplex matematikatanítás, kandidátusi alkotás ismertetése* [Komplexer Mathematikunterricht, Habilitationsschrift, ung.], (Manuskript)

Wittmann, E. Ch. (1981): *Grundfragen des Mathematikunterrichts*, Vieweg

Michael GAIDOSCHIK, Klagenfurt

Prävention von „Rechenschwächen“: Was Fachdidaktik kann und könnte

1. Einleitung

„One problem [...] is that research about numerical development comes from very different research communities that sometimes seem to study numerical development in parallel universes“ (Kaufmann u. Nuerk 2005, S. 161[1]). Wenn AutorInnen der Neuro- und Kognitionspsychologie das so empfinden, will ich ihnen nicht widersprechen. Ebenso berechtigt lässt sich von Paralleluniversen sprechen, wo es um die theoretische und praktische Befassung mit Kindern geht, deren „numerical development“ – fachdidaktisch: deren mathematisches Lernen – nicht so verläuft wie erwünscht.

Ich strebe in diesem Beitrag keinen Brückenschlag an. Falls ein solcher möglich ist, dann nur im Zuge einer wechselseitigen Klärung der Positionen. Um im Bild zu bleiben: Vor dem Bau einer Brücke sollten wir die Entfernung zum anderen Ufer und dessen Beschaffenheit kennen. Der erste Teil des Beitrags ist in diesem Sinne zu verstehen. Im zweiten Teil versuche ich zu skizzieren, wie ich das Ufer sehe, an dem ich selbst tätig bin – also den fachdidaktischen Zugang zu mathematischen Lernschwierigkeiten.

2. „Dyskalkulie“: Ein Nicht-Sondern mit Folgen

Die evidenten Schwierigkeiten vieler Kinder beim Rechnenlernen fordern Erklärungen heraus. Wer diese Schwierigkeiten aber als „Symptome“ einer „Dyskalkulie“, „Rechenstörung“, „Rechenschwäche“ betrachtet, setzt damit ein großes „Nicht“ in die Welt, das sich, so meine These, einer Erklärung auf wissenschaftlicher Basis entzieht.

All diese Begriffe sind Negativbestimmungen: Das Kalkulieren ist „dys-“, es funktioniert nicht. Die Rechenleistungen sind gestört, schwach, entsprechen nicht der Altersnorm. Das trifft in dieser dürren Negation leider auf viele Kinder zu. Aber innerhalb dieser negativ bestimmten Gemeinsamkeit zeigen sich große Unterschiede in der Art wie auch im Grad dieser Schwierigkeiten, auch bezüglich der Inhalte, an denen sie auftreten, der Kombinationen, in denen sie an einzelnen Kindern zu finden sind.

Freilich: Auch diejenigen, die über „Dyskalkulie“ forschen, anerkennen, dass es sich um eine „heterogene Lernstörung“ handelt, ein „uneinheitliches Störungsbild“ (Landerl u. Kaufmann 2013, S. 136 f.). Dennoch halten sie daran fest, dass „Dyskalkulie“ ein wissenschaftstaugliches Konstrukt sei, ermitteln „Prävalenzraten“, formulieren „Kausalmodelle“, suchen nach „Prädiktoren“, „Komorbiditäten“ … (z.B. Landerl u. Kaufmann 2013).

[1] Aufgrund des eingeschränkten Platzes wird das Literaturverzeichnis zu diesem Beitrag unter http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/gdm-heidelberg.pdf veröffentlicht.

Ich wiederhole dazu einen Vergleich, den ich an anderer Stelle bemüht habe (Gaidoschik 2013): Die Begriffe „Dyskalkulie“, „Rechenstörung“ usw. sind in ihrer negativen Unbestimmtheit für wissenschaftliche Zwecke ebenso ungeeignet, wie es etwa der Begriff „Bauchschmerzen“ im Bereich der Medizin ist. Die in „Bauchschmerzen“ festgehaltene Allgemeinheit ist zu allgemein, um ernsthaft (wissenschaftlich) bezüglich Ursachen, Verlaufsformen, Therapiemöglichkeiten etc. erforscht zu werden.

Aber natürlich weiß und verfolge ich mit professionellem Interesse, dass weltweit über „Dyskalkulie“ geforscht *wird*. Damit bin ich beim „Sondern“. Die neuro- und kognitionspsychologische Forschung zu Lernschwierigkeiten in Mathematik untersucht in der Regel nicht das mathematische Lernen selbst, sondern dessen *Voraussetzungen*.

Diese Entgegensetzung ist entscheidend. Auch die Fachdidaktik beschäftigt sich mit Voraussetzungen. Sie geht dabei aber *vom fachlichen Lernen aus*, davon, was Kinder denken und tun, wenn sie Mathematik treiben oder treiben sollen. Dabei analysiert sie die Inhalte, an denen Schwierigkeiten auftreten; die Interaktionen im Unterricht, in dem mathematisches Lernen zu einem Gutteil geschieht; das, was vor- und außerschulisch dazu beitragen kann, dass mathematisches Lernen gelingt oder auch nicht; und natürlich auch die unterschiedlichen Lernvoraussetzungen der Kinder.

Aber eine Voraussetzung ist logisch zu trennen von dem, wofür sie Voraussetzung ist. Für erfolgreiches mathematisches Lernen lassen sich viele Voraussetzungen nennen. Nicht alle sind gleich wichtig. Es gibt begünstigende, vielleicht auch unverzichtbare Voraussetzungen; das Fehlen mancher lässt sich offenbar kompensieren. Um zu verstehen, wie Lernen gelingt und warum es zuweilen scheitert, müssen wir untersuchen, in welcher Weise Kinder aus Voraussetzungen das machen, worum es uns geht: ihr mathematisches Denken, Wissen und Können. Dieses hat einen eigenständigen Gehalt: Auch Kinder mit Lernschwierigkeiten unterscheiden, vergleichen, abstrahieren, verallgemeinern, ziehen Schlüsse, entwickeln Strategien. *Dabei* müssen wir sie beobachten, befragen, ihnen Aufgaben stellen und analysieren, wie sie diese bearbeiten.

Nichts davon aber geschieht, wenn Kinder beispielsweise in einen Magnetresonanztomographen geschoben werden und sie dort per Knopfdruck anzeigen sollen, welche von zwei auf einem Monitor gezeigten Punktemengen die größere ist, und ähnliches mehr. Natürlich sind neuronale Aktivitäten, die bei solchen Untersuchungen abgebildet werden, Voraussetzungen des Denkens, von richtigen wie auch falschen Gedanken: ohne Hirn kein Rechnen. Die *Qualität* eines mathematischen Gedankens, die beispielsweise darüber entscheidet, ob und wie ein Kind die Aufgabe 6+7 bewältigt, wird im MRT aber nicht sichtbar.

Vor allem: Ob ein Kind etwa zählend rechnet oder nicht, wird offensichtlich nicht von seinem Gehirnorgan determiniert. Das zeigen alle die Kinder, die mit demselben Gehirn zunächst zählend rechnen, dann aber lernen, dass es auch anders geht – auf Basis von Einsichten, die sie in Zahlen und Zahlzusammenhänge gewonnen haben. Welche das sind, bringt man in der Regel recht gut in Erfahrung, indem man die Kinder dazu befragt. Die funktionelle Magnetresonanztomographie hilft uns dabei nicht weiter. Sie modelliert das *organische Substrat* rechnerischen Denkens, aber nicht dessen gedanklichen Inhalt, nicht dessen Qualität. Wir erfahren durch solche Studien viel Neues über Gehirn und Gedächtnis. Meiner Einschätzung nach helfen sie uns aber nicht dabei, zu verstehen, wie Kinder rechnen und Mathematik treiben und warum sich manche dabei so schwer tun.

3. Was Fachdidaktik zum Verstehen und Vorbeugen beitragen kann

Im Vorwort ihres „Handbuchs des Förderns im Mathematikunterricht" halten Lorenz und Radatz fest, es gebe in der Mathematikdidaktik „bisher" – also bis 1993 – „zu Rechenschwierigkeiten nur wenige Forschungsansätze, Theorien und Diagnose- bzw. Fördermodelle." Das habe „vielschichtige Gründe", unter anderem diesen: „Die Interessen der meisten Mathematikdidaktiker richten sich auf andere Themen" (Lorenz u. Radatz 1993, S. 4).

So legitim und wichtig es war und ist, sich mit anderen Themen zu beschäftigen: Die Lage im Jahr 2016 stellt sich doch etwas anders dar; Lorenz und Radatz haben maßgeblich dazu beigetragen. Ich werde in diesem Beitrag gar nicht erst versuchen, alle mir in diesem Gebiet wichtig erscheinenden Arbeiten von FachdidaktikerInnen der letzten zweieinhalb Jahrzehnte zu würdigen. Dafür reicht der Platz nicht, und wenn ich dann doch einen Beitrag ausließe, könnte man meinen, dahinter stecke Missachtung, auch wenn es nur Unwissenheit ist. Ich möchte stattdessen einige Punkte festhalten, über die mir innerhalb unserer Disziplin Einigkeit zu bestehen scheint, und einige ansprechen, wo dies möglicherweise noch nicht der Fall ist.

Zunächst: Mir scheint innerhalb der Fachdidaktik Konsens eben darüber zu herrschen, dass mathematische Lernschwierigkeiten Ausdruck dessen sind, was Kinder aktuell über mathematische Objekte wissen, denken und verstehen und was sie auf dieser Grundlage an Strategien entwickelt haben. Dabei ist es eine Folge der „in der Natur der Mathematik liegenden Lernhierarchie" (Wittmann 2015, S. 199), dass in der Regel drei „größere, zusammenhängende Problembereiche" (Schipper et al. 2011, S. 15) feststellbar sind, wenn Kinder lang und hartnäckig Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen:

- anhaltende Schwierigkeiten, sich vom zählenden Addieren und Subtrahieren zu lösen;
- Defizite im Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems;
- unzureichende Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen, insbesondere zum Multiplizieren und Dividieren.

Um die Zusammenhänge zwischen diesen Bereichen zumindest anzudeuten:

Zählendes Rechnen droht sich dann zu verfestigen, wenn Kinder keine Zusammenhänge zwischen den additiven Grundaufgaben erkennen und nutzen. Eine wichtige Grundlage zum Erkennen und Nutzen solcher Zusammenhänge ist das Denken von Zahlen als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen (Teile-Ganzes-Konzept, vgl. Resnick 1983). In einem tatsächlich schwer zu durchbrechenden Teufelskreis erschwert anhaltendes zählendes Rechnen das Erkennen solcher und weiterer quantitativer Strukturen, so auch das Erkennen der im Dezimalsystem grundlegenden Struktur der Zehnerbündelung (Gerster 2009). Schließlich ist das Denken von Zahlen als Zusammensetzungen im Sinne des Teile-Ganzes-Konzepts auch grundlegend für ein tragfähiges Operationsverständnis der vier Grundrechenarten (vgl. Gerster u. Schultz 2000; Gerster 2009).

Die drei Problembereiche sind also durch Eigenheiten des Faches verbunden, und das Fach sorgt dafür, dass Probleme in diesen drei Bereichen sich in allen darauf aufbauenden Gebieten der Grundschulmathematik – also in fast allen – auswirken müssen. Insofern können wir an den Schwierigkeiten, die wir bei manchen Kindern gehäuft antreffen, „in pointierter Weise [...] beobachten, welche kognitiven Fähigkeiten der Mathematikunterricht fordert“ (Lorenz u. Radatz 1993, S. 29).

Lorenz und Radatz setzen an zuletzt zitierter Stelle aber noch eins drauf, und das hat es in sich: An diesen Schwierigkeiten könne zugleich auch beobachtet werden, „welche methodisch-didaktischen Fallstricke möglich sind, auch wenn ihnen die meisten Schüler nicht zum Opfer fallen“ (ebenda). Die Autoren sprechen hiermit einen weiteren Punkt an, über den mir zwar grundsätzlich gleichfalls Einigkeit zu bestehen scheint, dessen Implikationen aber vielleicht noch nicht ausreichend diskutiert wurden.

Zunächst zu dem, worüber wir uns vermutlich einig sind: Wenn wir nach Gründen forschen, warum manche Kinder früh und dauerhaft Schwierigkeiten im Mathematikunterricht zeigen, dann sollten wir in jedem Fall auch im Unterricht nachsehen. Dieser selbst legt „methodisch-didaktische Fallstricke“ aus, über die manche Kinder dann auch wirklich stolpern.

Ich möchte solche Fallstricke an einem der drei genannten Problembereiche exemplarisch verdeutlichen, dem zählenden Rechnen. Eine Reihe fachdidaktischer Studien macht deutlich, dass Ableiten auf Basis von Einsicht in Zahlstrukturen und in operative Zusammenhänge zur Ablösung vom zählenden Rechnen beiträgt (z.B. Steinberg 1985; Thornton 1978; 1990; Gaidoschik 2010). Das wiederholte Ableiten von additiven Grundaufgaben aus anderen, bereits automatisierten Aufgaben (etwa: 3+4 aus 3+3; 9-8 aus 8+1) fördert die Automatisierung der zunächst abgeleiteten Aufgaben (Gaidoschik 2010). In der Umkehrung heißt das aber: Ein Unterricht, der *nicht* auf die Erarbeitung von Ableitungsstrategien fokussiert, trägt zur Verfestigung des zählenden Rechnens bei. Er tut dies zumindest dadurch, dass er „den Übergang vom […] zählenden

Rechnen zu effektiveren und abstrakten Operationen […] dem spontanen Einsehen der Kinder [überlässt]“ (Probst u. Waniek 2003, S. 77). Im schlimmeren Fall provoziert er zählendes Rechnen sogar, etwa durch die Aufforderung, Rechnungen immer wieder unter Rückgriff auf unstrukturierte Materialien zu lösen, die gar nicht anders als zählend verwendet werden können.

Dass aber genau das zumindest in Österreich nicht nur vereinzelt im Unterricht geschieht, ist eines der wenig erfreulichen zentralen Ergebnisse einer Studie, die ich 2010 zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr veröffentlicht habe. Erfasst wurde dabei eine Zufallsauswahl von 139 Kindern aus 22 Klassen aus ganz Niederösterreich. Befragungen der Lehrkräfte und die Analyse der verwendeten Schulbücher lieferten deutliche Hinweise dafür, dass Ableitungsstrategien, wenn überhaupt, dann nur für den Zehnerübergang thematisiert wurden. Im Zahlenbereich bis 10 herrschte die – von vielen Lehrkräften explizit ausgesprochene – Erwartung, dass die Kinder das zählende Rechnen mit fortgesetzter Übung schon würden sein lassen. Die Übung bestand über weite Strecken im Abarbeiten unstrukturierter Aufgabenpäckchen. Zählend rechnende Kinder üben dabei oft nichts anderes als das zählende Rechnen (vgl. Brownell 1929).

Am Ende des ersten Schuljahres hatte nur etwa ein Drittel der befragten Kinder das zählende Rechnen zumindest weitgehend abgelegt. Das waren mit nur zwei Ausnahmen genau diejenigen, die in den Interviews teils schon zu Schulbeginn, jedenfalls aber Mitte und Ende des Schuljahres wiederholt Ableitungsstrategien gezeigt hatten, auch wenn diese im Unterricht *nicht* erarbeitet worden waren. Auf der anderen Seite rechneten etwa 27 Prozent dieser Kinder am Ende des ersten Schuljahres auch im Zahlenraum bis 10 noch fast durchgehend zählend.

Dass auch in Österreich anderes möglich ist, zeigt eine Folgestudie (Gaidoschik, Fellmann u. Guggenbichler, in Vorb.). Teilgenommen haben acht erste Klassen von Lehrkräften, die sich auf Grundlage einer Fortbildungsmaßnahme vorgenommen hatten, das Ableiten und damit das Kommunizieren über Ableitungsstrategien in den Fokus ihres Unterrichts zu stellen. Interviews mit den Lehrkräften, Unterrichtsbesuche und Dokumentenanalysen lassen den Schluss zu, dass sie das über weite Strecken auch tatsächlich getan haben. Die Kinder wurden Ende des Schuljahres zu denselben Rechenaufgaben interviewt wie jene in der erwähnten Studie 2010. In zwei der acht Klassen war zählendes Rechnen so gut wie gar nicht zu beobachten. Für die anderen Klassen wurden Ende des Schuljahres zwischen 5 und 17 Prozent zählender Lösungen bei Aufgaben im Zahlenraum bis 10 ermittelt. In der Zufallsstichprobe 2010 hatte dieser Anteil 39 Prozent betragen.

Mit einer Auswahl dieser Kinder – je zwei im Klassenvergleich leistungsstarken, leistungsschwachen und durchschnittlichen aus jeder der acht Klassen – haben wir im zweiten und dritten Schuljahr weitere Interviews geführt. Dabei wurden stets auch Additionen und Subtraktionen mit Zehnerüberschreitung im Zahlenraum 100 gefragt (vgl. Gaidoschik, Guggenbichler & Deweis, in Vorb.).

Im Juni des zweiten Schuljahres lag der Anteil zählender Lösungen bei solchen Aufgaben innerhalb dieser Stichprobe bei ca. 3 Prozent. In den zehn zweiten Klassen, aus denen Benz (2005) nach vergleichbaren Kriterien eine Stichprobe von 100 Kindern gezogen hat, erfolgten Ende des zweiten Schuljahres ca. 28 Prozent der Lösungen bei Aufgaben dieses Typs zählend. Der Unterricht dieser Kinder wurde nicht näher untersucht (Benz 2005, S. 320). Solange wir solche Diskrepanzen zwischen einzelnen Klassen feststellen und sehen, dass zählendes Rechnen in manchen Klassen so gut wie gar nicht vorkommt: Sollten wir uns da nicht davor hüten, verfestigtes zählendes Rechnen zum „Symptom einer Rechenschwäche“ zu erklären und neuronale Defizite dahinter zu suchen?

4. Was Fachdidaktik könnte

Vorsicht gegenüber solchen Zuschreibungen ist, wie erwähnt, in unserer Community ohnedies weit verbreitet. Warum aber wird der Begriff „Rechenschwäche“ innerhalb der Fachdidaktik dann nicht gänzlich verworfen? Warum gibt es in fachdidaktischer Literatur das von Meyerhöfer (2011) kritisierte Bemühen um eine didaktische Relativierung dieses Begriffs, der damit zugleich aufrechterhalten wird, wenn auch unter Anführungsstrichen, so wie ich das im Titel dieses Beitrags in berechnender Weise selbst getan habe? Warum verzichten wir als Community nicht schlicht und einfach auf diesen Begriff und vertreten offensiv, etwa gegenüber Schulbehörden, aber auch Lehrkräften, dass er ganz und gar untauglich ist?

Er ist untauglich für pädagogische Zwecke. Betroffenen Kindern kann er Chancenlosigkeit gegenüber dieser „Krankheit“ suggerieren, je nach Geschmack auch als Ausrede dafür dienen, warum eine Befassung mit Mathematik ohnedies zwecklos sei. Eltern kann er auf die Idee bringen, auf Ausnahmeregelungen für ihr Kind zu pochen, im Extremfall auf *Befreiung von* statt auf *Befähigung zur* Mathematik. Das ist in einem auf Selektion angelegten Schulsystem nachvollziehbar, übersieht aber, dass mathematische Unfähigkeit auch außerhalb der Schule von Schaden ist. Lehrkräfte können meinen, sie wären unzuständig oder nur bedingt zuständig für solche „Sonderfälle“. Und doch sitzen diese Kinder als *Normalfälle* in unseren Klassen, und es gibt starke Hinweise dafür, dass guter Unterricht viel dazu beitragen kann, dass auch Kinder mit ungünstigen Lernvoraussetzungen zentrale Inhalte der Grundschulmathematik verstehen und beherrschen lernen.

Der Begriff ist klarerweise auch untauglich für fachdidaktische Forschung. Wenn wir mehr darüber wissen wollen, warum so viele Kinder daran scheitern, vom zählenden Rechnen wegzukommen, das Dezimalsystem zu verstehen, Rechnungen auf die Wirklichkeit zu beziehen, und leider noch in einigem mehr, dann sind eben genau das unsere Forschungsthemen. Dieses Scheitern geschieht wesentlich im Unterricht. Daher müssen wir das mituntersuchen, was im Unterricht an Lernchancen geboten oder verwehrt wird.

Diese Konzentration auf den Unterricht ist auch aus praktischer Perspektive geboten, denn hier bestehen für unsere Profession Chancen für Veränderungen.

An sozialen Ungleichheiten, damit zusammenhängenden Ungleichheiten frühkindlicher Förderung, gar an der genetischen Ausstattung der Kinder können wir und die Lehrkräfte, die wir aus- und fortbilden, nichts ändern. Am Unterricht vielleicht.

Dazu brauchen wir a) überzeugende Konzepte dafür, welche Unterrichtsmaßnahmen die bekannten Schwierigkeiten vieler Kinder am besten gar nicht erst entstehen lassen oder zu deren frühen Überwindung beitragen. Bezüglich der Ablösung vom zählenden Rechnen sind wir beim Entwurf solcher Designs meiner Einschätzung nach recht weit. Bezüglich des Aufbaus von Verständnis für das Dezimalsystem scheint mir hier noch viel zu tun (vgl. Gaidoschik 2015). In jedem Fall liegt noch sehr viel Arbeit vor uns, was „empirische Forschung zweiter Art" (vgl. Wittmann 2013) betrifft – also den Versuch, die Wirksamkeit solcher Unterrichtsdesigns kontrolliert unter Klassenbedingungen zu erproben und weiterzuentwickeln.

Wir brauchen b) intensiviertes gemeinsames Nachdenken und Forschung zur Frage, wie wir solche Konzepte noch besser als bisher in der LehrerInnenausbildung verankern. Da sehe ich große Fortschritte in den letzten Jahren. „Diagnose und Förderung" ist vielerorts ein verpflichtender Bestandteil der Curricula geworden. Vielleicht gelingt die Umbenennung in „Lernstanderfassung und Lernprozessanalyse zwecks gezielter Förderung"?

Und wir brauchen c) auch intensiviertes gemeinsames Nachdenken und weitere Forschung zur Frage, wie wir durch Fort- und Weiterbildung erreichen, dass solche Konzepte auch zu jenen gelangen, deren Ausbildung weit zurückliegt und die oft genug gar keine nennenswerte fachliche und fachdidaktische Ausbildung genossen haben. Auch da ist in den letzten Jahren vieles passiert, in der Forschung (z.B. Schulz 2014; Lesemann 2016) wie in der Bündelung von Kräften für die Fortbildung in Initiativen wie PIK-AS, „Mathe sicher können" und natürlich im DZLM.

Was wir bei all dem nicht brauchen, ist das Konstrukt „Rechenschwäche".

5. Eine Grenzüberschreitung zum Schluss

Zuletzt noch: Eine weitere wichtige Aufgabe der Fachdidaktik sehe ich darin, entschiedener als bisher öffentlich zu kommentieren, was seitens anderer Disziplinen zu mathematischen Lernschwierigkeiten publiziert wird. Denn darunter sind auch Förderprogramme, die wohlbegründeten Intentionen und Überzeugungen unserer Disziplin zuwiderlaufen.

Insgesamt wartet jede Menge Arbeit auf uns. Klar ist aber, dass die Finanzierung und das Schaffen von Rahmenbedingungen für die Umsetzung von Aus- und Fortbildungskonzepten für Lehrkräfte *nicht* in den Bereich der Fachdidaktik fallen. Auch die Ermöglichung von früher Kleingruppen-, wenn nötig Einzelförderung im schulischen Bereich ist keine wissenschaftliche, sondern eine politische Aufgabe. Solches wird ergänzend zu verbessertem Unterricht vermutlich notwendig bleiben, wenn wir das frühe Scheitern vieler Kinder an der Grundschulmathematik verhindern wollen.

Hier liegt also eine Grenze. Und nun die Überschreitung: Was als Aufgabe zwar nicht der Fachdidaktik, aber von FachdidaktikerInnen gesehen werden kann und von mir jedenfalls gesehen wird, ist: Wir sollten die Politik beharrlich darauf aufmerksam machen, dass die genannten Maßnahmen, die allesamt natürlich viel Geld kosten, dringend geboten sind.

Sie sind geboten, wenn man nicht akzeptieren will, dass beträchtliche Anteile jedes Jahrgangs die Pflichtschule mit massiven Schwächen im Rechnen verlassen und, gravierender, mit massiven Schwächen im elementarsten mathematischen Denken. Wer dies in Zeitabständen, die von PISA und Co. diktiert werden, öffentlich beklagt, solche Maßnahmen aber für verzichtbar erklärt, ist ahnungslos, oder ein Heuchler, oder beides.

Henning KÖRNER, Oldenburg

Vom Studium ins Referendariat: Kontinuität oder Diskontinuität?

Es ist eine fundamentale Aufgabe für den Lehrer, das intellektuelle Leben, in das er die Schüler einführen will oder soll erst einmal selbst zu leben. (A. Kirsch)

Ein Blick in den Unterricht

Szene 1: Klasse 7, Stochastik, Unterrichtsgespräch

Was ist wahrscheinlicher: Augensumme 2 oder 3 beim Doppelwurf eines Würfels? (Kontext: Siedler von Catan)

Felix:	Bei (1/2) gibt es mehr Möglichkeiten als bei (1/1)
Jonas:	Ist egal: „1“ hat Wahrscheinlichkeit 1/6 und „2“ auch.
Rebekka:	Feld B ist besser, weil: Wenn ich weiterbauen will und da eine Straße haben möchte...
Till:	Egal, (1/1) ist dasselbe wie (1/2).
Lehrer:	Was machen wir nun?
Saskia:	Ist Laplace, kann man irgendwie ausrechnen.
Max:	Ausprobieren.

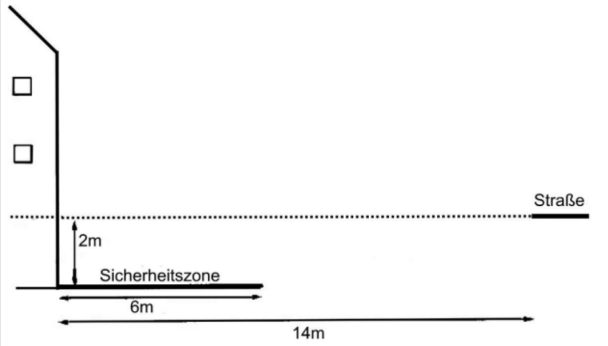
Es wird gewürfelt: Kumulierte Häufigkeiten:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
15	19	32	52	65	73	58	55	42	28	11

Daniel:	Ich würde auch in A bauen, weil das ja fast egal ist.
Helena:	Ich würde noch mehrmals würfeln, weil 4 mehr ist ja von 450 nicht viel.
Gabriel:	Bei einem anderen Experiment hätten wir wieder ein anderes Ergebnis.
Hanna:	Ist doch alles Zufall, kann man nicht so genau sagen.
Lisa:	Bei „6“ gibts mehr Möglichkeiten...
Christoph:	Mit zwei Würfeln ist kein Laplace-Versuch.
Joana:	Ich würde das mit den relativen Häufigkeiten machen, also so viel Möglichkeiten wie es sind und so viel wie es gibt...

Szene 2: Q-Phase, Analysis, Gruppenarbeit

Bestimmung einer Einfahrt in eine Garage.



Lösungsvarianten:

(1)	Geradlinige Verbindung, Bestimmung mit		
	(a) Lineare Regression	(b) LGS mit GTR („rref“)	(c) $y = \frac{2}{8}x\ldots$
(2)	Kubische Regression, Bestimmung mit		
	(a) Setzen von Punkten: $(-4\,|\,-1); (4\,|\,1); (0\,|\,0)$. Weitere Punkte werden ‚ausgelesen’: $(1\,|\,0{,}1); (3\,|\,0{,}9); (4{,}5\,|\,1)$.		
	(b) $f(-4) = -1;\ f(4) = 1;\ f'(-4) = 0$; Lösung mit LGS		
	(c) $f(-4) = -1;\ f(4) = 1;\ f(0) = 0;\ f''(0) = 0$; Ansatz: Polynom vom Grad 3		

Szene 3: Klasse 10, Differenzialrechnung, Partnerarbeit
Bestimme die Ableitung von $f(x) = 6x^3$
Zur Verfügung steht ein GTR mit der Möglichkeit, die Sekantensteigungsfunktion $msek(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ grafisch-tabellarisch auszuwerten.

S.: *An der Tabelle erkennen wir nichts.*
S. schauen Grafik an: *Ist vielleicht eine Parabel. Probieren wir mal* $f(x) = 5x^2$. *Oh, zu weit.*
Die Schülerinnen probieren es zunächst mit $f(x) = 3x^2$, merken dann, dass das ‚falsch herum’ ist und tasten sich vorsichtig mit $f(x) = 6x^2, f(x) = 7x^2\ldots$ weiter. Zwischenzeitlich wird auch die Skalierung so geändert, dass mehr zu sehen ist. Sie landen schließlich bei $f(x) = 17x^2$.
Das passt super. Aber noch nicht richtig. Ist das jetzt, weil msek nur ‚ungefähr’ ist oder weil unsere Ableitung nur ungefähr trifft?
Es wird $f(x) = 18x^2$ gezeichnet. *Das ist es!!!*

Riesige Freude, aber: *Muss man da immer so lange probieren? Geht das nicht anders?*
L: *Dann probiert doch mal* $f(x) = x^2 + 4$ *mit der h-Methode.*
Die beiden Schülerinnen versuchen es:
$\frac{(x+h)^2 + 4 - x^2 + 4}{h}$ ... *Ist nicht* $(x+h)^2 = x^2 + h^2$? ... Es kommt zum Stillstand. *Das ist schwer, obwohl wir sowas schon einmal gemacht haben.*
L: Dann ist Probieren vielleicht doch ganz gut?
Ja, man fühlt sich dann richtig wie ein Forscher!

In Szene 1 fließen unterschiedliche, natürlich oft nur vage geäußerte Wahrscheinlichkeitsmodelle, Fehl- und Grundvorstellungen zu Zufallsprozessen, aber auch unterschiedlich verfügbares und nutzbar gemachtes Vorwissen der Schülerinnen und Schüler in ein dichtes Unterrichtsgespräch ein. Im Idealfall müssen Lehrkräfte entsprechend Fäden aufnehmen, in das Unterrichtsgeschehen integrieren und wertschätzend honorieren und kritisieren und dies alles in sehr kurzer Zeit.

In Szene 2 müssen einerseits unterschiedliche fachliche Implikationen der Lösungen antzipiert bzw. aufgenommen werden (Regression vs. Interpolation, Über- Unterbestimmstheit etc.), anderseits auch Einschätzungen bezüglich der Adäquatheit von gewählten Methoden getroffen werden: Eine Gerade durch zwei Punkte mit Regression ist unsinnig auch wenn numerisch korrekt.

Szene 3 wirft ein Licht auf Kompetenzvorstellungen und erzwingt ein hohes Maß an Sensibilität gegenüber unterschiedlicher Möglichkeiten von Schülerinnen und Schülern. Ein mehr fachwissenschaftlich orientierter Blick mag die fehlende Termumformungskompetenz beklagen, ein auf Erkenntnisgewinnung ausgerichteter prozessbezogener Blick freut sich über das für diese Schülerinnen seltene Erlebnis eigenen Gelingens und Findens eines mathematischen Sachverhalts.

Szene 2 und Szene 3 zeigen darüberhinaus eindrücklich, welches didaktische Potential in der Benutzung digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht steckt.

Die Szenen zeigen, dass Lehrkräfte für schülerbezogenen, kognitiv anregenden Unterricht im Wesentlichen zwei Dinge benötigen:

1. Ein differenziertes, vernetzendes und synthetisierendes spezifisches Fachwissen, das es ermöglicht, Schülerbeiträge in ein zusammenhängendes Ganzes einzuordnen und damit entsprechend wertzuschätzen,

2. eine personale Stabilität für einen produktiven Umgang mit fachbezogener Heterogenität, damit diese im Idealfall nicht als ‚Bedrohung', sondern Chance und Freude erlebt werden kann.

In eine ähnliche Richtung argumentieren bedeutsame Ausbilder der zweiten Phase. So weist Günter Steinberg auf die Abhängigkeit erfolgreichen Unterrichtens von der Persönlichkeitsstruktur der Lehrkraft hin [Steinberg (1986)], Günter Schmidt auf das Problem, dass meist die breitere Basis des eigenen Erlebens und der daraus erwachsenen Einstellungen und Kompetenzen fehlen [Schmidt (1994)] und Jörg Meyer auf die konstitutive Differenz von fachdidaktisch sinnvollem Unterrichten und Prinzipien fachwissenschaftlicher Ausbildung [Meyer (2005)].

Es muss hervorgehoben werden: Die allgemein geforderte Schülerorientierung auf Basis mehr oder weniger stark konstruktivistisch ausgeprägter Lerntheorien ist nur über ein fachbezogen adäquates Handeln zu erreichen, das von mathematikspezifischen Kognitionsprozessen in gleicher Weise etwas versteht (Heuristik) wie von fachimmanenten Zusammenhängen (innermathematisches Gefüge) und Bezügen des Faches zur übrigen Welt (Modellieren). Es ist kein Zufall, dass hier die drei Winterschen Grunderfahrungen ihren Auftritt haben.

Folgerungen für die fachliche und fachdidaktische Ausbildung in der ersten Phase

Schon die Expertise von Blum/Henn von 2003 (Blum/Henn (2003)] forderte, dass für Lehramtsstudierende exploratives und heuristisches Vorgehen im Fach von zentraler Bedeutung sind, dass Mathematik nicht als Fertigprodukt, sondern als durch Eigenaktivitäten zu Erschließendes erfahren werden muss. Ergänzt werden müssen Veranstaltungen, die

- Überblickswissen über mathematische Teilgebiete mit Anschluss an Schulstoff bieten,

- Verzahnungen von Fachwissenschaft und Schulstoff leisten.

Das Projekt „Mathematik Neu Denken“ setzt diese und weitere Forderungen so um, dass hier Kontinuität zur zweiten Phase entsteht [Beutelspacher et al. (2011)]. Leider blieb diese Projekt bisher Singulariät, es herrscht wohl weiterhin eher eine schon von Wagenschein beschriebene „Entpädagogisierung“ des Fachstudiums vor, die teilweise zu verheerenden Entfremdungsprozessen vom Fachlichen führt, die konterkarierend für produktives Unterrichten von Mathematik sind.

Ein Blick in universitäre Veranstaltungen soll zeigen, was fachlich sinnvoll (Szene 4) und problematisch (Szene 5) erscheint.

Szene 4: Fachliches Seminar im Masterstudium

Problem: Auf welcher Kurve bewegt sich der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden eines Dreiecks ABC, wenn C parallel zu AB verschoben wird?

Ein Gruppe von Studentinnen forscht weit über die Frage hinaus, in dem sie das Problem sukzessive verallgemeinert (beliebige Punkte A,B und C, Variation der Bewegung von C) und erlebt, dass Verallgemeinerungen strukturell einfacher als Beispiele sein können. Sie schließen ihre Arbeit ab mit: *Wir kamen uns vor wie Forscherinnen!*

Szene 5: Fachdidaktisches Seminar im Masterstudium

Thema: Gleichungen und „Term-Tabelle-Graph“

Aufgabe an Sudierende: Löse $20 - 2x = 20 \cdot 0{,}5^x$

Alle Studierenden versuchen es 7-8 Minuten lang mit Äquivalenzumformungen, manche erhalten $x = 0$, erst ganz am Schluss versucht ein Student eine grafische Darstellung.

Man vergleiche Szene 3 und Szene 4 auf dem Hintergrund des Zitats von Arnold Kirsch. Fachausbildung bedarf mehr eigentätiger, auch phänomenorientierter, Aneignungsprozesse, sie ist zu häufig, mindestens in der Wahrnehmung Studierender, allein von Strategien zur Stoffbewältigung geprägt.

Eine Algebravorlesung, eventuell mit Galoistheorie, ist meist nicht verpflichtend (Lösungsformeln für rationale Gleichungen), das Problem, transzendente Gleichungen „per Formel“ zu lösen, taucht ansonsten sicher an manchen Stellen des Fachstudiums auf, gehört aber kaum zum Kern und damit nicht zum gesicherten Wissensbestand. Fachdidaktische Ausbildung bedarf fachlicher Bezüge über Schulstoff hinaus und muss umgekehrt diese Bezüge aktiv herstellen und pflegen.

Es sollte Lehrveranstaltungen zu Inhalten geben, die notwendiges Hintergrundwissen zum Schulstoff darstellen. Hierzu zählt sicherlich grundlegendes Wissen und Können in Algebra und Funktionentheorie. Ziel müssen tragfähige Grundvorstellungen zu den zentralen Begriffen sowie Basiskompetenzen mit Vernetzungen zu anderen Teilgebieten sein.

Es gibt schulrelevante Inhalte, die im fachwissenschaftlichen Gefüge zu verschiedenen Teildisziplinen gehören und entsprechend disparat auftreten bzw. überhaupt nicht zum Pflichtkanon und zum Wissenstand angehender Lehrkräfte gehören. Es sollte Lehrveranstaltungen geben, die diese schulbezogene Gefüge aufnehmen und weiterführen. Beispiele für solche Inhalte sind: Krümmung, Kegelschnitte, Kurven in Parameterdarstellung, Näherungsverfahren, Splines/Beziérkurven. Es ist vermutlich kein Zufall, dass bei all diesen Themen digitale Werkzeuge eine prominente Rolle spielen können und sollten. Ausführlicheres zu spezifischen wünschenswerten mathematischen Inhalten im Fachstudium für Lehramtsstudierende findet man in [Körner (2015)].

Zwischenbemerkung:

Es wird hier bewusst keine Zuordnung der Forderungen und Wünsche an Fach oder Fachdidaktik gemacht, sondern es werden allgemein Wünsche so an die erste Phase formuliert, dass ein Kontinuum der Ausbildungsphasen entstehen kann.

Am Beispiel der Analysis soll das Beziehungsgefüge aus fachwissenschaftlicher, fachdidaktischer und dann schulpraktischer Perspektive aufgezeigt werden.

(1) Standardvorlesung: Kern: Arithmetisierung/Topologische Weitungen
Mengen → Grenzwerte/Stetigkeit → Differentialrech. → Integralrech.
(2) Problementwicklung (historisch): Kern: Das Infinitesimale
Flächen (Archimedes) → Ableitung/Integral (Newton/Leibniz) → Grenzwerte/Stetigkeit (Cauchy/Weierstrass) → Mengen (Cantor)
(3) Schule: Kern: Grundvorstellungen und algebraische Produkte
Änderungsrate, Steigung, Fläche → Ableitung (vom Bestand zur Änderung) → Integral (von der Änderung zum Bestand)

Das Erfassen der deduktiven Struktur der Analysis in ihrem jetzigen Entwicklungsstand gehört sicher zur wichtigen Erfahrung von Lehramtsstudierenden, nicht zuletzt um auch die synthetisierende Kraft solcher Theoriebildungen zu erleben. Ein alleiniger Fokus auf diese Wissensformen und Aneignungsweisen bleibt für die zukünftige Profession des Unterrichtens allerdings meist leer, wenn sie unverbunden mit problemorientierten und historischen Prozessen bleibt. Die Kenntnis solcher Prozesse schafft dann Anknüpfungspunkte für fachdidaktische Reflexionen, die den didaktischen Kern (fundamentale Ideen etc.), Vernetzungen in horizontaler und vertikaler Richtung und kognitionsspezifische Aspekte thematisieren. Hier auf eine ‚natürliche' Fähigkeit der Studierenden zur Verknüpfung zu hoffen, ist naiv, es müssen explizit solche Bezüge hergestellt werden. Es ist gerade ein konstitutives Problem, dass Studierende oft keine belastbaren, tragfähigen Bezüge zwischen ihrer Fachausbildung und der fachdidaktischen Ausbildung herstellen können. Die so angebahnte Kontinuität muss dann im Studienseminar fortgesetzt und ausgebaut werden, indem hier dann konsequent eine Ausrichtung auf das komplexe Zusammenwirken der unterrichtsprägenden Komponenten stattfindet; zu den fachlichen und fachdidaktischen Aspekten treten Lerngruppenspezifität, personale Performanz und Unterrichtsorganisation.

Es verwundert nicht, dass spezifische Aspekte des Fachlichen gemeinsame Klammer und ständiger Bezugspunkt der an der Lehrerausbildung beteiligten Disziplinen und Organisationen sind. Das Erleben des je Spezifischen, immer Professionsbezogenen, aber auch jederzeit über unmittelbare Verwertung Hinausgehende, schafft Kontinuitätserleben und sinnstiftende Zusammenhänge auf Seite der Lehramtsstudierenden. Hier liegt der Kern der fachdidaktischen Ausbildung, wenn man als Bezugspunkt die anvisierte Berufsausübung nimmt. Es ist naheliegend, dass dazu eine personale und sachbezogene Zusammenarbeit zwischen Hochschule (Forschung) und Schule (Praxis) produktiv ist. Dies setzt aber voraus, dass die Fachdidaktik als wesentlichen Bezug auch das Berufsfeld wahrnimmt und den Selbstbezug als Forschungsdisziplin als Mittel sieht und weniger als Selbstzweck. Nun ist es eine wissenschaftshistorische Tatsache, dass zunehmende Verwissenschaftlichung Selbstreferentialität befördert und vielleicht auch notwendig macht und dann zu Entfremdungsprozessen von Praxis führt. Hier liegt aber tatsächlich ein konstitutiver Unterschied von Fachwissenschaft Mathematik und Fachdidaktik vor. Während das Mathematikstudium sich gerade dadurch auszeichnet, dass es nicht auf einen bestimmten Beruf vorbereitet sondern allgemeine, dann eben auch abstrakte, Dispositionen, Fähigkeiten und Fertigkeiten erzeugt, die breite Verwendbarkeit garantieren, liegt der Fall bei der Fachdidatik genau komplementär dazu, ihr alleiniger Bezug ist (besserer) Mathematikunterricht. Damit ist ein rückgekoppelter Theorie-Praxisbezug konstitutiv für gelingende Fachdidaktik.

Eine zentrale Aufgabe der Fachdidaktik liegt dann in der Verknüpfung von Stoffdidaktik mit mehr bezugswissenschaftlich orientierter Forschung zur Kompetenzentwicklung [Bruder (2015), S. 585]. Die Frage „Hat Stoffdidaktik noch Zukunft?“ [Reichel (1995)] ist mit Blick aus der Praxis absurd, weil es ständig stofflich bezogene Fragen in der Praxis gibt, die gerade nicht allein aus der Praxis heraus beantwortet werden können, aber in Lehrerzimmern, Fortbildungen und Kommissionen in starker Diskussion stehen. Beispiele dafür sind die Rolle der Geometrie, die alte Frage notwendiger händischer Fähigkeiten und Fertigkeiten bei Benutzung digitaler Werkzeuge, Algebra mit CAS, das Verhältnis von Analytischer Geometrie und Linearer Algebra und viele mehr. Mindestens aus der Sicht der Praxis ist der alleinige disziplinübergreifende Forschungsbezug mit implizit geäußerten Ausschluss der Praxis stark zu kritisieren [Bruder (2015), S. 585]. Kontinuität und Effizienz bezogen auf Unterrichtsqualität wird gerade auch dadurch erreicht, dass Forschungsfragen aus reflektierter Praxis gesucht und aufgenommen werden, was ständigen Dialog mit ihr voraussetzt. Eine für die zweite Phase essentiell wichtige gute stoffdidaktische Lehre setzt im Sinne der Einheit von Forschung und Lehre natürlich entsprechende Forschungen voraus. Aus der Sicht der Praxis muss dann gefragt werden dürfen: Wie kann eine zunehmend stark im sozialwissenschaftlichen Paradigma verankerte Fachdidaktik stoffdidaktische Lehrqualität generieren und garantieren?

Literatur

Beutelspacher, A. et al.(2011). Mathematik Neu Denken. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Blum, W./Henn, H. W.. Zur Rolle der Fachdidaktik in der universitären Gymnasiallehrerausbildung, MNU 56/2, S.68-76.

Bruder, R. et al. (Hrsg.) (2015). Handbuch der Mathematikdidaktik. Heidelberg: Springer.

Körner, H. (2015). Mathematik in Schule und Hochschule – welche Mathematik für Lehramtsstudierende? In Roth, J. et al. (Hrsg.), Übergänge konstruktiv gestalten. Wiesbaden: Springer

Meyer, J. (2009). Inhalte der 1. Phase aus dem Blick der 2. Phase der Lehrerausbildung. In MNU (Hrsg.), 14. Fachleitertagung Mathematik - Mathematikunterricht im Aufbruch. Neuss: Seeberger.

Schmidt, G. (1994). Die verschiedenen Phasen der Lehreraus- und –fortbildung – Gibt es eine Gesamtkonzeption? In MNU (Hrsg.), Schriften des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e.V. – Heft 55, Münster.

Steinberg, G. (1986). Sehr subjektive Gedanken zur Ausbildung von Referendaren im Fach Mathematik, ZdM 2/1986, S.43-47.

Jürg KRAMER, Humboldt-Universität zu Berlin

Variationen zum Satz des Pythagoras: Mathematik an der Schnittstelle Schule – Hochschule

1. Einleitung

Das Thema „Mathematik an der Schnittstelle Schule – Hochschule" kann von verschiedenster Seite her beleuchtet werden. Ganz allgemein könnten wir über die Doppelte Diskontinuität nach Felix Klein, zumindest die erste der beiden Diskontinuitäten, reflektieren. Insbesondere wäre auch ein Beitrag zu den Bildungsstandards Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife zur Bewältigung des Übergangs von der Sekundarstufe II an die Hochschule im Rahmen eines mathematik-affinen Studiums denkbar (siehe dazu beispielsweise Beiträge in [1]). In „politischer" Hinsicht könnten wir an dieser Stelle auch über die Arbeit der Gemeinsamen Kommission „Übergang Schule – Hochschule" der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV), der Gesellschaft der Didaktik der Mathematik (GDM) und des Vereins zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts (MNU), insbesondere aus Sicht der DMV, berichten (siehe dazu u.a. [2], [4]).

Demgegenüber haben wir uns entschlossen, uns in unserem Hauptvortrag dem Thema „Mathematik an der Schnittstelle Schule – Hochschule" aus mathematisch inhaltlicher Sicht zu widmen. Als Ausgangspunkt haben wir dafür den Satz des Pythagoras und seine Umkehrung gewählt, um dabei aufzuzeigen, welches Potential dieses Thema bei sukzessiver Variation auch für die Hochschule hat.

Bekanntlich besagt der Satz des Pythagoras, dass für ein rechtwinkliges Dreieck mit den beiden Katheten a, b und der Hypotenuse c die Beziehung

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1}$$

besteht. Die Umkehrung des Satzes bedeutet, dass ein Dreieck, dessen Seiten a, b, c die Relation (1) erfüllen, ein rechtwinkliges sein muss. Soviel zur Ausgangslage.

2. Variation: Pythagoreische Zahlentripel

Eine erste Variation zu diesem Schulthema ist die Aufgabe, alle rechtwinkligen Dreiecke zu finden, deren Seiten a, b, c (positiv) *ganzzahlig* sind. Wir nennen ein solches Tripel natürlicher Zahlen (a, b, c) ein *pythagoreisches Zahlentripel.*

Um alle pythagoreischen Zahlentripel zu entdecken, gilt es alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$X^2 + Y^2 = Z^2$$

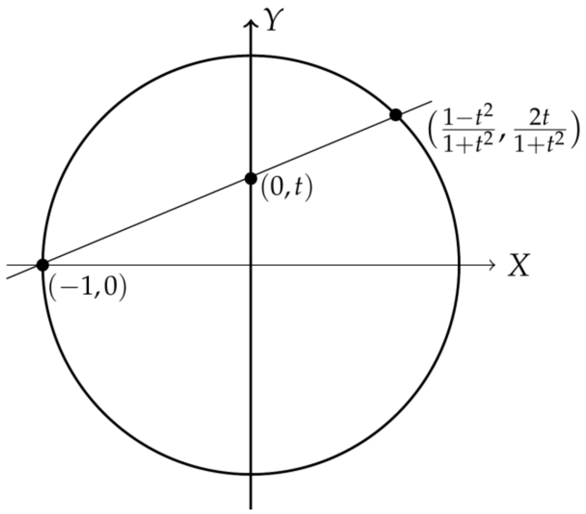
zu finden. Dies ist gleichbedeutend damit, alle Punkte mit rationalen Koordinaten, kurz alle rationalen Punkte, auf dem Einheitskreis mit Zentrum im Ursprung des X, Y-Koordinatensystems, der durch die Gleichung

$$X^2 + Y^2 = 1$$

beschrieben wird, zu ermitteln. Dazu gehen wir folgt vor: Zunächst ist uns beispielsweise der rationale Punkt $P = (-1{,}0)$ auf dem Einheitskreis bekannt. Diesen verbinden wir mit einem beliebigen rationalen Punkt $(0, t)$ auf der Y-Achse; konstruktionsgemäß erhalten wir eine Gerade mit rationaler Steigung, welche den Einheitskreis in einem weiteren Punkt (x, y) mit den leicht zu berechnenden, ebenfalls rationalen Koordinaten

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{2}$$

schneidet. Wir überlegen uns umgekehrt, dass die Verbindungsgerade eines rationalen Punktes auf dem Einheitskreis mit dem Punkt P die Y-Achse in einem rationalen Punkt schneidet.



Mithin gewinnen wir die Erkenntnis, dass die Existenz des einen rationalen Punktes P auf dem Einheitskreis Anlass zu *unendlich vielen* rationalen Punkten auf dem Einheitskreis gibt, die alle in der Form (2) mit rationalem t gegeben sind. Indem wir $t = n/m \; (m, n \in \mathbb{N}, m > n > 0)$ wählen, erhalten wir das Ergebnis, dass es unendlich viele pythagoreische Zahlentripel (a, b, c) gibt, welche alle durch

$$a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2 \; (m, n \in \mathbb{N}, m > n > 0)$$

festgelegt sind.

3. Variation: Kongruenzzahlproblem

Das *Kongruenzzahlproblem* lässt sich einfach formulieren: Eine positive natürliche Zahl F sei vorgelegt. Gesucht wird dann nach einem rechtwinkligen Dreieck mit *rationalen* Seiten a, b, c und Flächeninhalt F. Das heißt, wir suchen positive rationale Zahlen a, b, c, welche den Gleichungen

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ und } \frac{a \cdot b}{2} = F \qquad (3)$$

genügen. Falls für ein gegebenes F ein entsprechendes rechtwinkliges Dreieck existiert, so wird F *Kongruenzzahl* genannt. Die Frage, ob eine positive natürliche Zahl F Kongruenzzahl ist oder nicht, heißt Kongruenzzahlproblem. Beispielsweise ist $F = 6$ eine Kongruenzzahl, denn das pythagoreische Zahlentripel $(3,4,5)$ beschreibt ein rechtwinkliges Dreieck mit sogar ganzzahligen Seiten und Flächeninhalt 6. Das Kongruenzzahlproblem wird erstmals um ca. 972 in einem arabischen Manuskript erwähnt.

Aber bereits die Frage, ob die natürlichen Zahlen 1,2,3 oder 5 Kongruenzzahlen sind, lässt sich offenbar nicht auf Anhieb beantworten. Um zu ergründen, ob beispielsweise $F = 2$ eine Kongruenzzahl ist, setzen wir die zweite Gleichung in (3) in die erstere ein und erhalten nach einfacher Umformung die Frage nach der rationalen Lösbarkeit der Gleichung

$$a^4 + 2^4 = (ac)^2$$

in a und c. Indem wir beide Seiten der vorhergehenden Gleichung auf den gleichen Nenner bringen, stoßen wir auf die Frage, ob die Gleichung

$$x^4 + y^4 = z^2$$

in positiven natürlichen Zahlen x, y, z lösbar ist. Nach dem großen Fermatschen Satz zum Exponenten 4 ist das aber nicht möglich, d.h. $F = 2$ ist keine Kongruenzzahl. Der entsprechende Beweis ist nicht offensichtlich; er verwendet die Methode des unendlichen Abstiegs nach Pierre de Fermat. Wir erinnern an dieser Stelle daran, dass der große Fermatsche Satz für beliebige, positiv ganzzahlige Exponenten erst im Jahr 1995 durch Andrew Wiles, also mehr als 350 Jahre nachdem Fermat seine berühmte Vermutung formuliert hatte, vollständig bewiesen werden konnte (siehe dazu [7]).

Um das Kongruenzzahlproblem für eine beliebige natürliche Zahl$F$ in den Griff zu bekommen, fassen wir die beiden Bedingungsgleichungen (3) wie folgt in *einer* Gleichung zusammen. Wir betrachten einerseits die Menge

$$P_F = \{a, b, c \in \mathbb{Q}_{\neq 0} \mid a^2 + b^2 = c^2, a \cdot b = 2 \cdot F\};$$

offensichtlich ist F genau dann Kongruenzzahl, wenn $P_F \neq \emptyset$gilt. Andererseits definieren wir die kubische Kurve

$$C_F: Y^2 = X^3 - F^2 X = X(X - F)(X + F).$$

Die Menge P_F und die kubische Kurve C_F, genauer die Menge der rationalen Punkte C_F, werden nun durch die Abbildung

$$\varphi\colon P_F \to \{(x,y) \in C_F(\mathbb{Q}) | y \neq 0\},$$

gegeben durch die Zuordnung

$$(a,b,c) \to \left(x = -\frac{F \cdot b}{a+c}, y = \frac{2 \cdot F^2}{a+c}\right),$$

miteinander in Beziehung gebracht. Die Tatsache, dass das Tripel (a,b,c) die beiden Gleichungen (3) erfüllt, belegt die Wohldefiniertheit der Abbildung φ. Überraschend ist jetzt die Feststellung, dass die Abbildung φ sogar surjektiv ist. Liegt nämlich ein rationaler Punkt (x,y) der kubischen Kurve C_F mit $y \neq 0$ vor, so erhalten wir als dessen Urbild in P_F das rechtwinklige Dreieck mit den rationalen Seiten

$$a = \frac{x^2 - F^2}{y}, b = \frac{2Fx}{y}, c = \frac{x^2 + F^2}{y},$$

dessen Flächeninhalt wegen $y^2 = x^3 - F^2 x$ in der Tat gleich F ist. Zusammenfassend erhalten wir also die Äquivalenz

$$F \text{ Kongruenzzahl} \Leftrightarrow \{(x,y) \in C_F(\mathbb{Q}) | y \neq 0\} \neq \emptyset, \qquad (4)$$

womit wir auf die Untersuchung rationaler Punkte auf kubischen Kurven geführt sind.

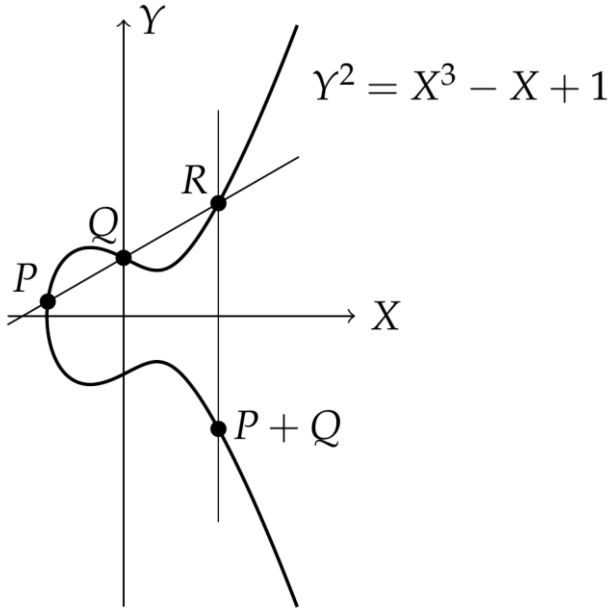
4. Variation: Kubische Kurven

Es sei also C eine Kurve der X,Y-Ebene, die durch die Gleichung $P(X,Y) = 0$ gegeben ist, wobei $P = P(X,Y)$ ein Polynom vom Grad 3 ist. Wir nehmen an, dass die Menge der rationalen Punkte C($\mathbb{Q}$) nicht-leer ist und somit mindestens ein rationaler Punkt existiert, den wir als den unendlichen fernen Punkt von C festlegen. Unter diesen Voraussetzungen lässt sich zeigen, dass die Kurve C durch die Weierstraß'sche Normalform

$$Y^2 = X^3 + aX^2 + bX + c$$

mit $a,b,c \in \mathbb{Z}$ definiert werden kann. Indem wir überdies annehmen, dass das kubische Polynom rechter Hand keine mehrfachen Nullstellen besitzt, nennt man C eine elliptische Kurve; für Literatur zu elliptischen Kurven verweisen wir beispielsweise auf das Buch [5]. Die Kurven C_F, die durch das Kongruenzzahlproblem gewonnen wurden, sind beispielsweise elliptische Kurven. Es ist also naheliegend, die Struktur der rationalen Punkte auf elliptischen Kurven zu untersuchen.

Dazu bemerken wir, dass die Menge $C(\mathbb{Q})$ der rationalen Punkte auf C die Struktur einer abelschen Gruppe besitzt. Die Summe $P + Q$ zweier rationaler Punkte $P, Q \in C(\mathbb{Q})$ ist dabei durch den folgenden rationalen Punkt gegeben: Man verbinde P und Q durch eine Gerade L. Diese hat rationale Steigung und schneidet die Kubik C deshalb in einem weiteren rationalen Punkt R. Indem wir R an der X-Achse spiegeln, erhalten wir den rationalen Punkt $P + Q \in C(\quad)$, wie in der nachfolgenden Abbildung dargestellt.



Die Konstruktion zeigt sofort, dass die auf diese Art definierte Addition kommutativ ist; es ist andererseits aber nicht so einfach, aber möglich, die Assoziativität dieser Addition nachzuweisen. Der unendlich ferne Punkt O spielt dabei die Rolle des neutralen Elements der abelschen Gruppe $C(\mathbb{Q})$.

Im Jahr 1922 gelang es dem englischen Mathematiker L.J.~Mordell die Struktur der abelschen Gruppe $C(\mathbb{Q})$zu enthüllen.

Satz (Mordell [3]). Ist C eine über den rationalen Zahlen definierte elliptische Kurve, so ist die abelsche Gruppe $C(\mathbb{Q})$endlich erzeugt. Damit besteht die direkte Summenzerlegung

$$C(\mathbb{Q}) \;=\; C(\mathbb{Q})_{\text{frei}} \oplus C(\mathbb{Q})_{\text{endl.}},$$

wobei $C(\mathbb{Q})_{\text{frei}}$ den freien Anteil und $C(\mathbb{Q})_{\text{endl.}}$ den endlichen Anteil (Torsionsanteil) der abelschen Gruppe $C(\mathbb{Q})$ bezeichnet.

Dies bedeutet, dass es genau dann unendlich viele rationale Punkte auf der elliptischen Kurve C gibt, wenn der freie Anteil $C(\mathbb{Q})_{\text{frei}}$ positiven Rang r_C hat; ist hingegen $r_C = 0$, so gilt $C(\mathbb{Q}) = C(\mathbb{Q})_{\text{endl.}}$, und es gibt nur endlich viele rationale Punkte auf C.

Beispielsweise wird durch $Y^2 = X^3 + 4X$ eine elliptische Kurve C_1 mit den rationalen Punkten

$$C_1(\mathbb{Q}) \;=\; \{O, (0{,}0), (2{,}4), (2, -4)\}$$

gegeben mit Gruppenstruktur $C_1(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/4\,\mathbb{Z}$. Demgegenüber hat die elliptische Kurve C_2 mit der Weierstraß'schen Normalform $Y^2 = X^3 + X + 1$ unendlich viele rationale Punkte, denn es ist $C_2(\mathbb{Q}) = \langle (0,1) \rangle \simeq \mathbb{Z}$.

Der Beweis des Satzes von Mordell ist eine wunderbare Variation der Grundidee des unendlichen Abstiegs, die dem Irrationalitätsbeweis von $\sqrt{2}$ zugrunde liegt: Nimmt man nämlich die Rationalität von $\sqrt{2}$ an, so gibt es positive ganze Zahlenp, qmit $\sqrt{2} = p/q$, also erhält man durch Quadrieren und Umstellen die Gleichung$p^2 = 2q^2$, woraus wir schließen, dass p und in der Folge auch q gerade sein müssen, d.h. $p = 2p_1$, $q = 2q_1$, mit positiven ganzen Zahlen$p_{1,} q_1$, die wiederum der Ausgangsrelation $p_1^2 = 2q_1^2$ genügen. Jetzt erkennt man, dass man unendlich oft so weiter fahren ("absteigen") kann und dabei immer kleinere positive ganze Zahlen erhält, die der Ausgangsrelation genügen. Dies führt aber zu einem Widerspruch, was die Irrationalität von $\sqrt{2}$ beweist.

5. Zurück zum Kongruenzzahlproblem

Zunächst haben wir bereits erkannt, dass die kubische Kurve

$$C_F: Y^2 = X^3 - F^2 X$$

aus dem dritten Abschnitt eine elliptische Kurve ist. Mit den vorhergehenden überlegungen wissen wir damit, dass F genau dann Kongruenzzahl ist, wenn diese elliptische Kurve einen rationalen Punkt (x, y) mit $y \neq 0$ besitzt. Es zeigt sich nun, dass der Torsionsanteil $C_F(\mathbb{Q})_{\text{endl.}}$ genau aus denjenigen rationalen Punkten$(x, y) \in C_F(\mathbb{Q})$besteht, für die $y = 0$ gilt (d.h. der Torsionsanteil besteht genau aus allen Punkten der Ordnung 2). Mit dem Satz von Mordell übersetzt sich damit die Äquivalenz (4) zu

$$F \text{ Kongruenzzahl} \;\Leftrightarrow\; C(\mathbb{Q})_{\text{frei}} \neq \{O\},$$

d.h. die elliptische Kurve C_F muss rationale Punkte unendlicher Ordnung besitzen.

Für$F = 6$ zeigt sich beispielsweise, dass der rationale Punkt $(-3{,}9) \in C_F(\mathbb{Q})$ unendliche Ordnung hat; dieser Punkt führt auf das uns wohl bekannte rechtwinklige Dreieck mit den Seiten $a = 3$,$b = 4$,$c = 5$ und Flächeninhalt 6. Für $F = 5$ hat der rationale Punkt $(-5/9{,}100/27) \in C_F(\mathbb{Q})$ unendliche Ordnung. Damit erhalten wir das rechtwinklige Dreieck mit den Seiten $a = 20/3$, $b = 3/2$, $c = 41/6$ und Flächeninhalt 5.

Wir hatten bereits eingesehen, dass die Zahl $F = 2$ keine Kongruenzzahl ist. Ebenso sind auch die Zahlen $F = 1$ und $F = 3$ keine Kongruenzzahlen, da die entsprechenden elliptischen Kurven jeweils nur endlich viele rationale

Punkte besitzen. Da $F = 1$ keine Kongruenzzahl ist, erkennen wir insbesondere, dass es kein rechtwinkliges Dreieck mit rationalen Seiten und Flächeninhalt gleich einer Quadratzahl gibt.

Ausgehend von diesen einfachen Beispielen könnte man vermuten, dass F in den Fällen $F \equiv 5{,}6{,}7 \bmod 8$ Kongruenzzahl ist und in den Fällen $F \equiv 1{,}2{,}3 \bmod 8$ nicht. Dies erweist sich als nicht ganz korrekt. Die aktuellsten Ergebnisse von Y. Tian in [6] zeigen, dass es zu vorgegebener natürlicher Zahl k jeweils unendlich viele quadratfreie Kongruenzzahlen F mit exakt k verschiedenen Primfaktoren gibt, welche den Kongruenzen $F \equiv 5{,}6{,}7 \bmod 8$ genügen. Andererseits zeigen die neuesten Ergebnisse von Y. Tian, X. Yuan und S.Zhang, dass es unendlich viele Zahlen F mit $F \equiv 1{,}2{,}3 \bmod 8$ gibt, für die F keine Kongruenzzahl ist; nichtsdestotrotz gibt es dennoch Beispiele von Zahlen F mit $F \equiv 1{,}2{,}3 \bmod 8$, die Kongruenzzahlen sind.

Ein solches Beispiel ist die Zahl $F = 1003$: Da die Kongruenz $1003 \equiv 3 \bmod 8$ besteht, ist es unwahrscheinlich, dass diese Zahl Kongruenzzahl ist. Dennoch findet man auf der entsprechenden elliptischen Kurve C_F den rationalen Punkt (x, y) mit

$$x = \frac{288747157793}{35344}, y = \frac{155158857773747535}{6644672},$$

zu dem das rechtwinklige Dreieck mit den Seiten

$$a = \frac{70031471865}{24501476},$$
$$b = \frac{2891174168}{4119498345},$$
$$c = \frac{288494541142700378657}{100933789832057220}.$$

In der Tat verifiziert man mit einer Computeralgebra-Software sofort, dass $a^2 + b^2 = c^2$ ist und $a \cdot b/2 = 1003$ gilt.

Literatur

[1] Blum, W., Vogel, S., Drüke-Noe, C., Roppelt, A. (Hrsg.) (2015). *Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II. Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen.* Braunschweig: Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH.

[2] Koepf, W. (2012). Mathematik-Kommission Schule – Hochschule. *Mitteilungen der DMV, 20*, 57–58.

[3] Mordell, L.J. (1922). On the rational solutions of the indeterminate equations of the third and fourth degrees. *Proc. Cambridge Philos. Soc., 21*, 179–192.

[4] Schiemann, S. (2015). Im Gespräch mit der Mathematik-Kommission übergang Schule – Hochschule. *Mitteilungen der DMV, 23*, 242–248.

[5] Silverman, J.H., Tate, J. (1992). *Rational points on elliptic curves.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.

[6] Tian, Y. (2014). Congruent numbers and Heegner points. *Cambridge J. Math., 2,* 117– 161.

[7] Wiles, A. (1995). Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem. *Ann. Math., 141*, 443–551.

Kathrin WINTER, Flensburg

Diagnose, Förderung und Beratung an den Schnittstellen von Schule, Ausbildung, Studium und Berufsalltag

Nicht für die Schule, sondern für das Leben lernen wir?! Ziel des allgemeinbildenden Unterrichts (nicht nur in Mathematik) ist es, auf das Leben nach der Schule vorzubereiten. Doch inwiefern bereiten schulisch erworbene mathematische Kompetenzen tatsächlich erfolgreich auf die Anforderungen im Rahmen einer Berufsausbildung oder eines Studiums bzw. auf die späteren Tätigkeiten in der beruflichen Praxis vor? Welche mathematischen Anforderungen werden an Menschen in der beruflichen Ausbildung im Vergleich zur Berufspraxis gestellt? In welcher Form wird Mathematik in beruflichen Kontexten tatsächlich verwendet? Wie lässt sich feststellen, über welche Fähigkeiten und Fertigkeiten bspw. Auszubildende oder Studienanfänger(innen) hinsichtlich der benötigten Mathematik in ihrem Beruf verfügen? Und in welcher Form können einzelne Personen der verschiedenen Gruppen hinsichtlich einer adäquaten Vorbereitung auf die mathematischen Anforderungen im Leben nach und außerhalb der Schule angemessen beraten und gefördert werden?

Eine umfassende Darstellung aller Aspekte zur Beantwortung der hier aufgeworfenen Fragestellungen ist im Rahmen dieses Beitrages nicht möglich. Es erfolgt daher eine überblicksartige Zusammenfassung zu Forschungsprojekten und -ergebnissen mit dem Ziel, die hohe Relevanz der Diagnose, Förderung und Beratung als Aufgaben der mathematikdidaktischen Forschung und Lehre im Zusammenhang der Übergänge von Schule, Ausbildung/Studium und Berufsalltag aufzuzeigen und die Thematik wieder bzw. wieder deutlicher in den Fokus der mathematikdidaktischen Forschung auch in Deutschland zu rücken.

Diagnose, Förderung und Beratung

In allen Phasen eines Bildungsweges bilden Diagnose-, Förder- und Beratungstätigkeiten eine elementare Rolle und sollten bereits in der Ausbildung von Lehrerinnen und Lehrern curriculare Schwerpunkte darstellen (vgl. KMK, 2004). Eine beratende Funktion sollen Lehrkräfte an allgemeinbildenden Schulen u. a. auch bezüglich der zukünftigen Berufsorientierung der Schüler/innen einnehmen, für die Kenntnisse über unterschiedliche Berufe und deren Anforderungen notwendig sind.

Die Aspekte von Diagnose, Förderung und Beratung sollten dabei einen zusammenhängenden Komplex bilden, da sich die Tätigkeiten, Methoden, Aufgaben und Resultate etc. stets wechselseitig beeinflussen (vgl. **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**). Es ist besonders wichtig, dass diese Kompetenzen sowohl im Rahmen allgemeiner bildungswissenschaftlicher Veranstaltungen thematisiert werden, als auch fachbezogen konkretisiert werden. Die Umsetzung dieser Anforderungen wird bereits an vielen Hochschulen im Rahmen der Lehramtsausbildungen im Fach Mathematik insbesondere in den Schwerpunkten Primarstufe und Sekundarstufe I realisiert – der Anteil solcher Veranstaltungen bzw. Veranstaltungsinhalte im Rahmen der Lehramtsausbildungen im Sekundarstufen-II-Bereich und für die berufliche Bildung ist allerdings sehr gering. Für Lehrerende in der beruflichen Bildung und der Hochschule bleibt i. d. R. eine Aus- oder Fortbildung ihrer Diagnose-, Förder- und Beratungskompetenzen wie auch in der Mathematikdidaktik an sich vollständig aus, sofern sich Lehrende nicht selbstständig engagieren (vgl. u. a. Kaiser, 2011 & 2016).

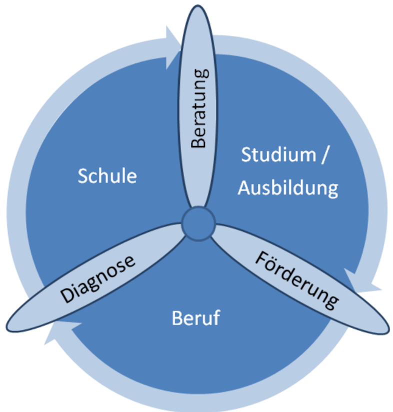


Abbildung 1: Diagnose-Förder-Beratungskomplex in verschiedenen Phasen eines Bildungsweges.

Stationen und Schnittstellen auf dem Weg in den Beruf

Verschiedene Aspekte, Konzepte und Forschungsergebnisse zur Mathematikdidaktik werden nachfolgend exemplarisch an unterschiedlichen Schnittstellen von Bildungswegen betrachtet. Hierzu bedarf es vorab einer Darstellung klassischer Stationen und Schnittstellen auf „klassischen" Bildungswegen.

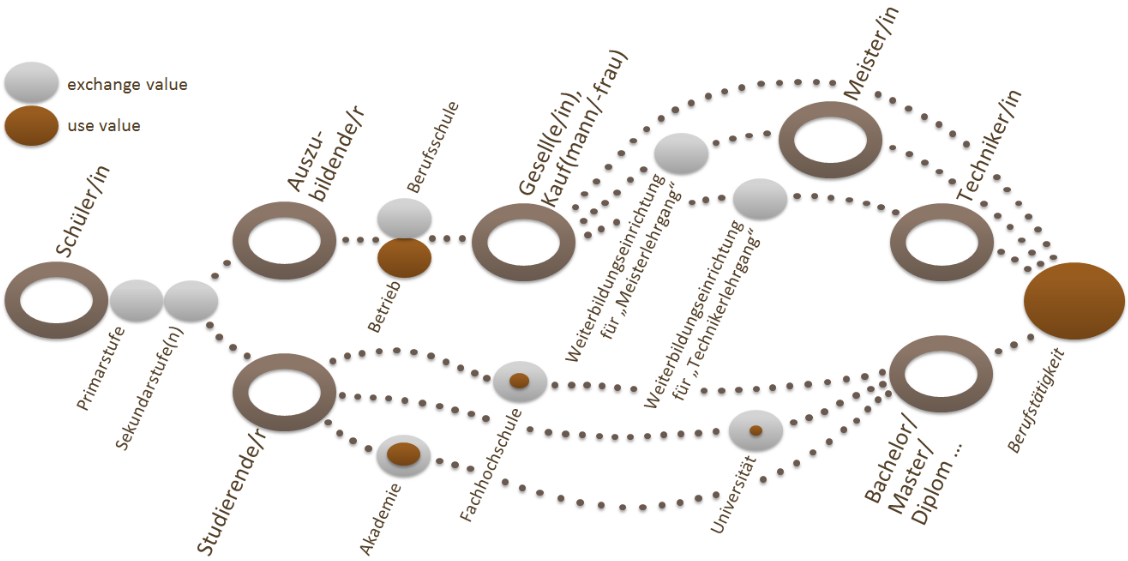


Abbildung 2: Stationen und Schnittstellen verschiedener Bildungswege von der Schule in den Beruf

Abbildung 2 zeigt Stationen und Schnittstellen „klassischer" Bildungswege – klassisch insofern, dass je nach Zugangsvoraussetzung und individuellen

Entscheidungen die einzelnen Stationen einer akademischen und betrieblichen, beruflichen Ausbildung in unterschiedlichster Weise kombiniert werden können. Nachfolgend werden die akademische Berufsausbildung im Sinne eines Hochschulstudiums unter dem Begriff *Studium* oder *akademische Ausbildung*, Wege „klassischer“ betrieblicher Berufsausbildungen unter dem Begriff der *Berufsbildung* und *berufsbezogene Ausbildung* zusammengefasst.

Eine berufsbezogene Ausbildung findet in Deutschland parallel in einer Berufsschule und in einer betrieblichen oder betriebsnahen Institution statt. Man spricht daher in diesem Fall von einer *dualen Berufsausbildung*. Dabei existieren für das berufliche Schulwesen in Deutschland wie auch der Schweiz und Österreich sowohl im Rahmen dieses dualen Systems als auch in anderen Ausbildungs- und Weiterbildungsformen – bspw. zum Erwerb der (Fach-)Hochschulreife – eine Vielzahl unterschiedlicher Bezeichnungen wie *Berufsschule*, *Berufsfachschule*, *Berufskolleg*, *Berufsaufbauschule*, *Fachoberschule*, *Fachschule*, *Berufsoberschule*, *Fachakademie*, *Berufsakademie* u. v. m. (vgl. u. a. Braun, Scholz 1981, Kaiser et al., 2014).

Meister- und Technikerlehrgänge (vgl. Abbildung 2) stellen Weiterbildungsangebote dar, die sowohl nebenberuflich als auch in Vollzeit absolviert werden können (in Vollzeit: Meisterlehrgänge ca. 10 Monate, Technikerlehrgänge ca. 2 Jahre). Für eine Weiterbildung zum/r Meister/in wird eine (möglichst bereits vollständig) abgeschlossene Berufsausbildung vorausgesetzt, wobei der Lehrgang i. d. R. selbst finanziert werden muss und nach erfolgreichem Abschluss bspw. zur Führung eines eigenen Betriebs und zur Ausbildung von Berufsanfänger/inne(n) berechtigt.

Wie bereits bei der Betrachtung der unterschiedlichen Formen klassischer Berufsbildungswege – akademisch und nicht akademisch – deutlich wird, sind die Unterschiede an der Schnittstelle „Schule – Ausbildung/Studium“ allein hinsichtlich der allgemeinen Zulassungsvoraussetzungen wie die Form des Schulabschlusses und der Art und Dauer der Ausbildung sehr different. In Bezug auf die mathematischen Anforderungen werden diese Unterschiede noch umfangreicher und ergeben sich nicht nur für einzelne Berufsfelder wie bspw. den Metallbau, sondern darin auch zwischen einzelnen Berufen wie bspw. dem Industriemechaniker (vgl. u. a. Gaab, 2015) oder dem Schlosser. Die Analyse u. a. dieser Anforderungen und Unterschiede fand bereits Ende der siebziger Jahre Beachtung auch im deutschsprachigen Raum in der mathematikdidaktischen Forschung (vgl. u. a. Sträßer, 1980, Blum, 1979, Braun & Scholz, 1981, Bardy et al., 1985). Auf internationaler Ebene finden diese Aspekte Anerkennung im Rahmen unterschiedlicher Forschungsprojekte und Publikationen (vgl. u. a. Masingila, 1992, Smith, 1999, Fioriti & Gorgorio 2001, Noss et al., 2002, Damlamian et al., 2013, Sträßer, 2015, Kaiser, 2016) und auch in der nationalen Mathematikdidaktikcommunity findet das Themenfeld „Mathematik und Beruf(sbildung)“ wieder mehr Beachtung (vgl. u. a. Averweg et al., 2009, Winter, 2011, Winter & Vollstedt, 2015, Gaab, 2015, Siebert & Heinze, 2016, Duchhardt & Vollstedt 2016).

Mathematische Anforderungen in Schule, Ausbildung, Studium und Berufsalltag

Mathematik tritt in den verschiedenen Stationen von Studium und Ausbildung in unterschiedlicher Form auf. Die Berufsbildungsforschung unterscheidet hierzu die Aspekte des *exchange value* und des *use value* (vgl. u. a. Coben, 2002). Unter dem Aspekt des exchange value werden dabei schulische (mathematische) Anforderungen, unter dem Aspekt des use value die mathematischen Anforderungen zusammengefasst, die im Rahmen der Berufspraxis relevant sind. Prinzipiell könnte diese Zuordnung auch auf die akademische Laufbahn übertragen werden. Die ungefähren Anteile von use und exchange value im Rahmen der einzelnen Ausbildungsstadien werden in Abbildung 2 demonstriert.

Als Basis für eine Beurteilung, welche mathematischen Anforderungen an Auszubildende oder Studienanfänger/innen gestellt werden, bedarf es neben einer differenzierten Analyse für einzelne Ausbildungsberufe und Studiengänge vorausgehend eine Form von *Mindeststandardkonzepten* (vgl. Feldt-Caesar, 2015). Mit dem Ziel, Fähigkeiten, Fertigkeiten und Kenntnisse zu formulieren, die von Lernenden zu einem bestimmten Zeitpunkt beherrscht werden sollten, entstanden hierzu bspw. der *cosh-Mindestanforderungskatalog* (vgl. cosh, 2014) und das Konzept des *Grundwissens und Grundkönnens* (vgl. u. a. Bruder et al., 2015, Schaub, 2016).

Welche mathematischen Anforderungen an Studierende (in Baden-Württemberg) gestellt werden, wurde bspw. durch die Arbeitsgruppe COSH im Rahmen des sogenannten *Mindestanforderungskatalogs* veröffentlicht. Der Katalog entstand in Zusammenarbeit von Schul- und Hochschulvertretern und findet weit über die Grenzen Baden-Württembergs hinaus Beachtung (vgl. u. a. Landenfeld et al., 2014). Es werden Inhalte und Kompetenzen angeführt, welche zum einen durch die Lehrpläne der verschiedenen Schultypen in Baden-Württemberg vorgesehen und zum anderen von den Hochschulen als wünschenswert erachtet werden. Zusammenfassend zeigt der Katalog auf, dass es sich bei den mathematischen Anforderungen an Studierende insbesondere in der Studieneingangsphase – also der Schnittstelle zwischen Schule und Studium – um *mathematisches Grundwissen und Grundkönnen* handelt. D. h. es werden mathematische Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten (Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren) vorausgesetzt, die bei Schülerinnen und Schülern nach Erlangen der Hochschulreife verfügbar sein sollten. (vgl. Bruder & Brückner, 1989, Weinert, 1996, Feldt-Caesar, 2015 & 2016; Schaub, 2016).

Die Entwicklung eines solchen Mindestanforderungskataloges für die berufliche Aus- und Weiterbildung ist für auch nur *ein* Bundesland nicht ohne deutlich höheren Aufwand möglich, insofern dass es wie bereits kurz angedeutet eine Vielzahl an Berufsfeldern und Berufen gibt, die sich bereits hinsichtlich des benötigten Schulabschlusses für die Zulassungsvoraussetzung (Haupt-, Realschulabschluss, Fach- oder Hochschulreife) unterscheiden. Zudem gibt es für Mathematik in vielen Aus- und Weiterbildungsgängen kein eigenes Unterrichtsfach, sondern die Inhalte werden in den Unterricht anderer Fächer eingebunden (vgl. Ploghaus, 1967, Braun & Scholz, 1981, Blum, 1979, Winter, 2011). Die Integration mathematischer Inhalte in berufliche Zusammenhänge erfolgt dabei durch funktionale Anwendungen und rezeptartige Verwendungen von Mathematik (vgl. Bardy, 1985, Sträßer, 1981 & 2010, Winter & Vollstedt, 2015, Siebert & Heinze, 2016).

Mathematik im Berufsalltag

Die mathematischen Anforderungen, die an Personen nach Abschluss einer Berufsausbildung oder eines Studiums gestellt werden und die Art und Weise, in der Mathematik im Berufsalltag genutzt wird, stellen an sich wiederum in einer anderen Form dar (vgl. u. a. Masingila, 1992, Kaiser et al., 2014). So veranlassen bspw. Psychotherapeut(inn)en im Rahmen einer Praxisarbeit i. d. R. keine umfangreichen empirischen Untersuchungen, für die sie selbst die statistischen Berechnungen durchführen – im Studium dagegen stellen die mathematischen Anforderungen in Statistikseminaren häufig eine große Hürde für viele Personen dar. Ein Grund dafür, dass ein Psychologiestudium häufig sehr anspruchsvolle mathematische Inhalte insbesondere aus dem Bereich der Statistik beinhaltet, besteht darin, dass berufsbezogene Publikationen zu wissenschaftlichen Ergebnissen u. a. auf Basis des statistischen Wissens beurteilt werden können.

Selbstverständlich bildet in klassischen beruflichen Ausbildungen das Verständnis mathematischer Inhalte für die Beurteilung darauf aufbauender Zusammenhänge im späteren Berufsalltag einen Grund für die Behandlungen im schulischen Teil der Ausbildung, doch wird die tatsächliche Form des Auftretens von Mathematik in beruflichen Kontexten des Berufsalltags (noch) nicht ausreichend berücksichtigt. Insbesondere in handwerklichen und industriellen Berufen wird Mathematik in der Berufspraxis als solche gar nicht wahrgenommen und die Verwendung findet vorrangig durch die Anwendung von Regelsätzen oder der Verwendung von bspw. Dosierungtabellen statt (vgl. u. a. Masingila, 1992, Fioriti & Gorgorio, 2001, Noss et al., 2002, Marr & Hangston, 2007, Sträßer, 2015, Winter & Vollstedt, 2015). Viele Personen sind sich dabei der sich dahinter verbergenden Mathematik gar nicht bewusst (vgl. Kaiser et al., 2014). Die Schnittstelle vom Studium bzw. von der beruflichen Ausbildung in den Berufsalltag stellt dementsprechend eine neue, aus mathematikdidaktischer Perspektive nicht zu vernachlässigende Hürde dar.

Diagnose, Förderung und Beratung an unterschiedlichen Schnittstellen

Unterstützungsangebote im Bereich der Mathematikdidaktik finden sich insbesondere im hochschuldidaktischen Bereich bspw. im Rahmen sogenannter Vorkurs-, Tutorien- oder Brückenkurse, die ein Förderangebot für Studienanfänger/innen darstellen. Im Rahmen der Entwicklung von Online-Self-Assessments sollen an Studiengängen und Ausbildungen interessierte Personen außerdem die Möglichkeit erhalten, ihre eigenen mathematischen Kompetenzen zu testen und Informationen über die mathematischen Anforderungen der jeweiligen Ausbildungs-/Studiengänge zu erhalten (vgl. Kubinger et al., 2012, Landenfeld et al., 2014, Kallweit et al., 2015). Prinzipiell dienen diese Angebote insbesondere der Diagnose und Beratung, doch bieten nicht alle Online-Self-Assessments das, was sie versprechen (vgl. u. a. Krusekamp & Neugebauer, 2016).

Die Relevanz der mathematikdidaktischen Forschung für die unterschiedlichen Aspekte der Diagnose, Förderung und Beratung für Lehrende und Lernende an den Schnittstellen von „Schule und Ausbildung/Studium" sowie insbesondere der Schnittstelle „Ausbildung/Studium und Berufsalltag" ist nicht von der Hand zu weisen, was sich u. a. durch die zunehmende Anzahl von Forschungsprojekten in diesen Bereichen zeigt. Es bleibt zu hoffen, dass diesen Aspekten weiterhin noch mehr Aufmerksamkeit geschenkt wird, die bspw. auch Lehrkräften an allgemeinbildenden Schulen umfassende Grundlagen für ihre Verpflichtungen hinsichtlich Diagnose, Förderung und Beratung von Schüler/innen bieten.

Literatur

Averweg et al. (2009): Averweg, A., Schürg, U., Geißel, B. & Nickolaus, R.: *Förderungsbedarf im Bereich der Mathematik bei Berufsschülern im Berufsfeld Bautechnik*. In: Die berufsbildende Schule 61, S. 22-28.

Bardy et al. (1985): Bardy, P., Blum, W. & Braun, H. G. (Hrsg.): *Mathematik in der Berufsschule – Analysen und Vorschläge zum Fachrechenunterricht.* Essen: Girardet.

Braun, H.-G. & Scholz, H. (1981): *Dokumentation der Mathematik-Lehrpläne Berufliches Schulwesen (Stand: Juni 1980).* In: Bauersfeld, H., Otte, M., Steiner, H. G.: Schriftenreihe des IDMI, Heft 17 zum KID-Projekt. Bielefeld: Universität Bielefeld.

Blum, W. (1979): *Stichwort „Berufliches Schulwesen".* In: Volk, D.: Kritische Stichwörter Mathematik. München: Fink, S. 15-32.

Bruder et al. (2015): Bruder, R., Feldt-Caesar, N., Pallack, A., Pinkernell, G. & Wynands, A.: *Mathematisches Grundwissen und Grundkönnen in der Sekundarstufe II.* In: Blum, W. et al. (Hrsg.): Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II. Braunschweig: Schrödel. S. 108-124.

Coben, D. (2002*). Use value and exchange value in discursive domains of adult numeracy teaching*. Literacy and numeracy studies 11(2), 25-35.

Cosh (2014): Cooperation Schule-Hochschule: *Mindestanforderungskatalog Mathematik*. Abrufbar unter: http://lehrerfortbildung-bw.de//bs/bsa/bk/bk_mathe/cosh_neu/ katalog/makv20b_ohneleerseiten.pdf [03.04.2016]

Damlamian et al. (2013): Damlamian, A., Rodrigues, J.-F. & Sträßer, R.: *Educational Interfaces between Mathematics and Industry (EIMI)*. Report on an ICMI-ICIAM Study. Cham - Heidelberg - New York - Dordrecht - London: Springer.

Duchhardt, C. & Vollstedt, M. (2016): *Die Rolle von Selbstberichten zur Nutzung von Mathematik im Beruf*. In diesem Band.

Feldt-Caesar, N. (2015): *Möglichkeiten der Diagnose von Grundwissen und Grundkönnen durch ein adaptiv gestaltetes Testverfahren.* In: Caluori, F. et al.: Beiträge zum Mathematikunterricht 2015. Münster: WTM-Verlag. S. 276-279.

Feldt-Caesar, N. (2016): *Konzeptualisierung und Operationalisierung von Mindeststandards – von der Zielformulierung zum digitalen Diagnoseverfahren*. In diesem Band.

Fioriti, G., Gorgorio, N. (2001). Geometry at work (or Pythagoras will never fail you!). Proceedings der Konferenz ‘Psychology of Mathematics Education (PME 25), Bd. 2, Utrecht: PME 25. S. 425-431.

Gaab, K. (2015): *Raumgeometrie in der Sekundarstufe I – Basics?* In: A. Filler & A. Lambert (Hrsg.): Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen - Raumgeometrie. Vorträge auf der 31. Herbsttagung des AK Geometrie in der GDM vom 12. bis 14.09.2014 in Saarbrücken, S. 33-55.

Kaiser, H. (2011). *Fachrechnen vom Kopf auf die Füsse gestellt – innovative Ansätze in der Ausbildung zum Koch/zur Köchin*. In: Niedermair, G.: Aktuelle Trends und Zukunftsperspektiven beruflicher Aus- und Weiterbildung. Linz: Trauner. S. 225-242.

Kaiser, H. (2016): *Mit Lernenden die rechnerisch/mathematische Bewältigung von beruflichen Alltagssituationen erarbeiten*. In diesem Band.

Kaiser, H. et al. (2014): Kaiser, H., Schelldorfer, R. & Winter, K. (Hrsg.): *Mathematik fürs Leben – Von der Schule in den Beruf*. Praxis der Mathematik in der Schule (57). Hallbergmoos: Aulis.

Kubinger et al. (2012): Kubinger, K. D., Frebort, M. & Müller, C.: *Self-Assessment im Rahmen der Studienberatung: Möglichkeiten und Grenzen*. In K. D. Kubinger, M. Frebort, L. Khorramdel & L. Weitensfelder (Hrsg.): Self-Assessment: Theorie und Konzepte. Lengerich: Pabst Science Publishers. S. 9-24.

Kallweit, M. et al. (2015): Kallweit, M., Krusekamp, S., Neugebauer, C. & Winter, K.: *Mathematische Online-Self-Assessments zur frühzeitigen Diagnose und Förderung von Grundlagenkenntnissen.* Tagungsband zum Hansekolloquium 2015 in Lübeck, (im Druck).

KMK (2004): *Standards für die Lehrerbildung: Bildungswissenschaften*, KMK-Beschluss vom 16.12.2004.

Krusekamp, S. & Neugebauer, C. (2016): *„Im Bereich der Statistik verfügen Sie nur über geringe Vorkenntnisse.“ – Hilfreiches Feedback im Rahmen von Online-Self-Assessments (OSAs)*. In diesem Band.

Landenfeld et al. (2014): Landenfeld, K., Göbbels, M., Hintze, A. & Priebe, J.: *viaMINT – Aufbau einer Online-Lernumgebung für videobasierte interaktive MINT-Vorkurse*. Zeitschrift für Hochschulentwicklung (ZFHE), „Übergang Schule-Hochschule", Ausgabe 9/5.

Masingila, J. O. (1992). *Mathematics Practice in Carpet Laying*. In: Proceedings der 16. Konferenz ‘Psychology of Mathematics Education (PME 16)’, Bd. 2, Durham, New Hampshire, S. 80-87.

Marr, B. & Hagston, J. (2007). *Thinking beyond numbers: Learning numeracy for the future workplace*. Adelaide SA: National Centre for Vocational Education Research.

Noss et al. (2002): Noss, R., Hoyles, C., Pozzi, S.: *Abstraction in Expertise: A Study of Nurses' Conceptions of Concentration*. Journal for Research in Mathematics Education, 33(3), S. 204-229.

Schaub, M. (2016): *Die DTA unter einem tätigkeitstheoretischen Blickwinkel*. In diesem Band.

Siebert, U. & Heinze, A. (2016): *Modellierung mathematischer Kompetenzen von Industriekaufleuten am Übergang in die berufliche Erstausbildung*. In diesem Band.

Smith, J. P. (1999). *Tracking the Mathematics of Automobile Production: Are Schools Failing to Prepare Students for Work?* In: American Educational Research Journal, *36*(4), S. 835-878.

Sträßer, R. (1980): *Mathematik in der (Teilzeit-)Berufsschule*. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 12(3), S. 76-84.

Sträßer, R. (2010): *Mathematik im Beruf und in der beruflichen (Aus)Bildung. Expertise für die Deutsche Telekom-Stiftung „Mathematik entlang der Bildungskette".* Gießen.

Sträßer, R. (2015): *"Numeracy at work": a discussion of terms and results from empirical studies*. In: ZDM Mathematics Education (47). S. 665-674.

Ploghaus, G. (1967). *Die Fehlerformen im metallgewerblichen Fachrechnen und unterrichtliche Maßnahmen zur Bekämpfung der Fehler*. In: Die berufsbildende Schule, 19 (7/8), S. 519-531.

Winter, K. (2011): *Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential zur individuellen Defizit- und Fehleranalyse: Didaktische Überlegungen, empirische Untersuchungen und konzeptionelle Entwicklung für ein internetbasiertes Mathematik-Self-Assessment*. Münster: WTM-Verlag.

Winter, K. & Vollstedt, M. (2015): *Von der schulischen Ausbildung in die Berufspraxis: Konkrete Anwendungen mathematischer Zusammenhänge im Berufsalltag*. Mathematik lehren *32*(192), S. 34-37.

Teil 2:
Einzelbeiträge

Ergi ACAR BAYRAKTAR, Frankfurt am Main

Die Beziehung zwischen Diagrammatizität und Interaktionale Nische mathematischer Denkentwicklung im familialen Kontext

1. NMD-Familie

Im Rahmen der Studie „erStMaL-FaSt (early Steps in Mathematics Learning- Family Study“ werden Kinder im Kindergartenalter in ihrer Familie in mathematischen Situationen beobachtet (Acar Bayraktar & Krummheuer 2011) und im Hinblick auf die Wirkungsweise einer interaktionalen Nische mathematischer Denkentwicklung (Krummheuer 2011) analysiert. Das theoretische Interesse dieses Aufsatzes richtet sich auf die Rekonstruktion von Aspekten der situativen Genese eines „Mathematics Learning Support Systems“ (MLSS), hier insbesondere im Hinblick auf die Unterstützung einer raumgeometrischen Denkentwicklung. Das Interesse ordnet sich dem Begriff der„interaktionalen Nische mathematischer Denkentwicklung“ (NMD; s. Krummheuer 2011) unter und fokussiert auf ein Kind im Kindergartenalter aus einer bilingual türkisch-deutschen Familie, in der Interaktionssituationen zu von uns vorgegeben Spielen mit mathematischem Gehalt beobachtet werden (Acar Bayraktar & Krummheuer 2011). Eine „NMD“ besteht aus den kulturspezifischen, von einer Gruppe oder Gesellschaft bereitgestellten Lernangeboten (Allokationsaspekt), einem realen Interaktionsprozess der emergierenden Situationen (Situationsaspekt) und dem individuellen Beitrag des interessierenden Kindes (Aktionsaspekt) (Krummheuer & Schütte 2014).

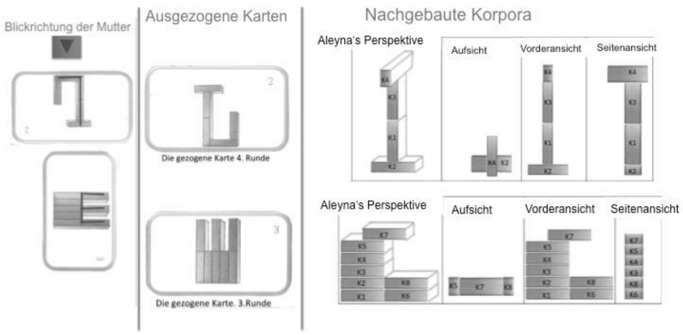
2. Diagrammatizität

Diagramme sind Inskriptionen, die durch ein „(konventionelles) Regelsystem von Herstellung, Gebrauch und Transformation“ entstehen (Dörfler 2006, S.202). Schreiber und Krummheuer greifen diesen Ansatz auf und integrieren ihn in eine Interaktionstheorie mathematischen Lernens: Inskriptionen ebenso wie ihre regelbasierten Versionen als Diagramme werden als konstitutive Komponenten mathematischer Diskurse verstanden, die gleichsam komplementär als paralleler Kommunikationsstrang neben der vokalen Interaktion diese ergänzen stützen, vertiefen, präzisieren und ggf. auch konterkarieren. In der hier vorzustellenden Studie soll das Verhältnis von inskriptional und vokal geführter Interaktion rekonstruiert und unter einer entwicklungstheoretischen Perspektive analysiert werden.

Dörfler verdeutlicht, dass die Verwendung von Diagrammen in mathematischen Arbeitsprozessen ein Stück weit einen externalen Aspekt des Denkprozesses darstellt. „Externalismus sieht mathematisches Tun primär und untrennbar als die Manipulation, Transformation, Konstruktion, Interpretation von Inskriptionen, die für den Internalismus eben nur Darstellung und Repräsentation sind.“ (Dörfler 2006). Insofern gehe ich hier über Dörflers Ansatz hinaus: Inskriptionen und Diagramme sind in einen Interaktionsprozessen eingebunden. Der Erwachsene und das Kind können miteinander interagieren und zugleich an ihren Inskriptionen manipulieren. Obwohl es bei Hoffman (2007) um die Mathematik und bei uns um Kinder und deren mathematischen Denkprozesse im familialen Kontext geht, sehen wir eine gemeinsamen Ansatzpunkt: Er sieht ein wesentliches Moment der Entwicklung von Mathematik in der Konzeption und Weiterentwicklung von Darstellungssystemen. Bezieht man diese Annahme auf mathematische Denkentwicklungen von Kindern im Vorschulalter, dann liegt die Vermutung nahe, dass die diagrammatischen Momente in den zugehörigen Interaktionsprozessen den verbalen vorausgehen. In Bezug auf die mich interessierenden vorschulischen Prozesse, untersuche ich, in welcher Weise die NMD sich auf Diagrammatizität bezieht.

3. Fallbeispiel: Familie Ak

Im Fallbeispiel beschäftigen sich die eine türkische Mutter Leyla und ihre einzige Tochter Aleyna (4;8 Jahre) mit dem Spiel ‚Bauherr’. Ziel des Spiels ist es, das Gebäude auf der Spielkarte genau nachzubauen. Dadurch wird der Unterschied zwischen der zweidimensionalen Abbildungen und den dreidimensionalen Körpern erfahrbar. In beider dritten und vierten Runde zieht die Mutter eine Karte und bittet um Aleynas Hilfe. Da beide Runden schon in vorherigen Jahren präsentiert und detailliert analysiert worden sind (Acar 2011, Acar Bayraktar 2012, 2014, Acar Bayraktar & Krummheuer 2011), wird hier übergreifend die Beziehung zwischen Diagrammatizität und NMD



in der Famile Ak dargestellt. In der 3. Runde sagt die Mutter `und das E wie jetzt machen wir E? <215>` und dadurch einen Teil der Figur in der ausgewählten Karte als ein E definiert. In ähnlicher Weise in der 4. Runde sagt sie auf die Karte zeigend `guck mal so . ein L werden\ <409-410>` und dadurch schreibt sie einen Teil der Figur in der ausgewählten Karte als ein L um. Hiermit kommt sie mit diagrammatischen Rahmungen, dass sie die Figuren mit Hilfe der Buchstaben definiert, und bietet ihrer Tochter einen Zugang über diagrammatische Deutungen an: Sie beschreibt die Anordnung als ein L und ein E, welche unabhängig von der Position im Raum stets als solches zu erkennen sind. Vielleicht geht sie davon aus, dass Aleyna diese diagrammatische Deutung der Klötzchenanordnung mit ihrer Erfahrung verbinden und so ihre Erklärung besser verstehen kann.

In dieser Szene tritt als zusätzliche Schwierigkeit auf, dass die Mutter die Spielkarte vor sich auf den Kopf stehend hinlegt und die Bilder dann als Aufriss deutet (sieh. Abbildung). Diese Korpora sind aus statischer Sicht aufrecht nicht baubar. Sie beschäftigen sich mit der Baue den senkrecht stehenden Teilkorpora, die statisch gesehen in der Aufrissdeutung der Bildern auch konstruierbar sind. Die Mutter scheint zu versuchen, die auf den Kopf gestellte Figuren weiterzubauen, indem sie die Steinen horizontal legen will, den in der „Originalsichten" den Karten unter die Buchstaben L und E gehört. Sie nimmt offenbar mental keine Rotation den Bildern vor. Statisch sind beide Figuren nicht herstellbar und die Nachbaue unterscheiden sich von dieser Figuren deutlich.
Man kann der Mutter keine entwickelter raumgeometrische Kompetenz als der Tochter unterstellen. Die Standardvorstellung von einem Supportsytem, in dem ein in der Sache kompetenter Erwachsener agiert, kommt hier nicht zum Zuge. In der geführten Kommunikation in der Familie Ak nicht sprachliche Elaboriertheit aufweist, die es ermöglichen würde diesen komplexen sprachliche Prozess zur Diagrammatisierung der Bilddeutungen erfolgreich zu gestalten. Man sollte jedoch auch bedenken, dass dieser zusätzliche sprachbezogene Aufwand vermutlich nicht ohne begleitende und unterstützende deiktische Gesten funktionieren wird. Gestik und Sprache kann man zumindest in diesen raumgeometrischen Fragestellungen als gleichwertig ansehen, die sich zu einem integrativen Kommunikationssystem weiterentwickeln können.
Aus räumlich geometrischer Sicht emergieren unbefriedigende Spielprozesse in beiden Sequenzen. Wenn die Mutter die interaktiven Aushandlungsprozesse mit Aleyna in räumlich geometrischer Sicht weiterführen würden, könnte statt einer vorherrschenden diagrammatischer Rahmungen eine Förderung hinsichtlich der unterstellbaren geometrischganzheitlichen Rahmungen eintreten. Jedoch profitiert Aleyna von solchen Rahmungen in der Weise, dass sie verschiedene Möglichkeiten den Nachbauen erkunden kann und hierbei auch raumgeometrische Erfahrungen machen kann. In diesem Sinn entwickelt sich die NMD in Richtung zu einer diagrammatische Themenentwicklung und wird das Supportsystem in der Familie Ak durch Aleyna und die Mutter zusammen realisiert. Insgesamt entsteht für Aleyna ein schwaches MLSS in räumlicher Geometrie.

3. Zusammenfassung und Ausblick

Die diagrammatischen Deutungen ausdrücken sich in diesen vorliegenden Fall zwei- und dreidimensionalen Darstellungen zur Mutter und Tochter. Es handelt sich hierbei um die spezifische Anerkennung dar. Jedoch kann man diagrammatische Deutungen auf den Bauenkarten aber leider nicht in nachgebauten Korpora sehen. Hier erkennt man, dass die Diagramme in die interaktive Aushandlung in der Familie eingebunden sind und einen extralinguistischen Status besitzen. Sie sind eingebunden in Deutungssysteme, die sowohl inskriptionale als auch verbale (vokale) Elemente enthalten. Hiermit spielt die Diagrammatizität eine permanente Rolle in der NMD im familialen Kontext.

Literatur

Acar, E. (2011). Mathematiklernen in einer familialen Spielsituation. Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Berichtband von der 45. Tagung für Didaktik der Mathematik in München 2011 (pp.43-46).* WTM-Verlag.

Acar Bayraktar, E. (2012). Erste Einsichten in die Struktur „interaktionaler Nischen mathematischer Denkentwicklung" im familialen Kontext. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012. Berichtband von der 46. Tagung für Didaktik der Mathematik in München 2012 (pp.65-68).* WTM-Verlag.

Acar Bayraktar, E. (2014). Interaktionale Nische der mathematischen Raumvorstellung bei den Vorschulkindern im familialen Kontext. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014. Berichtband von der 48. Tagung für Didaktik der Mathematik in Koblenz 2014 (pp.93-96).* WTM-Verlag.

Acar Bayraktar, E. & Krummheuer, G. (2011). Die Thematisierung von Lagebeziehungen und Perspektiven in zwei familialen Spielsituationen. Erste Einsichten in die Struktur „interaktionaler Nischen mathematischer Denkentwicklung" im familialen Kontext. In Brandt, B., Vogel, R., Krummheuer, G, (Hrsg.) *Mathematikdidaktische Forschung am "Center for Individual Development and Adaptive Education". Grundlagen und erste Ergebnisse der Projekte erStMaL und MaKreKi (Bd. 1)*(S. 135-174). Münster: Waxmann.

Dörfler,W. (2006). Diagramme und Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik, 27(3/4),* 200-219.

Hoffmann, M.H.G. (2007). Learning from people, things, and signs. *Stud Philos Educ, 26*, 185–204.

Krummheuer, G. (2011). Die empirisch begründete Herleitung des Begriffs der „Interaktionalen Nische mathematischer Denkentwicklung" (NMD). In Brandt, B., Vogel, R., Krummheuer, G, (Hrsg.) *Mathematikdidaktische Forschung am "Center for Individual Development and Adaptive Education". Grundlagen und erste Ergebnisse der Projekte erStMaL und MaKreKi (Bd. 1)*(S. 25-90). Münster: Waxmann.

Krummheuer, G. &, Schütte,M. (2014) Das Wechseln zwischen mathematischen Inhaltsbereichen – Eine Kompetenz, die nicht in den Bildungsstandards steht. *Zeitschrift für Grundschulforschung, 7(1),* 126-128. ISSN 1865-3553.

Catharina ADAMEK, Universität Münster

Der Lösungsplan als Strategiehilfe beim mathematischen Modellieren – Ergebnisse einer Fallstudie

Das Bearbeiten von mathematischen Modellierungsaufgaben ist für Schülerinnen und Schüler anspruchsvoll (s. Blum, 2007), da jeder Schritt im Modellierungsprozess eine mögliche kognitive Hürde darstellen kann (Galbraith & Stillman, 2006). Daher wird jeweils die Fähigkeit, einen solchen Schritt auszuführen, als Teilkompetenz des Modellierens bezeichnet (Kaiser et al., 2015). Blum und Leiß (2005) beschreiben folgende Teilkompetenzen: Verstehen, Vereinfachen/Strukturieren, Mathematisieren, Mathematisch arbeiten, Interpretieren, Validieren und Darlegen/Erklären. Es wurde gezeigt, dass Schülerinnen und Schüler beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben keine bewussten Lösungsstrategien nutzen und insbesondere durch fehlende metakognitive Kompetenzen Probleme beim Modellieren auftreten können (Blum, 2006; Kaiser et al., 2015). Um Lernende beim Modellieren zu unterstützen, können ihnen daher Strategien zum Lösen von Modellierungsaufgaben an die Hand gegeben und Wissen über Modellierungsaktivitäten als Prozess vermittelt werden (Blum, 1996; Blum, 2006).

Mathematisches Modellieren mit Lösungsplan

Ein möglicher Ansatz ist ein „Lösungsplan“, also ein metakognitives Strategieinstrument, dessen Aufbau an den Teilkompetenzen des Modellierens orientiert ist. Es sind bereits verschiedene Varianten von Lösungsplänen bekannt (Greefrath, 2014), die sich unter anderem in der Anzahl und der Art der Schritte unterscheiden. So wurde etwa im Rahmen des DISUM-Projekts ein vierschrittiger Lösungsplan entwickelt, der anhand der Teilschritte *Aufgabe verstehen*, *Modell erstellen*, *Mathematik benutzen* und *Ergebnis erklären* aufgebaut ist (vgl. u.a. Blum, 2006). Zöttl und Reiss (2008) haben eine Version entwickelt, die auf drei Schritte reduziert ist: *Aufgabe verstehen*, *rechnen* und *Ergebnis erklären*. Diese Lösungspläne enthalten alle Teilschritte des Modellierens in für Lernende vereinfachter Form.

Empirische Studien haben gezeigt, dass das Wissen über den Modellierungsprozess in Form eines strategischen Instruments als Orientierungshilfe für Lernende dient (Maaß, 2004), sodass ein Lösungsplan als metakognitives Hilfsmittel beim Modellieren im Mathematikunterricht verwendet werden kann und somit eine Kontrolle der einzelnen Schritte ermöglicht (Stillman, 2011; Kaiser et al., 2015). Jedoch hat sich herausgestellt, dass Lernende zumindest am Anfang dazu tendieren, den Lösungsplan zu ignorieren, obwohl sie im Lösungsprozess auf Probleme stoßen (Schukajlow et al., 2011). Insgesamt wurde hingegen der erfolgreiche Einsatz eines Lösungsplans bei Schülerschwierigkeiten beobachtet (Blum, 2006).

Entwicklung eines strategischen Instruments

Im Rahmen des Projekts LIMo („Lösungs-Instrumente beim Modellieren") der Universität Münster, in dem untersucht werden soll, wie sich der Einsatz eines Lösungsplans auf die Modellierungskompetenzen von Schülerinnen und Schülern auswirkt, wurde anhand von theoretischen Überlegungen und bereits bestehenden Lösungsplänen ein fünfschrittiger Lösungsplan entwickelt. Dabei standen die effektive Nutzung und die Beachtung durch die Lernenden im Vordergrund. Dieser Lösungsplan umfasst die Schritte 1) Verstehen und vereinfachen, 2) Mathematisieren, 3) Mathematisch arbeiten, 4) Interpretieren und 5) Kontrollieren. Es wurden fünf Schritte gewählt, um auch den Schritt des Validierens von Ergebnis und Lösungsweg zu betonen.

Für den Einsatz im Unterricht wurde zusätzlich zum Lösungsplan ein Bearbeitungsbogen entwickelt, dessen Aufbau an die Schritte des Lösungsplans angelehnt ist und den Lernenden die Möglichkeit bietet, den Modellierungsprozess schrittweise zu dokumentieren. Eine Vorstudie hat gezeigt, dass der Einsatz des Bearbeitungsbogens die Aufmerksamkeit verstärkt auf den Lösungsplan lenkt, sodass sich für die hier vorgestellte Fallstudie die folgenden Forschungsfragen ergaben:

- Wie lösen Schülerinnen und Schüler Modellierungsaufgaben mit Hilfe von Lösungsplan und Bearbeitungsbogen?
- Welche Auswirkung hat der Einsatz des Bearbeitungsbogens auf die Verwendung des Lösungsplans?
- Welche Chancen und Risiken sind zu beobachten?

Eine Fallstudie zum Lösungsplan-Einsatz

Um diese Fragestellungen zu untersuchen, wurde eine Fallstudie mit 30 Schülerinnen und Schülern in einer 9. Klasse eines Gymnasiums in Leverkusen durchgeführt. In einer vierstündigen Unterrichtssequenz zum Modellieren bekamen die Lernenden in der ersten Stunde im Anschluss an eine Beispielaufgabe eine Einführung in die Nutzung des Lösungsplans, der zusammen mit dem Bearbeitungsbogen in den darauffolgenden Stunden bei der selbstständigen Bearbeitung von drei weiteren Modellierungsaufgaben in Partnerarbeit eingesetzt wurde. Die Unterrichtsstunden wurden von Mitarbeiterinnen des LIMo-Projekts beobachtet und die Schülerlösungen analysiert. Die Analyse erfolgte auf Grundlage von Kategorienbildung der Aspekte *Lösungsplannutzung* und *Schritte im Lösungsplan*.

Ergebnisse

Die im Folgenden vorgestellte Schülerlösung zeigt beispielhaft einen Schritt der Lösung einer Aufgabe aus der zweiten Stunde, in der die Schülerinnen und Schüler den Arbeitsauftrag hatten, die Fläche eines Grundrisses mithilfe des Lösungsplans zu modellieren und dies auf dem beiliegenden Bearbeitungsbogen zu dokumentieren.

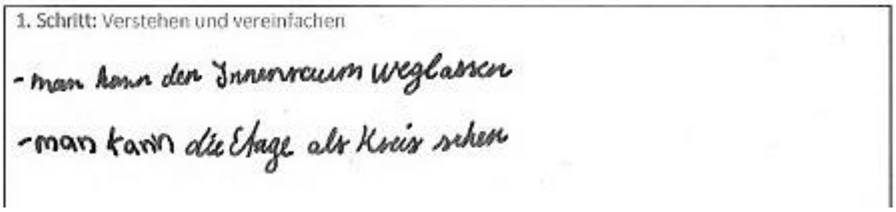


Abb. 1: Beispiel einer Schülerlösung zum Schritt „Verstehen und vereinfachen“

Die Schüler (s. Abb. 1) treffen zwei Annahmen, welche die Basis für den weiteren Lösungsweg dieses Schülerpaars, die Modellierung des Grundrisses als Kreis, bilden. Vermutlich haben die Lernenden den Lösungsplan in dieser Phase des Modellierungsprozesses genutzt, da im ersten Schritt „Verstehen und vereinfachen“ u.a. dazu aufgefordert wird, Vereinfachungen und Annahmen aufzuschreiben, die zur weiteren Bearbeitung der Aufgabe wichtig sind.

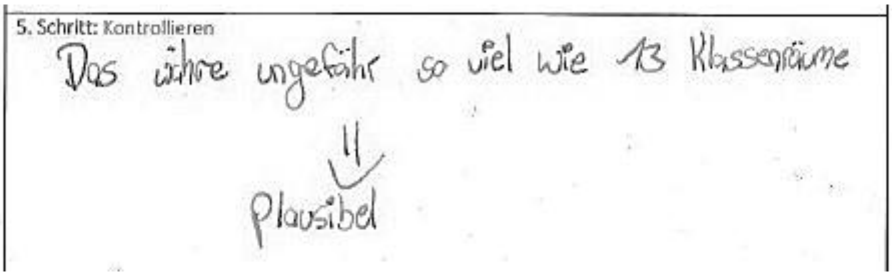


Abb.2: Beispiel einer Schülerlösung zum Schritt „Kontrollieren“

Auch diese Schülerlösung aus Abbildung 2 lässt vermuten, dass der Lösungsplan in diesem Schritt verwendet wurde. Der fünfte Schritt „Kontrollieren“ gibt den Lernenden den Hinweis, die Plausibilität des Ergebnisses anhand eines Vergleichsobjekts zu überprüfen. Das Schülerpaar vergleicht das zuvor berechnete Ergebnis in diesem Beispiel mit der Größe von Klassenräumen, sodass dieser Schritt des Lösungsplans offensichtlich beachtet wurde.

Zusammenfassung und Diskussion

Die Fallstudie zeigt, dass in allen Schritten des Lösungsprozesses verstärkt der Lösungsplan in Betracht gezogen wurde, da die Lernenden durch die Dokumentation der Lösung auf dem Bearbeitungsbogen auf die Schritte des Lösungsplans aufmerksam wurden. Eine Chance des Einsatzes von Lösungsplan und Bearbeitungsbogen beim Modellieren im Unterricht ist demnach, dass der Lösungsplan tatsächlich beachtet wird und der Lösungsweg durch die schrittweise Bearbeitung überwacht und reflektiert werden kann. Auf der anderen Seite steht das Risiko, dass Lernende den Lösungsprozess nicht selbst steuern und der Modellierungsprozess ggf. nur einmal – und nicht wie durch den Modellierungskreislauf idealerweise angedeutet mehrfach - durchlaufen wird. Um zu untersuchen, inwieweit das strategiegestützte Modellieren mit Lösungsplan und Bearbeitungsbogen Auswirkungen auf die Modellierungskompetenzen von Schülerinnen und Schülern hat, sind weitere quantitative Studien erforderlich. Dazu wird im Frühjahr 2016 im Rahmen des LIMo-Projekts eine quantitative Studie in 30 neunten Klassen in NRW durchgeführt.

Literatur

Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven. In: G. Kadunz et al. (Hrsg.), *Trends und Perspektiven: Beiträge zum 7. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik* (S. 15-38). Wien: Tempsky.

Blum, W. & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der “Tanken”-Aufgabe. *Mathematik lehren, 128,* 18-21.

Blum, W. (2006). Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht – Herausforderung für Schüler und Lehrer. In Büchter, A. et al. (Hrsg.), *Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis* (S. 8-23). Hildesheim: Franzbecker.

Blum, W. (2007). Mathematisches Modellieren – zu schwer für Schüler und Lehrer? In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (S. 3-12). Hildesheim: Franzbecker.

Galbraith, P. & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 143-162.

Greefrath, G. (2014). Lösungshilfen für Modellierungsaufgaben. In I. Bausch et al. (Hrsg.), *Unterrichtsentwicklung und Kompetenzorientierung. Festschrift für Regina Bruder* (S. 131-140). Münster: WTM.

Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R. & Greefrath, G. (2015). Anwendungen und Modellieren. In: R. Bruder et al. (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 357-383). Heidelberg: Springer.

Maaß (2004). *Mathematisches Modellieren im Unterricht – Ergebnisse einer empirischen Studie.* Hildesheim: Franzbecker.

Schukajlow, S., Blum, W. & Krämer, J. (2011). Förderung der Modellierungskompetenz durch selbständiges Arbeiten im Unterricht mit und ohne Lösungsplan. *Praxis der Mathematik in der Schule, 53(38)*, 40-45.

Stillman, G. (2011). Applying metacognitive knowledge and strategies in applications and modelling tasks at secondary school. In G. Kaiser et al. (Hrsg.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling. ICTMA 14* (S. 165-180). Dordrecht: Springer.

Zöttl, L. & Reiss, K. (2008). Modellierungskompetenz fördern mit heuristischen Lösungsbeispielen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008* (S. 189-192). Münster: WTM.

Natascha ALBERSMANN, Bochum

Mathematik mit Eltern erleben – Eltern-Kind-Hausaufgaben im Mathematikunterricht des unteren Sekundarbereichs

Eltern sind aus der Bildungsentwicklung ihrer Kinder nicht wegzudenken. Auch im Mathematikunterricht des unteren Sekundarbereichs ist der elterliche Einfluss unvermeidbar. Es stellt sich somit die Frage, wie die Ressource Eltern für das Mathematiklernen ihrer Kinder auf konstruktive Weise nutzbar gemacht werden kann. Eine Antwort auf diese Frage kann das Konzept für Eltern-Kind-Hausaufgaben liefern, welches in diesem Beitrag vorgestellt und anhand eines Praxisbeispiels reflektiert wird.

Dimensionen elterlichen Unterstützungsverhaltens

Arbeiten, die sich mit den Qualitäten eines elterlichen Unterstützungsverhaltens im Kontext des Lernens ihrer Kinder befassen, lassen sich zumeist auf die theoretischen Überlegungen der Selbstbestimmungstheorie von Deci & Ryan (1993) zurückführen. Neben einem strukturgebendem Rahmen, welcher klare Regeln, Erwartungen sowie ein konsistentes Verhalten seitens der Eltern umfasst, lassen sich drei Dimensionen eines elterliches Unterstützungsverhalten herausstellen, welche förderliche Effekte auf die Kompetenzentwicklung, auf motivationale Faktoren, aber auch auf soziale und emotionale Entwicklungsprozesse haben (Pomerantz, Moorman, & Litwack, 2007). Diese Dimensionen sind: Autonomieunterstützung gegenüber einem direktiv-kontrollierenden Verhalten, Prozessorientierung gegenüber einer Produktorientierung sowie eine positive emotionale Einbindung (Lorenz & Wild, 2007; Pomerantz u. a., 2007). Die Frage, die sich nun weiter stellt, ist, wie solche Lerngelegenheiten charakterisiert werden können, die eine konstruktive elterliche Unterstützung begünstigen?

Fermi-Aufgaben als Eltern-Kind-Aufgaben

Für Mathematikaufgaben, welche Eltern und Kinder gemeinsam bearbeiten, stellen die Aufgabencharakteristika Authentizität, Offenheit und Differenzierungsvermögen (Büchter & Leuders, 2009) ein vielversprechendes Fundament dar. Authentische Auseinandersetzungen mit Mathematik, sowohl hinsichtlich des Aufgabenkontextes als auch in Bezug auf die Qualität der mathematischen Prozesse haben ein deutliches Potential, eine innere Anteilnahme hervorzurufen und damit die emotionale Einbindung im Bearbeitungsprozess zu bestärken. Durch die Offenheit einer Aufgabe kann vor allem ein Autonomieempfinden gestärkt werden, da Lösungsweg und Lösung selbst nicht mehr eindeutig vorgegeben sind. Ein hohes Differenzierungspotential ermöglicht die Bearbeitung einer Aufgabe auf individuellem Niveau und kann insbesondere das individuelle Kompetenzerleben fördern. Diese

Aufgabencharakteristika lassen sich z.B. in Fermi-Aufgaben wiederfinden, welche eine vielversprechende mathematische Lerngelegenheit für Eltern und Kinder darstellen.

Eingerahmt wird eine Eltern-Kind-Aufgabe durch die kooperative Lernmethode Ich-Du-Wir, welche die Kommunikation zwischen Eltern und Kindern unterstützt und das Lernen als sozialen Prozess erfahrbar werden lässt. Eine solche methodische Rahmung kann nicht nur als strukturierendes Element dienen, sondern auch ein Gefühl der emotionalen Verbundenheit zwischen Eltern und Kindern bestärken.

Im Folgenden wird an einem konkreten Praxisbeispiel das Potential von Fermi-Aufgaben als Eltern-Kind-Aufgabe unter Rückgriff auf die Dimensionen elterlichen Unterstützungsverhaltens analysiert und diskutiert.

Methodisches Vorgehen

Das hier vorgestellte Eltern-Kind-Projekt wurde im Herbst 2015 mit 28 Eltern-Kind-Paaren einer sechsten Klasse eines Bochumer Gymnasiums im Rahmen einer studentischen Masterarbeit (Osthoff, 2016) durchgeführt. Das als Eltern-Kind-Hausaufgabe gestellte Fermi-Problem befasste sich mit der Bestimmung der jährlichen Energiekosten für ein gemeinsam ausgewähltes elektrisches Gerät aus dem häuslichen Umfeld. Die Eltern-Kind-Hausaufgabe, wurde im Unterricht durch verschiedene Maßnahme vorbereitet, wie die Einführung und Erprobung des Aufgabenformats „Fermi-Problem“ und dem Aufbau grundlegender Stützpunktvorstellungen zum Thema „Stromverbrauch und -kosten“. Zur Bearbeitung hatten Eltern und Kinder 10 Tage Zeit, womit der allgemeinen zeitlichen Belastung von Eltern und Kindern Rechnung getragen wurde.

Das Kooperationsverhalten von Eltern und Kindern wurde mittels eines Fragebogens erhoben, welchen Eltern und Kinder unabhängig voneinander im Anschluss an die Hausaufgabenbearbeitung beantworteten. In diesem Beitrag wird der Fokus auf die Rückmeldungen der Eltern und Kinder zu den offenen Fragen des Fragebogens gelegt, in welchen Eltern und Kinder Aspekte des Bearbeitungsprozesses, individuelle Beiträge zur Problemlösung, Hilfestellungen durch die Eltern sowie den empfundenen Spaßfaktor reflektieren.

Um den Einfluss der Kooperation hinsichtlich der drei Dimensionen Autonomie, Kompetenz sowie emotionaler Einbindung zu untersuchen, wurden die Eltern- und Kinderaussagen fragenübergreifend und den drei Dimensionen zugeordnet. Anschließend wurden zu jeder Dimension signifikante Aussagen identifiziert und ausgewählt. Zwar gelten die im Folgenden wiedergegebenen Aussagen aufgrund forschungsmethodischer Schwachstellen nicht als repräsentativ, jedoch bieten Sie einen Einblick in mögliche Potentiale eines Eltern-Kind-Projekts, welches bislang nahezu einzigartig ist.

Ergebnisse und Diskussion

Die im Folgenden wiedergegebenen Aussagen werden mit V für Vater, M für Mutter, K für Kind und einer Nummer für die Familie gekennzeichnet.

Neben einem Gefühl von emotionaler Eingebundenheit während der Kooperation von Eltern und Kinder bei der mathematischen Problemlösung, wird in den Aussagen deutlich, dass Eltern und Kinder ein Gefühl von Autonomie während der Aufgabenbearbeitung erleben konnten:

> „Mir hat es gut gefallen, weil das Kind und das Elternteil unterschiedliche Lösungsvorschläge hatten und daraus dann eine gemeinsame Lösung gestrickt haben." (V21)

> „Mir hat die Hausaufgabe Spaß gemacht, weil man sich selber ausprobieren konnte und dann die Lösungen vergleichen." (K12)

Dieses Empfinden wird insbesondere durch die Offenheit und die damit verbunden Lösungsvielfalt des Fermi-Problems möglich. Ebenso bietet die methodische Rahmung der Problembearbeitung in ICH- und DU-Phasen Eltern und Kindern die Möglichkeit, unabhängig voneinander zunächst eigene Lösungsideen zu entwickeln und dann auf ihrem individuellen Kompetenzniveau selbstständig eine Lösung zu erarbeiten:

> „In der Lösung hat sich der Unterschied darin ergeben, dass ich eine klassische 3-Satz-Lösung angewandt habe und meine Tochter ganz pragmatisch vorgegangen ist [...]." (M13)

Im gegenseitigen Austausch in der DU-Phase kann die Unterschiedlichkeit der Lösungsprozesse schließlich deutlich werden und gegenseitige Anerkennung finden.

Stellenweise erhielten die Kinder auch Gelegenheiten ihren Eltern Hilfestellungen zu geben oder sie auf Fehler hinzuweisen und konnte auf diese Weise eine Stärkung ihres Kompetenzgefühls erlangen:

> „Es hat Spaß gemacht, weil man die Eltern mal verbessern konnte." (K13)

Neben einer Orientierung hin zum Prozess der Problemlösung werden auch Produktorientierungen und damit verbundene direktive und kontrollierende Verhaltensweisen der Eltern in den Rückmeldungen erkennbar, wie z.B.:

> „[...] es hat mich gestört, dass mein Vater die ganze Zeit auf mein Blatt geguckt hat und mir gesagt hat, dass das falsch wäre." (K 22)

Ein solches direktiv-kontrollierendes Unterstützungsverhalten lässt sich durch nur punktuell eingesetzte Einbindungsmaßnahmen kaum vermeiden.

So bieten Eltern-Kind-Hausaufgaben, wie hier vorgestellt, zwar keine umfassende Lösung, aber eine erste Möglichkeit für Eltern das eigene Verhalten zu reflektieren.

An dieser Stelle ist zu erwähnen, dass die Hausaufgabenpraxis in den Schulen mit dem Ausbau des Ganztagsbereichs aktuell einen starken Wandel erfährt. Hausaufgaben stellen für Eltern allerdings beinahe die einzige Möglichkeit dar, um Informationen über den Lernprozess ihrer Kinder zu erhalten. Aber nicht nur für Eltern ist der Einblick durch die Hausaufgaben von besonderer Bedeutung (Kaufmann, 2013), sondern auch Kinder schätzen die Wahrnehmung ihrer Tätigkeiten durch die Eltern, wie es die folgenden Aussage wiedergibt:

> „Mit meinem Vater hat es Spaß gemacht die Mathe-Hausaufgaben zu machen weil, mein Vater jetzt auch mal weiß was ich jeden Mittag nach der Schule mache.“ (K11).

Durch Eltern-Kind-Hausaufgaben kann somit auch ein allgemeineres Gefühl emotionaler Verbundenheit von Eltern und Kindern, abseits der gemeinsamen mathematischen Problemlösung, gestärkt werden.

Fazit

Die aktive Beteiligung der Eltern in der mathematischen Bildung ihrer Kinder garantiert zwar keinen Bildungserfolg. Durch die Nichtbeachtung der Eltern werden aber vielfältige Möglichkeiten verpasst. Auch wenn das hier vorgestellte Beispiel zur Nutzung von Fermi-Aufgaben als Eltern-Kind-Hausaufgabe keine umfassende Antwort auf die Herausforderungen einer fachspezifischen Elterneinbindung darstellt, werden bereits große Potentiale deutlich. Insbesondere wäre allerdings noch zu empfehlen, vor Einführung von Eltern-Kind-Hausaufgaben mit Eltern über Leitprinzipien konstruktiven Unterstützungsverhaltens zu sprechen, um so eine Reflexion des eigenen Verhaltens anzuregen und zu fördern. Außerdem sollte das Konzept der fachspezifischen Elterneinbindung nicht alleine steht, sondern durch ein übergreifendes Konzept kooperativer Elternarbeit auf Schulebene bestärkt werden.

Literatur

Die Liste mit der im Text angeführten Literatur kann per E-Mail angefordert werden: Natascha.Albersmann@rub.de

Helmut ALBRECHT, Schwäbisch Gmünd

Satellitennavigation – dem GPS auf der Spur.

Das Problem der Navigation ist so alt wie die Menschheit, mussten doch schon unsere Vorfahren in der Steinzeit nach ihren Streifzügen in ihre Höhle zurück finden. Heute erledigt diese Aufgabe ein satellitengestütztes Navigationsgerät, das inzwischen in jedem Smartphone zu finden ist. Bei aller Selbstverständlichkeit, mit der wir uns heut per GPS ans Ziel führen lassen, taucht immer wieder die Frage nach dessen Funktion auf. Diese Frage lässt sich auf unterschiedlichen und insbesondere unterschiedlich anspruchsvollen Niveaus beantworten, für ein wirkliches Verständnis ist ein relativ profundes Wissen aus der Physik und der Mathematik erforderlich. Wer etwas tiefer in die Geheimnisse des *Global Positioning Systems* eindringen will, der stößt schnell auf eine exponentiell anwachsende Anzahl von Fragen, Problemen und Themen, weil jede Antwort ihrerseits neue Fragestellungen aufwirft. Damit ist der Problemkreis der Satellitennavigation hervorragend dafür geeignet, ganz unterschiedliche Themen aus der Physik, der Astronomie und der Mathematik anzureißen und eine eigene Beschäftigung mit diesen Themen zu motivieren. Schließlich bietet damit die Beschäftigung mit der Satellitennavigation eine starke Antwort auf die häufige Frage von einzelne mathematische Verfahren isoliert betrachtenden Schülern und Studierenden, wofür man denn „das Alles“ überhaupt braucht.

Das grundlegende Prinzip der Satellitennavigation besteht darin, dass man zu einem bestimmten Zeitpunkt aus den Positionen von vier Satelliten die eigene Position berechnet. Für diese Bestimmung ist zum einen eine hochgenaue Zeitbasis erforderlich, die sich nur mit Atomuhren herstellen lässt und die zum anderen zu einer ganz speziellen GPS-Zeit geführt hat, welche sich an das Julianische Datum anlehnt.

An die Übertragung der Daten von den Satelliten zum Empfänger werden besondere Anforderungen gestellt: Diese Signale müssen von kleinen Empfängern ohne besondere Antenne empfangbar sein und dürfen nicht von meteorologischen Phänomenen beeinflusst werden. Da alle Satelliten alle Daten über ein und dieselbe Frequenz senden, muss der Empfänger entschlüsseln können, welcher Sender welche Daten gesandt hat. Realisiert wird dies über einen sogenannten „Pseudo Random Noise Code“.

Zur Bestimmung der Satellitenposition muss man sich mit der Himmelsmechanik und den Keplergesetzen beschäftigen. Dabei wird man nicht umhin kommen, sich mit einem inzwischen aus der Mode gekommenen geometrischen Objekt – der Ellipse – auseinanderzusetzen. Nicht zuletzt braucht es für die Ortsbestimmung ein gemeinsames Koordinatensystem. Für die Belange der Satellitennavigation hat sich ein auf die Erde zentriertes und fixiertes Koordinatensystem als vorteilhaft herausgestellt.

Das notwendige mathematische Werkzeug zur Bewältigung der anstehenden Aufgaben für eine Positionsbestimmung aus den Rohdaten umfasst eine große Bandbreite: So benötigt man vom ehrwürdigen Pythagoras und den Apollonischen Ellipsen über mehrdimensionale Funktionen und deren partiellen Ableitungen Kenntnisse zur Linearisierung von Funktionen, die Methode der kleinsten Quadrate sowie eine gehörige Portion lineare Algebra. Aufgrund der Datenmenge, welche mit den mathematischen Werkzeugen verarbeitet werden muss, ist dies weder mit dem Taschenrechner und schon gar nicht von Hand sinnvoll zu erledigen. Hierfür braucht es schon mächtigere Werkzeuge wie beispielsweise Computer-Algebra-Systeme. Mit dem GPS gibt es immerhin eine weitverbreitete Anwendung mit hohem Motivationspotential, um die inhärenten mathematischen Problemstellungen in der Sekundarstufe II oder im Studium mit einer praxisnahen Anwendung zu unterfüttern.

Literatur

Backhaus, Udo: Newton und die Kepler'schen Gesetze (Skript), http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/Astro-Vorlesung/himmelsmWS0203.pdf

Borre, Kai, Strang, Gilbert: Algorithms for Global Positioning, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 2012

Borth, Jan-Hendrik: Positionsbestimmung per GPS (Seminararbeit Uni Koblenz/Landau), http://userpages.uni-koblenz.de/~physik/informatik/Sensoren/gps.pdf

Braun, Matthias: Das GPS-System – Funktionsweise und Einsatzmöglichkeiten im Physikunterricht (Schriftliche Hausarbeit Uni Würzburg), http://www.thomas-wilhelm.net/arbeiten/ZulaGPS.pdf

Global Positioning System Directorate: Navstar GPS Space Segement / Navigation User Segment Interfaces, http://www.gps.gov/technical/icwg/IS-GPS-200F.pdf

Gurtner, Werner: RINEX – The Receiver Independent Exchange Format, ftp://igs.org/pub/data/format/rinex302.pdf

Hofmann-Wellenhof et. al.: GPS in der Praxis, Springer, Wien 1994

Homrighausen, Carina: Das GPS-System. Eine theoretische Annäherung und Ansätze zur Anwendung im Physikunterricht (Masterarbeit Uni Bielefeld), http://www.physik.uni-bielefeld.de/didaktik/Examensarbeiten/MasterarbeitHomrighausen.pdf

Korth, Wilfried: Studienhilfsmittel GPS-Code-Auswertung (Skript), http://public.beuth-hochschule.de/~korth/gps_ausw.pdf

Zogg, Jean-Marie: GPS und GNSS: Grundlagen der Ortung und Navigation mit Satelliten (http://www.zogg-jm.ch/Dateien/Update_Zogg_Deutsche_Version_Jan_09_Version_Z4x.pdf)

Stefanie AREND, Oldenburg

Eine semiotische Perspektive vor dem Hintergrund des RBC-Modells auf den Umgang von Studienanfängern mit der ε-δ-Definition von Stetigkeit

Der Übergang von der Schule zur Hochschule wird für Studienanfänger/innen der Mathematik immer wieder als starker Bruch thematisiert. Ein wesentlicher Aspekt für diesen anspruchsvollen Übergang sind dabei die ganz unterschiedlichen Herangehensweisen an Begriffe wie Stetigkeit. (vgl. Ableitinger 2012) Während Stetigkeit in der Schule primär anhand der Vorstellung von Durchzeichenbarkeit thematisiert wird, steht an der Universität die formale ε-δ-Definition im Mittelpunkt. Diese formale Definition ist dabei insbesondere in Bezug auf den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und für eine Verallgemeinerung auf topologischen Räumen fundamentaler Bestandteil der höheren Mathematik. Neben dieser innermathematischen Relevanz erscheint der Umgang mit solchen formalen Definitionen aber auch dahingehend wichtig, weil damit das logische Denkvermögen ebenso wie der Umgang und die Anwendung von mathematischer Fachsprache geübt und intensiviert werden.

Forschungsfragen und -design

All diese Überlegungen führen zu der zentralen Forschungsfrage des hier vorgestellten Projektes: Welche epistemischen Schwierigkeiten und Hindernisse zeigen sich bei Studienanfänger/innen im Umgang mit der Definition? Dazu: Wie wird mit der Definition im Sinne von Strategien im Rahmen von Stetigkeitsnachweisen im epistemischen Handlungsprozess umgegangen? Und: Wie tief ist das individuelle Verständnis der Studierenden zur Definition konsolidiert? Neben einem Interesse an der Identifizierung von Schwierigkeiten im Umgang mit der Definition und einer Analyse vom Verständnis geht es dabei aber auch um eine Sensibilisierung für den Anspruch, dem Studienanfänger/innen mit der ε-δ-Definition von Stetigkeit gegenüberstehen.

Um eine optimale Datengrundlage zu schaffen wird ein etwa zweiwöchiger Brückenkurs zur ε-δ-Definition von Stetigkeit konzipiert, an dem 18 freiwillige Studierende zu Beginn ihres Studiums teilnehmen. Hier erfahren sie eine erste intensive Auseinandersetzung mit der Definition. Im Anschluss daran werden aufgabenbasierte Einzelinterviews durchgeführt, bei denen es darum geht Stetigkeitsnachweise mit der Definition durchzuführen und zu erklären.

Auswertungsmethodik

Der Fokus bei der Analyse der Daten liegt dann auf den studentischen Erklärungen der selbstständigen Bearbeitungen und den Notizen. Analysegrundlage für den Umgang mit der Definition sind semiotische Prozesskarten (SPK) nach Schreiber (2010). Durch sie wird der Erklärungsprozess als komplexer semiotischer Prozess deutlich, der sich aus Zeichentriaden im Sinne von Peirce zusammensetzt. Dabei besteht ein Zeichen stets aus einem wahrnehmbaren Repräsentamen, dem Interpretanten (üblicherweise als Äquivalent oder Weiterentwicklung vom Repräsentamen) und dem Objekt, für das das Repräsentamen steht (vgl. Nagl 1992, 30).

Zur Erstellung der SKP werden zuvor Analysen mit dem RBC-Modell zur Identifikation epistemischer Handlungen in der Phase der Herausbildung und Festigung des mathematischen Konstruktes durchgeführt. Dabei liegt dem Modell die Annahme zugrunde, dass bestehendes Wissen in neuen Kontexten reorganisiert wird. Zentral sind dann R(ecognizing)-Handlungen, die immer dann auftreten, wenn ein Konstrukt von einem Lernenden in der aktuellen Situation als relevant wiedererkannt wird und ein B(uilding-with), das das Verknüpfen und Zusammensetzen dieser erkannten Konstrukte meint. (vgl. Bikner-Ahsbahs, A., Kidron, I. & Dreyfus, T. 2011)

Für die Analyse vom individuellen Verständnis der Definition wird ein normatives Konsolidierungs-Verständnisdiagramm (KVD) entwickelt:

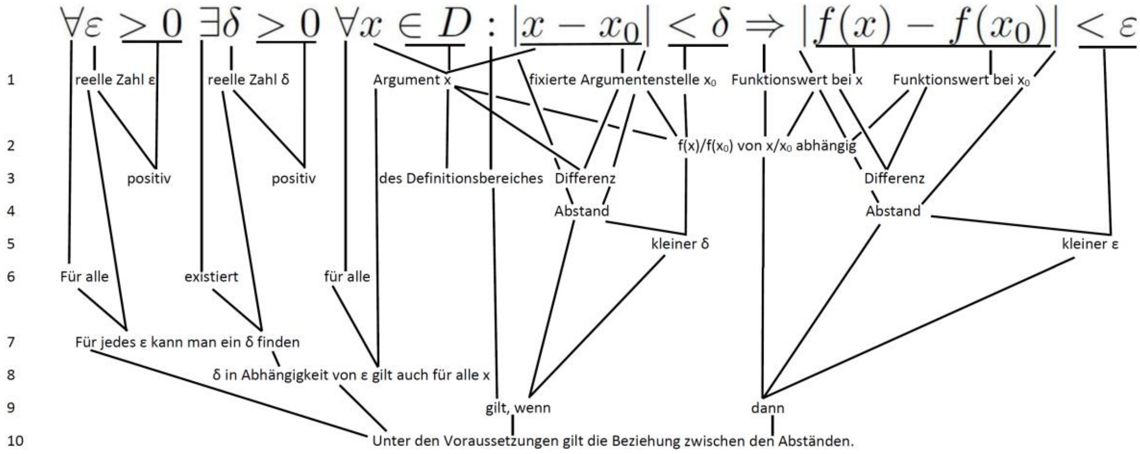


Abbildung 1: normatives Konsolidierungs-Verständnisdiagramm (KVD)

Das KVD basiert dabei auf einer Definition vom Verständnis nach Hiebert et al. (1997, 2): „Knowing a subject means getting inside it and seeing how things work, how things are relates to each other, and why they work like they do.“ Damit wird ein Verständnis der Definition so aufgefasst, dass jedes einzelne Zeichen der Definition für sich und in Relation zu den anderen Zeichen in der Definition (in seiner Funktion) durchdrungen werden muss. Um ein solches Verständnis bei den Studienanfängern dann darstellbar und untereinander vergleichbar zu machen, werden für jeden Studierenden als Konglomerat aus mehreren Aufgabenbearbeitungen individuell gefärbte KVDe erstellt. Diese dienen dann dem Herausarbeiten von Verständnistypen.

Fallbeispiel Anna und Bärbel

Im Zuge der Interviews wird von Anna und Bärbel ein Nachweis mittels der ε-δ-Definition gefordert, dass die konstante reelle Funktion f(x)=4 stetig ist. Eine erste Analysephase mit dem RBC-Modell macht deutlich, dass beide Studenten die zentralen Bestandteile der Definition wiedererkennen und sie in B-Handlungen etwas mit den Zeichen anfangen können. Zusammen mit der semiotischen Analyse ergeben sich dann die folgenden beiden SPK, die hier nur in ihrer Struktur erfasst werden sollen (links: Anna, rechts: Bärbel):

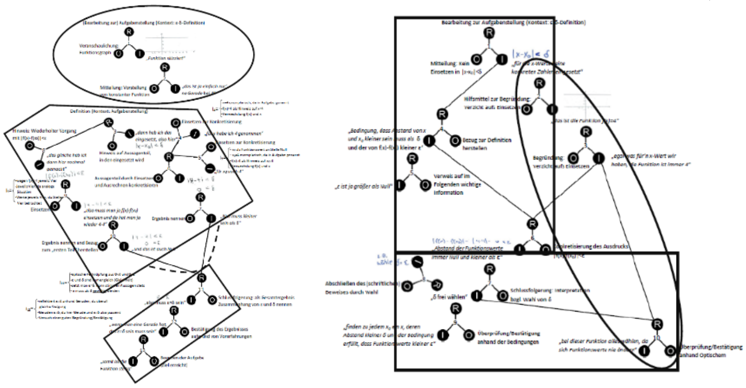


Abbildung 2: Struktur SPK Anna und Bärbel

Die beiden Ovale stehen dabei für den Einsatz von einer Skizze oder Überlegung zu der als besonders (wieder)erkannten Funktion. Bei Anna wird deutlich, dass die Triaden in der SPK völlig unverbunden zum übrigen Erklärungsprozess sind. Aus der Struktur der SPK von Bärbel geht hervor, dass sie immer wieder Verknüpfungen zur Funktion herstellt und nutzt. Damit einher geht auch, dass sich Anna primär auf Einsetzungen in die beiden zentralen Ungleichungen $|x-x_0|<\delta$ und $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ fokussiert (vgl. Fünfeck in Struktur). Sie setzt dabei aber nicht nur die Funktionswerte als Vier, sondern auch x und x_0. Mit dem Einbeziehen einer Zeige-Geste kann später vermutet werden, dass Anna mit x_0 den Funktionswert an der Stelle Null assoziiert. Eine Erklärung für das Setzen von x=4 ist nicht zu finden. Da sich dann in beiden Beträgen Null ergibt folgert die Studentin vor dem Hintergrund einer erinnerten Wahl für ε (anstatt für δ) in einem „lokalen Schluss“, dass ε=δ sein muss. Dieser Schluss ist in der Struktur mit der gestrichelten Verbindung der beiden Vielecke visualisiert. Bärbel hingegen erinnert sich zwar auch an eine Wahl für δ, ihr gelingen im neuen Kontext der Aufgabe aber flexible B-Handlungen. Dabei ist sie weniger auf Einsetzungen als das Erfassen von Strukturen fokussiert, sodass sie keine konkreten Zahlenwerte für die Argumente verwendet. Stattdessen schließt sie wegen der Differenz der Funktionswerte als Null auf eine Beliebigkeit der Wahl und setzt „z.B. δ=ε“. Aus der Struktur der SPK geht hervor, dass das Erfassen der Struktur und der Schluss der Wahl (als die beiden Rechtecke) wesentlich (globaler) miteinander und auch mit der Skizze verbunden sind. Dieser Umgang mit der Definition wird später als typisch herausgestellt und mit den Strategien „Ich suche eine Struktur!“ und „Grafik hilft!“ umschrieben. Die Strategie von Anna hingegen wird mit „Erstmal einsetzen!“ bezeichnet.

Bezogen auf das individuelle Verständnis der beiden Studierenden entsteht bei Anna vor allem auf der Grundlage der Schwierigkeiten mit Argument und Funktionswert (Ebene 1 und 2 im KVD) und der Tatsache, dass sie ein ε anstatt δ wählt (Ebene 7 und 8) ein eher schwaches KVD. Das KVD von Bärbel hingegen ist wesentlich stärker ausgebaut. Jedoch werden auch bei ihr insgesamt Unsicherheiten mit der logischen Komplexität (Ebene 9 und 10, insbesondere mit der Implikation) der Definition deutlich.

Ergebnisse und Fazit

Bei den Studierenden mit einem tieferen Verständnis dominieren Strategien, bei denen nach Strukturen gesucht wird. Bei denen mit einem schwächeren Verständnis findet sich häufiger die Fokussierung auf Einsetzungen. Potenzial zeigt sich aber gerade darin, dass alle Probanden einen Ansatz haben.

Beim Herausarbeiten der Verständnistypen fällt weiter auf, dass viele der Studienanfänger/innen wie Anna bereits fundamentale Schwierigkeiten auf den ersten Ebenen des KVDs haben. Außerdem zeigt sich, dass keiner der Studierenden die logische Komplexität und damit die Ebene 9 und 10 des KVDs vollständig durchdringt. Das lässt den Schluss zu, dass das Erfassen der logischen Komplexität der Definition mit Implikation und Quantifizierungen als epistemologisches Hindernis im Sinne von Brousseau (1997) identifiziert werden kann. Das geht auch mit einer historischen Analyse der Entwicklung der Definition einher, bei der Weierstraß z. B. erst in den 1850er Jahren die Quantoren für die Definition der Stetigkeit einführte (Grabiner 1983). Solche epistemologischen Hindernisse rechtfertigen auch eine lange individuelle Lernentwicklung im Umgang mit der Definition und sensibilisieren für den Anspruch, dem Studienanfänger/innen gegenüberstehen.

Literatur

Ableitinger, C. (2012). Typische Teilprozess beim Lösen hochschulmathematischer Aufgaben. *Journal für Mathematik-Didaktik, 33, Issue 1,* S.87-111.

Bikner-Ahsbahs, A., Kidron, I. & Dreyfus, T. (2011). *Epistemisch handeln können – aber wie?* Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Münster: WTM-Verlag.

Brousseau, G. (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics: didactique des matématiques, 1979-1990. Dodrecht, Netherlands: Kluwer.

Grabiner, J.V. (1983). Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus. *The American Mathematical Monthly, Volume 90, Number 3,* p. 185-194.

Hiebert, J., Carpenter, T.P., Fennema, E., Fuson, K., Human, H., Oliver, A. & Wearne, D. (1997). *Making sense. Teaching and learning mathematics with understanding.* Heinemann: Portsmouth.

Nagl, L. (1992). *Charles Sanders Peirce.* Frankfurt am Main: Campus Verlag.

Schreiber, C. (2010). *Semiotische Prozess-Karten, Chatbasierte Inskriptionen in mathematischen Problemlöseprozessen.* Dissertation. Münster: Waxmann.

Daniela AßMUS, Torsten FRITZLAR, Halle an der Saale

Mathematische Begabung und Kreativität im Grundschulalter

Für die Definition und Charakterisierung mathematischer Kreativität greift man häufig auf Ausführungen zur Kreativität allgemein zurück und bezieht diese auf die Domäne Mathematik. Dabei wird beispielsweise nach Rhodes (1961) zwischen Kreativität als Eigenschaft eines Produkts (z. B. Neuheit, Nützlichkeit), einer Person bzw. als deren Fähigkeit zu kreativem Denken (z. B. Fluency, Flexibility, Originality, Elaboration), eines Prozesses und kreativitätsbeeinflussenden Umweltfaktoren unterschieden. Das Kriterium der Nützlichkeit wird allerdings auch für die Mathematik teilweise kritisch gesehen (Sriraman, 2009).

(Mathematische) Kreativität wird häufig in engem thematischem Zusammenhang zu mathematischer Begabung genannt. Dabei werden beide Konstrukte im wissenschaftlichen Kontext in unterschiedlicher Weise zueinander in Beziehung gesetzt. Unterscheiden lassen sich u. E. die folgenden Sichtweisen (s. auch Aßmus, i.Vorb.):

1. (mathematische) Kreativität als Voraussetzung für (mathematische) Begabung
2. (mathematische) Kreativität als mögliche Komponente von mathematischer Begabung
3. Kreativität als eigenständiger Begabungsbereich
4. mathematische Kreativität und mathematische Begabung als Konstrukte mit gemeinsamen Elementen
5. (mathematische) Kreativität als mögliche Folge von (mathematischer) Begabung

Zu 1.: Hier wird neben weiteren Komponenten (mathematische) Kreativität als notwendige Voraussetzung für die Entwicklung einer (mathematischen) Begabung angesehen. Eine solche Sichtweise findet sich zum Beispiel (nicht spezifisch auf Mathematik bezogen) im Drei-Ringe-Modell nach Renzulli (1978). Für die Entwicklung von begabtem Verhalten hält er eine hohe Kreativität für wesentlich. Eine ähnliche Modellierung hat Leikin (2009) für mathematische Begabung vorgenommen, wobei sie diese als besondere Problemlösefähigkeit versteht.

Zu 2.: In einigen Begabungsmodellierungen wird Kreativität nicht als Voraussetzung für mathematische Begabung verstanden, sondern eher als Teil der Begabung selbst. Kreativität nimmt dabei neben weiteren mathematikspezifischen Fähigkeiten die Rolle einer nicht notwendigen Begabungskomponente ein, die somit eher begabungstypprägend wirkt. Diese Sichtweise vertritt z. B. Käpnick (1998), der mathematische Phantasie (den seiner Meinung nach wichtigsten Aspekt kindlicher Kreativität) als ein mögliches Begabungsmerkmal nennt.

Zu 3.: In einigen Modellierungen wird Kreativität als weitgehend eigenständiger Begabungsbereich aufgefasst. Ein bekanntes Beispiel dafür stellt das „Differentiated Model of Giftedness and Talent“ von Gagné (1985) dar, in dem Kreativität als einer von vier Begabungsbereichen angeführt wird. Andere unterscheiden zwei verschiedene Begabungsbereiche, von denen einer einen Kreativitätsschwerpunkt hat (z. B. „schoolhouse giftedness“ vs. „creative giftedness“, Renzulli & Reis, 2003). Von ebenfalls zwei Bereichen gehen Milgram und Hong (2009) in ihrem „Comprehensive Model of Giftedness and Talent“ aus, in dem sie zwischen „analytical-thinking ability“ und „creative-thinking ability“ differenzieren. Bei günstigem Zusammenwirken verschiedener Komponenten kann sich danach „expert talent“ oder „creative talent“ entwickeln. Dabei sind für beide Talentformen zwar beide genannten Fähigkeiten notwendig, für das „expert talent“ überwiegen jedoch die analytischen und entsprechend für das „creative talent“ die kreativen Fähigkeiten.

Zu 4.: Auch wenn die Beziehung zwischen mathematischer Begabung und mathematischer Kreativität häufig nicht explizit in den Blick genommen wird, lassen sich in Modellierungen der beiden Konstrukte neben Unterschieden auch gemeinsame Elemente identifizieren. Dies legt nahe, dass es sich zwar nicht um gleiche, aber zumindest um in Teilen sehr ähnliche Konstrukte handelt. Die Gemeinsamkeiten beziehen sich zum einen auf mathematikspezifische Komponenten, zum anderen auf intra- oder inter- personale Einflussfaktoren. Folgende mathematikspezifische Komponenten lassen sich sowohl in Begabungs- als auch in Kreativitätsmodellierungen finden: Wechseln der Repräsentationsebenen, Umkehren von Gedankengängen, Erkennen mathematischer Relationen und Strukturen (unter Nutzung komplexer und nicht-algorithmischer Denkvorgänge), Verallgemeinern von mathematischen Ideen.

Zu 5.: Hier ist (mathematische) Begabung eine notwendige Voraussetzung für (mathematische) Kreativität. Mathematische Begabung kann zur Schaffung herausragender kreativer Produkte führen. Diese kreativen Produkte werden als Indikator für eine besonders hohe mathematische Begabung verstanden, stellen also ein Qualitätskriterium dar. Beispielhaft für ein solches Verständnis sei die Hierarchie mathematischen Talents nach Usiskin (2000) angegeben (s. Sriraman, 2005). Den beiden höchsten Stufen gehören Personen mit besonders kreativen Leistungen an. Die beiden darunter liegenden Stufen umfassen Personen, denen zwar auch mathematisches Talent zugeschrieben wird, die jedoch (noch) keine herausragenden kreativen Leistungen gezeigt haben.

Die betrachteten Sichtweisen 1 bis 5 beleuchten zwar unterschiedliche Zusammenhänge zwischen (mathematischer) Begabung und (mathematischer) Kreativität, im Widerspruch zueinander stehen sie jedoch nicht. Vielmehr resultieren die Unterschiede vor allem aus verschiedenen Begriffsverständnissen von Begabung (Begabung als Kompetenz vs. Begabung als Performanz) und Kreativität (Kreativität als Personen- vs. Kreativität als Produkteigenschaft).

Wird Begabung als Kompetenz, also als Potential für besondere Leistungen definiert und Kreativität eher als Personeneigenschaft gesehen, führt dies zur zweiten Sichtweise. Bei einem Verständnis von Begabung als Performanz ergibt sich im Zusammenhang mit Kreativität als Personeneigenschaft als Voraussetzung für besondere Leistungen die Sichtweise 1. Zeigt sich bei gleichem Begabungsverständnis Performanz unter anderem in der Erstellung kreativer Produkte, erhält man Sichtweise 5.

Die im vorigen Absatz genannten Sichtweisen lassen sich für Begabung als Kompetenz oder Performanz in folgender Weise zusammenführen und (auf Begabung allgemein oder auf mathematische Begabung bezogen) als Modell veranschaulichen. Zu beachten ist, dass die Modelle vorrangig die Zusammenhänge zwischen Begabung und Kreativität darstellen und weitere Einflussfaktoren nicht umfassen:

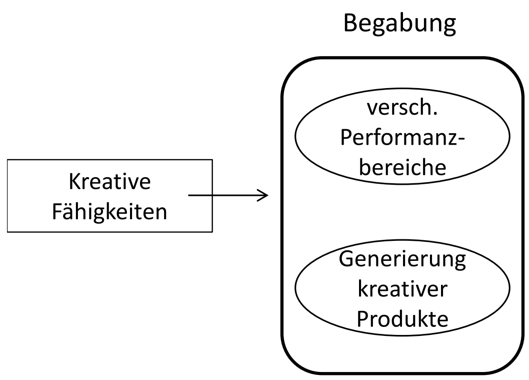


Abb. 1: Kreativität und Begabung als Performanz

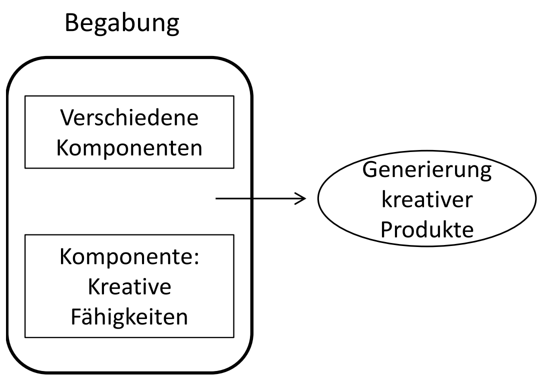


Abb. 2: Kreativität und Begabung als Kompetenz

Weitgehende Einigkeit zumindest in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik besteht darin, mathematische Begabung im Grundschulalter als Potential für (spätere) außergewöhnliche Leistungen in der Domäne Mathematik anzusehen. Dies würde dem Modell in Abb. 2 entsprechen.

Den beiden übrigen Sichtweisen kann man durchaus auch kritisch begegnen. In Bezug auf Sichtweise 3 lässt sich anmerken, dass der Nachweis eines eigenständigen kreativen Begabungsbereichs noch nicht zufriedenstellend gelungen ist. Möglicherweise handelt es sich hier eher um verschiedene Begabungsausprägungen wie in der zweiten Sichtweise.

Bei Sichtweise 4 ist zu hinterfragen, ob die genannten Komponenten wirklich immer beide Konstrukte treffend beschreiben. Möglicherweise passen Merkmale wie das Suchen nach Mustern und Strukturen und das Verallgemeinern eher zum mathematischen Denken allgemein und weniger zur mathematischen Kreativität. Das eigenständige Wechseln von Repräsentationen wiederum könnte als Indikator für flexible bzw. kreative Denkhandlungen angesehen werden.

Für weiterführende Überlegungen und Untersuchungen könnte es unseres Erachtens nützlich sein, zum einen zwischen flexiblem und kreativem Denken zu unterscheiden. Zum anderen scheint uns wesentlich, auf welche Vergleichsgruppe man sich bei der Identifikation kreativer Akte und Produkte bezieht.

Literatur

Aßmus, D. (i.Vorb.). *Mathematische Begabung im frühen Grundschulalter unter besonderer Berücksichtigung kognitiver Merkmale*. Münster: WTM.

Gagné, F. (1985). Giftedness and talent: Reexamining a reexamination of the definitions. *Gifted Child Quarterly 29*(3), 103–112.

Käpnick, F. (1998). *Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter*. Frankfurt am Main: Lang.

Leikin, R.; Koichu, B. & Berman, A. (2009). Mathematical giftedness as a quality of problem-solving acts. In R. Leikin et al. (Hrsg.): *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (S. 115-227). Rotterdam, Boston, Taipei: Sense Publishers.

Milgram, R. M., & Hong, E. (2009). Talent loss in mathematics: causes and solutions. In R. Leikin et al. (Hrsg.): *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (S. 149–163). Rotterdam, Boston, Taipei: Sense Publishers.

Renzulli, J. S. (1978). What Makes Giftedness? Reexamining a Definition. *Phi Delta Kappan, 60*(3), 180-184, 261.

Renzulli, J. S., & Reis, S. M. (2003). The schoolwide enrichment model: Developing creative and productive giftedness. In N. Colangelo & G. A. Davis (Hrsg.): *Handbook of gifted education* (3. Aufl., S. 184–203). Boston: Allyn and Bacon.

Rhodes, M. (1961). An analysis of creativity. *The Phi Delta Kappan 42*(7), 305-310.

Sriraman, B. (2005): Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *The Journal of Secondary Gifted Education 17 (1)*, 20–36.

Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 41*(1-2), 13–27.

Dörte BALCKE, Augsburg

Schulbuchvergleich der Sekundarstufe I im Fach Mathematik zwischen Bayern und Tschechien

Die Kompetenzorientierung von Unterricht stellt den aktuellen Trend in der Unterrichtsentwicklung dar. Zu diesem Zweck wurden von der Kultusministerkonferenz Bildungsstandards für einzelne Bildungsgänge formuliert, die dazu dienen sollen, fachspezifische Fähigkeiten und Fertigkeiten von Schülern/innen nach bestimmten Abschnitten bzw. am Ende einzelner Bildungsgänge besser überprüfen zu können. Hinsichtlich der Förderungsmöglichkeiten des Kompetenzerwerbs der Schüler/innen im Unterricht beschränken sich die Empfehlungen für Lehrkräfte darauf, den Unterricht statt lehrerstärker schülerzentriert zu gestalten. Der Einsatz und insbesondere die Gestaltung von Lehr-/Lernmitteln hinsichtlich des Kompetenzerwerbs im Unterricht finden in der wissenschaftlichen Forschung bisher kaum Beachtung (vgl. Schmit et al. 2012, S. 69). Das Mathematikschulbuch als Lehr-/Lernmittel spielt jedoch für die Lehrkraft bei der Planung und Durchführung von Unterricht eine wichtige Rolle. Auf die Nutzung der Bildungsstandards für die Unterrichtsentwicklung bezogen lässt sich daraus schließen, dass „ein guter wissensbasierter und kompetenzorientierter Unterricht maßgeblich auch von guten Schulbüchern abhängt“ (KMK 2010, S. 29). In diesem Beitrag werden die Ergebnisse einer vergleichenden, exemplarischen Analyse bayerischer und tschechischer Schulbücher der Sekundarstufe I vorgestellt, deren Ziel darin bestand, herauszufinden, ob und inwieweit aktuelle Mathematikschulbücher die Vorgaben der Bildungsstandards bereits berücksichtigen.

1. Fragestellung und Vorgehensweise

Für eine Legitimation des Schulbuchvergleichs wurden zunächst die Bildungssysteme, die Lehrpläne und die Zulassungsverfahren von Schulbüchern in Bayern und Tschechien miteinander verglichen. Die anschließende Schulbuchanalyse sollte u.a. folgende Fragestellungen beantworten: (1) Welche Kompetenzen können von den Schülern/innen durch die Aufgabengestaltung zum Thema „Prozentrechnung“ in den Schulbüchern der drei Schularten bayerische Mittel- und Realschule sowie tschechische Grundschule erworben werden? (2) Mit welchen Sachbereichen wird die Prozentrechnung in den einzelnen Schularten vermittelt?

Für die Analyse wurden die in Deutschland entwickelten Kompetenzmodelle in den Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss und den Hauptschulabschluss zugrunde gelegt (vgl. Ehmke et al. 2006). In der Schulbuchanalyse erfolgte zunächst die Betrachtung der Einzelaufgaben hinsichtlich ihrer möglichen Kompetenzförderung, indem die allgemeinen mathematischen Kompetenzen, mathematischen Leitideen und Anforderungsbereiche entsprechend den Bildungsstandards den Aufgaben zugeordnet wurden. Im Anschluss wurden die einzelnen Sachbereiche der Prozentaufgaben mit den Kategorien: *Preise und Finanzen, Gehalt, Schulalltag, Ernährung und Gesundheit, Naturwissenschaften und Technik, Energie und Umwelt, Arbeits- und Berufswelt* sowie *Sonstiges* erfasst.

2. Die Schulbuchanalyse

Die Gegenüberstellung der Bildungssysteme, der Lehrpläne der bayerischen Mittel- und Realschule sowie der tschechischen Grundschule – die neun Klassenstufen beinhaltet, die der Primar- und Sekundarstufe I entsprechen – und der Schulbuchapprobationen hat ergeben, dass ein Schulbuchvergleich der drei Schularten gerechtfertigt ist. Die untersuchten Schulbücher stammen jeweils von der Liste der empfohlenen Lehr-/Lernmittel der zuständigen Ministerien in Bayern und Tschechien und werden jeweils in konkreten Schulen verwendet. Laut Lehrplan der bayerischen Mittelschule wird das Thema „Prozentrechnung" in der siebten, achten und neunten Jahrgangsstufe vermittelt, deshalb wurden die Mathematikschulbücher dieser drei Jahrgangsstufen mit der Unterscheidung zwischen Regel- und M-Klasse untersucht: sechs Exemplare (7, M7, 8, M8, 9, M9) des Verlages Cornelsen „Lernstufen Mathematik" für die Hauptschule Bayern (Braunmiller; Leppig; Schremmer 2007). Im Lehrplan der bayerischen Realschule kommt die Prozentrechnung in der sechsten und siebten Jahrgangsstufe vor, dementsprechend wurden drei Exemplare „Mathematik 6", „Mathematik 7 I" und „Mathematik 7 II/III" des Westermann Verlages für die Realschule Bayern (Englmaier; Gierisch; Götz; Liebau; Mohr; Widl 2011) analysiert. In der tschechischen Grundschule verteilt sich das Thema „Prozent- und Zinsrechnung" laut Lehrplan über die siebte und achte Jahrgangsstufe. Die Schulbuchverlage sind nicht zwingend an den Lehrplan gebunden, deshalb können Differenzen zwischen Lehrplan und Schulbuch auftreten. So beinhaltet das für die Untersuchung gewählte Schulbuch des PRODOS-Verlages die Prozentrechnung nur in der siebten Jahrgangsstufe: „Matematika 7" (Molnár; Lepík; Lišková; Slouka 1999).

3. Ausgewählte Ergebnisse

Der Datensatz für die Analyse, d.h. die Anzahl der Aufgaben in den Schulbüchern zum Thema „Prozentrechnung" stellte sich ungleich verteilt dar: bayerische Mittelschule Regelklasse mit 401 Aufgaben und M-Klasse mit 549 Aufgaben aus jeweils drei, bayerische Realschule mit 130 Aufgaben aus zwei Jahrgangsstufen sowie die tschechische Grundschule mit 87 Aufgaben aus einer Klassenstufe.

Der direkte Vergleich der Verteilung der Kompetenzen und Sachbereiche in den drei Schularten für die siebte Jahrgangsstufe zeigt ein sehr ähnliches Bild, obwohl sich die Schüler/innen der jeweiligen Schulart in verschiedenen Stadien ihres Lernprozesses befinden.

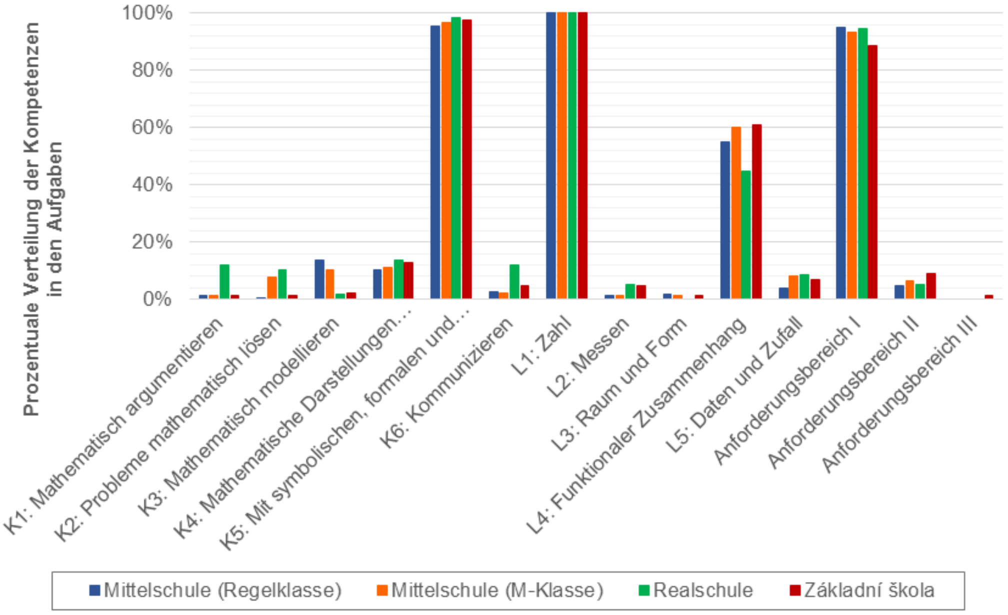


Abb. 1: Vergleich der prozentualen Verteilung der Kompetenzen in den Aufgaben der Jahrgangsstufe 7 der drei Schularten.

In allen drei Schularten dominieren die Kompetenzen *K5* und *L1* (siehe Abb.1), das bedeutet, dass die Aufgaben mit einem starken Fokus auf die unmittelbar die Prozentrechnung betreffenden Kompetenzen gestaltet sind. Für die Einführung in die Thematik und den Verständnisprozess der Schüler/innen ist dies wichtig, jedoch kann bei einem Verbleib auf dieser Ebene überwiegend nur Faktenwissen und ansatzweise prozedurales Wissen vermittelt werden (vgl. Metz et al. 2012, S. 27). Diese Tatsache spiegelt sich auch im sehr hohen Anteil von Aufgaben mit dem Anforderungsbereich I wider.

Auch der Vergleich der Sachbereiche in den Aufgaben der drei Schularten fällt ähnlich aus (siehe Abb. 2). Am häufigsten wird die Prozentrechnung mit dem Bereich *Preise und Finanzen* vermittelt. So wird zwar ein hoher Alltagsbezug hergestellt, jedoch nur wenig auf die Lebenswelt der Jugendlichen eingegangen, sodass das Interesse der Lernenden schnell verloren gehen kann.

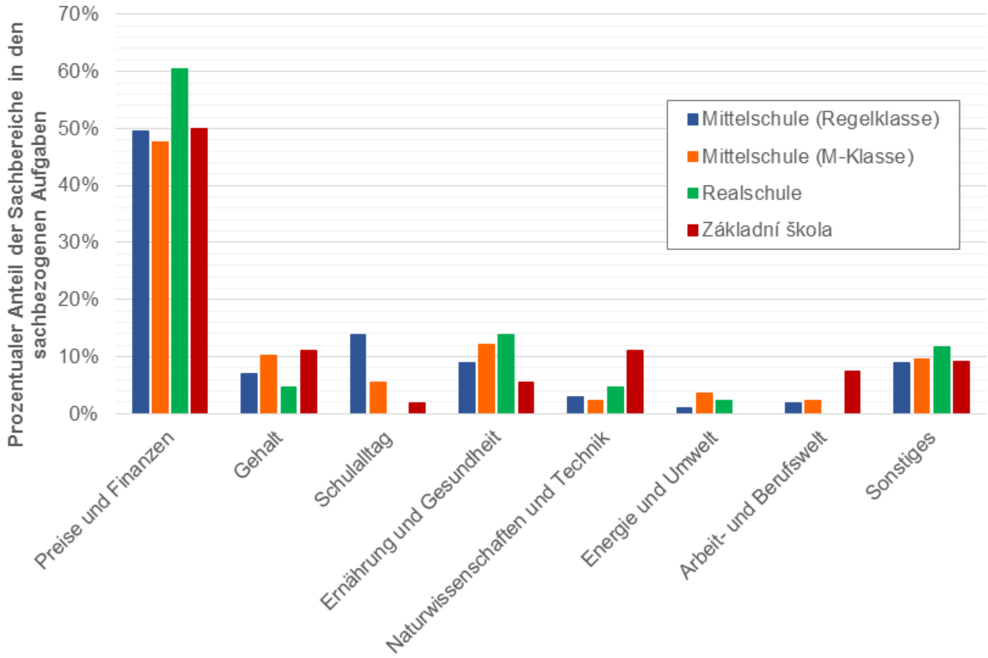


Abb. 2: Vergleich der prozentualen Verteilung der Sachbereiche in den Aufgaben der Jahrgangsstufe 7 der drei Schularten.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass das Spektrum der Gelegenheiten zum Kompetenzerwerb in der Prozentrechnung relativ klein ist. In allen drei Schularten wurden sich bietende Anknüpfungsmöglichkeiten an andere mathematische Gebiete und darin zu erwerbende Kompetenzen nicht genutzt. Durch diese Art der Aufgabengestaltung bieten sich für die Lehrkräfte angesichts ihrer heterogenen Schülerschaft zudem nur sehr beschränkte Möglichkeiten für eine Differenzierung im Unterricht mithilfe des Mathematikschulbuchs.

Literatur

Schmit, Stefan; Peters, Sebastian; Komorek, Michael (2012): *Zur Strukturierung von Lernprozessen durch Aufgaben.* In: Sascha Bernholt (Hg.): Konzepte fachdidaktischer Strukturierung für den Unterricht. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, Jahrestagung in Oldenburg 2011. Münster: LIT, 68-70.

Ehmke, Timo; Leiß, Dominik; Blum, Werner; Prenzel, Manfred (2006): *Entwicklung von Testverfahren für die Bildungsstandards Mathematik. Rahmenkonzeption, Aufgabenentwicklung, Feld- und Haupttest.* In: Unterrichtswissenschaft 34 (3), 220-238.

Metz, Kerstin; Maier, Uwe; Kleinknecht, Marc; Bohl, Thorsten; Hoppe, Henriette (2012): *Einsatz eines fächerübergreifenden Kategoriensystems zur Analyse von Aufgaben im Fach Deutsch.* In: Anja Ballis und Ann Peyer (Hg.): Lernmedien und Lernaufgaben im Deutschunterricht. Konzeptionen und Analysen. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, 25-47.

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (KMK) (2010): *Konzeption der Kultusministerkonferenz zur Nutzung der Bildungsstandards für die Unterrichtsentwicklung*. Köln: Link.

Johannes BECK, Würzburg

Ein Entwicklungsmodell zum Dokumentieren beim Einsatz von digitalen Technologien

Beim Einsatz digitaler Technologien wie Computeralgebrasystemen (CAS) ist es Gegenstand zahlreicher Diskussionen, wie Lösungen im Unterricht und in Prüfungen auf Papier notiert oder dokumentiert werden sollen.

Lösungsdokumentationen als Texte

Zunächst einmal sind Lösungsdokumentationen Texte mit mathematischem Inhalt gemäß der Definition von Text nach Paul Ricoeur, die als konstitutives Merkmal die „schriftliche Fixierung von Sinn“ (Beck / Maier 1994a, S.43) sieht. Dies erstreckt sich nach Beck und Maier auch auf Bilder und Graphiken (vgl. Beck / Maier 1994b, S.48). Einen Text zu verstehen, bedeutet demgemäß also den fixierten Sinn zu rekonstruieren. Busse weist darauf hin, dass man „den Kern des Verstehens von Schrifttexten auf die Zuordnug von Elementen des verfügbaren Wissens zu Elementen des Textformulars [reduzieren kann]“ (Busse 2015, S. 320). In der speziellen Situation der Prüfung ist der Lehrer gleichzeitig Leser und Korrektor des mathematischen Inhalts des Textes und daher sollten Verständnisschwierigkeiten nicht auf fehlendes Wissen seitens des Lehrers zurückzuführen sein. Folglich sind die Elemente des Textes (der Lösungsdokumentation) das Entscheidungsmoment des Verständnisses.

Modell zur Beschreibung von Schülerlösungen

Daraus ergibt sich die Frage, wie man die Elemente des Textes genauer beschreiben und ggf. klassifizieren kann. Ein erster Vorschlag dazu (vgl. Beck 2015) wurde anhand weiterer Schülerlösungen überarbeitet und in seiner Ausrichtung angepasst. Die Leitfrage der Analyse lautet: „Mit welchen Darstellungsmitteln wird auf welche Tätigkeiten im Lösungsprozess verwiesen?“ Diese Frage trägt einerseits dem obigen, weit gefassten Textverständnis Rechnung, andererseits wird aber auch versucht, die veränderte Unterrichtskultur durch den CAS-Einsatz nicht aus dem Blick zu verlieren. Die Grundüberzeugung diesbezüglich ist, dass die Schülerinnen und Schüler Tätigkeiten auf andere Art (z.B. das Lösen von Gleichungen mit dem symbolischen Rechner per Knopfdruck) und als Folge dessen auch andere Tätigkeiten an sich (z.B. das experimentelle Verändern von Variablen mittels Schieberegler) ausführen (vgl. Barzel ea. 2005). Wie diese veränderten Tätigkeiten zu dokumentieren sind, ist offen: es gibt keine aus der Mathematik heraus begründbaren Sachzwänge, die das Aufschreiben regeln könnten. Daher ist der Blick in die Praxis wichtig, da Schülerinnen und Schüler (und auch Lehrerinnen und Lehrer) angesichts der gegenwärtigen Situation einer fehlenden normativen Setzung im Schulalltag ihre eigenen Methoden entwickeln (vgl. auch Ball 2014).

Um die Art, wie Schülerinnen und Schüler dokumentieren, genauer zu beleuchten und Besonderheiten festzustellen, wurden 36 bzw. 18 authentische Abiturlösungen aus dem bayerischen CAS-Abitur von 2014 und 2015 im Bereich der Analysis entsprechend der oben genannten Analysefrage untersucht und Bedeutungselemente entsprechend der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring in Kategorien eingeteilt (vgl. Mayring 2015). Durch eine Kombination der beiden wesentlichen Dimensionen ergibt sich das in Abbildung 1 dargestellte zweidimensionale Raster.

Darstellungsbezogene Dimension

Rechnereinsatz	Input / Output	unspezifisch	nur wenn Zeichnung gefordert
Mathematisieren/ Interpretieren	unterstützend	ja	
Erklärungen	unterstützend	ja	unterstützend
Ergebnisse	ja	ja	nur wenn Zeichnung gefordert
Mathematischer Ansatz	ja	ja	
Strukturierungs-elemente	ja	ja	
	formelsprachliche Ausdrücke • mathematische Symbole • Rechnersyntax	Verbalisierungen	sonstige Darstellungen: • Graphen • Tabellen • Skizzen etc.

Tätigkeitsorientiere Dimension

Abbildung 1 – Deskriptives Raster

In der darstellungsbezogenen Dimension werden formelsprachliche Ausdrücke, Verbalisierungen und sonstige Darstellungen unterschieden. Durch den CAS-Einsatz tritt neben der traditionellen mathematischen Formelsprache auch eine rechnerspezifische Syntax – wie etwa solve(f‘(x)=0, x) – auf. Verbalisierungen umfassen alle Äußerungen, die „mit Worten“ festgehalten sind. Dies können einzelne Wörter, Versatzstücke oder auch Passagen ausformulierter Sätze sein, wie sie etwa bei einigen Schülerdokumentationen auftreten. Es liegt auf der Hand, dass in verbalisierten, mathematischen Texten formelsprachliche Ausdrücke auftreten. An dieser Stelle entsteht für die

Kategorisierung die Schwierigkeit der nicht eindeutigen Zuordnung, die jedoch dadurch gelöst werden kann, dass jedes Element als „Box“ aufgefasst werden kann, die weitere Elemente beinhalten darf. Beispielsweise ist das Element „$f_1(x)$ ableiten“ eine Verbalisierung, enthält aber mit $f_1(x)$ auch einen formelsprachlichen Ausdruck.

Alle anderen Darstellungsarten wurden in der Kategorie „sonstige Darstellungen“ zusammengefasst.

Die tätigkeitsbezogene Dimension enthält die Kategorien Rechnereinsatz, Mathematisierungen / Interpretationen, Erklärungen, mathematischer Ansatz, Ergebnisse und Strukturierungselemente, die weitestgehend bei Beck (2015) erklärt wurden.

Ein Entwicklungsmodell

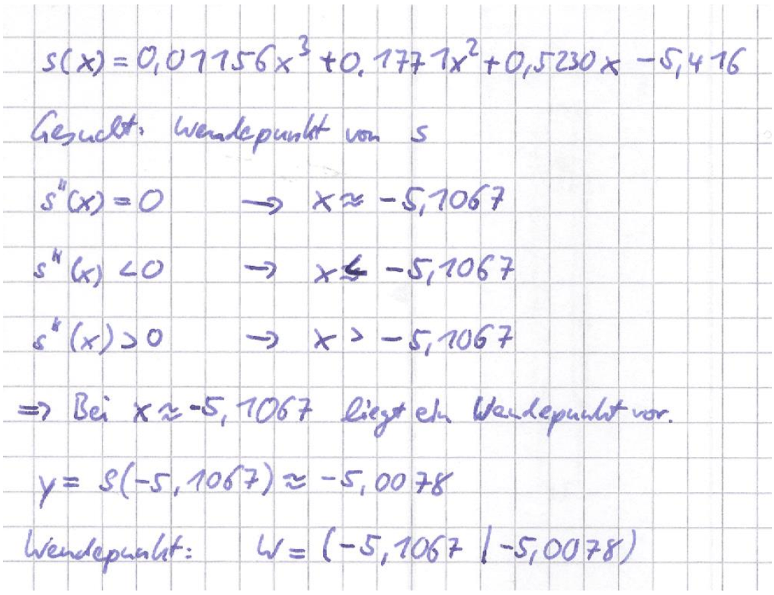
Auf Grundlage des obigen deskriptiven Rasters wird derzeit ein Modell entwickelt, das Entwicklungslinien aufzeigen soll, wie Dokumentationen im Laufe der Oberstufe entwickelt werden könnten. Das Modell umfasst drei Stufen: Novize, Fortgeschrittener, Experte. Für Novizen (gemeint sind Schüler, die das CAS gerade erst bekommen haben) ist es wichtig, neben neuen mathematischen Inhalten den Umgang mit dem CAS zu erlernen. Die Dokumentationen fokussieren daher auf diese beiden Aspekte, d.h. die Kategorien „mathematischer Ansatz“ und „Rechnereinsatz“ müssen sinnvoll verbunden werden.

Fortgeschrittene sollten keine grundsätzlichen Schwierigkeiten mehr mit der Bedienung des Werkzeugs haben. Daher kann die Dokumentationen auf die Kommunikation von mathematischem Inhalt fokussiert werden.

Grundsätzliches Ziel sollte es sein, dass Schülerinnen und Schüler, die die Stufe der Experten erreicht haben, in verbalisierter Form den Lösungsweg im Großen erklären können (vgl. Beck 2015), dabei formelsprachliche Ausdrücke zur Präzisierung und Formalisierung heranziehen und in angemessener Weise den Einsatz des Werkzeugs dokumentieren.

Neben dem deskriptiven Raster sollen auch Theorien zum Lernen mit digitalen Werkzeugen mit berücksichtigt werden, etwa die Theorie der instrumentellen Genese (vgl. Drijvers ea. 2010), um das Erlernen des Dokumentierens mit dem Lernen von Mathematik mit digitalen Werkzeugen zu verknüpfen.

Beispiellösungen



$s(x) = 0{,}01156x^3 + 0{,}1771x^2 + 0{,}5230x - 5{,}416$

Gesucht: Wendepunkt von s

$s''(x) = 0 \rightarrow x \approx -5{,}1067$

$s''(x) < 0 \rightarrow x < -5{,}1067$

$s''(x) > 0 \rightarrow x > -5{,}1067$

$\Rightarrow$ Bei $x \approx -5{,}1067$ liegt ein Wendepunkt vor.

$y = s(-5{,}1067) \approx -5{,}0078$

Wendepunkt: $W = (-5{,}1067 \mid -5{,}0078)$

Abbildung 2 – Beispiellösung als Diskussionsgrundlage

Anhand von Beispiellösungen (vgl. Abb. 2) sollen verschiedene Möglichkeiten der Dokumentation aufgezeigt und diskutiert werden. Dies soll es Lehrerinnen und Lehrern ermöglichen, ihr eigenes Wissen über Lösungsdokumentationen zu vertiefen und Schülerinnen und Schülern zu helfen, Schwierigkeiten beim Dokumentieren zu überwinden.

Literatur

Ball, L. (2014). Use of Computer Algebra Systems (CAS) and written solutions in a CAS allowed Year 12 mathematics subject: Teachers' beliefs and students' practices. PhD-Thesis. Graduate School of Education. The University of Melbourne.

Barzel, B., Hußmann, S. & Leuders, T. (2005). Computer, Internet & Co. im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Beck, C. & Maier, H. (1996). Zu Methoden der Textinterpretation in der empirischen mathematikdidaktischen Forschung. In Maier, H., Voigt, J. Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung. (p. 43 – 76). Köln: Aulis-Verlag Deubner.

Beck, J. (2015). Schülererklärungen in Lösungsdokumentationen beim Einsatz von CAS in Prüfungen. In Caluori, F. Linneweber-Lammerskitten, H. Streit, C. Beträge zum Mathematikunterricht 2015. Münster: WTM-Verlag.

Busse, D. (2015). Sprachverstehen und Textinterpretation. Grundzüge einer verstehenstheoretisch reflektierten interpretativen Semantik. Wiesbaden: Springer.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P. & van Gisbergen, S. (2010). Instrumental Orchestration: Theory and Practise. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, F. Arzarello (Eds.), Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. January 28th – February 1st 2009, Lyon. Lyon: INRP.

Mayring, P. (2015). Qualitative Inhaltsanalyse – Grundlagen und Techniken. 12. Auflage. Weinheim: Beltz.

Melanie BECK, Frankfurt

Perspektivenwechsel in mathematisch kreativen Prozessen von Kindern im Grundschulalter

Im Beitrag werden Perspektivenwechsel von Kindern in mathematisch kreativen Prozessen untersucht und deren Domänenspezifität und-generalität beleuchtet. Die theoretischen Überlegungen werden mit empirischen Erkenntnissen aus dem Projekt MaKreKi (mathematische Kreativität bei Kindern) ergänzt. Hinsichtlich der Frage zur Domänenabhängigkeit scheint die Fähigkeit des Perspektivenwechsels eine „Hybridfunktion“ innezuhaben.

1. Allgemeine vs. bereichsspezifische Kreativität

Die Frage nach der Domänenspezifität bzw.-generalität von Kreativität wird in der Literatur kontrovers diskutiert. So sehen Adam und Chen (2012) Kreativität bei Kindern als singulär und bereichsunabhängig, die sich in differenzierenden Erscheinungsformen äußert. Führt man diesen Gedanken unter einer kognitionspsychologischen Perspektive weiter, so müsste der Einsatz kreativitätsfördernder Aktivitäten im Unterricht in einer Domäne die kreativen Fähigkeiten von Kindern in anderen Domänen erweitern und verbessern. Dies konnte bisher empirisch nicht beobachtet werden. Theoretisch können diese empirischen Untersuchungen aus (sozial) konstruktivistischer Perspektive mit dem Ansatz des situierten Lernens (Lave & Wenger, 1991) ergänzt werden. Kreative Prozesse des Individuums sind erlern-und-erweiterbar. Lernen und Denken sind in der situierten Kognition in physikalischen und sozialen Kontexten eingebettet, d.h. sie erfolgen in Form von Bedeutungsaushandlungen in einem bestimmten Kontext unter Mitgliedern einer „community of practice“ (ebenda, S. 30). Ist damit gleichzeitig die Annahme von generellen domänen-unspezifischen kreativen Fähigkeiten über Bord zu werfen? Oder scheint es eher ratsam, beide Pole theoretisch zu integrieren und Kreativitätsmodelle zu entwickeln, die es ermöglichen, die konkurrierenden Forderungen auszubalancieren? Erste Versuche hierfür wurden in Form von hybriden Ansätzen unternommen (z.B. Amabile, 1996).

2. Mathematisch kreative Prozesse von Kindern

Unter Ermöglichung eines breiten Blickwinkels auf kindliche mathematisch kreative Prozesse werden diese entweder als eine ungewöhnliche (neue) Lösung eines mathematischen Problems oder als eine ungewöhnliche, nicht antizipierte Rahmung einer mathematischen Situation im Sinne eines Perspektivwechsels (Münz, 2012) gesehen. Schülke (2013) hat in ihrer Arbeit mögliche Perspektivwechsel in mathematischen Situationen weiterausspezifiziert und konnte folgende Formen des kindlichen Perspektivwechsels in ihren Fällen rekonstruieren:

1. „Standpunktwechsel ‚fremde Perspektive'" (Schülke, 2013, S.114): Die Kinder nehmen den Standpunkt eines anderen ein, indem sie z.B. dessen Idee übernehmen oder ergänzen.
2. „Standpunktwechsel ‚Kontext'" (ebenda): Ein mathematischer Inhalt wird in einen anderen Kontext gebracht und erfährt dadurch eine Umdeutung.
3. „Standpunktwechsel ‚Rückblick'" (ebenda, S.115): Ein Kind bezieht sich auf einem vorausgegangenen Kontext und kann auf dessen Grundlage einen mathematischen Inhalt neudeuten.

Während der erste Standpunktwechsel „domänenübergreifend" in verschiedenen Bereichen möglich ist, so zeigt sich in den beiden anderen eine mathematische Domänenbezogenheit.

3. Datenerhebung und Methoden

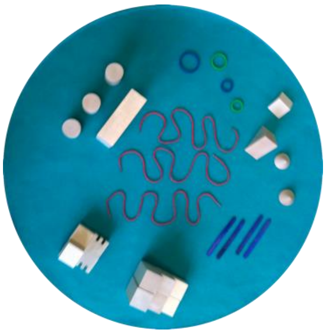
Im MaKreKi Projekt nehmen die Kinder an mathematischen Spiel-und Erkundungssituationen (Vogel, 2013) teil, deren konzeptioneller Ursprung in einem der fünf mathematischen Inhaltsbereiche liegt. Die Situation wird von einer erwachsenen Begleitperson durchgeführt, die einen Gesprächsanlass initiiert, in welchem die Kinder ihr mathematisches Potential zum Ausdruck bringen können.

Diese Events werden videografiert und transkribiert. Ausgewählte Transkriptauszüge werden mit der Interaktionsanalyse (Brandt & Krummheuer, 2001) analysiert. Dabei werden die Äußerungen zunächst einzeln in der Reihenfolge ihres Auftretens interpretiert, um dann in Anlehnung an die Konversationsanalyse deren Beziehungen untereinander nachvollziehen zu können.

4. Empirisches Beispiel: Naomi und Olivia in der Maps-Situation

An der ausgewählten Spiel-und Erkundungssituation „Maps" nehmen die Kinder Naomi (sechs Jahre und elf Monate) und Olivia (acht Jahre und ein Monat) und eine begleitende Person (B) aus dem MaKreKi-Projekt teil. Naomi wurde von ihrer Erzieherin als mathematisch kreativ eingeschätzt, da sie besonders großes Interesse an geometrischen Körpern und Figuren sowie an Zahlen habe und sie häufig ungewöhnliche Herangehensweisen an mathematische Situationen zeige.

In der Maps-Situation sollen die Kinder aus gegebenen Materialien ein Raumarrangement (Bauklötze in verschiedenen Formen, Schnüre, Stäbchen und Ringe) nachbauen. Als Vorlage dient ihnen eine aus der Vogelperspektive (Abbildung 1) aufgenommene Fotografie des Arrangements.



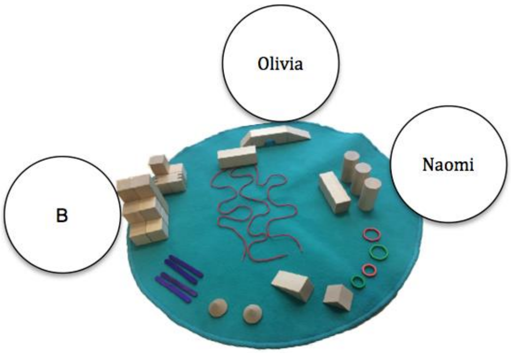


Abbildung 1: Vorlage *Abbildung 2: Nachgestellter Nachbau der Mädchen*

In Abbildung 2 ist nachgestellt, welche Elemente beide Mädchen bisher nachgebaut haben. Sie gibt auch Aufschluss darüber, welche Person an welcher Position sitzt. Der Brückenstein und die Dreiecksprismen bei Olivia wurden als eine zusätzliche Brücke in die „Stadt" eingebaut, über welche Menschen laufen können. Die Begleitperson erkundigt sich daraufhin, wo der Brückenstein in der Vorlage verbaut wurden sein könnte. Während Naomi sich eher mit der Brücke beschäftigt und mit ihren Fingern darüber spaziert, präsentiert Olivia sogleich eine Lösung und deutet auf den vor den Zylindern liegenden Holzquader. In dem sich entwickelten Dialog zwischen der Begleitperson und Olivia zeigt sich Olivia zunehmend nicht mehr einverstanden mit ihrer Lösung. Eventuell bemerkt sie das Problem der möglichen Doppelbelegung der Position vor den Zylindern durch Holzquader oder Brückenstein. Dies wird von ihr nicht verbal thematisiert, jedoch legt sie abwechselnd den Holzquader und den Brückenstein vor die Zylinder. Letztendlich legt sie wieder den Quader an besagte Position. Die Begleitperson ermutigt sie mehrfach, den Brückenstein als Brücke zu legen, woraufhin sich Olivia Bedenkzeit wünscht. Die Interaktion gerät ins Stocken und er kommt zu einer „interaktionalen Verdichtung" (Brandt & Krummheuer, 2001, S.56) Im Zuge dieses Interaktionsverlaufs schaltet sich Naomi in das Geschehen ein. Sie ergänzt das Gespräch um eine weitere Dimension des kontextuellen Perspektivenwechsels und formuliert in diesem Zusammenhang die Ununterscheidbarkeit von Holzquader und Brückenstein aus der Vogelperspektive, indem sie beide Körper zunächst von oben aus der Vogelperspektive und dann seitlich betrachtet. Sie gibt dabei ihren Interaktionspartnerinnen konkrete Hinweise, wie sie auf die Körper blicken müssen, um diese unterscheiden zu können. Außerdem ermöglicht sie mit ihrer Äußerung Olivia ihre anfangs genannte Lösung zu Begründen, da sowohl der Holzquader als auch die Brücke an diesem Ort platziert werden können. Sie übernimmt damit Verantwortung für den Fortgang der Interaktion und erkennt Olivias Dilemma, die zwar eine adäquate Lösung auf die Frage der Begleitperson genannt hat, diese jedoch nicht mehr begründen kann. Naomis hohes situatives

Feingefühl für die Bedürfnisse ihrer Partnerinnen lässt auf eine ausgeprägte Fähigkeit zum zwischenmenschlichen Perspektivenwechsel schließen.

5. Zusammenfassung

Aus situationeller Perspektive provoziert die „interaktionale Verdichtung“ (ebenda) zwischen Olivia und der Begleitperson bei Naomi einen Wechsel ihres Partizipationsstatus von passiv-sich mit anderen Themen beschäftigend zu einem aktiv–in das Geschehen eingreifenden Status. Sie übernimmt Verantwortung für den Fortgang der Interaktion und bringt sich mit erklärenden und klärenden Aktivitäten ein. Ihr interaktionales Feingefühl lässt auf eine stark ausgeprägte Fähigkeit zum zwischenmenschlichen Perspektivwechsel (Schülke, 2013) schließen. Zudem nutzt sie die Fähigkeit des (kontextuellen) Perspektivwechsels (ebenda) auch auf der inhaltlichen-mathematischen Ebene zum Lösen der Fragestellung bzw. Begründen der Lösung Olivias. Hinsichtlich der Frage nach der Domänenabhängigkeit von Kreativität scheint die Fähigkeit des Perspektivenwechsels eine „Hybridfunktion“ innezuhaben, da sie sowohl zu den domänenspezifischen (mathematischen) als auch „domänenübergreifenden“ Fähigkeiten gezählt werden kann.

6. Literatur

Adam, M. L. & Chen, J.-Q. (2012). Understanding young children’s kinds of creating. In O. N. Saracho (Hrsg.), *Contemporary perspectives on research in creativity in early childhood* (S. 343-354). Charlotte: Information Age Publishing.

Amabile, T. M. (1996). *Creativity in Context*. Boulder, Colorad [u.a.]: Westview Press.

Brandt, B. & Krummheuer, G. (2001). *Paraphrase und Traduktion-Partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule*. Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Münz, M. (2012). Mathematical creativity and the role of attachment style in early childhood. *Proceedings of The 7th MCG International Conference/International Group for Mathematical Creativity and Giftedness*. Busan, South Korea.

Schülke, C. (2013). *Mathematische Reflexionen in der Interaktion von Grundschulkindern*. Münster u.a.: Waxmann.

Vogel, R. (2013). Mathematical situations of play and exploration. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(2), 209-226.

Daniela BEHRENS, Angelika BIKNER-AHSBAHS, Bremen

Die digitale Stellenwerttafel: Aufgabendesign zur Einführung von Dezimalbrüchen

Empirische Untersuchungen belegen, dass viele Schülerinnen & Schüler Fehlvorstellungen im Umgang mit Dezimalbrüchen entwickeln, deren Hauptursachen in falschen Übertragungen aus den natürlichen Zahlen und den Brüchen sowie in einem überwiegend verfahrensbasierten Umgang mit Dezimalbrüchen im Mathematikunterricht verortet werden (Heckmann, 2006). Insgesamt müssen verschiedene Vorstellungsumbrüche in der Zahlbereichserweiterung von den natürlichen Zahlen zu den Dezimalbrüchen geleistet werden, die insbesondere durch ein Verständnis des Aufbaus des dezimalen Stellenwertsystems erreicht werden können (ebd.).

Wie diese Zahlbereichserweiterung innerhalb des dezimalen Stellenwertsystems mit Hilfe einer digitalen Stellenwerttafel auf dem iPad stattfinden kann, wird im Rahmen einer Design-Based Research Studie im Projekt DeciPlace (Kooperationsprojekt mit der Universität Potsdam & der Universität des Saarlandes) untersucht. Im vorliegenden Beitrag wird ein Einblick in das entwickelte Aufgabendesign gegeben und der Frage nachgegangen:

Wie setzen Schüler_innen die Stellenwerttafel nach rechts fort?

Zur Beantwortung dieser Frage werden Strategien vorgestellt, die zehn Schülerpaare des fünften Jahrgangs einer Bremer Gesamtschule in ersten Designexperimenten genutzt haben, um die Stellenwerttafel nach rechts zu erweitern.

Erweiterung des dezimalen Stellenwertsystems um Dezimalstellen

Ein zentrales Prinzip für Zahlbereichserweiterungen ist das Permanenzprinzip, mit dem eine mathematische Struktur unter Erhalt bestimmter Strukturelemente erweitert wird. Die Zahlbereichserweiterung von den natürlichen zu den rationalen Zahlen in der dezimalen Zahldarstellung erhält man z.B. durch Fortsetzen der Anwendung des Bündelungsprinzips zur Basis 10 (Ross, 1989, S. 47). Dabei bleibt die Struktur des dezimalen Stellenwertsystems, gekennzeichnet durch das Positionsprinzip, das Bündelungsprinzip sowie das additive & multiplikative Prinzip (ebd.), erhalten.

Hintereinanderausführungen der Transformationen „Bündeln“ und „Entbündeln“ stellen eine Äquivalenzrelation in der Menge aller dezimalen Standard- und Nicht-Standard-Zerlegungen (vgl. Ladel & Kortenkamp, 2016, S. 293) von Brüchen dar, z.B. als Darstellungen in der (auch unendlichen) dezimalen Stellenwerttafel. Zwei dezimale Zerlegungen sind dann äquivalent, wenn sie sich durch eine endliche oder unendliche Anzahl von „Bündelungen“ und „Entbündelungen“ gemäß des Bündelungsprinzips ineinander überführen lassen. Mit der Äquivalenzrelation gewinnen wir eine Klasseneinteilung. Eine Klasse ist durch einen festen Wert gekennzeichnet, der eindeutig als vollständig entbündelter Dezimalbruch angegeben werden kann.

Die digitale Stellenwerttafel auf dem iPad (Ladel & Kortenkamp, 2013) ermöglicht eine visuell-dynamische Darstellung dieser zentralen Transformationen des Bündelns und Entbündelns. Sie unterscheidet sich von der traditionellen Stellenwerttafel, indem der Wert der dargestellten Zahl bei Veränderung der Darstellung invariant bleibt und dadurch Erkundungsaktivitäten auf das Erschließen der Struktur gerichtet werden können.

Zusammenfassend kann aus den vorherigen Überlegungen ein Designprinzip für die hier vorgestellten Aufgaben zur Einführung von Dezimalbrüchen formuliert werden: Anschauliche Aktivitäten des Bündelns und Entbündelns in der digitalen Stellenwerttafel sollen genutzt werden, um die Struktur des dezimalen Stellenwertsystems erkunden und die Stellenwerttafel um Dezimalstellen fortsetzen zu können.

Design der Aufgaben

Die Kernaufgabe des Aufgabendesigns besteht darin, möglichst viele verschiedene Darstellungen zu einer festgelegten Zahl in der (digitalen) Stellenwerttafel zu finden:

> Wie viele verschiedene Darstellungen findet ihr für die Zahl 52 in der Stellenwerttafel?

Durch die in der Aufgabe geforderten Bündelungs- und Entbündelungsaktivitäten wird das Bündelungsprinzip des dezimalen Stellenwertsystems erfahrbar gemacht. Um dabei an das Vorwissen der Schülerinnen & Schüler anzuknüpfen und die Fortsetzung der Anwendung des Bündelungsprinzips vorzubereiten, sammeln sie zunächst verschiedene Zerlegungen zu zwei- und dreistelligen natürlichen Zahlen wie 52 und 101 in der Stellenwerttafel [HZE]. Als Hinführung auf eine Erweiterung der Stellenwerttafel nach rechts erhalten sie die gleiche Aufgabe für die Zahl 4 und sollen anschließend kurz

> Zeichnet dann eine erweiterte Stellenwerttafel auf, mit der ihr mehrere Darstellungen für die Zahl 4 finden könnt.

erklären, warum zunächst nur eine Darstellung für die Zahl 4 gefunden werden kann. Folgende Aufgabenstellung soll dann die Erweiterung initiieren:

Empirische Einblicke in Erweiterungsstrategien

In ihren Begründungen, warum es für die Zahl 4 nur eine Darstellung in der Stellenwerttafel gibt, beschreiben die Schülerpaare, dass…

1) … sich die Zahl beim Verschieben von Plättchen verändert, denn „wenn wir einen Einer verschieben, dann haben wir eine andere Zahl".

2) … Bündeln nicht möglich, denn „man kann keine Einer zu Zehner wandeln, nur wenn man zehn Einer hat".

3) … Entbündeln nicht möglich ist, da „es nur Einer sind und keine Zehner".

4) … Entbündeln nicht möglich ist, denn „kleinere Stellen als die Einer gibt es nicht".

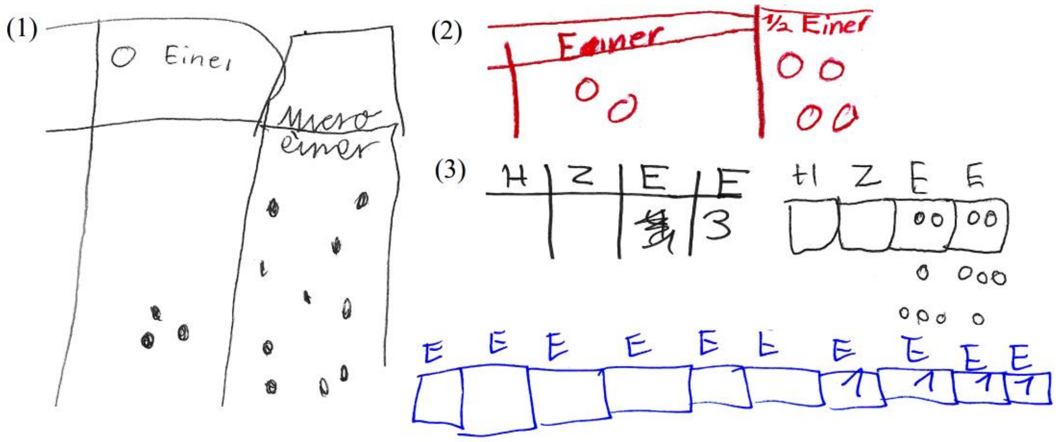
Während die erste Beschreibung sich auf die Darstellungsweise in der traditionellen Stellenwerttafel bezieht, verweisen die Beschreibungen 2) – 4) auf die Erfahrungen mit dem Bündelungsprinzip in der digitalen Stellenwerttafel. Die letzte Aussage deutet außerdem darauf hin, dass man eine „kleinere Stelle als die Einer" bräuchte, um auch für die Zahl 4 weitere Darstellungen zu finden.

Für die Erweiterung der Stellenwerttafel haben sich drei unterschiedliche Strategien gezeigt (vier Schülerpaare haben keine Erweiterung angegeben):

(1) Ein Schülerpaar erweitert die Stellenwerttafel um die Stelle „Microeiner" gemäß dem Permanenzprinzip, indem die Prinzipien des Stellenwertsystems und somit auch die Anwendung des Bündelungsprinzips zur Basis 10 fortgesetzt werden (siehe Abbildung).

(2) Zwei Schülerpaare schlagen eine Zerlegung der Einer in „Halbe Einer" vor (siehe Abbildung). Dabei nehmen sie den Aspekt des Entbündelns eines Einers gemäß dem Bündelungsprinzip zwar auf, setzen diese Entbündelung jedoch nicht dezimal, sondern alltagsbezogen fort.

(3) Anstatt die Einer in kleinere Einheiten zu entbündeln, reproduzieren drei Schülerpaare die Einerstelle und nutzen somit die Lage in der visuellen Gestaltung als entscheidendes Kriterium für die Variation von Darstellungen (siehe Abbildung). Sie haben erkannt, dass der Wert eines Plättchens von dessen Lage in der Stellenwerttafel abhängig ist. Das Bündelungsprinzip wird in dieser Fortsetzung der Stellenwerttafel nicht berücksichtigt.



Schlussfolgerungen

Diese drei Erweiterungsstrategien können Hinweise geben, inwiefern die Struktur des dezimalen Stellenwertsystems im Hinblick auf die fortsetzbare Anwendung des Bündelungsprinzips bereits verstanden wurde und tatsächlich ausgeführt werden kann. Dabei haben alle drei Erweiterungsstrategien ihre Berechtigung, denn sie alle setzen die Stellenwerttafel fort: visuell, in einer Alltagszerlegung und nach der Struktur des dezimalen Stellenwertsystems. Es stellt sich die für eine Unterrichtsgestaltung wichtige Frage, ob es weitere Strategien gibt und wenn ja, welche.

Die Diversität dieser Strategien, die Lernende zur Erweiterung der Stellenwerttafel nutzen, bietet Potenzial für die Entwicklung eines Lehr-Lernarrangements im Klassensetting: *Einen Namen für die Strategien erfinden* sorgt dafür, dass sich Lernende ihres Vorgehens bewusst werden; *diese der Klasse vorzustellen*, verlangt, dass man seine Idee mitteilt; *die Strategien zu vergleichen*, bietet die Chance den Kern der Struktur des Stellenwertsystems in einem fachlichen Diskurs für alle sichtbar herauszubilden.

Literatur

Heckmann, K. (2006). Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern – Theoretische Analyse und empirische Befunde. Berlin: Logos Verlag.

Ladel, S., & Kortenkamp, U. (2013). Designing a technology based learning environment for place value using artefact-centric activity theory. In A.M. Lindmaier, & A. Heinze (Hrsg.), Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1 (S. 188-192). Kiel, Germany: PME.

Ladel, S., & Kortenkamp, U. (2016). Development of a Flexible Understanding of Place Value. In T. Meaney, O. Helenius, M.L. Johansson, T. Lange & A. Wernberg (Hrsg.): Mathematics Education in the Early Years. Results from the POEM2 Conference (S. 289-309). Cham: Springer International Publishing.

Ross, S.H. (1989). Parts, Wholes, and Place Value: A Developmental View. *The Arithmetic Teacher,* 36 (6), 47–51.

Frances BEIER, Lüneburg

„Ganz ehrlich? Finde ich Mathe eigentlich ziemlich blöd“ – Ein Projekt zu mathematikbezogener Angst

Trotz des hohen Maßes an Anschaulichkeit, logischem Vorgehen und Anwendungsbezug der Mathematik entwickeln viele Schülerinnen und Schüler Angst vor dieser Disziplin (Gierl, Bisanz 1995). Das Ziel der hier vorgestellten Studie ist die Analyse von Ursachen, die zu Beginn der Sekundarstufe I mathematikbezogene Angst bedingen können. Es wird ein qualitativer Ansatz in Form einer Quasi-Längsschnittstudie mit 7 Probandinnen und Probanden verfolgt.

Theoretischer Hintergrund

Unter mathematikbezogener Angst werden Gefühle der Anspannung und Sorge verstanden, die während des Lösens mathematischer Aufgaben innerhalb unterschiedlicher Situationen im akademischen, privaten oder sozialen Kontext erlebt werden (Richardson, Suinn 1972). Hierunter wird zwischen mathematischer Testangst und mathematischer Leistungsangst unterschieden. Mathematische Testangst bezeichnet Nervosität, die mit vergangenen, aktuell anstehenden oder zukünftigen Mathematikarbeiten assoziiert wird. Mathematische Leistungsangst hingegen bezeichnet Nervosität, die mit dem Lösen von Mathematikaufgaben außerhalb der schulischen Leistungsüberprüfung verbunden wird (Gierl, Bisanz 1995).

Im Kontext der Emotionsentstehung sind der Appraisal-Ansatz nach Arnold (1960) und das Fähigkeitsselbstkonzept (die eigene Person betreffende Vorstellungen, Einschätzungen und Bewertungen) entscheidend. Durch das eigene Fähigkeitsselbstkonzept in Verbindung mit generalisierten Überzeugungen von außerhalb bilden Menschen Appraisals (kognitive Bewertungsprozesse von Situationen, Tätigkeiten oder der eigenen Person) aus. Unterschiedliche Appraisal-Konstellationen ziehen unterschiedliches emotionales Erleben nach sich: Angst wird dann erlebt, wenn ein als negativ wahrgenommenes Ereignis, das persönlich relevant ist, mit hoher Wahrscheinlichkeit auftritt und die Person das Gefühl hat, nicht über genügend Ressourcen zu verfügen, das Ereignis abzuwenden oder eine Lösung zu finden (Frenzel, Götz, Pekrun 2009).

Die Studie fokussiert Schülerinnen und Schüler am Übertritt in eine weiterführende Schule am Anfang der 5. Jahrgangsstufe, weil gerade der Schul- und Bezugsgruppenwechsel divergierende Gefühle hervorrufen kann (Vernay 1999).

Forschungsfragen und Untersuchungsdesign

Übergeordnete Forschungsfrage

Welche Faktoren lassen sich in Bezug auf das Vorkommen und die Veränderung mathematikbezogener Angst zu Beginn der Sekundarstufe I identifizieren?

Untergeordnete Forschungsfragen

(1) In welchen Situationen wird mathematikbezogene Angst erlebt?

(2) Welche Ursachen aus den Bereichen intrapersonelle Aspekte, schulische und außerschulische Rahmenbedingungen beeinflussen Angsterleben?

(3) Verändert sich mathematikbezogene Angst innerhalb eines Halbjahres?

(4) Treten Veränderungen innerhalb der Ursachen von Angsterleben auf?

Vorstudie. An der Vorstudie im Dezember 2014 haben 110 Schülerinnen und Schüler der 5. Jahrgangsstufe aus drei unterschiedlichen Lüneburger Schulen (Oberschule, integrative Gesamtschule) teilgenommen. Der Auswahltest für das Theoretical Sampling der Fallstudie beinhaltete den DEMAT4 (Gölitz, Roick, Hasselhorn 2006), den übersetzten ATMI (Tapia 1996) sowie Skalen der PALMA-Studie (Pekrun et al. 2003). Die Ergebnisse wurden nach Einstellung (neutral/negativ) und Leistung (durchschnittlich/unterdurchschnittlich) klassifiziert, sodass sich vier Gruppen spezifischer Einstellungs-Leistungs-Profile ergaben.

Fallstudie. Die Fallstudie fand im 2. Halbjahr des 5. Jahrgangs von Januar bis Juli 2015 statt und beinhaltete Selbstberichte (Leitfadeninterviews) ausgewählter Schülerinnen und Schüler über ihr emotionales Erleben im Mathematikunterricht. Die Interviews wurden videographiert und monatlich ein Mal durchgeführt, sodass mit jedem Kind 7 Interviews geführt wurden. Der Leitfaden, der jedem Interview zugrunde lag, besteht aus Fragen zu Themen wie Gefühle, wahrgenommene Veränderungen, typische Situationen im Mathematikunterricht und Einflussfaktoren. Die Fragen wurden den individuellen Fällen und Äußerungen stets angepasst, wobei einige Themen häufiger angesprochen wurden, andere nur ein Mal. Teilweise wurden Szenarien eröffnet und nach dazu entstehenden Emotionen gefragt. Anschauliche Hilfsmittel der Interviews waren Gefühlskarten (Emoticons mit den Gesichtsausdrücken "freudig", "müde", "traurig", "wütend", "erschrocken", "ängstlich") sowie Playmobilfiguren, mit denen der Klassenraum und das Bearbeiten von Hausaufgaben nachgestellt werden konnten.

Untersuchungspersonen. Da drei Schülerinnen und Schüler die Fallstudie vorzeitig abbrachen, bestand die Stichprobe der Fallstudie aus 7 Schülerinnen und Schülern. Jeweils zwei Schülerinnen und Schüler konnten den Gruppen *Einstellung neutral/Leistung durchschnittlich* und *Einstellung neutral/Leistung unterdurchschnittlich* und drei der Gruppe *Einstellung negativ/Leistung durchschnittlich* zugeordnet werden. Für die Fallstudie wurden diejenigen Schülerinnen und Schüler ausgewählt, die für die jeweilige Gruppe am typischsten sind. Unter den ausgewählten 7 Fällen waren alle drei an der Vorstudie teilgenommenen Schulen vertreten.

Datenanalyse. Die Daten werden mit Hilfe der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (1983) analysiert. Innerhalb dieser wird vor allem die inhaltliche Strukturierung angewendet. Die Kodes wurden vermehrt deduktiv generiert, da bereits ein breites theoretisches Wissen zu Emotionen vorhanden ist. Es werden verbale, paraverbale und nonverbale Äußerungen nach unterschiedlichen Gesichtspunkten analysiert. Im ersten Auswertungsschritt werden ausschließlich Indikatoren des Angsterlebens kodiert. In einem zweiten Schritt werden Ursachen für Angst kodiert, sobald eine Sinneinheit durch mindestens zwei Kodes aus den Indikatoren (1. Schritt) auf Angsterleben hinweist. Der letzte Schritt der Kodierung gleicht einer Zusammenfassung innerhalb der qualitativen Inhaltsanalyse. Hierbei handelt es sich um die Ereignisse, in denen Angsterleben geschildert wird. Diese können individuell sehr unterschiedlich sein, weshalb sie nicht im Vorhinein festgelegt und somit induktiv kodiert werden.

Ergebnisse

Die Beantwortung der untergeordneten Fragestellungen wird hier exemplarisch für Fall 1 vorgenommen. Fall 1 deutet auf eine negative Einstellung sowie durchschnittliche Leistungen in Bezug auf Mathematik im DEMAT4 nach Teilnahme an der Vorstudie hin. Fall 1 nimmt an allen 7 Interviews von Januar bis Juli 2015 teil. Die eigenen Fähigkeiten werden als gering eingeschätzt und Mathematik als langweilig empfunden.

Die Ergebnisse werden folgend zusammengefasst:

(1) Offensichtlich wird, dass in jeglichen leistungsbezogenen Situationen Angst erlebt wird.

(2) Als Ursache werden vermehrt der schulische Bereich und hier die Lehrkraft als besondere Sozialisationsinstanz genannt.

(3) Eine Veränderung innerhalb des emotionalen Erlebens wird in sofern erkannt, als dass Fall 1 zunehmend das Gefühl hat, die eigenen Leistungen entsprächen den Anforderungen nicht.

(4) Gezielte Ursachenveränderungen können im Bereich des steigenden Leistungsdrucks und dem Drohen negativer Konsequenzen in Form von gefährdeter Versetzung festgestellt werden.

Diskussion und Ausblick

Bemerkenswert innerhalb der Ergebnisse ist, dass Fall 1 an den eigenen Fähigkeiten und sogar an der Versetzung in die nächste Klassenstufe zweifelt, obwohl über das 2. Halbjahr hinweg durchschnittliche Noten in den Mathematikarbeiten erreicht wurden.

Auffällig ist außerdem, dass der schulische Bereich als Einflussfaktor immer wieder erwähnt wird. Als Änderungswunsch stellt Fall 1 vermehrt den Austausch der Fachlehrkraft heraus.

Die dritte und vierte untergeordnete Fragestellung zu Veränderungen des emotionalen Befindens und der Ursachen können nur vage beantwortet werden, da mit keiner Sicherheit Aussage darüber getroffen werden kann, ob es sich um eine echte Veränderung oder um eine steigende Vertrautheit des Gesprächs handelt.

Die Fälle werden nebeneinander untersucht, wobei eine Betrachtung von Übereinstimmungen in Ereignissen und Ursachen nicht ausbleibt. Das Fernziel des vorgestellten Projekts ist die Grundlage für weitere Studien zu Handlungsempfehlungen für den Mathematikunterricht.

Literatur

Arnold, M. B. (1960). *Emotion and personality*. New York: Columbia University Press.

Frenzel, A. C., Goetz, T., Pekrun, R. (2009). Emotionen. In E. Wild, J. Möller (Hrsg.), *Lehrbuch Pädagogische Psychologie* (S. 205-234). Heidelberg: Springer.

Gierl, M. J. & Bisanz, J. (1995). Anxieties and attitudes related to mathematics in grades 3 and 6*. Journal of Experimental Education, 63*(2), 139–158.

Gölitz, D., Roick, T., Hasselhorn, M. (2006). *Deutscher Mathematiktest für vierte Klassen.* Göttingen: Hogrefe Verlag.

Mayring, P. (1983). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken.* Weinheim: Beltz.

Pekrun, R., et al. (2003). *Skalenhandbuch PALMA: 2. Messzeitpunkt (6. Jahrgangsstufe).* Department Psychologie: Universität München.

Richardson, F. C. & Suinn, R. M. (1972). The Mathematics Anxiety Rating Scale: Psychometric data. *Journal of Counseling Psychology, 19,* 551–554.

Tapia, M. (1996). *The attitudes towards mathematics instrument*. Columbus, OH: ERIC Document Reproduction Service No. ED404165.

Vernay, R. (1999). Neue Klasse – wie beginnen? *Mathematik Lehren, 94,* 4-7.

Ralf BENÖLKEN, Kassel/Münster

Wünsche von Mädchen und Jungen zur Gestaltung des Mathematikunterrichts – Erste Ergebnisse einer qualitativen Studie

1. Einleitung

Genderbezogene Forschungsschwerpunkte innerhalb der Mathematikdidaktik bilden v.a. Studien (1) zu historischen und (2) sozialisatorischen Aspekten bzw. zu Stereotypisierungen, (3) zu vermeintlichen Begabungsunterschieden sowie schließlich (4) zu fachdidaktischen Fragestellungen, nicht zuletzt zu geschlechtersensiblen Gestaltungsszenarien des Mathematikunterrichts. Beispielsweise wurden – vor allem in den 1990er Jahren – Indizien dafür aufgezeigt, dass Mathematikunterricht häufig mehr an den Bedürfnissen von Jungen ausgerichtet, u.a. ihr mathematisches Selbstkonzept außerordentlich gestärkt würde, während Mädchen nicht gleichermaßen beteiligt und schließlich Geschlechterstereotype überhaupt eher verstärkt als abgebaut würden (zusammenfassend z.B. Benölken, 2011). Koedukationskritiken zufolge könne man daher kaum von „Koedukation“ sprechen, sondern eher von „Koinstruktion“. Aus diesem Kontext heraus richtete sich ein Augenmerk auf die Erkundung der Wünsche von Mädchen und Jungen in Bezug auf die Gestaltung eines sinnstiftenden Mathematikunterrichts. Die grundlegende Arbeit legte – auf der Basis qualitativ ausgerichteter Erkundungsuntersuchungen – Jahnke-Klein (2001) vor: Die Ergebnisse wurden in der mathematikdidaktischen Debatte zu Recht vielfach in die Diskussion für eine geschlechtersensible Gestaltung des Mathematikunterrichts herangezogen. Das Ziel des vorliegenden Beitrags besteht darin, erste Ergebnisse einer Studie zu skizzieren, die einen ähnlichen Fokus wie die Untersuchung Jahnke-Kleins nimmt: Da die Erhebungen vorliegender Untersuchungen verhältnismäßig lange zurückliegen, ergibt sich die Relevanz, Studien zu einer geschlechtersensiblen Gestaltung des Mathematikunterrichts fortzuführen und hierbei wieder auf einem grundlegenden Niveau explorativ zu beginnen, u.a. aus den folgenden Aspekten:

- Die gesellschaftlichen Determinanten scheinen sich im Laufe der letzten beiden Dekaden verändert zu haben – hierzu zählen eine „digitale Durchdringung“ und ein Streben nach einer inklusiven Gesellschaft.
- Das Schulsystem hat in den letzten Jahren Veränderungen erfahren, u.a. zunehmend diversitäre Lerngruppen im inklusiven Unterricht, eine Stärkung konstruktivistisch-lerntheoretischer Positionen sowie eine zunehmende Bedeutung digitaler Medien.
- Weiterhin tendieren Mädchen bereits in einem jungen Alter im Gegensatz zu Jungen (weiterhin) zu deutlich ungünstigeren Ausprägungen

motivationaler Faktoren (z.B. Benölken, 2014).

- Das Phänomen der „Unterrepräsentanz“ von Mädchen und Frauen im „MINT-“ Bereich besteht nach wie vor (z.B. SBA, 2014).

2. Die Studie

Ausgehend von den Erörterungen des ersten Abschnitts berührt der Zugang der Studie Annahmen der interpretativen Unterrichtsforschung, wonach jedes Individuum seine subjektive Wirklichkeitsbedeutung selbst konstruiert, u.a. also „Geschlecht“ als soziale Konstruktion diesbezüglich Bedeutung besitzt (z.B. Jahnke-Klein, 2001). Übergreifend fokussiert die Untersuchung damit als Leitfrage: „Wie schaffen die am Unterricht Beteiligten ‚Weiblichkeit‘ bzw. ‚Männlichkeit‘ hinsichtlich des Umgangs mit Mathematik? Wie stellen sie also das her, was nachher als typisch weiblich bzw. männlich gilt?“ (Jahnke-Klein, 2004, S. 15) Konkret ergeben sich als *Fragestellungen*: (1) Inwiefern gibt es gemeinsame bzw. „geschlechtstypische“ Wünsche von Mädchen und Jungen zur Gestaltung des Mathematikunterrichts? (2) Wie lässt sich ein Mathematikunterricht gestalten, der den Präferenzen beider Geschlechter nachkommt? Aufgrund des explorativen Zugangs erschien ein qualitatives *Design* naheliegend, um zunächst Existenzaussagen zu generieren (Lamnek, 2010), repräsentative Aussagen sind hier nicht intendiert. Die *Stichprobe* setzt sich (bisher) aus N=126 Schülerinnen und Schülern des fünften und sechsten Jahrgangs zusammen (66 Mädchen, 60 Jungen). Als *Erhebungsinstrument* dient ein anonymisierter, qualitativ ausgerichteter Fragebogen, der anhand offener Impulse (z.B. „Dann fühle ich mich wohl im Mathe-Unterricht: …“) Wünsche der Schülerinnen und Schüler gegenüber der Gestaltung des Mathematikunterrichts und gegenüber dem Verhalten der Mitschülerinnen und Mitschüler sowie dem Verhalten der Lehrkraft thematisiert. Die Gesamtheit aller Aspekte erscheint (auch im Ergebnis von Pilotierungen) geeignet, um Trends vor dem Hintergrund der leitenden Forschungsfragen aufzuzeigen. Alle Befragungen erfolgten unter gleichen Rahmenbedingungen nach vorgegebenen Instruktionen und wurden jeweils in den ersten zwanzig Minuten einer Unterrichtsstunde durchgeführt. Die *Auswertung* folgt dem Paradigma der „Grounded Theory“, d.h. die bzw. der Forschende sollte sich dem anvisierten Thema möglichst ohne feste Kategorien oder Hypothesen nähern – die auf den konkreten Gegenstand bezogene Theorie emergiert dann induktiv anhand komparativer Analysen der Daten unter iterativen wechselseitigen Beeinflussungen der Datensichtung sowie der steten Kategorien- bzw. Hypothesenbildung und -korrektur (siehe Lamnek, 2010).

3. (Erste) Ergebnisse

Im Folgenden werden zunächst gemeinsame Wünsche von Mädchen und

Jungen und anschließend jeweils Wünsche skizziert, die sich entweder bei den Jungen oder bei den Mädchen fanden.

(a) Viele Mädchen und viele Jungen ...

- …präferieren kooperative Arbeitsformen.
- …wünschen sich einen abwechslungsreichen, interessanten, spannenden, vielfältigen, nicht schematischen, handlungsorientierten oder spielerischen Mathematikunterricht.
- …wünschen, den behandelten Stoff zu verstehen (und insbesondere Erklärungen durch die Lehrkraft; siehe jedoch auch unten (c)).
- …wünschen sich eine ruhige und konzentrierte sowie eine angenehme, lockere Arbeitsatmosphäre (und insbesondere lockere, nette, lustige, … Lehrkräfte).

(b) Viele Jungen, aber nur wenige Mädchen…

- …wünschen, mit digitalen Werkzeugen im Unterricht zu arbeiten (z.B. Tabellenkalkulationen, …).
- …wünschen sich gemeinsame Erarbeitungen im Unterrichtsgespräch.
- …wünschen sich eher wenige Kontrollen, Übungen u.Ä.

Ein kleinerer Teil der Jungen ...

- …wünscht, alleine zu arbeiten.
- …wünscht sich schwierige, herausfordernde Aufgaben.

(c) Viele Mädchen, aber nur wenige Jungen…

- …wünschen sich Pausen im Lernprozess.
- …mögen keinen Zeitdruck.
- …wünschen sich „leichte“ Aufgaben.
- …mögen keine schnellen Themenwechsel, möchten lange bei einem Thema verweilen.
- …wünschen sich umfassende Erklärungen bzw. Übungen, Besprechungen und Kontrollen.
- …wünschen sich eine hilfsbereite und faire Lehrperson.
- …wünschen, dass sich die Lehrperson für sie interessiert, ihnen mit Respekt begegnet, ihre Bedürfnisse wahrnimmt, …

Ein kleinerer Teil der Mädchen ...

- …wünscht sich hilfsbereite, faire und respektvolle Mitschülerinnen und Mitschüler.

- …wünscht sich ein Lernen an außerunterrichtlichen bzw. außerschulischen Orten.

Trotz der gemeinsamen Wünsche von Jungen und Mädchen, die Abschnitt (a) zusammenfasst, deuten die Haltungen, die sich in den Abschnitten (b) und (c) widerspiegeln, offenbar unterschiedliche Präferenzen gegenüber der Unterrichtskultur bei Jungen und Mädchen an, insbesondere ein größeres „Sicherheitsdenken“ bei Mädchen (ähnlich zu Jahnke-Klein, 2001).

4. Diskussion

Im Ganzen entsprechen die (ersten) Ergebnisse der skizzierten Studie den Resultaten von Jahnke-Klein (2001), insbesondere im Hinblick auf die Annahme differierender Präferenzen gegenüber der Unterrichtskultur, was diverse praxeologische Konsequenzen wie eine adäquate „Ausbalancierung“ der Bedürfnisse im Unterricht mit sich bringt (im Detail wiederum Jahnke-Klein, 2001). Die vorgestellte Studie hat aufgrund ihres explorativen Zugangs einige Grenzen, u.a. die Verengung auf das fünfte und sechste Schuljahr sowie die relativ kleine und gewiss nicht repräsentative Stichprobe. Anschlussarbeiten sollten sich daher zunächst auf eine weiterführende explorative Klärung fokussieren. Sinnvoll erscheint eine Diskussion der Ergebnisse vor dem Hintergrund der Organisation inklusiver Bildung unter einem schulpädagogischen Fokus nebst Überlegungen zu De-Kategorisierungen, wobei insbesondere das Zustandekommen der in der Studie angedeuteten geschlechtsbezogen differierenden Bedürfnisse kritisch zu hinterfragen ist (siehe auch Jahnke-Klein, 2004).

Literatur

Benölken, R. (2014). Begabung, Geschlecht und Motivation. Erkenntnisse zur Bedeutung von Selbstkonzept, Attribution und Interessen als Bedingungsfaktoren für die Identifikation mathematischer Begabungen. *Journal für Mathematik-Didaktik,* 35, 129–158.

Benölken, R. (2011). *Mathematisch begabte Mädchen.* Münster: WTM.

Jahnke-Klein, S. (2004). Wünschen Mädchen sich einen anderen Unterricht als Jungen? *mathematik lehren*, 127, 15–19.

Jahnke-Klein, S. (2001). *Sinnstiftender Mathematikunterricht für Mädchen und Jungen.* Hohengehren: Schneider.

Lamnek, S. (2010). *Qualitative Sozialforschung* (5. Auflage). Weinheim u. Basel: Beltz.

SBA [Statistisches Bundesamt] (Hrsg., 2014). *Bildung und Kultur. Studierende an Hochschulen*. Fachserie 11 Reihe 4.1. Bonn: SBA [www.destatis.de; 02.07.2015].

Stephan BERENDONK, Bonn

10-adische Zahlen vom niederen Standpunkte aus

Wer schon einmal bis unendlich und darüber hinaus gezählt hat, der weiß: Es gibt auch Zahlen mit unendlich vielen Ziffern vor dem Komma. Solche „übernatürliche“ Zahlen kann man addieren und multiplizieren, aber: Gelten dabei noch die gleichen Rechengesetze wie bei den natürlichen Zahlen? Wie steht es mit der Subtraktion, der Division, dem Potenzieren und dem Wurzelziehen? Gibt es hier exotische Phänomene zu entdecken? Wir wollen diese Fragen durch konkretes Rechnen an Beispielen beantworten. So verschaffen wir uns gewissermaßen durch eine Seitentür, nämlich durch eine Abwandlung der natürlichen Zahlen, einen bescheidenen Einblick in ein Zahlenreich, das man üblicherweise über den theoriebewachten Haupteingang, nämlich über die Abwandlung der reellen Zahlen, betritt.

10-adische Zahlen als genetische Mutation der natürlichen Zahlen

Was passiert eigentlich beim schriftlichen Subtrahieren zweier natürlicher Zahlen, wenn der Subtrahend größer ist als der Minuend? Schauen wir uns ein Beispiel an:

$$\begin{array}{rcccccccccc} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 3 & 5 \\ & 0_1 & 0_1 & 0_1 & 0_1 & 0_1 & 0_1 & 4 & 3_1 & 6 & 2\ - \\ \hline \ldots & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 8 & 2 & 7 & 3 \end{array}$$

Das Verfahren findet kein Ende. Es entsteht nach links hin eine endlose Kette von Neunen. Als Differenz der beiden natürlichen Zahlen erhalten wir also eine „Zahl“, die aus unendlich vielen Ziffern besteht, einen „Mutanten“. Diese Beobachtung inspiriert uns dazu mit (unendlichen) Ziffernfolgen zu rechnen, nämlich, indem wir die schriftlichen Rechenverfahren für die Addition und die Multiplikation natürlicher Zahlen auch auf (unendliche) Ziffernfolgen anwenden. Auf diese Weise werden die (unendlichen) Ziffernfolgen zu Zahlen, den sogenannten *10-adischen Zahlen*.

Fragen zum Wesen der Mutanten

Wir starten nun eine Erkundung der 10-adischen Zahlen. Was brauchen wir dazu? Vor allem Eines: Fragen, denen wir nachgehen können. Aber wie kommt man zu konkreten Fragen? Da die neuen Zahlen als Mutation der natürlichen Zahlen entstanden sind, liegt es nahe sie zunächst mit den natürlichen Zahlen zu vergleichen. Sobald Unterschiede zu den natürlichen Zahlen auftreten, lohnt sich auch ein Vergleich mit den anderen uns bekannten Zahlsystemen. Wir gehen daher (in Gedanken) alle Begriffe und Operationen, die wir von den natürlichen, ganzen, rationalen oder reellen Zahlen kennen, durch und stellen Fragen wie: Gibt es bei den 10-adischen Zahlen auch Primzahlen, eine Primfaktorzerlegung, Teilbarkeitsregeln? Können wir bei den 10-adischen Zahlen auch Dividieren, Wurzelziehen, Gleichungen lösen? Gilt bei den 10-adischen Zahlen auch das Kommu-tativ-, Assoziativ-, Distributivgesetz? Was können wir über die periodischen Zahlen aussagen? Was passiert, wenn wir nur 0 und 1 als Ziffern zulassen? Können wir die Zahlen der Größe nach ordnen? Was passiert, wenn wir auch Nachkommastellen zulassen?

Die Rechengesetze als Erbe der natürlichen Zahlen

Wenn wir an einem Beispiel überprüfen möchten, ob das Kommutativgesetz der Multiplikation gilt, dann stehen wir vor einem Problem, da es sich bei der schriftlichen Multiplikation 10-adischer Zahlen um einen unendlichen Prozess handelt. Das Produkt der beiden gewählten Faktoren werden wir, sofern keine Regelmäßigkeit auftritt, nie als Ganzes ausrechnen können. Wir werden durch Rechnen immer nur ein (beliebig langes) Endstück des Produkts in Erfahrung bringen können. Eine „empirische“ Überprüfung des Kommutativgesetzes bleibt uns somit verwehrt. Allerdings wird bei der Betrachtung solch einer Rechnung klar, dass die letzten n Ziffern des Produkts allein durch die letzten n Ziffern der beiden Faktoren festgelegt sind; sie sind identisch mit den letzten n Ziffern des Produkts der beiden natürlichen Zahlen, die von den letzten n Ziffern der beiden Faktoren gebildet werden. Mit dieser Einsicht folgt nun das Kommutativgesetz der Multiplikation 10-adischer Zahlen direkt aus dem entsprechenden Gesetz für natürliche Zahlen. Auf die gleiche Weise werden auch die anderen Rechengesetze der natürlichen Zahlen vererbt.

Ähnlichkeiten zum endlichen Bruder ($\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$)

Es gilt: $\dots 0001 + \dots 9999 = \dots 0000$. Anders als bei den natürlichen Zahlen hat das neutrale Element der Multiplikation also ein additives Inverses. Tatsächlich haben sogar alle 10-adischen Zahlen ein additives Inverses. Die 10-adischen Zahlen bilden somit einen kommutativen Ring. Haben wir es hier möglicherweise gar mit einem Körper zu tun? Nein, 10-adische Zahlen, die auf einer geraden Ziffer enden, können keinen 10-adischen Kehrwert haben, da das Produkt der Zahl mit dem hypothetischen Kehrwert ebenfalls auf einer geraden Ziffer enden wird, sodass das Produkt offensichtlich nicht $\dots 0001$ sein kann. Analog können wir zeigen, dass auch 10-adische Zahlen, die auf einer 5 enden, „kehrwertfrei“ sind. Dass alle anderen 10-adischen Zahlen tatsächlich einen und zwar genau einen Kehrwert haben, erkennen wir bei einem Versuch die (letzten) Ziffern des (zunächst hypothetischen) Kehrwerts von (beispielsweise) $\dots 0007$ schrittweise zu bestimmen. Für die letzte, vorletzte, vorvorletzte,… Ziffer des zu bestimmenden Kehrwerts finden wir dann aufgrund der Tatsache, dass in der 7er-Reihe (**0**, **7**, 1**4**, 2**1**, 2**8**, 3**5**, 4**2**, 4**9**, 5**6**, 6**3**) jede Ziffer genau einmal als Endziffer vorkommt, immer genau einen passenden Kandidaten. Die Umkehrbarkeit einer 10-adischen Zahl richtet sich also nach der Umkehrbarkeit ihrer Endziffer in $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

Wir geben die Zahl 5 in den Taschenrechner ein und drücken danach wiederholt die Quadrattaste. Das liefert uns die folgenden Zahlen: 5, 25, 625, 390625, 152587890625, 23283064365386962890625,… Beim „Durchlaufen“ der Folge mag uns auffallen, dass sich die hinteren Ziffern der einzelnen Folgeglieder nicht mehr verändern und, dass sich die Grenze dieser „Sättigung“ stets weiter nach links verschiebt. Diese Beobachtung führt uns zu der Frage, ob es womöglich eine von Null und Eins verschiedene 10-adische Zahl gibt, die ihr eigenes Quadrat ist. In $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ gibt es ja immerhin zwei solche Elemente: 5 und 6. Und tatsächlich, bei einem Versuch die letzte, vorletzte, vorvorletzte,… Ziffer einer 10-adischen Zahl mit dieser Eigenschaft zu bestimmen, erkennen wir: Es gibt genau zwei nicht-triviale 10-adische „Selbstquadrate“, eins mit Endziffer 5 und eins mit Endziffer 6.

Lernen vom „rechten“ Nachbarn $\mathbb{R}$

10-adische Zahlen bestehen aus unendlich vielen Ziffern. Das ist natürlich kein Alleinstellungsmerkmal. Auch für die reellen Zahlen gilt das. Die 10-adischen Zahlen stellen wir nach links hin fortlaufend dar, die reellen Zahlen nach rechts hin. Die periodischen reellen Zahlen können wir als Bruch von zwei ganzen Zahlen schreiben. Wie steht es mit den periodischen 10-adischen Zahlen? Versuchen wir es doch mit dem gleichen „Trick“ wie bei den reellen Zahlen: Periode nach vorne ziehen um sie anschließend loszuwerden. Das sieht dann bei den 10-adischen Zahlen beispielsweise wie folgt aus: $A = \cdots\overline{758241}$. Also: $1000000 \cdot A = \cdots\overline{758241}000000$. Also: $-999999 \cdot A = 758241$ und schließlich: $A = -75824/999999$. So lässt sich jede periodische 10-adische Zahl als Bruch von zwei ganzen Zahlen schreiben. Kann ein solcher Bruch auch positiv werden?

Lokales Ordnen als Alternative zum Rechnen

Wir haben gesehen, dass man eine ganze Reihe von Erkenntnissen über die 10-adischen Zahlen auf einfache rechnerische Weise, d.h. mit Hilfe der Durchführung oder beim Betrachten einer Rechnung gewinnen kann. Tieferen Einblick in die Struktur dieser Zahlen erhalten wir aber wohl nur, wenn wir beginnen Verwandtschaften zwischen verschiedenen Sachverhalten durch deduktives Schließen aufzudecken, indem wir also *lokales Ordnen* betreiben. Schon bei den bisher angesprochenen Fragen bieten sich hierfür viele Gelegenheiten. Wir geben vier Beispiele:

1. Beim Berechnen der Ziffern des Kehrwertes einer umkehrbaren 10-adischen Zahl haben wir festgestellt, dass es immer genau einen passenden Kandidaten für die nächste zu berechnende Ziffer gibt. Somit ist der Kehrwert der Zahl eindeutig. Wir können diese Tatsache aber natürlich auch wie üblich aus dem Assoziativgesetz der Multiplikation folgern.

2. Dass $\ldots 9999 \cdot \ldots 9999 = \ldots 0001$ gilt, können wir einerseits rechnerisch nachweisen, indem wir die Regelmäßigkeit der Überträge bei der schriftlichen Multiplikation erkennen. Andererseits können wir die Tatsache auch aus dem Distributivgesetz folgern: $\ldots 9999 \cdot \ldots 9999 + \ldots 9999 = \left(\ldots 9999 + \ldots 0001\right) \cdot \ldots 9999 = 0$.

3. Mit der Existenz nicht-trivialer 10-adischer Zahlen, die ihr eigenes Quadrat sind, geht einher, dass die Menge der 10-adischen Zahlen Nullteiler enthält: Sei $a \neq 0{,}1$ mit $a^2 = a$. Dann: $a \cdot (a-1) = 0$.

4. Mit Hilfe dieses Nullteilers a können wir ferner folgern, dass es, übrigens diesmal im Unterschied zu $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, neben -1 und 1 noch weitere 10-adische Zahlen gibt, deren Quadrat gleich 1 ist: Da $a \cdot (a-1) = 0$ gilt auch: $(2a)(2a-2) = 0$. Sei $b := 2a - 1$. Dann gilt: $(b+1)(b-1) = 0$. Also: $b^2 = 1$.

Fazit

Das Abwandeln der natürlichen Zahlen und anschließende Vergleichen mit ebendiesen erlaubt einen frischen Blick auf die natürlichen Zahlen selbst, insbesondere auf die schriftlichen Rechenverfahren.

Die 10-adischen Zahlen (als „genetischer Mischling“ der natürlichen, rationalen und reellen Zahlen sowie des Restklassenrings $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$) bilden einen reichen Kontext für Erkundungen, einen Kontext im Sinne von *Arithmetik als Prozess* (vgl. Müller, Wittmann, Steinbring).

Die wesentliche Aufgabe von Restklassen in Lehramtsvorlesungen zur Arithmetik scheint zu sein, den Begriff des Rings mit Inhalt zu füllen. Die 10-adischen Zahlen könnten sie bei dieser Aufgabe entlasten oder gleichwertig ersetzen.

Literatur

Rich, A. (2008). Leftist Numbers. *The College Mathematics Journal, 5*, 330–336.

van den Broek, L. & van Rooij, A. (2009). *Getallenbrouwerij - alternatief rekenen*. Amsterdam: Epsilon-Uitgaven.

Ann-Kathrin BERETZ, Katja LENGNINK, Claudia V. AUFSCHNAITER, Gießen

Wie diagnostizieren Lehramtsstudierende das Verstehen und Lernen von Schülerinnen und Schülern?

Fachdidaktische Forschung zur Lehrerprofessionalisierung diskutiert vor dem Hintergrund eines Unterrichts in heterogenen Lerngruppen seit einigen Jahren intensiv die Bedeutung diagnostischer Fähigkeiten und individueller Förderung als zentrale Aspekte professioneller Kompetenz von Lehrkräften (z. B. v. Aufschnaiter et al., 2015). Forschung und Lehre bewegen sich dabei immer im Spannungsfeld der Erfassung diagnostischer Kompetenz bei (angehenden) Lehrkräften und dem Aufbau dieser Kompetenz im Rahmen der Lehrerbildung. Vor diesem Hintergrund wird, eingebettet in ein Verbundprojekt der Deutschen Telekomstiftung, am Standort Gießen untersucht, in welcher Weise Videoanalysen für den Professionalisierungsprozess in der Lehrerbildung und als Zugang zu Diagnosen genutzt werden können. Dabei zielt das Teilprojekt fächerübergreifend auf zwei parallelisierte Veranstaltungskonzepte der Mathematik- und Physikdidaktik ab, um zu erfassen, welche Zugänge die Studierenden zur Diagnostik finden, wie sie die Lernangebote nutzen und die Relevanz von Diagnostik erleben.

Theoretische Grundlage

Im Allgemeinen wird diagnostische Kompetenz in das Professionswissen von Lehrkräften integriert, das sich unter Bezug auf Shulman aus dem Fachwissen, dem fachdidaktischen Wissen und dem pädagogischen Wissen zusammensetzt, wobei Diagnostik überwiegend in den letzteren beiden verankert wird (u. a. Krauss et al., 2004). Im schulischen Kontext wird sie als „ein Bündel von Fähigkeiten [beschrieben], um den Kenntnisstand, die Lernfortschritte und die Leistungsprobleme der einzelnen Schüler/innen sowie die Schwierigkeiten verschiedener Lernaufgaben im Unterricht fortlaufend beurteilen zu können, sodass das didaktische Handeln auf diagnostischen Einsichten aufgebaut werden kann“ (Weinert, 2000, S.14). Damit stellt Diagnostik ein wesentliches Professionalisierungselement angehender Lehrkräfte dar. Sie bezieht sich dabei zum einen auf die Kompetenzen, Vorstellungen und Lernschwierigkeiten der Lernenden, zum anderen aber auch auf die Analyse von Aufgaben und Instruktionen und deren Wirkungen im Lernprozess (u. a. Krauss et al., 2008).

Im englischen Sprachraum ist der Begriff der „Diagnostik“ wenig verbreitet, hier wird eher von „professional vision“ bzw. „noticing and knowledge-based reasoning“ (Sherin, 2001/2007) oder dem Dreiklang „elicit, interpret and respond“ gesprochen (Kang & Anderson, 2015). Diese Aspekte beinhalten die Fähigkeit des Wahrnehmens und Beschreibens relevanter Ereignisse im

Klassenzimmer, was auch – aber nicht nur – einen Fokus auf das Handeln und die Kompetenzen von Schüler/innen umfasst. Mit der Bezeichnung des „knowledge-based reasoning“ bzw. dem Teil „interpret and respond“ wird zudem betont, dass die Wahrnehmung nicht deutungsfrei erfolgt und die Beobachtungen mit Blick auf Konsequenzen zu diskutieren sind. Inwiefern das Ableiten solcher Konsequenzen zwingendermaßen ein Teil von Diagnostik darstellt, ist aus dem Forschungsstand nicht eindeutig herauszulesen.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass Diagnostik als Teilmenge unterrichtsbezogener Analysen eine Voraussetzung für die zielgerichtete Adaption von Lernangeboten im Unterricht und die Basis einer schülerorientierten Unterrichtsvorbereitung ist. Sie bildet die Grundlage für die Entwicklung und Begründung von Fördermaßnahmen im Umgang mit heterogenen Lerngruppen (u. a. Rogalla & Vogt, 2008).

Forschungsanliegen und Einbettung

Das Projekt untersucht explorativ den Aufbau diagnostischer Kompetenz von Studierenden anhand zweier bestehender Lehrveranstaltungen. Dafür werden einerseits mithilfe von Video- und Transkriptanalysen die individuellen inhaltlichen Zugänge der Studierenden zur Diagnostik erfasst. Zum anderen wird das Erleben der Studierenden in Bezug auf die Relevanz der Thematik und den Ertrag der beiden Kurse untersucht. Nur wenn die Studierenden die Inhalte der Veranstaltung als für sich persönlich relevant erleben, ist davon auszugehen, dass sie im Sinne des Weinert’schen Kompetenzbegriffs (2001, S.27) neben kognitiven Fähigkeiten auch die nötige Bereitschaft zum Einsatz dieser Fähigkeiten aufbauen.

Beide Veranstaltungen nutzen Videodaten von Schüler/innen als Stimulus und Element des Professionalisierungsprozesses. Durch die Videoanalysen sollen die Studierenden für die Relevanz von Diagnostik und eine auf die Schüler/innen gerichtete Perspektive sensibilisiert werden. Dabei unterscheiden sich die Kurse in drei wesentlichen Aspekten:

1 – Abfolge von Diagnostik und Förderung: Im Zentrum der physikdidaktischen Veranstaltung steht die Diagnostik. Die kriteriengeleiteten Videoanalysen münden in die Anbahnung von spezifischen Fördermaßnahmen. Im Gegensatz dazu beginnt die mathematikdidaktische Veranstaltung mit der Planung einer differenzierenden Lernumgebung, deren Umsetzung im Rahmen der LernWerkstatt Mathematik selbst erlebt und als Ausgangspunkt für eine Auseinandersetzung mit Diagnostik genutzt wird.

2 – Beteiligung der Studierenden an den Videos: In der Physikdidaktik zeigen die Videodaten überwiegend Schülergruppen, die ohne Beteiligung einer Lehrkraft physikalische Aufgaben bearbeiten und gemeinsam diskutieren. In

der Mathematikdidaktik sind die Studierenden als Lehrkräfte an den videographierten Lehr-/Lernprozessen beteiligt, sie analysieren somit die Wirkung ihrer eigenen Lernumgebungen.

3 – Positionierung der beiden Veranstaltungen im jeweiligen Studienverlauf: Nach einführenden Modulen in beiden Fachdidaktiken durchlaufen die Studierenden der Physik die Veranstaltung im 3. bzw. 5. Fachsemester (HR/Gym), während die Studierenden des Fachs Mathematik den beschriebenen Kurs ein Jahr später im 5. bzw. 7. Fachsemester besuchen. Neben den Studierenden, die nur je eines der beiden Fächer belegen, gibt es Teilnehmer/innen, die Mathematik und Physik als Fächerkombination studieren und beide Veranstaltungen besuchen. Daraus ergibt sich für einen Teil der Stichprobe (ca. 20) die Möglichkeit zu einem „gerichteten" Längsschnitt über zwei Jahre des Studiums.

In Bezug auf die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der beiden Kurse scheint die Studie also geeignet, um zu untersuchen, wie sich die Lehramtsstudierenden den Videos mit verschiedenen Voraussetzungen nähern (z. B. mit/ohne Lehrer, mit/ohne eigene Beteiligung), wie sich ihre Zugänge im Verlauf der Veranstaltungen entwickeln, wie sie mit vorgegebenen Kriterien für die Analyse (kursübergreifend) umgehen und welche Komponenten der einzelnen Kurse positiv erlebt werden und zur eigenen Professionalisierung beitragen.

Erhebungsformate und erste Ergebnisse

Um ein möglichst umfassendes Bild von den diagnostischen Zugängen der Studierenden und ihrem veranstaltungsbezogenen Erleben zu erhalten, kamen zu verschiedenen Zeitpunkten unterschiedliche Instrumente zum Einsatz. In einem Prä-Post-Design wurden schriftliche Transkriptanalysen sowie Fragebögen zur Fähigkeitsselbsteinschätzung und der Relevanz der Thematik bearbeitet, die Aktivitäten und Diskurse der Studierenden bei der Analyse der Videovignetten wurden auf Video aufgezeichnet. Darüber hinaus wurden die Studierenden zur Relevanz und zu ihrem Erleben in Bezug auf die Kurse interviewt sowie zu ihren unterrichtlichen Erfahrungen und ihrem biographischen Hintergrund befragt. Während die Fragebögen statistisch ausgewertet wurden (KTR und Rasch), stellen die Videos und Transkriptanalysen qualitative Daten dar, die entlang eines Kategoriensystems zur Identifikation der von den Studierenden genutzten diagnostischen Kriterien kodiert wurden.

Vorläufige Ergebnisse aus den Interviews und Fragebögen zeigen, dass die Studierenden die Kurse als hochgradig relevant für ihre spätere Berufspraxis erleben und auf Basis ihrer Fähigkeitsselbsteinschätzung ein subjektiver Lernzuwachs stattfindet. In Physik betrifft er die theoretischen Grundlagen und die Diagnostik, in Mathematik die Diagnostik und die Förderung und spiegelt damit die inhaltlichen Schwerpunkte der jeweiligen Veranstaltung wider. Die Daten der Transkriptanalysen weisen darauf hin, dass die Studierenden in beiden Kursen die intendierten Kriterien zur Beschreibung der Schüleraktivitäten und Beurteilung des Lernfortschritts heranziehen. Die Beschreibungen der Studierenden sind insgesamt zwar überwiegend sachlich angemessen, durch den kriteriengeleiteten Fokus auf die zentralen Merkmale der Bearbeitungsprozesse sind die Analysen aber sehr auf die Veranstaltungsinhalte begrenzt, Deutungen und Konsequenzen im Sinne des „knowledge-based reasoning“ werden nur selten begründet.

Literatur

Aufschnaiter, C. v., Cappell, J., Dübbelde, G., Ennemoser, M., Mayer, J., Stiensmeier-Pelster, J., Sträßer, R. & Wolgast, A. (2015). Diagnostische Kompetenz: Theoretische Überlegungen zu einem zentralen Konstrukt der Lehrerbildung. Zeitschrift für Pädagogik, 61(5), 738-757.

Kang, H. & Anderson, C. W. (2015). Supporting preservice science teachers’ ability to attend and respond to student thinking by design. Science Education, 99(5), 863–895.

Krauss, S., Kunter, M., Brunner, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Jordan, A. & Löwen, K. (2004). COACTIV: Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz. In J. Doll & M. Prenzel (Hrsg.), Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung (S. 31-53). Münster, New York, München, Berlin: Waxmann.

Krauss, S., Neubrand, M., Blum, W., Baumert, J., Brunner, M., Kunter, M. & Jordan, A. (2008). Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. Journal für Mathematik-Didaktik, 29(3), S. 233-258.

Rogalla, M., & Vogt, F. (2008). Förderung adaptiver Lehrkompetenz: eine Interventionsstudie. Unterrichtswissenschaft, 36(1), 17-36.

Sherin, M. G. (2001). Developing a professional vision of classroom events. In T. Wood, B. S. Nelson & J. Warfield (Eds.), Beyond Classical Pedagogy: Teaching Elementary School Mathematics (pp. 75-93). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Sherin, M. G. (2007). The development of teachers' professional vision in video clubs. In R. Goldman, P. Roy & B. Barron (Eds.), Video research in the learning sciences (pp. 383-396). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Weinert, F. E. (2000). Lehren und Lernen für die Zukunft - Ansprüche an das Lernen in der Schule. Pädagogische Nachrichten Rheinland-Pfalz, 2, 1-16.

Weinert, F. E. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. E. Weinert (Hrsg.), Leistungsmessung in Schulen (S. 15-31). Weinheim, Basel: Beltz.

Margit BERG & Bettina JANKE, Heidelberg

Mathematische Entwicklung sprachgestörter Kinder in Klasse 1 und 2: Anforderungen an Schüler und Lehrer im inklusiven Unterricht

Problemstellung

Kinder mit sogenannten "Spezifischen Sprachentwicklungsstörungen" zeigen einen deutlichen Rückstand in ihrer Sprachentwicklung, obgleich sie eine normale nonverbalen Intelligenz zeigen. Diese Kinder stellen eine Risikogruppe für die Ausbildung allgemeiner schulischer Probleme dar. Daher gilt es, die besonderen Anforderungen zu reflektieren, vor denen die Schülerinnen und Schüler, aber auch die Lehrkräfte im inklusiven Mathematikunterricht stehen.

Forschungsstand

Im Vergleich mit sprachlich unauffällig entwickelten Kindern wurden bei sprachentwicklungsgestörten Kindern Entwicklungsrückstände in der Zahlbegriffsentwicklung und im Umgang mit Zahlen nachgewiesen. Dieser niedrigere Leistungsstand zeigte sich im Lesen und Schreiben von Zahlen (Fazio, 1996; Cowan, Donlan, Newton & Lloyd, 2005), im Vergleich von Zahlen (Fazio, 1996; Cowan, Donlan, Newton & Lloyd, 2005) sowie in Zählkompetenzen (Donlan, 1994; Donlan, Cowan, Newton & Lloyd , 2007; Fazio, 1996; Koponen et al., 2006). Darüber hinaus waren auch das Verständnis von Rechenoperationen (Arvedson, 2002; Manor, Shalev, Joseph & Gross-Tsur , 2001) sowie die Rechenfähigkeiten (Fazio, 1999; Donlan et al., 2007; Nys, Content & Leybaert, 2012; Berg, 2015) betroffen.

Die mathematische Sprache stellt besondere (hohe) Anforderungen an die Kinder (Lorenz, 2010). Daher stellen Sprachverständnisstörungen ein Hemmnis für das mathematische Lernen dar (Nolte, 2000). Hinzu kommt, dass das Arbeitsgedächtnis, das als verlässlicher Prädiktor für den mathematischen Lernerfolg gilt (Fischbach, Preßler & Hasselhorn, 2012; Grube & Seitz-Stein, 2012; Krajewski & Schneider, 2006; Krajewski, Schneider & Nieding, 2008), bei vielen sprachentwicklungsgestörten Kindern in Bezug auf die Speicherung und VerarbeitungVerarbeitung auditiver Informationen eingeschränkt ist. (Schuchardt, Roick, Mähler & Hasselhorn, 2008). Somit sind diese Kinder als Risikogruppe für mathematische Lernstörungen anzusehen.

Ergebnisse aus dem Forschungsprojekt Ki.SSES-Proluba

Die Ki.SSES-Proluba-Studie wurde vom Bundesministerium für Bildung und Forschung finanziert (Förderkennzeichen 01JC1102A/B) und als Kooperationsprojekt der Pädagogischen Hochschule Heidelberg (Leitung B. Janke) und der Universität Leipzig (Leitung C. W. Glück) durchgeführt. Das Ziel war es, die sprachliche, schulleistungsbezogene und sozial-emotionale Entwicklung von Kindern mit spezifischen Sprachentwicklungsstörungen (im Folgenden: Ki.SSES) in einer prospektiven Längsschnittuntersuchung zu erfassen. Die Ki.SSES wurden zu drei Zeitpunkten untersucht: vor der Einschulung, am Ende der ersten Klasse und am Ende der zweiten Klasse. Sie besuchten entweder eine Schule für Sprachbehinderte oder nahmen ein inklusives Bildungsangebot in einer allgemeinen Grundschule wahr. Zur Feststellung der mathematischen Leistungen wurden in diesem Rahmen vor der Einschulung der Subtest "Rechnen" aus der K-ABC als Einzeltest und am Ende der ersten und zweiten Klasse der DEMAT 1+ bzw. DEMAT 2+ als Gruppentest eingesetzt. Die Ki.SSES und die zum Vergleich herangezogenen Kinder mit typischer Sprachentwicklung (Ki.TSE) unterschieden sich in Bezug auf die sprachlichen Fähigkeiten, nicht aber im Alter und in der Intelligenz.

Bereits im Einschulungszeitraum waren die Ki.SSES in ihren mit dem K-ABC erhobenen rechnerischen Fertigkeiten der sprachunauffälligen Vergleichsgruppe signifikant unterlegen. Der Anteil der Ki.SSES mit unterdurchschnittlichen Werten im K-ABC Rechnen lag bei 29%. Am Ende des ersten Schuljahres schnitten 50% der Ki.SSES im DEMAT 1+ unterdurchschnittlich ab; am Ende des zweiten Schuljahres galt dies im DEMAT 2+ sogar für 54% der Ki.SSES, obgleich alle Kinder über einen durchschnittlichen IQ verfügten. Die mathematischen Leistungen der Ki.SSES lagen signifikant unter den Leistungen der sprachunauffälligen Vergleichsgruppe. Diese Unterschiede waren nicht nur für das Gesamtergebnis, sondern für jeden einzelnen Subtest der DEMAT-Tests nachweisbar. Auch in inklusiven Settings bestanden am Ende der 1. und der 2. Klasse signifikante Unterschiede im mathematischen Lernerfolg der Ki.SSES und der Ki.TSE. Die sprachentwicklungsgestörten Kinder konnten also bei vergleichbarer Intelligenz nicht in gleichem Maße vom Mathematikunterricht profitieren wie ihre sprachunauffälligen Mitschüler. Die Ergebnisse der Ki.SSES-Studie verweisen damit darauf, dass spezifische Sprachentwicklungsstörungen ein Risiko für die Ausbildung mathematischer Lernschwächen mit sich bringen. Die Kinder zeigen in vielen Fällen geringere mathematischen Leistungen als es ihre kognitiven Fähigkeiten erwarten lassen.

Anforderungen an den Mathematikunterricht

Die Befunde der Ki.SSES-Studie verdeutlichen die Notwendigkeit eines sprachsensiblen Mathematikunterrichts (Abshagen, 2015) für Kinder mit Sprachentwicklungsstörungen. Dieser Anspruch beschränkt sich nicht auf spezifische Sonderschulen oder Förderzentren, sondern muss auch in inklusiven Schulformen eingelöst werden. Damit stehen die Lehrkräfte vor einer anspruchsvollen Aufgabe. Um dieser gerecht werden zu können, müssen die sprachlichen Anforderungen des mathematischen Bildungsinhalts bereits in der Planungsphase analysiert werden. Erst damit wird die Voraussetzung für den Abbau sprachlich bedingter Lernbarrieren geschaffen.

Da Kinder mit spezifischen Sprachentwicklungsstörungen bereits bei der Einschulung geringer entwickelte mathematische Fertigkeiten mitbringen als sprachunauffällige Gleichaltrige, sind schon in der ersten Klasse Differenzierungsmaßnahmen erforderlich. Hilfreich für Kinder mit eingeschränkten Sprachverarbeitungsfähigkeiten ist es, außersprachliche Veranschaulichungsmittel einzubeziehen (beispielsweise durch Bilder und Symbole) und eindeutige Bezüge zwischen den benutzten Wörtern und den Gegenständen, auf die sie sich beziehen, herzustellen. Sinnvolle Vereinfachungen der Lehrersprache liegen einerseits in einer Verringerung der linguistischen Komplexität (z. B. Auflösen von Satzgefügen in mehrere einfache Hauptsätze) und andererseits in der Entlastung des Arbeitsgedächtnisses. Hierzu trägt die Verwendung kürzerer Sätze bei, aber auch ein langsameres Sprechtempo, häufigere und längere Pausen sowie eine deutliche Betonung. Unverzichtbar ist es zudem, mathematische Fachbegriffe gezielt einzuführen.

Literatur

Abshagen, M. (2015): *Praxishandbuch Sprachbildung Mathematik. Sprachsensibel unterrichten - Sprache fördern.* Stuttgart: Klett.

Arvedson, P. J. (2002). Young children with specific language impairment and their numerical cognition. *Journal of Speech, Language, and Hearing Research, 45*(5), 970-982. doi: 10.1044/1092-4388(2002/079)

Berg, M. (2015). Grammatikverständnis und mathematische Fähigkeiten sprachbehinderter Kinder. *Sprache - Stimme- Gehör, 39*(2), 76-80.

Cowan, R., Donlan, C., Newton, E. J., & Llyod, D. (2005). Number skills and knowledge in children with specific language impairment. *Journal of Educational Psychology, 97*(4), 732-744. doi: 10.1037/0022-0663.97.4.732

Donlan, C. (1994). Are verbal processes necessarily entailed in numeracy acquisition? Evidence from normal and language- impaired children. *First Language, 42-43,* 320–320. .

Donlan, C., Cowan, R., Newton, E. J., & Lloyd, D. (2007). The role of language in mathematical development: Evidence from children with specific language impairments. *Cognition, 103*(1), 23-33. doi: 10.1016/j.cognition.2006.02.007

Fazio, B. B. (1996). Mathematical abilities of children with specific language impairment: A 2-year follow-up. *Journal of Speech & Hearing Research, 39*(4), 839-849.

Fazio, B. B. (1999). Arithmetic calculation, short-term memory, and language performance in children with specific language impairment: A 5-yr follow-up. *Journal of Speech, Language, and Hearing Research, 42*(2), 420-431.

Fischbach, A., Preßler, A. L., & Hasselhorn, M. (2012). Die prognostische Validität der

AGTB 5-12 für den Erwerb von Schriftsprache und Mathematik. In M. Hasselhorn & C. Zoelch (Eds.), *Funktionsdiagnostik des Arbeitsgedächtnisses* (S. 37-58). Göttingen: Hogrefe.

Grube, D., & Seitz-Stein, K. (2012). Arbeitsgedächtnis und Rechnen. In M. Hasselhorn & C. Zoelch (Eds.), *Funktionsdiagnostik des Arbeitsgedächtnisses* (S. 145-157). Göttingen: Hogrefe.

Janke, B., Becker, E., & Teichert, K. (2015, March). *Behavior problems and learning difficulties in children with specific language impairment (SLI)*. Paper presented at the Biennial meeting of the Society of Research in Child Development, Philadelphia, PE, Philadelphia.

Ki.SSES-Proluba (2014). Die Ki.SSES-Prolubalängsschnittstudie: Entwicklungsstand zur Einschulung von Kindern mit sonderpädagogischem Förderbedarf "Sprache" bei separierender und integrativer Beschulung. In C. W. Glück, S. Sallat & M. Spreer (Hrsg.), *Sprache professionell fördern. kompetent-vernetzt-innovativ* (S. 402-415). Idstein: Schulz-Kirchner.

Koponen, T., Mononen, R., Rasanen, P., & Ahonen, T. (2006). Basic numeracy in children with specific language impairment: Heterogeneity and connections to language. *Journal of Speech, Language, and Hearing Research, 49*(1), 58-73. doi: 10.1044/1092-4388(2006/005)

Krajewski, K., & Schneider, W. (2006). Mathematische Vorläuferfertigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistung bis zum Ende der Grundschulzeit. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 53*, 246-262.

Krajewski, K., Schneider, W., & Nieding, G. (2008). Zur Bedeutung von Arbeitsgedächtnis, Intelligenz, phonologischer Bewusstheit und früher Mengen-Zahlen-Kompetenz beim Übergang vom Kindergarten in die Grundschule. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 55*, 100-113.

Lorenz, J. H. (2010). Die Bedeutung der Sprache und ihrer Störungen beim Lernen von Mathematik. *mitSprache, 1*, 47-62.

Manor, O., Shalev, R. S., Joseph, A., & Gross-Tsur, V. (2001). Arithmetic skills in kindergarten children with developmental language disorders. *European Journal of Paediatric Neurology, 5*(2), 71-77.

Nolte, M. (2000). *Rechenschwäche und gestörte Sprachrezeption*. Bad Heilbrunn: Klinkhard.

Nys, J., Content, A., & Leybaert, J. (2013). Impact of language abilities on exact and approximate number skills development: Evidence from children with specific language impairment. *Journal of Speech, Language, and Hearing Research, 56*(3), 956-970. doi: 10.1044/1092-4388(2012/10-0229)

Schuchardt, K., Roick, T., Mähler, C., & Hasselhorn, M. (2008). Unterscheidet sich die Struktur des Arbeitsgedächtnisses bei Schulkindern mit und ohne Lernstörung? *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 40*(3), 147-151.

Sarah BEUMANN, Bochum

Welchen Einfluss haben mathematische Schülerexperimente auf das Erleben der Basic Needs?

Innerhalb der hier vorgestellten Interventionsstudie wird analysiert, inwieweit eine Lernumgebung basierend auf mathematischen Schülerexperimenten das Erleben der drei Basic Needs unterstützt. Die Basic Needs-Theorie ist Teil der Selbstbestimmungstheorie von Deci & Ryan und erklärt die Beziehung zwischen den drei grundlegenden psychologischen Bedürfnissen des Menschen und seinem Wohlbefinden. Insgesamt nahmen 179 Lernende an dieser Interventionsstudie teil. Die experimentellen Kurse fanden zwischen Mai und Juni 2015 an einem außerschulischen Lernort der Ruhr-Universität Bochum statt und richteten sich an Schüler der Klassen 6 bis 9.

Experimente im mathematischen Lernprozess

Mathematik gilt nicht als empirische Wissenschaft und mathematische Sätze werden nicht durch eine erfolgreiche Bestätigung in einem Experiment bewiesen. Doch die Bedeutung von Experimenten für die Mathematik sollte nicht unterschätzt werden (Oldenburg, 2006). Ein Experiment ist dabei ein hypothesengeleitetes, planvolles und kontrolliertes Handeln mit Objekten zum Zweck der Erkenntnisgewinnung durch Beobachtung (Ludwig & Oldenburg, 2007). Es wird zwischen inner- und außermathematischen Experimenten unterschieden. In innermathematischen Experimenten werden z.B. mathematische Strukturen und Beziehungen zwischen Mustern untersucht (Leuders & Philipp, 2013). Bei außermathematischen Experimenten interagieren Lernende mit Phänomenen oder Situationen, die in der Natur oder im Alltag auftreten.

Die Selbstbestimmungstheorie nach Deci & Ryan

Die Selbstbestimmungstheorie von Deci & Ryan ist eine allgemeine Meta-Theorie der Motivation, die in mehrere Mini-Theorien aufgegliedert ist. Jede dieser Mini-Theorien hat sich entwickelt, um eine Vielzahl von motivationsbasierenden Phänomenen zu erklären (Deci & Ryan, 1985). Die Basic Needs-Theorie ist eine dieser Mini-Theorien und erklärt die Beziehung zwischen den drei psychologischen Grundbedürfnissen des Menschen und seinem Wohlbefinden. Nach dieser Mini-Theorie ist das menschliche Wohlbefinden eng mit Autonomie, Kompetenz und sozialer Eingebundenheit verknüpft.

Das Bedürfnis nach Autonomie bedeutet nicht unbedingt das Gefühl von Freiheit und Unabhängigkeit, sondern äußert sich vielmehr im Bestreben, sich als eigenständig handelnd zu erleben. Personen möchten ebenfalls Aufgaben aus eigener Kraft bewältigen können und sich angesichts verschiedener Anforderungen als handlungsfähig erleben (Kompetenz). Das Bedürfnis nach sozialer Eingebundenheit ist im Wesentlichen das Streben einer Person nach sozialer Akzeptanz innerhalb einer von ihm als relevant erachteten Bezugsgruppe (Deci & Ryan, 1985).

Die empirische Studie

Aus den oben genannten Informationen über mathematische Experimente und den drei Grundbedürfnissen ergibt sich folgende Forschungsfrage: Inwieweit haben mathematische Schülerexperimente einen Einfluss auf das Erleben der Basic Needs?

Der Experimentierkurs „Versuch´s doch mal“

Zur Beantwortung dieser Frage nahmen 179 Lernende aus sieben Schulklassen an jeweils einem Experimentierkurs mit je vier Experimenten aus allen Inhaltsbereichen teil. Diese experimentellen Kurse fanden zwischen Mai und Juni 2015 in einem außerschulischen Lernort der Ruhr-Universität Bochum, dem Alfried-Krupp-Schülerlabor statt. Diese Kurse wurden für Lerndende der Klassen 6 bis 9 konzipiert. Das Konzept des Kurses soll das Erleben von Autonomie, Kompetenz und sozialer Eingebundenheit aus den folgenden Gründen fördern: Die Lernenden arbeiten innerhalb dieser Experimentiersituation in Teams, was eine größere Schülerzentriertheit zur Folge hat und den Lernenden ein größeres Autonomieerleben und Erleben von sozialer Eingebundenheit ermöglicht. Sie experimentieren selbsttätig und haben so die Möglichkeit, eigenen Ideen nachzugehen. Der Dozent hat innerhalb des Kurses die Aufgabe, auf die Bedürfnisse und Wünsche der Lernenden einzugehen und bei Bedarf Anregungen zu geben, um so Frustrationserlebnisse bei den Lernenden zu vermeiden bzw. Kompetenzerlebnisse zu erzeugen.

Methodik

Die Teilnehmer der Studie sollten nach dem Experimentierkurs einen post-Fragebogen beantworten. Um das Erleben von Autonomie, Kompetenz sowie sozialer Eingebundenheit zu untersuchen, wurde ein Fragebogen mit 18 Items auf einer 4-stufigen Likert-Skala (1-stimmt nicht bis 4-stimmt genau) aus einer Skala von Willems genutzt (2011):

Erleben von Autonomie (8 Items): 4 Items zu persönlichen Wünschen und Zielen des Lernenden (zum Beispiel: In diesem Teil des Kurses hatte ich das Gefühl, dass der Kurs so war, wie	**Erleben von Kompetenz (4 Items):** (zum Beispiel: In diesem Teil des Kurses hatte ich das Gefühl, dass ich in der Lage war, die Aufgaben alleine zu bearbeiten).	**Erleben von sozialer Eingebundenheit (6 Items):** 3 Items der Referenzgruppe Dozent (zum Beispiel: In diesem Teil des Kurses hatte ich das Gefühl, dass meine Dozentin mich an

ich es mir vorstelle) und 4 Items zur Selbstbestimmung (zum Beispiel: In diesem Teil des Kurses hatte ich das Gefühl, dass ich selbstständig arbeiten konnte).		schwierigen Stellen im Kurs unterstützt hat) und 3 Items der Referenzgruppe Studenten (zum Beispiel: In diesem Teil des Kurses hatte ich das Gefühl, dass meine Mitstudenten meine Leistungen anerkannt haben).

Die vorliegenden Daten wurden mit Hilfe der statistische Software SPSS Volume 22 quantitativ analysiert. Die statistische Analyse der einzelnen Aspekte erfolgte durch explorative Faktorenanalyse, gefolgt von einer Reliabilitätsanalyse. Dazu wurde zuerst der Mittelwert aller Subskalen gebildet, dann die deskriptiven Werte sowie die Korrelationen berechnet.

Ergebnisse und Diskussion

Tabelle 1 zeigt die deskriptiven Werte des motivationalen Erlebens der Teilnehmer. Die Daten sind getrennt nach den Facetten der Autonomie (Wünsche und Ziele, Selbstbestimmung), Kompetenz und sozialer Eingebundenheit (Dozent, Student).

Aspekt	**N**	**Minimum**	**Maximum**	**M**	**SD**	**Cronbach's α**
I Autonomie (Wünsche und Ziele)	178	1.00	4.00	2.63	.82	.92
II Autonomie (Selbstbestimmung)	179	1.00	4.00	2.89	.69	.82
III Kompetenz	179	1.00	4.00	3.04	.63	.78
IV Eingebundenheit (Dozent)	179	1.00	4.00	3.14	.65	.64
V Eingebundenheit (Student)	178	1.00	4.00	3.17	.62	.65

Tabelle 1: Deskriptive Daten des motivationalen Erlebens

Die Mittelwerte des Erlebens von sozialer Eingebundenheit und Kompetenz sind mäßig höher als die theoretisch zu erwartenden Mittelwerte von 3.00. Die Teilnehmer berichten über einen durchschnittlichen Wert beim Erleben von Autonomie, während sie sich im Vergleich dazu aber mehr selbstbestimmt fühlten. Beide Facetten der Autonomie, aber auch die Facette Kompetenz haben eine sehr gute interne Konsistenz. Die interne Konsistenz beider Skalen der Eingebundenheit ist befriedigend, was aber aufgrund der Kürze dieser Subskala akzeptabel ist. Diese Werte sind vergleichbar mit den Ergebnissen von Willems (2011).

	I	II	III	IV	V
I	1.00	.65**	.49**	.48**	.45**
II		1.00	.59**	.55**	.46**
III			1.00	.51**	.54**
IV				1.00	.75**
V					1.00

Tabelle 2: Faktorinterkorrelationen mit **p< .01 (bilateral)

Tabelle 2 zeigt die latenten Faktorinterkorrelationen der verschiedenen Facetten der Motivation. Die einzelnen Korrelationen sind hoch signifikant, aber insgesamt sehr klein ist. Es gibt keinerlei systematische Beziehung. Die beiden Facetten der Eingebundenheit (IV, V) korrelieren stark und die Beziehungen zwischen den beiden Facetten der Autonomie (I, II) etwas schwächer. Aufgrund der starken Beziehung zwischen dem Erleben von soz. Eingebundenheit mit dem Dozenten (IV), aber auch mit den anderen Studenten und dem Erleben von Autonomie (I, II) und Kompetenz (III), liegt der Schluss nahe, dass sowohl Lehrperson als auch Schüler einen starken Einfluss auf das Erleben von Kompetenz und Autonomie haben. Grundsätzlich ist eine wichtige Rolle beider Facetten der Autonomie zu erwarten, weil die Selbstbestimmungstheorie davon ausgeht, dass das Erleben von Kompetenz und soz. Eingebundenheit nur dann eintritt, wenn das Bedürfnis nach Autonomie in der Lernsituation befriedigt wird. Ebenso wird hier gezeigt, dass man die beiden Facetten der Autonomie (I, II) nicht nur konzeptuell sondern auch empirisch voneinander trennen kann.

Zusammenfassung und Ausblick

Die Lernenden nehmen sich innerhalb des Kurses als autonom, kompetent und sozial eingebunden wahr. Es scheint so, dass die Lernumgebung die geforderten Merkmale erfüllt und so die drei Grundbedürfnisse unterstützt. Besonders das Erleben von Kompetenz und sozialer Eingebundenheit mit dem Dozenten werden positiv bewertet. Es ist jedoch unklar, inwieweit dieser Effekt auf die Tatsache zurückzuführen ist, dass der Kurs an einem außerschulischen Lernort stattfand. Aufgrund dieses Problems wird eine Kontroll-Studie folgen, in der die experimentellen Kurse in den Schulen selbst stattfinden.

Literaturverzeichnis

Die Liste mit der im Text angeführten Literatur kann per E-Mail angefordert werden unter: sarah.beumann@rub.de

Christina BIERBRAUER, Saarbrücken

Digitale Medien zur Unterstützung beim Lösen von Textaufgaben

Textaufgaben sind selbstverständlicher und bedeutsamer Bestandteil des Mathematikunterrichts. Das Lösen von Textaufgaben ist ein komplexer Prozess und kann für Schülerinnen und Schüler mit und ohne besonderem Förderbedarf eine Herausforderung darstellen. Im Hinblick auf die vielfältigen Anforderungen beim Lösen von Textaufgaben soll das Potential digitaler Medien genutzt werden, um den Lösungsprozess zu unterstützen.

Lösen von Textaufgaben

Neben Sachproblemen, eingekleideten Aufgaben, Bild-Text-Aufgaben oder Sachtexten lässt sich auch der Aufgabentyp Textaufgaben dem Bereich Sachrechnen unterordnen (Häsel-Weide 2012). Textaufgaben sind in Textform präsentierte Sachaufgaben, deren Formulierung eine didaktisch, auf die Mathematik orientierte Zielsetzung beinhaltet (Franke/ Ruwisch 2010). Sachaufgaben sind insbesondere aufgrund ihrer Lebensnähe und Lebensbedeutung für die Schülerinnen und Schüler wichtig im Mathematikunterricht und sollen von Anfang an einen festen Platz im Unterricht einnehmen (Häsel-Weide 2012).

In der Literatur wird kontrovers diskutiert, ob Textaufgaben als mathematische Modellierungsaufgaben angesehen werden können (Hohn 2012, 21). In Anlehnung an Verschaffel u.a. sind auch einfache Textaufgaben Modellierungsaufgaben: „Even the simplest word problem can be viewed as a modeling exercise” (Verschaffel u.a., 2000, S. 134). Beim Bearbeiten von Textaufgaben als mathematisches Modellieren müssen die Schülerinnen und Schüler vielfältige Teilschritte bewältigen, die eine Vielzahl an Kompetenzen erfordern (Häsel-Weide 2012). Da das Lösen von Sachaufgaben ein stimmiges Wechselspiel von komplexen sprachlichen, sachlichen und mathematischen Prozessen benötigt, werden neben mathematischen Anforderungen (z.B. Operationsverständnis) ebenso Anforderungen aus den Bereichen Sprache (z.B. Leseverstehen, angemessener Wortschatz) und Sache (z.B. Interesse am und Wissen über das Sachthema) an die Kinder gestellt (Franke/ Ruwisch 2010).

Wie auch die Ergebnisse empirischer Studien zeigen, ist das Lösen von Textaufgaben mit ihren umfangreichen Anforderungen ein „anspruchsvoller und komplexer kognitiver Prozess“ (Rink 2014, 62) und stellt für Schülerinnen und Schüler mit und ohne besonderem Förderbedarf eine Herausforderung dar (Häsel-Weide 2012; Reusser 1997; Ruwisch/ Franke 2010).Schwierigkeiten im Lösungsprozess entstehen, wenn zwischen den Anforderungen, die

Textaufgaben stellen, und den Kompetenzen der Kinder als Aufgabenlösende eine Lücke besteht (ebd.). Bei der Betrachtung von Problemstellen während des Lösungsprozesses muss vor allem der Bereich Sprache einbezogen werden, da ihm eine zentrale Bedeutung zukommt. Textaufgaben können nur gelöst werden, „wenn der Kern der Aufgabe verstanden" (Rink 2014, 63) wird. Deshalb ist das „Verstehen der Textaufgabe" für das Bearbeiten zentral. Hierzu muss der Text „enkodiert werden" (Häsel-Weide 2012, 282), wozu sinnentnehmendes Leseverstehen eine Grundvoraussetzung ist. Diese sprachliche Anforderung kann für Schülerinnen und Schüler eine große Hürde darstellen.

Einsatz digitaler Medien im Sinne der Cognitive Load Theory

Digitale Medien können helfen Schülerinnen und Schülern mathematische Aufgaben zugänglich zu machen (van den Heuvel-Panhuizen/ Peltenburg 2011). Daher erscheint es sinnreich das Potential digitaler Medien auch beim Lösen von Textaufgaben zu nutzen.

Die „Cognitive Load Theory" geht davon aus, dass die Kapazitäten des Arbeitsgedächtnisses begrenzt sind. Das Arbeitsgedächtnis kann eine eingeschränkte Menge an Informationen aufrechterhalten, wobei anspruchsvolle Prozesse viel Kapazität benötigen (Sweller 2005). Nach dieser Theorie stellt das Verstehen der Textaufgabe im Lösungsprozess eine extrinsische Belastung (extraneous cognitive load) dar. Diese Belastung kann dazu führen, dass die Lernenden zu viele Ressourcen für das Verstehen der Textaufgabe verbrauchen und dementsprechend den Schwerpunkt nicht auf das „Erkennen und Bearbeiten eines mathematischen Modells" (Ruwisch/Franke 2010, 63) legen können.

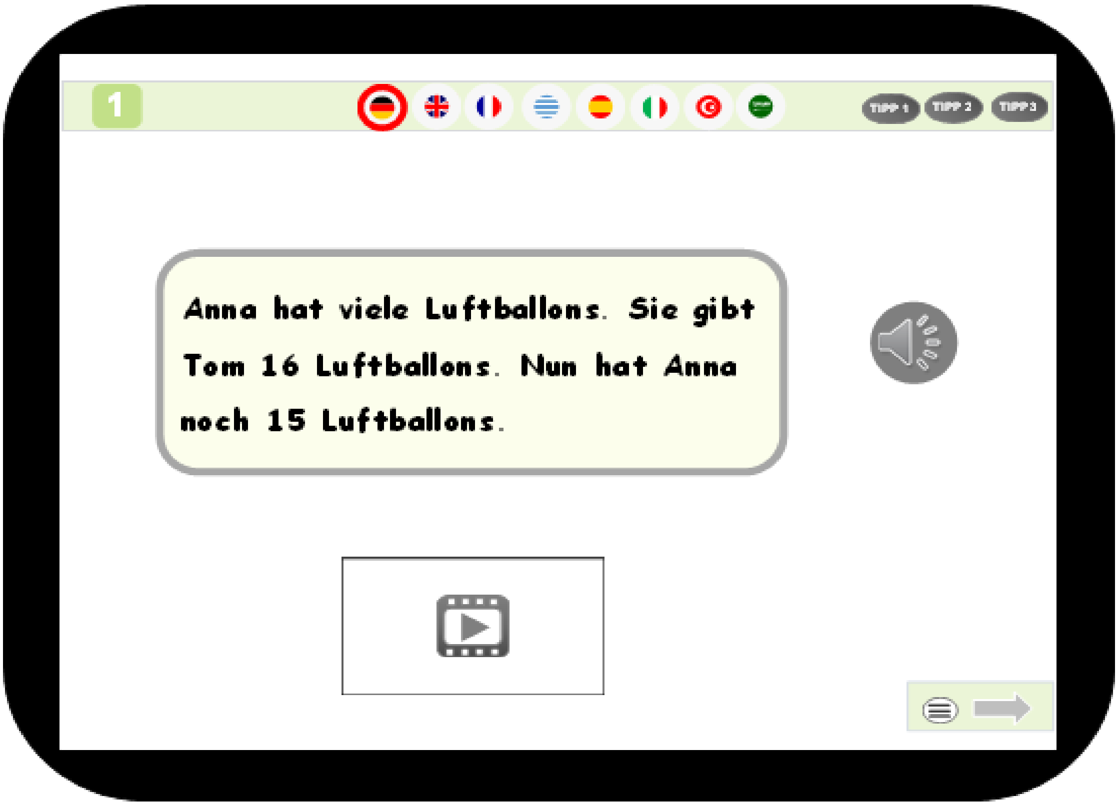
Basierend auf der „Cognitive Load Theory" scheinen digitale Medien also die Möglichkeit zu bieten die kognitive Belastung beim Lösen von Textaufgaben, genauer gesagt beim Verstehen von Textaufgaben, zu verringern und den Fokus auf das Bearbeiten eines mathematischen Modells zu setzen. Insbesondere die auditive Unterstützung, die visuelle Unterstützung durch Videos sowie die Möglichkeit der Verknüpfung von multiplen externen Repräsentationen (MER) (Ladel 2011), also die unterschiedliche Darstellung einer Aufgabe, die digitale Medien ermöglichen, können das Verstehen der Textaufgabe unterstützen und schaffen die Voraussetzung, dass sich die Kinder auf die nachfolgenden Teilschritte des Lösungsprozesses fokussieren können.

Forschungsvorhaben

In den vorangegangenen Abschnitten wurde die Bedeutung des Verstehens der Textaufgabe für deren gesamten Lösungsprozess deutlich. Vermuten lässt sich, dass der Einsatz digitaler Medien das Leseverstehen unterstützen und so Auswirkungen auf die nachfolgenden Teilschritte des Lösungsprozesses implizieren.

Aus der beschriebenen Problemlage bezüglich des Lösungsprozesses von Textaufgaben und dem Potential digitaler Medien ergibt sich folgende übergeordnete Forschungsfrage, welche im Rahmen einer empirischen Studie untersucht werden soll: *Wie wirken sich Bearbeitungshilfen einer Tablett-App auf den Lösungsprozess von Textaufgaben aus?*

Basierend auf dieser Fragestellung wurde eine Tablet-App konzipiert. Diese beinhaltet Bearbeitungshilfen, die Kinder mit besonderen Schwierigkeiten im Verstehen der Textaufgabe unterstützen sollen. Eine Hilfe stellt die Möglichkeit des Anhörens der Textaufgabe dar. So wird der Text auditiv zugänglich gemacht, wodurch insbesondere Problemen, die mit dem Erlesen des Textes zusammenhängen, entgegengewirkt wird (Rink 2014). Darüber hinaus kann passend zur Textaufgabe ein Video angeschaut werden, welches Einblicke in die Sachsituation ermöglicht. Zudem besteht die Möglichkeit Tipps zum Verstehen der Aufgabe einzuholen, welche sodann visuell (schriftlich) und auditiv präsentiert werden.



Prototyp der Tablett-App

Diese Tipps beziehen sich auf die Bearbeitungshilfen „Mehrmaliges Lesen des Textes" (Erichson 1993), „Nacherzählen" (Bongartz/Verboom 2007, 34) und „wichtige Informationen markieren" (ebd.). Zudem bietet die App für mehrsprachige Kinder die Möglichkeit eine andere Sprache auszuwählen, sodass die Textaufgabe in der entsprechenden Sprache gelesen und angehört werden kann. Die Bedienung der App ist einfach und selbsterklärend gestaltet. Alle Hilfeoptionen können die Kinder während der Untersuchung individuell und beliebig nutzen.

Literatur

Bongartz, T., Verboom, L. (2007). *Fundgrube Sachrechnen. Unterrichtsideen, Beispiele und methodische Anregungen für das 1. bis 4. Schuljahr*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Erichson, C. (1993). Lesestoff zum Sachrechnen. In *Grundschulunterricht, Jg. 40, H. 4,* 17–19.

Franke, M., Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Häsel-Weide, U. (2012): Sachrechnen. In U. Heimlich, F. Wember, (Hrsg.): *Didaktik des Unterrichts im Förderschwerpunkt Lernen (S. 280–293)*. Stuttgart: Verlag W. Kohlhammer.

Hohn, K. (2012). *Gegeben, Gesucht, lösung? Selbstgenerierte Repräsentationen bei der Bearbeitung problemhaltiger Textaufgaben*. Dissertation. Universität Koblenz-Landau, Landau.

Ladel, S. (2011). Multiple externe Repräsentationen (MERs) und deren Verknüpfung durch Computereinsatz. *Forum Forschung. Das Wissenschaftsmagazin der Pädagogischen Hochschule Schwäbisch Gmünd.*

Reusser, K. (1997). Erwerb mathematischer Kompetenzen. In F.E. Weinert, A. Helmke (Hrsg.)*, Entwicklung im Grundschulalter (S.141-155)*. Weinheim: Beltz.

Rink, R. (2014). Lass‘ dir die Aufgabe doch vorlesen!“ – mit digitalen Medien Schwierigkeiten beim Sachrechnen begegnen. In S. Ladel, Ch. Schreiber, *Von Audiopodcast bis Zahlensinn (59-73)*. Münster: WTM-Verlag.

Sweller, J. (2005). Implications of cognitive load theory for multimedia learning. In R., Mayer, *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning (19-30)*. New York: Cambridge University Press.

van den Heuvel-Panhuizen, M., Peltenburg, M. (2011). A Secondary Analysis from a Cognitive Load Perspective to Understand Why an ICT-based Assessment Environment Helps Special Education Students to Solve Mathematical Problems. In: *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education Vol. 10, 1-2*, 23-41

Verschaffel, L., Greer, B., De Corte, E. (2000). *Making Sense of Word Problems*. Lisse: Swets & Zeitlinger..

Angelika BIKNER-AHSBAHS, Lisa große KAMPHAKE, Jan BÜSSING, Jennifer DITTMER, Annika WIEFERICH, Universität Bremen

Mathematikunterricht inklusiv gestalten: Die Drei-Elemente-Methode[1]

Erprobte Konzepte für eine inklusive Gestaltung des Mathematikunterrichts gibt es derzeit kaum. Der vorliegende Artikel stellt ein Projekt vor, das sich genau diesem Desiderat zuwendet und ein Konzept für die Sekundarstufe I vorstellt, das an mehreren Themen erprobt wurde. Dabei wird inklusiver Mathematikunterricht angesehen als ein Lernen im sozialen Miteinander, das fruchtbare Gemeinsamkeit in der Verschiedenheit der Lernenden ansieht, die sich alle einem Lerngegenstand zuwenden (Korff 2012). Seitz spricht vom Kern der Sache (Seitz 2006), mit dem sich alle Lernenden befassen, gleichwohl in unterschiedlicher Weise, auf unterschiedlichen Leistungsniveaus, mit unterschiedlichen Zugängen und Bearbeitungsprozessen. Diese zwei Aspekte bilden den Rahmen für ein Konzept zur inklusiven Gestaltung von Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Wir berichten, wie Studierende dieses Konzept im Praktikum zu unterschiedlichen Unterrichtsinhalten an Bremer Schulen umgesetzt und im Verlauf von zwei Designzyklen weiter entwickelt wurde. Dieses Konzept besteht aus drei Planungs- und Umsetzungselementen (vgl. Bikner-Ahsbahs & gr. Kamphake 2016), die im Folgenden dargestellt werden:

Drei Elemente zur Gestaltung eines inklusiven Mathematikunterrichts

(1) *Die Entwicklungslinie einer zentralen Idee wird parallelisiert*: Der Kern der Sache kann im Mathematikunterricht oft als zentrale fachliche Idee interpretiert werden (Klika 2003), etwa Symmetrie, Flächeninhalt, Funktion oder Gewinnchance. Diese zentralen Ideen sind häufig dadurch ausgezeichnet, dass sie in der schulischen Lernbiographie wiederholt auftreten, häufig im neuen Gewand oder mit neuen Akzenten. Der Vergleich von Flächeninhalten in Klasse 6 blickt beispielsweise auf Erfahrungen mit Deckungsgleichheit, Zerlegungsgleicheit, Ergänzungsgleichheit und Auslegungsgleichheit beim Umgang mit Puzzleflächen in der Grundschule zurück (Franke 2001). Es können aber auch Flächen auf neue Weisen verglichen werden, z.B. durch Schätzen von Flächeninhalten nicht geradlinig berandeter Flächen oder durch Berechnung von Flächeninhalten spezieller Vierecke oder Dreiecke. Ein inklusiver Mathematikunterricht gibt diesen Möglichkeiten Raum. Anstatt eine Entwicklungslinie zeitsystematisch zu verfolgen, wurde in unserem Konzept eine Parallelisierung der Entwicklungsschritte einer zentralen Idee vorgenommen. Für den Vergleich von Flächeninhalten etwa wurde zieldifferenziertes Material eingesetzt, das alle oben genannten Aspekte zum Flächeninhaltsvergleich zuließ.

In einer anderen Umsetzung ging es um Verschlüsseln und Entschlüsseln von Buchstaben mittels Achsenspiegelungen. Dabei waren Spiegelungen mit und ohne Miraspiegel möglich, Einfachspiegelungen und Mehrfachspiegelungen, mit verdeckten Spiegelachsen, mit naheliegenden oder auch mit vorgegebenen Spiegelachsen.

(2) *Eine Mitmachgeschichte gestaltet das sozial-fachliche Miteinander*: Das sozial-fachliche Miteinander wird durch eine fachbezogene Mitmachgeschichte gestaltet. Ziel ist ein gemeinsames fachliches Ergebnis, zu dem alle Lernenden nach ihren Möglichkeiten beitragen können. In der Symmetriestunde wurde eine Geschichte in Anlehnung an die Jugendbuchreihe *Die Drei Fragezeichen* (von R. Arthur) erzählt. Darin sollten die Lernenden unterschiedlich schwer zu entziffernde Informationstexte vom Grad *geheim*, *streng geheim* und *top secret* dekodieren, und zwar mittels Rekonstruktion der Codes, die aus Achsenspiegelungen bestanden. Erst wenn alle Texte dekodiert waren, konnten Die Drei Fragezeichen der Polizei eine sinnvolle Nachricht über Datum, Zeitpunkt und Ort des zu erwartenden „Juwelendiebstahls“ übermitteln.

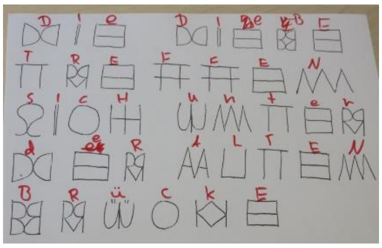


Abb. 1: geheim (Ort)

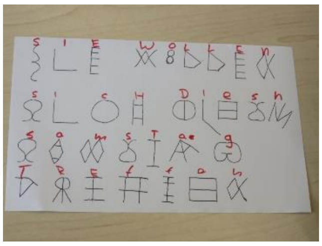


Abb. 2: streng geheim (Tag)

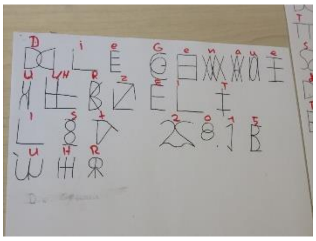


Abb. 3: top secret (Zeit)

Die Kodierungs- und Dekodierungsheuristiken, die die Lernenden einsetzten, wurden abschließend an der Tafel gesammelt. Der Kern all dieser Heuristiken bestand im vielfältigen Umgang mit der Achsenspiegelung. Die Mitmachgeschichte bildet also einen Rahmen für fachlich inklusive Partizipation der Lernenden.

(3) *Emergente Aufgabenstellungen sorgen für Adaption an das individuelle Potenzial im Unterrichtsverlauf.* Während die eben beschriebenen Planungselemente die Teilhabe aller Lernende ermöglichen und das soziale Miteinander die Gemeinsamkeit in der Verschiedenheit gestaltet, ist damit noch nicht gesichert, dass alle Lernenden gemäß ihren Möglichen und Potenzialen aktiviert und gefördert werden, damit eine Aufgabe etwa zur kognitiven Aktivierung führt oder Lernende Hürden überwinden können, um ihre Lernpotenziale erschließen zu können. Dies leisten so genannte emergente Aufgabenstellungen. Darunter verstehen wir Aufgaben, die eine Lehrkraft im Unterrichtsverlauf auf der Grundlage der Identifizierung der Interessenlage der Lernenden stellt, und zwar mit dem Ziel das individuelle fachliche Lernpotenzial auszuschöpfen. Diese Interessenlage zeigen Lernende in der Aufga-

benbearbeitung an, z.B. indem sie eine Lösungsmethode wählen, eine weiterführende Frage stellen oder auch mit mathematischen Inhalt ringen. Z.B. sagte Maja in einem Unterrichtsgespräch zum Vergleichen von Flächeninhalten „wenn das Drumrum groß ist, muss auch die Fläche groß sein". Maja zeigt hier an, dass sie sich mit dem Vergleich der Konzepte „Flächeninhalt" und „Umfang" auseinandersetzt. Diese Interessenlage nutzte die Lehrerin (eine Studentin), um eine emergente Aufgabe zu stellen: „interessante Idee". Sie gibt ihr einen Schnürsenkelumfang [verknoteter Schnürsenkel, Abb.1 und 2]: „Untersuche doch damit, ob das immer so ist, dass ein großes Drumrum auch immer einen großen Flächeninhalt erzeugt". (vgl. Bikner-Ahsbahs & gr. Kamphake, im Druck). Dies hat Maja während der Aufgabenbearbeitung umgesetzt, ihr Ergebnis am Ende der Stunde in der Klasse vorgetragen und mit dem Schnürsenkel illustriert (Abb. 1 und 2 zeigt die Demonstration der Lehrerin).


Abb.1, vgl. ml 195


Abb. 2

In einem anderen Fall hat der Schüler Erkan eine Fläche zeichnerisch sehr mühsam mit Quadraten überdecken wollen. Das hätte vermutlich sehr lange gedauert, so dass er in der Stunde vermutlich nicht mehr dazu gekommen wäre, die Flächeninhalte zu vergleichen. Die emergente Aufgabe der Studentin war vorbereitet, weil genau dieser Fall in der vorausgegangenen Erprobung aufgetreten war. Sie hatte ein Quadratgitter auf einer Folie mitgebracht, sagte: „Ah, ich verstehe – du willst ein Quadratmuster zum Vergleichen nutzen", und stellte ihm die Folie als Hilfsmittel zur Verfügung. Emergente Aufgaben nehmen also den Denkfaden der Lernenden und damit die Bereitschaft auf, den eigenen Gedankengang intensiver (wie bei Maja) weiter zu verfolgen. In anderen Fällen helfen sie dabei, Hürden oder zeitaufwendige Aufbereitungen zu überwinden (wie bei Erkan).

Methodische Überlegungen und einige erste Erfahrungen

Das vorliegende Konzept wird im Teilprojekt inklusiver Mathematikunterricht[2] auch weiterhin von Studierenden im Praxissemester an Bremer Schulen umgesetzt. Dabei werden studentische Fokusgruppen gebildet, das sind 5-7 Studierende, die bereit sind mehr Zeit zu investieren und an der Anwendung und Weiterentwicklung des Konzepts mitzuwirken. Diese Studierenden entwickeln mit der Professorin gemeinsam nach der Drei-Elemente-Me-

[2] Gefördert von der Deutschen Telekom Stiftung im Rahmen des Entwicklungsverbunds zur Lehrerbildung: Diagnose und Förderung heterogener Lerngruppen, Teilprojekt: Inklusiver Mathematikunterricht.

thode Unterrichtsstunden für den inklusiven Mathematikunterricht zu unterschiedlichen Themen. Die Erprobung erfolgt in zwei Zyklen in parallelen Klassen an derselben Schule. Die Umsetzung im ersten Zyklus wird teilnehmend beobachtet, reflektiert und diskutiert: Welche Anlässe für emergente Aufgaben traten auf? Wie müsste man sich darauf im nächsten Durchgang einstellen? War die Geschichte geeignet das fachlich-soziale Miteinander zu gestalten? Führt sie zu einem gemeinsamen Ergebnis, zu dem alle Lernenden beitragen können? Welche Anpassungen wären sinnvoll? Hat das Material Entwicklungsschritte der zentralen Idee parallelisiert aufgreifen können? Welche Schritte wurden nicht angemessen beachtet? Wie kann man die Umsetzung im nächsten Zyklus verbessern? Gemäß den Antworten werden die inhaltlichen Unterrichtsentwürfe weiter entwickelt und erneut erprobt. In einem abschließenden Bericht dokumentieren die Studierenden ihre „empirische Erkundung", und zwar mit abschließenden Vorschlägen zur Weiterentwicklungen der Stunde. Zusätzlich wird auch das Potenzial emergenter Aufgaben erkundet, etwa in Hinblick auf die Zusammensetzung der Klasse oder fachliche Aspekte. Erste Erfahrungen deuten an, dass emergente Aufgaben besonders geeignet sind, Herausforderungen im Prozess individuell anzupassen und Denkbeschränkungen bei Lernenden zu überwinden. Bei entwicklungsverzögerten Kindern und Jugendlichen können emergente Aufgaben vor allem eingesetzt werden, um Lernende an kognitive Einsichten heranzuführen. In Stunden, in denen vor allem divergentes Denken und Kreativität gefördert werden, geht es vorzugsweise darum, dieses divergente Denken anzuregen, etwa Werkzeuge bereitzustellen und deren Handhabung zu sichern. Gelegenheiten für emergente Aufgaben stellen sich dabei selten.

Literatur

Bikner-Ahsbahs, A. & große Kamphake, L. (2016, in Druck). Interesse fördern – inklusiv. *Mathematiklehren, 195* (im Druck).

Franke, M. (2001). *Didaktik der Geometrie*. Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Klika, M. (2003): „Zentrale Ideen – echte Hilfen". *Mathematiklehren 119*, 4–7.

Korff, N. (2012): Inklusiver Unterricht – didaktische Modelle und Forschung. In R. Benkmann, S. Chilla und E. Stapf (Hrsg.). *Inklusive Schule - Einblicke und Ausblicke*. Prolog-Verlag.

Seitz, S. (2006). Inklusive Didaktik: Die Frage nach dem Kern der Sache. *Zeitschrift für Inklusion 1*, 1-13. URL: http://www.inklusion-online.net (Zugriff: 27.1.2016)

Johannes BLAUERT, Hinrich LORENZEN, Flensburg

Analytische Geometrie – schlicht und natürlich

Die analytische Geometrie bereitet Lernenden besonders auf der Begriffsebene große Probleme. In diesem Beitrag soll ein alternativer Aufbau der analytischen Geometrie für den Schulunterricht vorgestellt werden, dessen Einsatz im Rahmen erster Interventionsstudien an Schulen in Schleswig-Holstein zu erfolgversprechenden Ergebnissen hinsichtlich des verständnisorientierten Lernzuwachses führte. Als Grundobjekte der Theorie dienen in diesem Ansatz Punkte, um auf die für Schüler sprachlich komplizierten Begriffe Vektor, Ortsvektor, Stützvektor, Richtungsvektor usw. zu verzichten und das Pfeilklassenmodell zu umgehen.

1. Zum Vektorbegriff

In der Schulmathematik werden Vektoren als Äquivalenzklassen von Pfeilen $\vec{v} = \{v' \mid v' \; ist \; parallelgleich \; zu \; v\}$ vermöge der Äquivalenzrelation „parallelgleich" oder als Verschiebungen definiert. Ein Pfeil v ist dabei eine gerichtete Strecke pq mit Anfangspunkt p und Endpunkt q. Zwei Pfeile $v = pq$ und $v' = p'q'$ heißen parallelgleich, wenn sie die gleiche Länge haben, parallel zueinander und gleich orientiert sind. v heißt Repräsentant des Vektors $\vec{v}$. Die Addition und Vervielfachung von Vektoren wird repräsentantenabhängig definiert, im Anschluss ist die Repräsentantenunabhängigkeit zu zeigen.

Aus der Perspektive der Hochschulmathematik betrachtet, sind Vektoren v Elemente der Trägermenge V eines K-Vektorraumes $(V, +, \cdot)$, wobei K ein Körper, $(V, +)$ eine abelsche Gruppe und $\cdot$ eine Verknüpfung zwischen K und V ist, so dass für alle $c, c' \in K$ und alle $v, v' \in V$ die Aussagen

- $c \cdot v \in V$
- $(c + c') \cdot v = c \cdot c + c' \cdot V$
- $(cc') \cdot v = c \cdot (c' \cdot v)$
- $c \cdot (v + v') = c \cdot v + c \cdot v'$
- $1_K \cdot v = v$

erfüllt sind. Die zentrale Erkenntnis, dass jeder n-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum isomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist, macht die abstrakte Vektorraumtheorie für die Schulmathematik zugänglich.

Descartes (1637) führt Koordinaten als Bijektion zwischen der Punktmenge der Zeichenebene und dem $\mathbb{R}^2$ ein, Objekte der Ebene werden damit zu Punktmengen, die durch algebraische Bedingungen an ihre Koordinaten gegeben sind. Beschreiten wir den umgekehrten Weg und konstituieren die

Ebene erst durch Angabe der Koordinaten, so können wir sagen, dass die Zeichenebene der $\mathbb{R}^2$ ist. Punkte sind damit Elemente des $\mathbb{R}^2$ und, da der $\mathbb{R}^2$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, sind Punkte Vektoren.

2. Algebraisierung der Zeichenebene

Die in der Schulmathematik verbreitetste Reihenfolge der Zahlbereichserweiterungen $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ wird häufig am Zahlenstrahl veranschaulicht (vgl. *Padberg (1995)*) und geht mit einer Erweiterung der Zeichenebene einher, so dass die vollständige Zeichenebene $\mathbb{R}^2$ den Schülern auf natürliche Weise bekannt ist. Um die Zeichenebene im Sinne von Descartes zu algebraisieren greifen wir den Vorschlag von *Dieudonné (1966)* auf und wählen die Vektorraumstruktur des $\mathbb{R}^2$ als algebraische Struktur. Gemäß der Skizze eines darauf aufbauend gestalteten Unterrichtsganges in *Lorenzen (2002)* wählen wir Punkte $A = \binom{a_1}{a_2}$ als grundlegende Objekte.

Da die Zeichenebene den Zahlenstrahl auf kanonische Weise enthält, ist die zunächst rein algebraisch eingeführte koordinatenweise Addition von Punkten nach dem Permanenzprinzip die für Schüler natürliche Erweiterung der Addition reeller Zahlen zur Addition von Punkten. Die Multiplikation von Punkten mit reellen Zahlen bezeichnen wir bewusst als Vervielfachung, um eine begriffliche Trennung von Skalarmultiplikation und Skalarprodukt zu gewährleisten. Durch wiederholte Addition ergibt sich sofort $n \cdot A = \binom{na_1}{na_2}$ für natürliche Zahlen n und damit auch für reelle Zahlen r. Eine komponentenweise Multiplikation von Punkten verletzt die Nullteilerfreiheit und die Kürzungsregel und kann somit mit dem Permanenzprinzip ausgeschlossen werden.

3. Geometrische Interpretation der Addition und Vervielfachung

Der Strahlensatz liefert die Begründung für die geometrische Interpretation der Vervielfachung von Punkten. Diese ist damit urprungsabhängig, aber koordinatenfrei möglich. Durch die Projektion auf die Koordinatenachsen wird ersichtlich, dass $\frac{1}{2} \cdot (A + B)$ der Mittelpunkt M_{AB} der Strecke AB ist. Greifen wir auf die aus der Mittelstufe bekannte Tatsache zurück, dass ein Viereck genau dann ein Parallelogramm ist, wenn die Diagonalen einen gemeinsamen Mittelpunkt besitzen, so liefert dies eine Begründung für die geometrische Interpretation der Addition: $A + B$ ist der Punkt, so dass das Viereck $OA(A + B)B$ ein Parallelogramm ist.

Erneut liefert die Mittelpunktsregel die Begründung dafür, dass es sich bei dem Viereck $AB(A + X)(B + X)$ um ein Parallelogramm handelt – durch Addition eines Punktes X zu den Endpunkten einer Strecke AB erhalten wir also eine parallel verschobene Strecke. Diese Verschiebung kann durch

Pfeile kenntlich gemacht werden. Diese Pfeile stellen kein neues mathematisches Objekt für die Schüler dar, denn es werden lediglich Punkte addiert, wodurch wie in *Malle (2005)* auf den Begriff des Ortsvektors verzichtet werden kann.

Mit diesen wenigen Grundbegriffen sind wir in der Lage, eine große Breite an geometrischen Fragestellungen zu bearbeiten. Punktspiegelungen können auf Mittelpunktsberechnungen zurückgeführt werden, womit die Notwendigkeit der Untersuchung der Rechenregeln für die neuen Verknüpfungen motiviert und – vom höheren Standpunkt aus betrachtet – der $\mathbb{R}^2$ als Vektorraum erkannt wird, ohne dass dieser Begriff an dieser Stelle Verwendung findet. Auch die Berechnung des 2:1-Teilungspunktes T einer Strecke AB kann auf Mittelpunktsberechnungen und Spiegelpunktsberechnungen zurückgeführt werden und führt zu $T = \frac{1}{3} \cdot A + \frac{2}{3} \cdot B$.

Der Beweis des Satzes, dass sich die Seitenhalbierenden eines Dreiecks ABC in ihrem gemeinsamen 2:1-Teilungspunkt schneiden, ist nun durch kurze Verifikation der Aussagen

$$\frac{1}{3} \cdot A + \frac{2}{3} \cdot M_{BC} = \frac{1}{3} \cdot B + \frac{2}{3} \cdot M_{AC} = \frac{1}{3} \cdot C + \frac{2}{3} \cdot M_{AB} = \frac{1}{3}(A + B + C) =: S$$

möglich.

4. Geraden und euklidische Geometrie

Ursprungsgeraden werden als Punktmengen $\mathbb{R} \cdot A := \{X | \exists r \in \mathbb{R} : X = r \cdot A\}$, Geraden als verschobene Ursprungsgeraden $\mathbb{R} \cdot A + B$ eingeführt. Zwei Geraden heißen parallel zueinander, wenn sie aus der gleichen Ursprungsgeraden hervorgegangen sind. Der Nachweis, dass $\mathbb{R} \cdot (A - B) + B$ eine Gerade durch die Punkte A und B darstellt, erfolgt rein arithmetisch. Auch die Einführung des Punktproduktes $A \circ B := a_1 b_1 + a_2 + b_2$ erfolgt rein arithmetisch und mit der Abkürzung $A^2 := A \circ A$ behalten die binomischen Formeln ihre Gültigkeit.

Bezeichnen wir mit $\|A\|$ den Abstand des Punktes A vom Koordinatenursprung O, so liefert der Satz des Pythagoras $\|A\| = \sqrt{A^2}$. Wenden wir die Verschiebungsregel an, so erhalten wir für die Länge der Strecke AB die Identität $|AB| = \|A - B\|$. Zwei Geraden $g = \mathbb{R} \cdot A + B$ und $g' = \mathbb{R} \cdot A' + B'$ heißen orthogonal zueinander, wenn ihre Richtungen $\mathbb{R} \cdot A$ und
$\mathbb{R} \cdot A'$ orthogonal zueinander sind, das Dreieck $AA'O$ also rechtwinklig ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $A \circ A' = 0$ ist.

Führen wir $A^\perp := \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ ein, so erhalten wir, dass $m_{AB} := \mathbb{R} \cdot (A - B)^\perp + \frac{1}{2} \cdot (A + B)$ das Mittellot der Strecke AB bildet. Mit dem Mittellotprinzip steht uns nun ein leistungsfähiges Werkszeug zur Verfügung, mit dem sich auch ohne koordinatenbasierte Berechnungen eine Vielzahl elementargeometrischer Fragestellungen untersuchen lässt. So erfolgen Abstandsberechnungen eines Punktes P von einer Geraden $\mathbb{R} \cdot A + B$ mithilfe des Lotes $\mathbb{R} \cdot A^{\perp} + P$. Im Anschluss erfolgt die Übertragung und Erweiterung der entwickelten Konzepte auf den $\mathbb{R}^3$.

5. Fazit

In der Schulmathematik wird der $\mathbb{R}^n$ üblicherweise als Menge der Pfeilklassen/Verschiebungen, Lösungen linearer Gleichungssysteme und Stücklisten in Produktionsprozessen interpretiert. Die Interpretation als Punktraum stellt eine weitere Alternative zu den gängigen Interpretationen des $\mathbb{R}^n$ dar, durch die den Schülern mit einem minimalen begrifflichen Aufwand bereits nach kurzer Unterrichtszeit ein breites Spektrum an geometrischen Fragestellungen zugänglich gemacht werden kann. Dieses Konzept wird im Rahmen einer Dissertation weiterentwickelt und im Rahmen von Interventionsstudien qualitativ erforscht. Letztendlich sollte ein Unterrichtsgang sich nicht nur auf eine Interpretation beschränken, sondern den Schülern mehrere Zugänge zu ein und demselben mathematischen Objekt bieten.

Literatur

Descartes, R. (1637). Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences.

Dieudonné, J. (1966). Winkel, Trigonometrie, komplexe Zahlen. *Der Mathematikunterricht MU, 12(1)*, 5–16.

Lorenzen, H. (2002). Zur Diskussion gestellt: Analytische Geometrie – schlicht und natürlich. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 55*, 231–233.

Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik Lehren, 133*, 4–7.

Stein, M., Padberg, F., Dankwerts, R. (1995). Zahlbereiche. *Spektrum Akademischer Verlag*.

Jan BLOCK, Braunschweig

Strategien und Fehler beim Lösen quadratischer Gleichungen im Kontext flexiblen algebraischen Handelns

Quadratische Gleichungen und flexibles algebraisches Handeln

In einer explorativen Studie zum flexiblen algebraischen Handeln wird u. a. mit einer Aufgabe zum Lösen von quadratischen Gleichung den Fragen nachgegangen, welche Merkmale Schülerinnen und Schüler bei quadratischen Gleichungen wahrnehmen, welche Bedeutungen sie diesen Merkmalen zuweisen und inwieweit diese förderlich oder hinderlich für flexibles algebraisches Handeln sein können (vgl. Block 2014 und 2016). Flexibles algebraisches Handeln kann in Anlehnung an das Konzept des flexiblen Rechnens (Rathgeb-Schnierer, 2006; Threlfall 2002) definiert werden als die Fähigkeit zur Wahl einer adäquaten Bearbeitungsmethode, die von spezifischen Aufgabenmerkmalen und den Mitteln des Lernenden abhängig ist. Bei quadratischen Gleichungen sind die auftretenden Zahlen sowie die Struktur der auftretenden Terme und der Gleichung als Ganzes Merkmale für die Auswahl eines geeigneten, d. h. effizienten und fehlerunanfälligen Lösungsverfahrens.

Aufbau der Studie

Die Studie besteht aus einer Labor- und einer Unterrichtsstudie. Teilnehmer sind 57 Schülerinnen und Schüler aus 9. und 10. Klassen verschiedener niedersächsischer Gymnasien. An der Laborstudie haben 11 Schülerinnen und Schüler vier verschiedener 9. Klassen teilgenommen. An der Unterrichtsstudie waren eine 9. Klasse mit 26 und eine 10. Klasse mit 20 Schülerinnen und Schülern beteiligt. Im Zentrum der Studie steht eine Aufgabe, bei der die Teilnehmer 20 quadratische Gleichungen nach selbst zu bestimmenden Kriterien sortieren. Vor der Sortieraufgabe waren von den Teilnehmern fünf Gleichungen zu lösen (s. Abb. 1). Ausgewählte Befunde zur Bearbeitungen dieser Aufgabe werden in diesem Beitrag vorgestellt. Die Bearbeitungen wurden hinsichtlich der verwendeten Strategien und der aufgetretenen Fehler ausgewertet, um festzustellen, welche Lösungsverfahren in Abhängigkeit von den Merkmalen der Gleichungen verwendet werden. Für Gleichung A eignet sich das Faktorisieren, für B, C und D die Anwendung der pq-Formel und für E die Anwendung von Umkehroperationen (bzw. Anwendung der Nullteilerfreiheit) als jeweils effiziente Methode.

A) $x^2-5x=0$	B) $x^2+2x-8=0$	C) $x^2-8x+9=2$	D) $5x^2+20x+15=0$	E) $(x-8)^2=0$

Abb. 1: In der Studie zu lösende Gleichungen

Ausgewählte Befunde der Datenauswertung

Tabelle 1 zeigt die in den Bearbeitungen von 265 Gleichungen identifizierten Strategien, die Häufigkeit ihrer Anwendung und den jeweiligen Anteil korrekter Lösungen. Als „Probieren“ sind alle Lösungsprozesse zusammengefasst, bei denen die Bestimmung der Lösung nicht durch ein algorithmisch orientiertes arithmetisches oder algebraisches Vorgehen zum Auflösen der Gleichung gekennzeichnet ist. Die Strategien V bis VIII sind alle fehlerhaft und führen im Allgemeinen nicht zu richtigen Lösungen.

Strategie		Häufigkeit	Anteil korrekter Lösungen
I	Anwendung pq-Formel	91 (34,3 %)	70,3 %
II	Faktorisieren	52 (19,6 %)	55,8 %
III	Umkehroperationen/Radizieren	42 (15,8 %)	76,2 %
IV	Probieren	51 (19,2 %)	25,5 %
V	Division durch x	5 (1,9 %)	0 %
VI	Division durch 2	2 (0,8 %)	0 %
VII	Radizieren bei ausgewählten Monomen	12 (4,5 %)	0 %
VIII	Zusammenfassen verschiedener Monome	10 (3,8 %)	0 %

Tabelle 1: Identifizierte Bearbeitungsstrategien

Tabelle 2 zeigt jeweils ein illustrierendes Beispiel für die Strategien IV bis VIII, das den Bearbeitungen der Teilnehmer entnommen ist.

IV	$x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow x(x+2)=8 \Rightarrow x=2$
V	$x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow x\cdot x=8-2x \,\vert : x \Leftrightarrow x=-6$
VI	$x^2+2x=8 \,\vert : 2 \Leftrightarrow x+x=4 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$
VII	$x^2-8x+9=2 \,\vert \sqrt{\;} \Leftrightarrow x-8x+9=\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}-9}{7}$
VIII	$x^2-8x+9=2 \Leftrightarrow x^2-8x=-7 \,\vert +8 \Leftrightarrow x^3=1$

Tabelle 2: Beispiele für die Strategien IV bis VIII

Tabelle 3 zeigt die Häufigkeiten korrekter und fehlerhafter Lösungen für die Strategien I bis IV in Bezug auf die jeweiligen Gleichungen.

Strategie	Lösung	Häufigkeit je Gleichung					Häufigkeit gesamt
		A	B	C	D	E	
I	richtig	1	20	19	22	2	64 (70,3 %)
	falsch	3	4	11	7	2	27 (29,7 %)
II	richtig	27	0	0	0	2	29 (55,8 %)
	falsch	5	5	4	4	5	23 (44,2 %)
III	richtig	0	0	0	0	32	32 (76,2 %)
	falsch	2	1	1	1	5	10 (23,8 %)
IV	richtig	4	2	4	1	2	13 (25,5 %)
	falsch	4	15	10	9	0	38 (74,5 %)

Tabelle 3: Strategieverwendung in Bezug auf die Gleichungen

Diskussion ausgewählter Befunde der Datenauswertung

Die Daten in Tabelle 3 zeigen, dass für die Strategien I bis III der Anteil richtiger Lösungen hoch ist, wenn eine für die jeweilige Gleichung adäquate Strategie gewählt wurde (I für B, C und D, II für A und III für E). In den anderen Fällen sind jeweils mindestens 50 % der Bearbeitungen fehlerhaft. Diese Befunde deuten darauf hin, dass die Anwendung adäquater Verfahren, also ein flexibles Handeln beim Lösen quadratischer Gleichungen, erfolgreiche Bearbeitungen begünstigt. Betrachtet man die pq-Formel als ein Standardverfahren, das sich prinzipiell auf alle quadratischen Gleichungen anwenden lässt, so ist der Anteil von 29,7 % fehlerhafter Lösungen auffällig. Eine detaillierte Analyse der Fehler zeigt, dass es sich dabei überwiegend um Fehler bei der Anwendung der pq-Formel handelt (Vorzeichenfehler beim Einsetzen von p und q; arithmetische Fehler etc.). Der bei Gleichung C antizipierte Fehler, nicht zu beachten, dass auf der einen Seite der Gleichung nicht Null steht, trat nur zweimal auf. Dieser Befund steht im Einklang mit den Befunden zur Sortieraufgabe in der Studie. Dort wurde das Auftreten von Null auf einer Seite einer Gleichung sehr häufig als Sortierkriterium verwendet und damit begründet, dass es sich um eine Voraussetzung für die Anwendung der pq-Formel zum Lösen der Gleichung handelt.

Bemerkenswert ist der hohe Anteil der Strategie „Probieren“, da für alle Teilnehmer der Studie das systematische Lösen quadratischer Gleichungen im Unterricht (in Niedersachsen am Ende von Klasse 8) Thema gewesen ist. Das Finden von Lösungen durch Probieren ist eher beim Explorieren quadratischer Gleichungen als eine Art forschender Zugang zu erwarten, weniger dann, wenn andere Lösungsverfahren bekannt sind. Die Strategie trat überwiegend bei Teilnehmer der beteiligten 10. Klasse auf. 6 von 20 Schülerinnen und Schülern lösen Gleichung A durch Faktorisieren und adaptieren das Faktorisieren für die Gleichungen B, C und D wie im Beispiel in Tabelle 2 dargestellt. Liegt die Gleichung in faktorisierter Form vor, werden Lösungen dann durch Probieren ermittelt, allerdings meist nur fehlerhafte oder nur eine der beiden Lösungen. 5 von 20 Teilnehmern aus Klasse 10 geben Lösungen (fehlerhaft oder unvollständig) ohne weitere Dokumentation des Lösungsprozesses an. 2 von 20 Teilnehmern aus Klasse 10 verwenden nach der Faktorisierung der Gleichungen B, C und D die in Abbildung 2 dargestellte fehlerhafte Äquivalenz. Matz (1982) bezeichnet dieses Vorgehen als ein Übergeneralisieren bekannter Verfahren, dessen Fehlerhaftigkeit darauf beruht, dass die Bedeutung bestimmter Zahlen nicht beachtet wird.

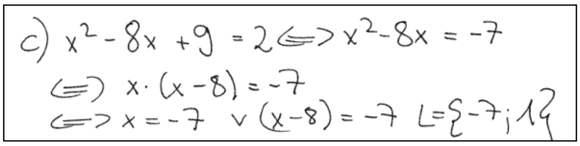


Abbildung 2: Beispiel für die Anwendung fehlerhafter Äquivalenz

Die vorliegenden Daten lassen keine Schlüsse zu, inwieweit die Reihenfolge der Gleichungen und die auftretenden ganzzahligen Koeffizienten die Bearbeitungen der Teilnehmer der 10. Klasse bei B, C und D in der genannten Art und Weise beeinflusst haben, da einerseits durch Gleichung A das Faktorisieren als Lösungsverfahren evoziert wurde und andererseits ein Lösen durch Probieren bei nicht ganzzahligen Koeffizienten schwieriger und ggf.

für die Teilnehmer nicht naheliegend gewesen wäre.

Die Befunde zur häufig fehlerhaften Anwendung der pq-Formel und der häufigen Verwendung der Strategie des Probierens in dieser Studie insgesamt bestätigen entsprechende Ergebnisse einer Studie von Lima und Tall (2006).

Bei Gleichung E zeigt sich der insgesamt höchste Anteil richtiger Lösungen, die überwiegend mit der adäquaten Strategie der Anwendung von Umkehroperationen ermittelt oder direkt (unter Ausnutzung der Nullteilerfreiheit) angegeben werden. Auffällig sind hier die Ergebnisse der Teilnehmer aus Klasse 9 der Laborstudie. Nur ein Teilnehmer verwendet die Strategie der Umkehroperationen. Alle übrigen multiplizieren den Term auf der linken Seite der Gleichung (meist fehlerhaft) aus und verwenden dann andere Strategien. Dieser Befund korrespondiert mit den Ergebnissen der Sortieraufgabe, bei der das Auftreten von Klammern sehr häufig als ein Sortierkriterium verwendet und damit begründet wurde, dass Klammern in Termen zunächst beseitigt werden müssen. Diese Argumentation war weitgehend unabhängig von weiteren Merkmalen der Gleichung und erweist sich als ein Hindernis für flexibles algebraisches Handeln (vgl. Block 2016).

Literatur

Block, J. (2014). Eine didaktische Landkarte quadratischer Gleichungen als Konzeptualisierung für flexibles algebraisches Handeln. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*. Münster: WTM. 197-200.

Block, J. (2016). Flexible algebraic action on quadratic equations. In: K. Krainer & N. Vondrová (Hrsg.), *Proceedings of the ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Prag: Charles University, ERME. 391-397.

Matz, M. (1982). Towards a process model for high school agebra errors. In: D. Sleeman, & J. S. Brown (Hrsg.), *Intelligent Tutoring Systems*. London: Academic Press. 25-50.

Lima, R. N. de, & Tall, D. (2006). The Concept of Equations: What have students met before? In J. Novotná et al. (Eds.), *PME 30*, Vol. IV. 233-240.

Rathgeb-Schnierer, E. (2006). *Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen*. Hildesheim: Franzbecker.

Threlfall, J. (2002): Flexible Mental Calculation. In: *Educational Studies in Mathematics 50, 29-47*. doi: 10.1023/A:1020572803437

Katrin BOCHNIK, Stefan UFER, LMU München

Die Rolle (fach-)sprachlicher Kompetenzen für den mathematischen Kompetenzerwerb von Lernenden mit (nicht-)deutscher Familiensprache

Migrationsbedingte Disparitäten mathematischer Kompetenz wurden wiederholt zu einem großen Teil durch allgemeinsprachliche Kompetenzen erklärt (Prediger, Renk, Büchter, Gürsoy & Benholz, 2013; Ufer, Reiss & Mehringer, 2013). Zur Bewältigung mathematischer Anforderungen in Schule und Alltag benötigen Lernende jedoch neben mathematischen und allgemeinsprachlichen Kompetenzen auch die mathematische Fachsprache (Dryvold, Bergqvist & Österholm, 2015). Auch diese scheint besondere Anforderungen (nicht nur) an Lernende mit nicht-deutscher Familiensprache zu stellen (z.B. Haag, Heppt, Stanat, Kuhl & Pant, 2013) und zeigt sich als Textmerkmal, das spezifische Kompetenzen erforderlich macht.

Mathematische Fachsprache als Textmerkmal

Das Textmerkmal der mathematischen Fachsprache kennzeichnet sich durch spezielle linguistische Eigenschaften, die typisch sind für die Mathematik und die sich hinsichtlich des Wortschatzes und der sprachlichen Strukturen beispielsweise von der Alltagssprache unterscheiden (Halliday, 1978). Auf der lexikalischen Ebene zeigt sich hier ein spezifisches Vokabular, auf der grammatikalischen Ebene beispielsweise Passiv- und Nominalkonstruktionen sowie auf der Textebene geringe Redundanz bei gleichzeitig hoher Dichte der im Text enthaltenen Informationen. Analysiert wurde dieses Textmerkmal bisher durch den Vergleich von Aufgabentexten mit (nicht-)mathematischen Textcorpora (Bergqvist, Dyrvold & Österholm, 2012) sowie durch Expertenratings (Haag et al., 2013). In Relation zur Aufgabenschwierigkeit zeigen sich für die Merkmale der Fachsprache unterschiedliche Effekte: Während im Text enthaltene bildungssprachliche Begriffe und grammatikalische Strukturen die Aufgabenschwierigkeit erhöhen, gilt dies für Fachbegriffe nicht (Bergqvist et al., 2012; Haag et al., 2013).

Mathematisch-fachsprachliche Kompetenzen

Neben der Beschreibung des Textmerkmals lassen sich auch individuelle mathematisch-fachsprachliche Kompetenzen beschrieben. Gellert (2008) spricht hier von einer *mathematikspezifischen Bildungssprache*, die die Kenntnis von Fachbegriffen sowie die Verwendung kohärenzbildender Sprachmittel (z.B. Konnektoren, die Argumente verknüpfen) umfasst. Erhoben wurden fachsprachliche Kompetenzen beispielsweise durch die Abfrage mathematischer Definitionen von Fachbegriffen (Bae, Hickson & Chiang, 2015). In der Chemiedidaktik wurden außerdem fachbezogene Lückentexte eingesetzt, um neben der Kenntnis von Fachbegriffen auch den Umgang mit fachspezifischen sprachlichen Strukturen zu erfassen (Özcan, 2013). In der vorliegenden Studie wurde diese Operationalisierung auf die Mathematik übertragen sowie ein Instrument zur Erhebung des Fachwortschatzes entwickelt.

Fragestellungen

Ziel des Projekts LaMa (*Language and Mathematics*) ist es, fachsprachliche Kompetenzen in der dritten Klasse zu operationalisieren und hinsichtlich ihrer Vorhersagekraft für die Entwicklung mathematischer Kompetenz zu untersuchen. Für den vorliegenden Bericht werden die folgenden Fragestellungen herausgegriffen:

- Wie lassen sich fachsprachliche Kompetenzen reliabel und valide erheben?
- In welchem Ausmaß können fachsprachliche Kompetenzen über allgemeinsprachliche Kompetenzen hinaus mathematische Kompetenzunterschiede erklären?
- Inwieweit stellen fachsprachliche Kompetenzen zu Beginn der dritten Klasse einen Prädiktor für die mathematische Kompetenz zum Ende der dritten Klasse dar?

Studiendesign

Mathematisch-fachsprachliche Kompetenzen wurden in drei Subskalen operationalisiert: *Aktiver Fachwortschatz*, *Passiver Fachwortschatz* und *Textintegratives Verständnis*. Während in den Skalen *Aktiver und Passiver Fachwortschatz* Fachbegriffe aus der Sprachproduktion und –rezeption erhoben werden, bezieht sich das *Textintegrative Verständnis* auf mathematikhaltige Lückentexte, die insbesondere kohärenzbildende Sprachmittel erfassen. Weiterhin wurde die Mathematische Kompetenz in den vier Facetten *Arithmetische Basisfertigkeiten*, *Konzeptuelles Verständnis*, *Textaufgaben* und *Nutzung mathematischer Arbeitsmittel* (jeweils Eigenentwicklungen) sowie allgemeinsprachliche Kompetenzen mit dem SFD 3-4 (Hobusch, Lutz & Wiest, 2002) erhoben. Die dargestellten Ergebnisse beziehen sich größtenteils auf N = 383 Drittklässler (N = 163 Kinder mit nicht-deutscher Familiensprache), die längsschnittliche Analyse auf N = 237 Drittklässler (N = 91 Kinder mit nicht-deutscher Familiensprache).

Ergebnisse

Mathematisch-fachsprachliche Kompetenzen konnten mit den Skalen *Aktiver Fachwortschatz* (α = .62), *Passiver Fachwortschatz* (α = .57) und *Textintegratives Verständnis* (α = .75) für eine Neuentwicklung ausreichend reliabel erhoben werden. Die Validität des Textintegrativen Verständnisses wurde außerdem in einer qualitativen Interviewstudie mit N = 14 Drittklässlern überprüft, wobei die Notwendigkeit der Kohärenzbildung bei der Bearbeitung der mathematikhaltigen Lückentexte bestätigt werden konnte. Darüber hinaus wurde für die drei Skalen Messinvarianz zwischen Lernenden mit deutscher und nicht-deutscher Familiensprache festgestellt, die Skalen messen demnach in beiden Gruppen dasselbe Konstrukt und können für einen Gruppenvergleich herangezogen werden. Dieser ergab für mathematische, allgemeinsprachliche und fachsprachliche Kompetenzen jeweils signifikante Unterschiede zugunsten der Kinder mit deutscher Familiensprache. Dabei zeigte sich innerhalb der fachsprachlichen Kompetenzen der größte Unterschied im Textintegrativen Verständnis.

Um die Relevanz fachsprachlicher Kompetenzen über allgemeinsprachliche Kompetenzen hinaus für die Erklärung mathematischer Kompetenzunterschiede zu Beginn der dritten Klasse zu untersuchen, wurde im Rahmen von Strukturgleichungsmodellen ein Mediationsmodell analysiert. Dabei zeigt sich neben dem signifikanten Einfluss der allgemeinsprachlichen Kompetenzen auch ein bedeutsamer indirekter Effekt der fachsprachlichen Kompetenzen. Diese vermitteln demnach einen Teil des Zusammenhangs von allgemeinsprachlichen und mathematischen Kompetenzen und bestätigen den angenommenen Zusammenhang von sprachlichen und mathematischen Kompetenzen zu Beginn der dritten Klasse.

Die Analyse fachsprachlicher Kompetenzen zu Beginn der dritten Klasse als Prädiktor mathematischer Kompetenzen zum Ende der dritten Klasse in einem autoregressiven Modell ergibt hingegen keinen signifikant positiven Zusammenhang. Die Fachsprache scheint demnach keinen Prädiktor der mathematischen Kompetenz darzustellen. Werden hingegen die einzelnen Facetten mathematischer Kompetenz betrachtet, so stellen fachsprachliche Kompetenzen einen Prädiktor für *Arithmetische Basisfertigkeiten*, *Textaufgaben* und die *Nutzung mathematischer Arbeitsmittel* dar, jedoch nicht für das *Konzeptuelle Verständnis*. Die hier abgefragten mathematischen Konzepte stellen weniger Überschneidungen mit den fachsprachlichen Kompetenzen dar als beispielsweise die *Textaufgaben*.

Die entwickelte Operationalisierung mathematisch-fachsprachlicher Kompetenzen stellt demnach einen über allgemeinsprachliche Kompetenzen hinaus relevanten Prädiktor mathematischer Kompetenzen dar. Dies gilt für Lernende mit deutscher und nicht-deutscher Familiensprache in gleichem Maße, wobei für Lernende mit nicht-deutscher Familiensprache geringere fachsprachliche Kompetenzen festgestellt wurden. Die Ergebnisse stützen demnach die Forderung eines sprachsensiblen Mathematikunterrichts mit besonderer Betonung der mathematischen Fachsprache. Das wesentliche Problem scheinen hier weniger Fachbegriffe zu sein, die im schulischen Unterricht meist explizit eingeführt werden (vgl. Haag et al., 2013). Zentral ist der Umgang mit mathematikhaltigen Texten anzusehen, die letztendlich auch die mündliche Kommunikation im Mathematikunterricht repräsentieren und damit neben der Förderung fachsprachlicher Kompetenzen auch den Verständnisaufbau im Unterricht unterstützen können.

Literatur

Bae, Y. S., Hickson, L. & Chiang, H.-M. (2015): Mathematical Word Problem Solving Ability of Children with Autism Spectrum Disorder and their Typically Developing Peers. In: *Journal of Autism and Developmental Disorders, 45*, H.7, 2200-2208.

Bergqvist, E., Dyrvold, A. & Österholm, M. (2012). *Relating vocabulary in mathematical tasks to aspects of reading and solving.* Paper presented at the MADIF 8, The Eighth Mathematics Education Research Seminar.

Dryvold, A., Bergqvist, E. & Österholm, M. (2015): Uncommon vocabulary in mathematical tasks in relation to demand of reading ability and solution frequency. In: *Nordisk matematikkdidaktikk, 20*, H.1.

Gellert, U. (2008): Mathematikspezifische schulische Bildungssprache im Schuleingangsalter. In: Ramseger, J. & Wagener, M. (Hrsg.): *Chancenungleichheit in der Grundschule*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Haag, N., Heppt, B., Stanat, P., Kuhl, P. & Pant, H. A. (2013): Second language learners' performance in mathematics: Disentangling the effects of academic language features. In: *Learning and Instruction, 28*, 24–34.

Halliday, M. A. K. (1978): *Language as social semiotic: The social interpretation of language and meaning*. London: Edward Arnold.

Hobusch, A., Lutz, N. & Wiest, U. (2002): *Sprachstandsüberprüfung und Förderdiagnostik für Ausländer- und Aussiedlerkinder (SFD 3/4)*. Horneburg: Persen Verlag.

Özcan, N. (2013): *Zum Einfluss der Fachsprache auf die Leistung im Fach Chemie*. Berlin: Logos.

Prediger, S., Renk, N., Büchter, A., Gürsoy, E. & Benholz, C. (2013): Family background or language disadvantages? Factors for underachievement in high stakes tests. In: Lindmeier, A. & Heinze, A. (Hrsg.): *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Kiel, Germany: PME.

Ufer, S., Reiss, K. & Mehringer, V. (2013): Sprachstand, soziale Herkunft und Bilingualität: Effekte auf Facetten mathematischer Kompetenz. In: Becker-Mrotzek, M., Schramm, K., Thürmann, E. & Vollmer, H. J. (Hrsg.): *Sprache im Fach*. Münster: Waxmann.

Matthias BÖCKMANN, Stanislaw SCHUKAJLOW, Janina KRAWITZ, Universität Münster

Realität oder Mathematik? Wie bewerten zukünftige Lehrer Schülerlösungen zu realitätsbezogenen Aufgaben?

Ein wichtiges Ziel des Mathematikunterrichts ist SchülerInnen zu befähigen, realitätsbezogene Probleme im Alltag zu lösen. Dieses Ziel lässt sich durch den Einsatz von realitätsbezogenen Aufgaben im Unterricht und adäquaten Unterrichtsmethoden umsetzen. Allerdings kommen Realitätsbezüge in der Schule häufig zu kurz und SchülerInnen sind daher nicht in der Lage, realistische Lösungen zu erstellen. In diesem Beitrag soll untersucht werden, in wie weit künftige Lehrerinnen und Lehrer Realitätsbezüge beim Erstellen eigener Lösungen beachten und wie sie mathematische und realitätsbezogene Fehler bewerten. Dafür wurden in der vorliegenden Studie so genannte „Problematic Problems“ (P-Problems) eingesetzt.

Theoretische Grundlagen

P-Problems sind realitätsbezogene Aufgaben, die eine besondere Beachtung des Realkontexts erfordern. Sie lassen sich folgendermaßen charakterisieren: „Problems in which the mathematical modelling assumptions are problematic (P-problem), at least if one seriously takes into account the realities of the context called up by the problem statement“(Verschaffel et al., 1997). Ein Beispiel für ein P-Problem ist die Aufgabe Seil: *Herr Meier möchte ein Seil zwischen zwei Stangen spannen, die 12 m auseinander stehen. Er hat allerdings nur Stücke, die 2 m lang sind. Wie viele dieser Stücke muss Herr Meier aneinander binden?* (verändert nach Greer, 1993). Im Gegensatz zu „Standard Problems“ (S-Problems) sind P-Problems nur adäquat lösbar, wenn der Realkontext ernst genommen und in den Lösungsprozess einbezogen wird. Hingegen sind S-Problems durch eine direkte Anwendung von mathematischen Verfahren lösbar. „Standard problems […] can be properly modelled and solved by the straightforward application of one or more arithmetic operations with the given numbers“(Verschaffel et al., 1997).

Zahlreiche Studien haben gezeigt, dass SchülerInnen den Realkontext bei der Bearbeitung von P-Problems missachten und unrealistische Lösungen angeben (Dewolf et al. 2014; Verschaffel et al. 1994, Yoshida et al. 1997). Bei Verschaffel et al. (1994) konnten nur 17% aller Antworten zu den behandelten P-Problems als realistisch eingeordnet werden. Auch bei Lehramtsstudierenden zeigte sich bisher eine Tendenz zu unrealistischen Antworten bei P-Problems (Verschaffel et al., 1997). Es besteht daher die Erwartung, dass bei Lehramtsstudierenden zu Beginn ihres Studiums eine Tendenz zu unrealistischen Antworten erkennbar ist. Ferner ist für die Masterstudierenden, die sich im Studium mit Realitätsbezügen beschäftigen, eine höhere Rate an realistischen Lösungen als für die Bachelorstudierenden zu erwarten.

Die Fähigkeit der SchülerInnen, realitätsbezogene Aufgaben zu lösen, wird vom Lehrer beeinflusst. Der Einfluss der Lehrkraft ist u. a. bestimmt durch das Pedagogical Content Knowledge (PCK), das einen Effekt auf den Lernerfolg der SchülerInnen hat (Baumert et al., 2010). Als Bestandteil des PCK gilt die Diagnosekompetenz, die den Umgang mit Fehlvorstellungen und Fehlern der SchülerInnen beinhaltet (Kraus et al., 2008). Im vorliegenden Beitrag soll die Diagnosekompetenz von Lehramtsstudierenden bezüglich mathematischer und realitätsbezogener Fehler in Schülerlösungen untersucht werden. Es wird erwartet, dass Bachelorstudierende einen mathematischen Fehler schwerwiegender bewerten als einen Realitätsfehler. Zudem wird erwartet, dass Masterstudierende tendenziell beide Fehlertypen ähnlich gewichten, weil sie im Laufe des Studiums PCK erworbenen haben.

Forschungsfrage

In dieser Studie wird analysiert (1) inwieweit Lehramtsstudierende den Realkontext bei der eigenen Aufgabenbearbeitung beachten. Betrachtet wird eine Entwicklung im Studium, also ein Vergleich zwischen dem Bachelor HRGe und dem Master HRGe. Außerdem wird untersucht (2) wie Lehramtsstudierende Schülerlösungen bewerten, die mathematische Fehler oder unrealistische Lösungen enthalten.

Methode

Stichprobe und Design. Insgesamt wurden n=108 Lehrsamtstudierende der Universität Münster (Durchschnittsalter 21.83, 74.1% Frauen) untersucht. Hierbei entfallen 66 Studierende auf den Bachelor HRGe und 42 auf den Master HRGe. Die Lehramtsstudierenden wurden zunächst aufgefordert, drei P-Problems eigenständig zu bearbeiten. Anschließend wurden den Probanden zu denselben P-Problems jeweils zwei Schülerlösungen präsentiert, die entweder einen mathematischen Fehler oder einen Realitätsfehler enthielten und die bewertet werden sollten.

Messinstrumente. Als Messinstrumente wurden drei P-Problems eingesetzt, mit Hilfe derer eine Beachtung des Realkontexts bei der eigenen Aufgabenbearbeitung gemessen werden konnte. Neben dem P-Problem Seil wurden zwei andere P-Problems eingesetzt. Die Lösungen der Studierenden wurden gemäß der Beachtung des Realkontexts kodiert zu 1 = „realistische Lösung“ und 0 = „alle anderen Antworten“. Die Bewertung der Schülerlösungen durch die Studierenden erfolgte durch den Einsatz der Skala 0 = „falsch“, 1 = „teilweise richtig“ und 2 = „richtig“. Die Ergebnisse der drei P-Problems sind ähnlich, sodass nur auf das P-Problem Seil eingegangen wird.

Ergebnisse

Bezüglich der Fragestellung (1), inwiefern Lehramtsstudierende den Realkontext bei der eigenen Aufgabenbearbeitung beachten, ist eine Tendenz zu unrealistischen Lösungen bei Bachelorstudierenden zu erkennen (Abb. 1). Die Rate an realistischen Lösungen liegt in dieser Subgruppe bei 40%. Masterstudierende hingegen antworten in ca. 70% der Fälle realistisch, sodass man im Vergleich zwischen den beiden Gruppen von einer gesteigerten Rate an realistischen Lösungen im Master sprechen kann ($X^2(1, N = 108) = 8.14, p < .05$). Hinsichtlich der Fragestellung (2), wie Lehramtsstudierende Schülerlösungen mit mathematischen Fehlern bzw. Realitätsfehlern bewerten, ist festzustellen, dass Bachelorstudierende mathematische Fehler schwerwiegender bewerten (34.4% „falsch“) als Masterstudierende (7.3% „falsch“). Masterstudierende bewerten realistische Lösungen mit mathematischem Fehler häufiger als teilweise richtig oder als richtig. Sie berücksichtigen den Realitätsbezug bei ihrer Bewertung. Zusätzlich bewerten Bachelorstudierende den Realitätsfehler weniger schwerwiegend (35.4% „richtig“) als Masterstudierende (4.9% „richtig“) (Tab. 1).

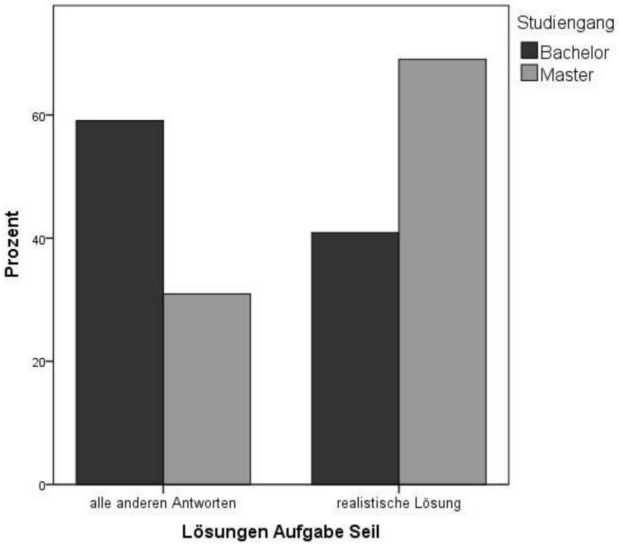


Abbildung 3 Lösungen zum P-Problem Seil durch Studierende

Diskussion

Ähnlich wie in früheren Studien (Verschaffel et al., 1997) zeigen die Studierenden am Anfang des Studiums die Tendenz, den Realkontext zu missachten. Darüber hinaus zeigt sich, dass das Studium, die Fähigkeit realistische Lösungen zu erstellen, positiv beeinflusst. Dies ist an der höheren Rate an realistischen Lösungen bei den Masterstudierenden im Vergleich zu den Bachelorstudierenden zu erkennen. Aus den Ergebnissen zur Bewertung der Schülerlösungen kann man schlussfolgern, dass das Studium die Diagnosekompetenz der Studierenden verbessert. Die Masterstudierenden bewerten beide Fehlertypen ausgeglichener, d. h. sie bewerten realitätsbezogene und mathematische Fehler als gleich schwerwiegend, was einer idealtypischen Bewertung entspricht. Die verbesserte Diagnosekompetenz lässt sich auf im Studium erworbenes PCK zurückführen (Krauss et al., 2008).

Eine Grenze der Studie bildet der Kohortenvergleich zwischen Bachelor und Master, da hier ein Selektionseffekt auftreten kann. Ebenso können die nicht kontrollierten fachlichen Leistungen einen Einfluss auf die festgestellten Effekte haben.

Tabelle 1 Bewertung der Schülerlösungen mit mathematischem bzw. realitätsbezogenem Fehler zum P-Problem Seil

Fehlertyp	*Bewertung*	*Bachelor*	*Master*
Mathematischer Fehler	0	34.4%	7.3%
	1	64.1%	85.4%
	2	1.6%	7.3%
Realitätsfehler	0	3.1%	2.4%
	1	61.5%	92.7%
	2	35.4%	4.9%

Literatur

Baumert, J.; Kunter, M; Blum, W.; Brunner, M.; Voss, T; Jordan, A.; Klusmann, U; Krauss, S.; Neubrand, M. & Tsai, Y. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, 47(1), S. 133-180.

Dewolf, T.; van Dooren, W.; Ev Cimen, E. & Verschaffel, L. (2014). The impact of illustrations and warnings on solving mathematical word problems realistically. *Journal of Experimental Education*, 82, S. 103-120.

Greer, B. (1993). The modelling perspective on wor(l)d problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, S. 239-250.

Krauss, S.; Baumert, J. &. Blum, W (2008). Secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge and content knowledge: validation of the COACTIV constructs. *ZDM Mathematics Education*, 40, S. 873-892.

Verschaffel, L.; De Corte, E. & Borghart, I. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of school word problems. *Learning and Instruction*, 7(4), S. 339-359.

Verschaffel, L.; De Corte, E. & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modelling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction*, 4, S. 273-294.

Yoshida, H.; Verschaffel, L. & De Corte, E. (1997). Realistic considerations in solving problematic word problems: do Japanese and Belgian children have the same difficulties? *Learning and Instruction*, 7(4), S. 329-338.

Nadine BÖHME, Erfurt

Studieneingangsvoraussetzungen von angehenden Grundschullehrkräften

Ausgangslage

Bei einem Mathematikstudium spielt die Studieneingangsphase eine besondere Bedeutung, da nach Dieter (2012) gerade zu Beginn des Mathematikstudiums viele Studierende ihr Studium abbrechen. Mit 55 Prozent sind die Abbruchquoten in den mathematikhaltigen Studiengängen besonders hoch (Autorengruppe Bildungsberichterstattung 2012). Die Gründe für Probleme in der Studieneingangsphase sind dabei vielfältig (für einen Überblick vgl. Rach, 2014). Aber gerade in Bezug auf angehende Mathematiklehrkräfte gibt es auch Probleme am Ende des Studiums. Nach den Ergebnissen von TEDS-M 2008 liegt die mathematische Kompetenz angehender deutscher Grundschullehrkräfte am Ende der Lehramtsausbildung signifikant über dem internationalen Mittelwert (Blömeke, Kaiser, Döhrmann, Suhl & Lehmann, 2010). Besonders gute Ergebnisse erzielen bzgl. des Fachwissens jene Lehrkräfte, die stufenübergreifend ausgebildet wurden und Mathematik als Unterrichtsfach haben, währenddessen die Lehrkräfte, die stufenübergreifend ausgebildet worden sind, aber nicht Mathematik als Unterrichtsfach studiert haben, signifikant unter dem internationalen Mittelwert liegen. Die letztgenannte Gruppe unterrichtet in der Sekundarstufe I abgesehen von fachfremdem Unterricht tatsächlich im Allgemeinen ihre Unterrichtsfächer (u. a. Deutsch und Biologie). Sie müssen aber als Klassenlehrkräfte in der Grundschule, so gut wie alle Fächer und damit auch Mathematik unterrichten. Diese Gruppe von angehenden Lehrkräften hat oftmals innerhalb ihres Studiums kleinere verpflichtende Mathematikanteile in Form von u. a. mathematischen Lernbereichen (Blömeke, Kaiser & Lehmann, 2010). Eine zusätzliche Verschärfung des geringen Fachwissens der stufenübergreifend ausgebildeten Lehrkräfte ohne Mathematik als Schwerpunktfach bringt die Tatsache, dass geringes mathematisches Fachwissen der Lehrpersonen, oft mit Vorbehalten und Ängste einhergeht, was sich wiederrum negativ auf die Mathematikleistungen der SchülerInnen auswirkt (u. a. Hembree, 1990). Das Fachwissen gehört zum Professionswissen der Lehrkräfte, ist eine notwendige Bedingung für fachdidaktisches Wissen und wichtig für die Bewältigung von Unterrichtssituationen (u. a. Baumert & Kunter, 2006). Nun wäre die Frage zu stellen, was sind Voraussetzungen für einen optimalen Leistungserwerb in Schule und Hochschule, um die stufenübergreifend ausgebildeten Studierenden ohne Mathematik als Unterrichtsfach schon innerhalb des Studiums in ihrem Wissenserwerb von Mathematik zu unterstützen? Schiefele, Streblow, Ermgassen und Moschner (2003) fassen aus verschiedenen Studien die Folgenden zusammen: das Vorwissen, motivationale Variablen wie das Interesse, kognitive Fähigkeiten, die Fähigkeit zum selbstregulierten Lernen, die Lernstrategien, die subjektiv wahrgenommene Lehrqualität und die epistemologischen Überzeugungen. Im Rahmen dieses Beitrags stehen das Vorwissen, das Interesse und die Lernstrategien im Fokus.

Die Studie

Die Fragestellung, der im Fokus dieses Beitrags stehenden Studie lautet: Zeigen sich bei angehenden stufenübergreifend ausgebildeten Grundschullehrkräften mit und ohne Schwerpunktfach Mathematik bereits in der Studieneingangsphase Unterschiede in verschiedenen Lernendenmerkmalen? Die Annahme der Autorin ist, dass sich bereits zu Studienbeginn signifikante Unterschiede im Studieninteresse, den Lernstrategien und dem Vorwissen zeigen. In die Studie wurden 225 Grundschullehramtsstudierende im ersten Semester an der Universität Erfurt einbezogen. Es handelte sich um 46 Studierende mit dem Schwerpunktfach Mathematik, wobei die Studierenden für dieses Fach die Lehrberechtigung für die Sekundarstufe I erwerben. Des Weiteren nahmen 179 Grundschullehramtsstudierende ohne das Schwerpunktfach Mathematik teil, wobei diese Studierenden beispielsweise in Englisch oder Sport die Lehrbefähigung für die Sekundarstufe I erwerben und im Rahmen des Grundlegungsbereichs auch einen mathematischen Studienanteil absolvieren. Die Erhebung fand im Wintersemester 2014/15 in der ersten Mathematiklehrveranstaltung der jeweiligen Studierendengruppen statt. Die Studierenden waren zum überwiegenden Teil weiblich (82,7 Prozent) und durchschnittlich 20,7 Jahre alt. Beide Studierendengruppen gaben durchschnittlich eine Abiturnote von 2,2 an. Als Erhebungsinstrument kam der Fragebogen zum Studieninteresse von Krapp, Schiefele, Wild und Winteler (1993) angepasst auf das Mathematikstudium zum Einsatz. Des Weiteren wurde das Inventar zur Erfassung von Lernstrategien im Studium (LIST) von Wild, Schiefele & Winteler (1992) ebenfalls angepasst auf die Mathematik verwendet. Bei den Fragebögen kam eine sechsstufige Likert-Skala zum Einsatz. Zur Erfassung des Vorwissens wurde ein Leistungstest der Autorin verwendet, der sowohl Wissens- als auch Anwendungsaufgaben zu algebraischen Themen der Sekundarstufe I (u. a. Bruchrechnung) enthielt. Es wurde sich am Kompetenzraster von TEDS-M (Kennen und Anwenden) orientiert und die Items stammten aus erprobten Tests (u. a. Eilerts, 2009). Von den Studierenden konnten maximal 43 Punkte erreicht werden. Nach Betrachtung der Testgütekriterien wurde der Leistungstest als geeignet bewertet, um Leistungsunterschiede zwischen den Studierenden abzubilden.

Ergebnisse

Es zeigten sich signifikante Unterschiede im Studieninteresse der beiden

Studierendengruppen mit großer Effektstärke. Studierende mit der Vertiefungsrichtung Mathematik zeigten eine positive Ausprägung bzgl. des intrinsischen Charakters, inwieweit ihr Studienfach mit positiven Gefühlen für sie behaftet ist und sie ihm einen persönlichen Wert zu schreiben. Die Studierenden ohne die Vertiefungsrichtung hatten hierbei eine negative Tendenz auf allen drei Skalen. In Bezug auf die Lernstrategien zeigten sich signifikante Unterschiede bei den metakognitiven Strategien, dem kritischen Prüfen, der Anstrengungsbereitschaft, der Konzentration und den Wiederholungsstrategien. Hierbei war bei allen betrachteten Strategien eine stärkere Zustimmung bei den Studierenden mit Mathematik als Schwerpunktfach zu beobachten. Die einzige Ausnahme bildeten die Wiederholungsstrategien, wobei sich eine signifikant stärkere Zustimmung bei den Studierenden ohne das Schwerpunktfach Mathematik zeigte. In dem Leistungstestergebnis zeigten sich ebenfalls signifikante Unterschiede zwischen den Studierendengruppen. Die Studierenden mit dem Schwerpunktfach erreichten durchschnittlich 22,13 Punkte (SD=5.41) und die Studierenden ohne das Schwerpunktfach 17,05 Punkte (SD= 6.10 Punkte). Jedoch muss man feststellen, dass mit knapp der Hälfte der zu erreichenden Punkte bei einem Test der schulmathematischen Themen beinhaltet, beide Studierendengruppen kein gutes Ergebnis erzielt haben. Es beweist sich hierbei erneut, das bereits in verschiedenen Studien nachgewiesene geringe schulmathematische Wissen der Studierenden zu Beginn ihres Studiums (u. a. Knospe, 2012). Eine interessante Information ergab die Betrachtung der Wissens- und Anwendungsausgaben separat. Hierbei zeigten ebenfalls die Studierenden mit Schwerpunktfach in beiden Bereichen ein besseres Ergebnis, doch war bei der Anwendungsskala ($p<.01$, $d=0.97$) ein großer Effekt und bei der Wissensskala ($p<.01$, $d=0.53$) nur ein mittlerer Effekt zu verzeichnen. Wenn man sich die Zusammenhänge der erhobenen Konstrukte betrachtet, so korrelieren die Teilkomponenten des Studieninteresses positiv mit dem Leistungstestergebnis im mittleren Effektstärkebereich. Des Weiteren korrelieren die Lernstrategien kritisches Prüfen ($r=.23^{**}$), Zusammenhänge herstellen ($r=.16^{*}$) und Konzentration ($r=.23^{**}$) positiv mit dem Leistungstestergebnis. Bei diesen Lernstrategien zeigte sich eine signifikant stärkere Zustimmung der Studierenden mit dem Schwerpunktfach Mathematik. Die Wiederholungsstrategien korrelierten signifikant negativ mit dem Leistungstestergebnis ($r=-.20^{**}$).

Diskussion

Die Problematik der stufenübergreifend ausgebildeten Lehrkräfte ohne Mathematik als Unterrichtsfach zeigt sich auch bei den erfassten Lernendenmerkmalen zu Beginn der Lehramtsausbildung. Es zeigten sich signifikante Unterschiede im Studieninteresse in Bezug auf Mathematik, dem schulmathematischen Vorwissen und den Lernstrategien. Die Korrelationsergebnisse zeigten die Bedeutsamkeit von Tiefenlernstrategien in Bezug auf das Leistungstestergebnis. Ein negativer Zusammenhang wurde hierbei im Hinblick auf eine starke Zustimmung bei den Wiederholungsstrategien und dem Leistungstestergebnis deutlich. Gerade bei den Wiederholungsstrategien zeigte sich eine signifikant stärkere Ausprägung bei den Studierenden ohne das Schwerpunktfach Mathematik. Bei dem Leistungstestergebnis zeigte sich ein größerer Vorsprung der Studierenden mit dem Schwerpunktfach im Bereich der Anwendungsaufgaben. Vorhandenes Wissen anwenden zu können, gilt als besonders handlungsrelevant, währenddessen das bloße Vorliegen deklarativen Wissens gerade bei Lehrpersonen Schwierigkeiten bei der erfolgreichen Anwendung von Wissen in der Praxis mit sich führen kann (u. a. Gruber & Renkl, 2000).

Als Einschränkung der Ergebnisse muss festgestellt werden, dass die Frage besteht, inwieweit die Studierenden die Erfassung u. a. des Studieninteresses zu Studienstart tatsächlich auf das Studium beziehen. Studierende wissen zu Studienbeginn oft nicht, welcher Charakter von Mathematik ihnen begegnet bzw. welchen Charakter von Mathematik sie im Fragebogen zugrunde legen sollen. Es ist daher offen, ob die Beziehungen zwischen Leistungstest, Studieninteresse und Lernstrategien auch zu einem späteren Zeitpunkt messbar sind. Jedoch zeigen die Ergebnisse von TEDS-M und der hier vorgestellten Studie, dass die stufenübergreifend ausgebildeten Grundschullehramtsstudierenden ohne Mathematik als Schwerpunktfach problematische Eingangs- und Ausgangsbedingungen eines Lehramtsstudiums besitzen. Hieraus ergibt sich Handlungsbedarf. Durch eine frühzeitige Förderung von Lernstrategien kann der Wissenserwerb erleichtert werden. Rach und Heinze (2013) haben auf die Förderlichkeit von Selbsterklärungsstrategien hingewiesen. Des Weiteren sollten für diese Studierenden entsprechende Lerngelegenheiten innerhalb ihres Studiums gestaltet werden, die Interesse wecken und Wissenslücken schließen. Abschließend lässt sich feststellen, dass für den Studienerfolg das Vorwissen, das Interesse und die Lernstrategien eine entscheidende Rolle spielen (u. a. Schiefele, Krapp & Winteler 1992; Boerner, Seeber, Keller & Beinborn, 2005; Mackensen-Friedrichts & Meißner, 2007), wodurch eine frühzeitige Förderung gerade zu Beginn des Studiums bedeutsam ist.

Matthias BÖRRNERT, Ulrich KORTENKAMP, Potsdam

Zum dezimalen Stellenwertverständnis von Schülerinnen und Schülern der Klassenstufe 7

Im Rahmen einer Interviewstudie machten Schüler der Klassenstufe 7 zweier Potsdamer Gymnasien folgende Aussagen:

„Ich würde vermuten, dass Hundertstel größer sind als Zehntel, weil ja Hundert mehr ist als Zehn.“

„Also die 2 Zehntel sind 0,2. Und wenn man die 4 Hundertstel umrechnet, sind das 40 Zehntel […] und dann kämen 4,2 raus.“

Die Äußerungen offenbaren, wie schwer es Kindern fallen kann, ein Verständnis von Stellenwerten bei Dezimalbrüchen zu entwickeln. Es ist allgemein bekannt, dass Schülerinnen und Schüler bei der Einführung der Dezimalbrüche auf Verständnishürden stoßen, selbst wenn sie in der Grundschule erfolgreich in Mathematik waren. Diese Hürden genauer zu identifizieren, ihre Ursachen zu verstehen und nach Ansatzpunkten zum konstruktiven Aufbau adäquater Grundvorstellungen des dezimalen Stellenwertsystems zu suchen, war die Motivation für die vorliegende qualitative Studie.

1. Grundverständnis dezimaler Stellenwerte

Den Dezimalbrüchen liegen die gleichen vier Prinzipien des dezimalen Stellenwertsystems (Ross 1989) zu Grunde wie den natürlichen Zahlen. Es handelt sich um das Stellenwertprinzip (1): Die Position/Stelle einer Ziffer bestimmt ihren Wert; dem Basis-10-Prinzip (2): Der Wert jeder Stelle steigt um Faktor 10 von rechts nach links. Dieses Prinzip entspricht dem Bündelungsprinzip – oder genauer: der fortgesetzten Bündelung mit Basis 10. Es werden immer 10 Elemente einer Einheit 10^i zu einem Element der nächsthöheren Einheit 10^{i+1} zusammengefasst (vgl. Sprenger & Hußmann 2014). Da jede Ziffer die Anzahl der Elemente einer Einheit 10^i-Bündel angibt, ergibt sich ihr Zahlenwert nach dem multiplikativen Prinzip (3) aus Ziffer multipliziert mit ihrem Stellenwert. Der Gesamtwert der Zahl ist schließlich nach dem additiven Prinzip (4) die Summe der Zahlenwerte aller Ziffern. Dieses letzte Prinzip kommt dem dezimalen Teil-Ganze-Konzept nahe, ist ihm aber nicht gleichzusetzen.

Ein gut ausgeprägtes dezimales Teil-Ganze-Konzept ist notwendige jedoch nicht hinreichende Voraussetzung für ein flexibles Stellenwertverständnis – der Fähigkeit, flexibel zwischen Standard-Teilung und nicht-Standard-Teilungen einer Zahl wechseln zu können (Ladel & Kortenkamp 2014). Gerade die nicht-Standard-Teilungen einer Zahl sind für flexible Arithmetik sehr nützlich. Anhand einer Divisionsaufgabe sei dies exemplarisch demonstriert: 702,163 geteilt durch 7 scheint auf den ersten Blick nicht einfach und schnell im Kopf lösbar zu sein. Mit der nicht-Standard-Teilung 7H 21z 63t lässt sich das Ergebnis leicht finden.

2. Aktueller Forschungsstand

Im Vergleich zu den zahlreichen Forschungsbefunden im Bereich der gemeinen Brüche, sind Schülervorstellungen in der Dezimalbruchrechnung wenig erforscht, obwohl die vorhandenen Studien teils gravierende Defizite im Schülerverständnis aufgedeckt haben (vgl. Heckmann 2006). Erwiesenermaßen übersteigt der Umfang an Lernschwierigkeiten bei den Dezimalbrüchen in wesentlichen Bereichen deutlich die ohnehin schon großen Schwierigkeiten im Bereich der gemeinen Brüche (Padberg 1991).

Beiträge zur Erforschung des Schülerverständnisses von Dezimalbrüchen leisteten u. a. Padberg (1991), Resnick et al. (1989), Steinle & Stacey (2004), sowie Heckmann (2006). Unter den verschiedenen Teilbereichen der Dezimalbruchrechnung sind einige besser und andere nur spärlich erforscht. Zu letzteren Gebieten zählt auch das Stellenwertverständnis (vgl. Heckmann 2006). Zwar lieferten die oben benannten Studien sozusagen nebenbei auch Erkenntnisse zu diesem Bereich, aber explizit auf das Stellenwertverständnis bei Dezimalbrüchen ausgerichtete Forschung, wie beispielsweise die von Neumann (1997) zum dezimalen Stellenwertaufbau, ist selten.

In jüngster Zeit wurde von Ladel & Kortenkamp (2014) das flexible Stellenwertverständnis bei natürlichen Zahlen untersucht. Dabei wurde auch eine digitale Stellenwerttafel eingesetzt. Diese sogenannte Stellenwert-App ermöglicht den Lernenden ein interaktives Kennenlernen desdezimalen Stellenwertsystems (vgl. Ladel & Kortenkamp 2014). Diese App wurde nun in der hier vorgestellten Studie dazu eingesetzt, das flexible Stellenwertverständnis bei Dezimalbrüchen zu untersuchen.

3. Forschungsfragen und Forschungsdesign

Das Ziel der Untersuchung war, die Ausprägung des flexiblen Stellenwertverständnisses von Dezimalbrüchen bei Gymnasial- und Gesamtschülern der Klassenstufe 7 zu untersuchen. Gleichzeitig sollte in diesem Zusammenhang ergründet werden, wie die Schülerinnen und Schüler mit der Stellenwerttafel und der Stellenwert-App umgehen. Daraus ließen sich drei Hauptforschungsfragen ableiten: (F1) Wie ausgeprägt ist das Stellenwertverständnis der Schülerinnen und Schüler? (F2) Können die Schülerinnen und Schüler verschiedene (nicht-Standard)-Teilungen eines Dezimalbruchs finden? (F3) Wie gehen die Schülerinnen und Schüler mit der herkömmlichen und der digitalen Stellenwerttafel um?

Zur Beantwortung dieser Fragen wurden zehn Testitems entwickelt, welche in videoaufgezeichneten Einzelinterviews von 13 Potsdamer Schülerinnen und Schülern bearbeitet wurden. Die Lösungen sollten auch auf dem Testbogen schriftlich notiert bzw. mit Stellenwerttafeln oder der Stellenwert-App dargestellt werden. Um einen möglichst direkten Einblick in die Denkprozesse der Probanden zu gewinnen, wurde die aus der Kognitionspsychologie stammende Methode des „lauten Denkens“ verwendet.

4. Ergebnisse

Anhand der verbalisierten Gedanken beim Lösen der Items konnten bereits bekannte Fehlvorstellungen wie z. B. die Komma-trennt-Vorstellung und die Komma-als-Symmetrieachse-Vorstellung repliziert werden. Darüber hinaus konnte in sechs Fehlerkategorien beim Vergleichen dezimaler Stellenwerte unterschieden werden: (V1) Es wird *nicht gebündelt*: Es findet kein Übertrag auf die nächst höhere Stelle statt, sondern die Ziffern werden zusammen als Block an die jeweilige Stelle geschrieben, z. B. 15h = 0,015 oder 13z = 0,13. (V2) *Stellenwertvergleichsfehler*: Der Wert der Bündelungseinheiten wird verwechselt, z. B. 2E 1h > 2E 1z, weil 1h > 1z. (V3) Es wird *nur die größte Bündelungseinheit betrachtet*. Kleinere Stellenwerte werden ignoriert, z. B. 5z 3h > 4z 15h, weil 5z > 4z. (V4) *Stellenwertübersetzungsfehler*: Bündelungseinheiten werden falsch in Dezimalbrüche übersetzt, wobei sich die fehlerhafte Antwort um eine (beliebige) Zehnerpotenz von der richtigen Antwort unterscheidet, z.B. 1z = 0,01 oder 15h = 1,5. (V5) *andere Übersetzungsfehler*: Bündelungseinheiten werden mit falschen Strategien in Dezimalbrüche übersetzt, z. B. 4z = 0,25 oder 2E = 0,5. Grund hierfür könnte ein fehlerhafter Vorstellungstransfer aus dem Bereich der gemeinen Brüche sein. Kategorie (V6) beinhaltet schließlich alle anderen nicht kategorisierbaren Fehler.

In den Items zum Umgang mit den Stellenwerttafeln sollten Dezimalzahlen einerseits mit Legeplättchen in der herkömmlichen Stellenwerttafel gelegt und andererseits mit der Stellenwert-App dargestellt werden. Bei den Antworten konnte in fünf Kategorien unterschieden werden: (SW1) *flexible Antwort*: Es wurden die Standard-Teilung sowie (verschiedene) strenge und nicht-strenge Teilungsdarstellungen gefunden. (SW2) *eingeschränkt flexible Antwort*: Es wurden die Standard-Teilung und (verschiedene) strenge nicht-Standard-Teilungen gefunden. (SW3) *nur eine Repräsentation*: Es wurde nur die Standard-Teilung gefunden. (SW4) *Antwort mit Fehlern*: Es wurde die Standard-Teilung gefunden und bei (mindestens) einer anderen Darstellung ein Fehler gemacht, sodass sich der Wert der Zahl änderte. (SW5) *andere Symbole*: Die Plättchen wurden umgedreht, sodass sich ihre Farbe zwischen rot und blau änderte. Es ist zu bemerken, dass die beiden letzten Kategorien beim Einsatz der Stellenwert-App ausgeschlossen sind. Mit der App bleibt Zahlenwert beim Verschieben der Plättchen invariant. Die Ergebnisse zeigten, dass mit der Stellenwert-App in vergleichbaren Aufgabenformaten mehr *flexible Antworten* gegeben wurden.

5. Ausblick

Im Kooperationsprojekt *Deciplace* mit der Universität des Saarlandes (S. Ladel) und der Universität Bremen (A. Bikner-Ahsbahs, D. Behrens) wird die virtuelle Stellenwerttafel hinsichtlich Ihrer Unterstützungsmöglichkeiten beim Stellenwertverständnis von Dezimalbrüchen weiter untersucht.

Literatur

Heckmann, K. (2006): *Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern. Theoretische Analyse und empirische Befunde*. Dissertation. Berlin: Logos-Verlag.

Ladel, S. & Kortenkamp, U. (2014): Tätigkeitsorientiert zu einem flexiblen Verständnis von Stellenwerten. Ein Ansatz aus Sicht der Artefact-Centric Activity Theory. In: S. Ladel & C. Schreiber (Hrsg.): *Von Audiopodcast bis Zahlensinn. Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien in der Primarstufe*. Münster: WTM-Verlag, 151-175.

Neumann, R. (1997): Probleme von Gesamtschülern mit dem dezimalen Stellenwertaufbau. Ergebnisse einer empirischen Untersuchung. In: *Mathematische Unterrichtspraxis* 18 (3), 38-46.

Padberg, F. (1991): Problembereiche bei der Behandlung von Dezimalbrüchen - eine empirische Unter-suchung an Gymnasialschülern. In: *Der Mathematikunterricht* 37 (2), 39-69.

Resnick, L.B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S. & Peled, I. (1989): Conceptual Bases of Arithmetic Errors. The Case of Decimal Fractions. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 20 (1), 8-27.

Ross, S.H. (1989): Parts, Wholes, and Place Value: A Developmental View. In: *The Arithmetic Teacher*, 36 (6), 47-51.

Sprenger, L. & Hußmann, S. (2014): Stellenwerte von Dezimalzahlen verstehen. In: S. Prediger, C. Selter, S. Hußmann & M. Nührenbörger (Hrsg.): *Mathe sicher können. Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen*. Berlin: Cornelsen, 101-112.

Steinle, V. & Stacey, K. (2004): A longitudinal study of students' understanding of decimal notation: An overview and refined results. In: *Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (2), 541-548.

Alexander BÖRSCH, Rolf BIEHLER, Tobias MAI, Universität Paderborn

Der Studikurs Mathematik NRW – Ein neuer Online-Mathematikvorkurs – Gestaltungsprinzipien am Beispiel linearer Gleichungssysteme

Der Studikurs Mathematik ist eine der vier Säulen der Studifinder Plattform (www.studifinder.de), einem Webportal, welches zur allgemeinen Orientierung vor dem Beginn eines Studiums dient. Mit Hilfe der Plattform ist es möglich, Vorschläge für Studiengänge auf Basis eines persönlichen Tests zu erhalten (Studitest), Studiengänge anhand ausgewählter Kriterien zu suchen (Studisuche), das Vorwissen in Mathematik sowie in Sprach- und Textverständnis zu überprüfen (Studicheck) und dieses Vorwissen durch Onlinekurse aufzufrischen und zu vertiefen (Studikurs). Das Projekt wird vom Ministerium für Innovation, Wissenschaft und Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen unterstützt. Im Weiteren geht es nur um den Studikurs Mathematik. Im Studikurs Mathematik werden passgenaue Lerneinheiten entwickelt, die Wissensdomänen angestimmt sind, auf die sich die Fragen des Studichecks beziehen, diese werden zusammen gebunden in einen Komplettkurs, der auch unabhängig von den Studichecks Mathematik genutzt werden kann.

Das Projektmanagement des Gesamtprojektes liegt an Ruhr-Universität Bochum. Für den Studicheck und den Nutzersupport sind Mitarbeiter der RWTH Aachen verantwortlich. Die passgenauen Lerneinheiten werden vom Studifinder-Team der Universität Paderborn entwickelt, welches Mitglied im Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik (khdm) ist. Das Team besteht aus folgenden Mirgliedern: Rolf Biehler, Alexander Börsch, Christoph Colberg, Yael Fleischmann und Tobias Mai.

Die Grundlagen für die Inhalte der Lerneinheiten bildeten neben den Studichecks die Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife, der Kernlehrplan Nordrhein-Westfalen Mathematik, der Mindestanforderungskatalog Mathematik (Version 2.0) der COSH-Gruppe und eigene didaktische Analysen zum Übergang Schule-Hochschule. Im besonderen Maße wurden die Lerneiheiten von den Vorkursmaterialien des VEMINT Vorkurses (www.vemint.de) beeinflusst. Die bewährte Struktur von VEMINT wurde größtenteils übernommen. Ebenso wurden viele Inhalte aus den VEMINT Materialien weiter entwickelt und aktualisiert.

Folgende Lerneinheiten wurden in den Studikurs Mathematik aufgenommen: Terme und Gleichungen, Elementare Funktionen, Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, Differentialrechnung, Höhere Funktionen, Integralrechnung, Lineare Gleichungssysteme, Rechenregeln und -gesetze, Rechnen mit rationalen Zahlen, Trigonometrie, Geometrie, Vektoren und analytische Geometrie, Stochastik 1 und 2.

Die inhaltlichen Ziele einer Lerneinheit, bezogen auf den Anwender, sind die Erarbeitung von schulmathematischen Wissensdefiziten, die Aneignung von ergänzendem schulmathematischem Wissen, das wichtig für Studiengänge, aber aus dem Curriculum der Schule „gefallen“ ist. Ferner soll der Übergang von der Schule zur Hochschule erleichtert werden, indem schulmathematisches Wissen für die Universität aufbereitet wird. Hierfür kommen verschiedene didaktische Prinzipien wie z. B. „vom Exemplarischen zum Allgemeinen“, generische Beispiele und Beweise, das Ermöglichen verschiedener Lernzugänge (vgl. Biehler et al. 2012), Repräsentation „on demand“ (vgl. Zimmermann, Bescherer 2012) und intellektuell redliche Elementarisierung (vgl. Kirsch 1977) der Mathematik zum Einsatz.

Eine Lerneinheit des Studikurses Mathematik besteht aus einem so genannten Intro und mehreren Modulen. Das Intro dient zum schnellen Einstieg in eine Lerneinheit und gibt anhand einer Einstiegsaufgabe einen Überblick über die wichtigsten mathematischen Inhalte. Das für die Aufgabe notwendige Fachwissen wird separat als Fachinhalt erläutert. Jede Lerneinheit gliedert sich zusätzlich in mehrere Module. Im Falle der Einheit „Lineare Gleichungssysteme“ sieht die Unterteilung in die Module wie folgt aus:

Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

Lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten

Gauß’scher Algorithmus

Um den Anwender verschiedene Lernwege zu ermöglichen, hat jedes Modul eine feste Struktur:

Übersicht – Inhaltsangabe

Hinführung – motivierender Einstieg anhand eines Beispiels

Begründung und Erklärung – mathematische Inhalte, zum Teil mit Beweisen

Aufgaben – verschiedene Übungsaufgaben mit Lösungsweg

Anwendung – praktische oder innermathematische Anwendungen

Kompaktübersicht – Übersicht der Definitionen und Sätze

Symbolerklärung

Anleitung: Formeleingabe

Die Struktur der ersten sechs Punkte wurde dabei aus dem VEMINT Material übernommen. Je nach Bedarf kann der Anwender die Punkte nacheinander abarbeiten oder nur einzelne aufrufen. Wenn der Anwender z. B. nur üben möchte, kann er mit den Aufgaben beginnen. Stellt er dabei ein Wissensdefizit bei sich fest, kann er entweder die Kompaktübersicht als Formelsammlung verwenden, oder in Begründung und Erklärung eine detaillierte Beschreibung mathematischer Inhalte finden.

Eine besondere Herausforderung bei der Entwicklung der Selbstlernmaterialien für die Lerneinheiten ist, dass sie für alle Interessenten mathematikhaltiger Studiengänge geeignet sein sollen und die Inhalte mit den verschiedenen Anforderungen abgeglichen werden müssen. Die inhaltliche Fokussierung und Komprimierung stellt eine weitere Schwierigkeit dar. Die Inhalte müssen so weit verdichtet werden, dass die Bearbeitungszeit eines Intros ca. eine Stunde in Anspruch nimmt und die Bearbeitungszeit der restlichen Lerneinheit, ohne Intro, ca. 6 Stunden. Dabei sollen die schulischen Inhalte im Hinblick auf die universitäre Verwendung aufbereitet werden mit dem Anspruch nur intellektuell redliche Vereinfachungen (vgl. Kirsch 1977) vorzunehmen, ohne die Schwächen üblicher schulischer Elementarisierung zu reproduzieren.

Es folgen nun einige Beispiele aus der Lerneinheit „Lineare Gleichungssysteme“.

An einigen Stellen werden Informationen nur nach einem Anklicken angezeigt. Dies geschieht z. B. in der Hinführung zum Modul „Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten“. Der Nutzer kann hier entscheiden, ob ein lineares Gleichungssystem durch die Modellierung eines praktischen Problems erstellt werden soll oder einfach als gegeben angenommen wird. Durch diese Repräsentation „on demand“ (vgl. Zimmermann, Bescherer 2012) des Stoffes soll besser auf die verschiedenen Bedürfnisse der Anwender eingegangen werden.

Zum Erkennen der verschiedenen Lösungstypen bei linearen Gleichungssystemen wird ein Geogebra-Applet eingesetzt. In dem Applet sind zwei Geraden gegeben. Die Parameter einer der Geraden können angepasst werden. Hierbei können folgende Situationen entstehen: Die beiden Geraden schneiden sich, die beiden Geraden sind parallel aber nicht identisch, die beiden Geraden sind identisch. Da im Vorfeld erläutert wurde, dass ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten und zwei Gleichungen durch zwei Geraden in der Ebene repräsentiert werden kann, wird dem Anwender ermöglicht die Zusammenhänge, explorativ zu erfahren und zu lernen.

An vielen Stellen wird erst ein Beispiel betrachtet und dann die allgemeine Form. So z. B. auch beim Lösen eines Gleichungssystems in Dreiecksform. Zuerst wird ein ganz konkretes System in Dreiecksform gelöst und anschließend das allgemeine Schema mit diversen Einschränkungen erklärt.

Die Aufgaben sind zumeist interaktiv, d. h., die Lösungen – Zahlen oder algebraische Ausdrücke – können in entsprechende Felder eingegeben und anschließend per Mausklick überprüft werden. Kann der Anwender die richtige Lösung einmal nicht selbstständig erarbeiten, so wird mittels Klick die Lösung samt Lösungsweg angezeigt.

Die Materialien werden noch bis Juli 2016 entwickelt und bis Ende 2017 weiter optimiert und evaluiert.

Literatur

Biehler, R., Fischer, P. R., Hochmuth, R., und Wassong, T. (2012). Mathematische Vorkurse neu gedacht: Das Projekt VEMA. In: M. Zimmermann, C. Bescherer und C. Spannagel (Hrsg..): Mathematik lehren in der Hochschule – Didaktische Innovationen für Vorkurse, Übungen und Vorlesungen (pp. 21–33). Hildesheim/Berlin: Franzbecker.

Cooperation Schule Hochschule (Hrsg.). (2014). Mindestanforderungskatalog Mathematik (Version 2.0) der Hochschulen Baden-Württembergs für ein Studium von WiMINT-Fächern

Kirsch, A. (1977). Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. Didaktik der Mathematik, 5, S. 87–101.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.). (2014). Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen Mathematik

Schmidt, G., Zacharias, M. und Lergenmüller A. (Hrsg.). (2010). Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien. Lineare Algebra, Analytische Geometrie. Braunschweig: Schroedel.

Zimmermann, M., und Bescherer, C. (2013). Repräsentationen „on demand“ bei mathematischen Beweisen in der Hochschule. In J. Sprenger, A. Wagner und M. Zimmermann (Eds.), Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen (pp. 241–252): Springer Fachmedien Wiesbaden.

Claudia BÖTTINGER, Duisburg-Essen

Lineare Algebra für das Lehramt Grund-/ Haupt-/ Realschule

Die Veranstaltung „Lineare Algebra“, aus der einige Elemente der Neukonzeption hier vorgestellt werden, richtet sich an Studierende des Lehramts Grundschule (Master) sowie Studierenden des Lehramts Haupt-/ Realschule (Bachelor oder Master) der Universität Duisburg-Essen. Trotz vieler Anstrengungen fehlt speziell den Studierenden mit Studienziel Lehramt Grundschule in Fachveranstaltungen Mathematik die Beziehung zu ihrer späteren Tätigkeit als Lehrkraft. Darüber hinaus stehen derartige Veranstaltungen machmal isoliert im Studium; Verbindungen zu vorangehenden Veranstaltungen erfolgen eher unsystematisch. Beide Probleme werden in dem als eher abstrakt geltenden Fach Lineare Algebra angegangen.

Folgt man dem Modell von Beutelspacher, Danckwerts et al. (2011), so beruht die Ausbildung auf vier Säulen, von denen zwei an dieser Stelle besonders herausgestellt werden sollen:

1. Erfahrungen mit einer „Schulmathematik vom höheren Standpunkt“. Dabei dürfen schulrelevante Beispiele nicht nur „*beispielhafte Konkretisierungen des allgemeinallgemeinen Falls sein […] sondern müssen ihrerseits vertieft betrachtet werden*“ (Schwarz, Herrmann 2015)

2. Aktive Beziehung zur Mathematik als Wissenschaft und als Kulturgut. „*Studierende müssen ein differenziertes Bewusstsein entwickeln können über die Art des gedanklichen Zugriffs, den die Mathematik vornimmt*.“ (Empfehlungen, 2008)

Im Folgenden wird dargestellt, auf welche Weise es möglich ist, produktive Übungen zu nutzen, um bei den Themen Lineare Gleichungssysteme und Vektorräume einen deutlichen Bezug zur Grundschulmathematik herzustellen und durch Nutzung grundlegender Begriffe und Ideen der linearen Algebra vertiefte Einsichten in die Struktur dieser Übungen zu gewinnen.

1. Lineare Gleichungssysteme (LGS)

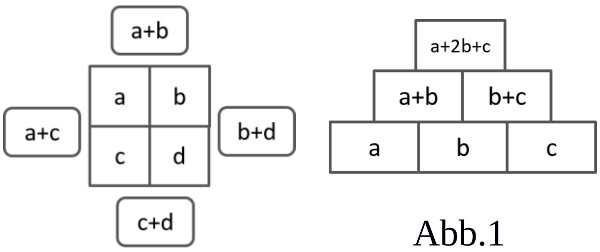


Abb.1

Als typische Anwendungen linearer Gleichungssysteme bieten sich produktive Übungen an, bei denen man zwei Typen unterscheiden muss.

Beim 1. Typ ergeben sich einzelne vorgegebene Felder durch Bildung von Linearkombinationen aus Variablen. Dazu gehören Rechendreiecke und –vierecke, Zahlenmauern, Rechenketten oder Additionstabellen/Streichquadrate, vgl. Abb. 1. Lineare Gleichungssysteme erhält man, indem man für die Felder mit

Linearkombinationen Zahlen vorgibt und fordert, dass beliebige reelle Zahlen als Einträge zulässig sind. Beim Rechenviereck wie in Abb. 1 könnte dies etwa a+b=10, b+d=20, c+d=15, a+c=5 sein.

Beim folgenden 2. Typ sind die LGS explizit gegeben, etwa Zauberbuchstaben wie in Abb. 2 (Käpnick, 2001), Magische Quadraten oder Zauberspinnen (Floer, Schipper, 1992). Gefordert ist in diesem Beispiel a+b+c=b+d+e. Ist diese Zielsumme vorgegeben, erhält man in der Regel ein inhomogenes LGS, sonst ein homogenes. Auch hier muss gefordert werden, dass alle reellen Zahlen (auch gleiche) als Einträge zulässig sind, im Gegensatz zu dem Original für die Schule.

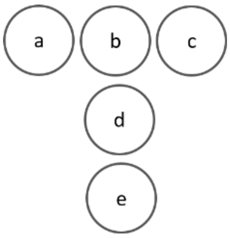


Abb. 2

Worin liegt nun der Nutzen dieser Behandlung produktiver Übungen für die Studierenden? Die Betrachtung als LGS ermöglicht einen Wechsel von eher probierenden, aufgabenbezogenen Lösungsstrategien wie sie grundschultypisch sind hin zu universellen, für viele Situationen einsetzbaren Strategien. Man erhält allgemeine Begründungen für die (Nicht-)Lösbarkeit von LGS und die erhaltenen Lösungen sind vollständig. Darüber hinaus ist es möglich, selbst produktive Übungen dieser Art zu erfinden.

2. Vektorräume

Neben dem R^2, R^3 und dem R^n dienen die oben angeführten produktiven Übungen ebenfalls als zentrale Beispiele für Vektorräume. Die Objekte werden addiert, indem man Felder gleicher Lage addiert und sie werden mit einem Skalar multipliziert, indem man alle Einträge mit dem Skaler multipliziert. Man erhält ein Objekt, das wieder dieselbe Struktur besitzt (beweispflichtig!).

Zu unterscheiden sind wieder die oben erwähnten beiden Typen. Das folgende Beispiel (Typ 1) in Abb. 3 ist einer Aufgabe aus dem Zahlenbuch Kl. 3 (Wittmann, Müller 2005) nachempfunden und soll verdeutlichen, dass diese Sichtweise in angepasster Weise in der Grundschule thematisiert werden kann. Rechne und vergleiche:

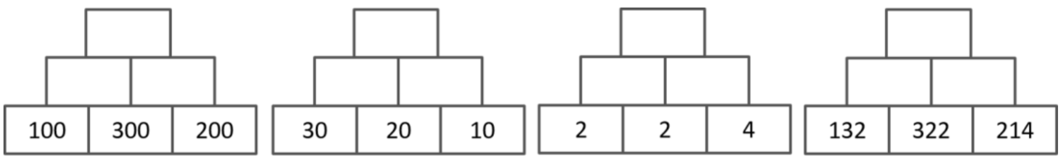


Abb. 3

Der Nutzen dieser Sichtweise, produktive Übungen vom Typ 1 als Vektorräume aufzufassen, liegt z. B. darin, dass sich unterschiedliche Strukturen charakterisieren lassen. Vergrößert man etwa Zahlenmauern um eine Zeile, vergrößert sich die Dimension des entstehenden Vektorraums um 1. Bei Zahlenketten wie in Abb. 4 führt eine Verlängerung der Ketten nicht zu einer Vergrößerung der Dimension, sie bleibt 2. Damit sind die Übungen strukturell verschieden.

Abb. 4

Streichquadrate liefern ein Beispiel dafür, dass die Bestimmung der Basis keinesfalls immer so offensichtlich wie bei Zahlenmauern (Abb. 1) oder Rechenketten (Abb. 4) ist.

Die wichtigste und ungewohnteste Bedeutung liegt in einer neuen Sicht auf das operative Prinzip. Folgt man der Version Wittmanns (1985), so ist es bei der Untersuchung mathematischer Objekte erforderlich, zu „*untersuchen, welche Operationen ausführbar und wie sie miteinander verknüpft sind*" noch bevor beobachtet werden kann, welche Wirkungen Operationen auf Eigenschaften und Beziehungen der Objekte haben. Die in Didaktik-Veranstaltungen immer wieder betrachtete Veränderung von Basissteinen etwa bei Zahlenmauern steht in enger Verbindung zur Linearität.

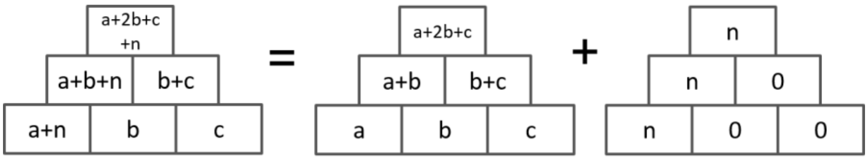


Abb. 5

Wie in Abb. 5 zu sehen ist, bedeutet die Erhöhung eines Basissteins um die Zahl n aus Sicht der linearen Algebra die Addition eines Vektors. Daher handelt es sich hierbei um eine strukturell nahe liegende Operation. Im Kontrast dazu führt die Erhöhung von ausgezeichneten Zahlen etwa bei Mal-Plus-Häusern oder bei multiplikativen Zahlenmauern nicht zu einer Addition von Vektoren sondern zu komplexeren Veränderungen innerhalb der Bausteine.

Betrachtet man den 2. Typ produktiver Übungen, bei denen die Gleichungssysteme explizit gegeben sind, so stellen diese ebenfalls Vektorräume dar. Bei dieser Sichtweise ist es möglich, durch die Bildung von Linearkombinationen neue Lösungen aus bekannten zu erzeugen. Insbesondere bieten sie sich an, durch die Bestimmung der Basis Beziehungen zwischen den beiden Typen von Übungen zu thematisieren. Schließlich ist beim 2. Typ das LGS gegeben, beim 1. Typ ist die Lösung gegeben.

3. Fazit

Die Studierenden haben die Bemühungen um die Einbindung des Schulbezugs angenommen, wie der Ausschnitt aus der Evaluation belegt (Abb. 6).

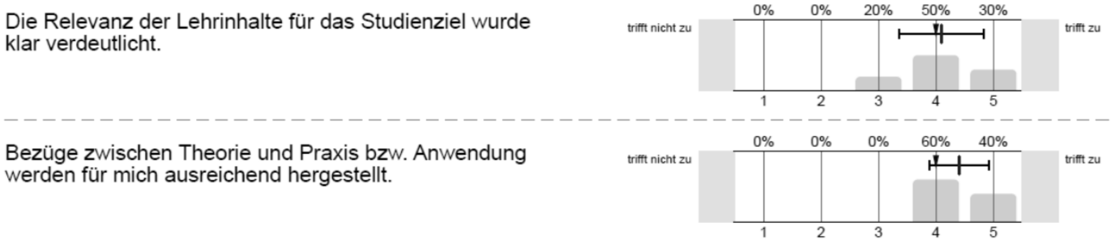


Abb. 6

Unerwartet war, dass Studierende mit Studienziel Lehramt Haupt-/ Realschule berichteten, dass sie neue Übungsformate kennen lernen durften, die sie für sich als nützlich für die spätere Tätigkeit gesehen haben.

Das vorgestellte Konzept stößt jedoch an Grenzen, wie Abb. 7 zeigt.

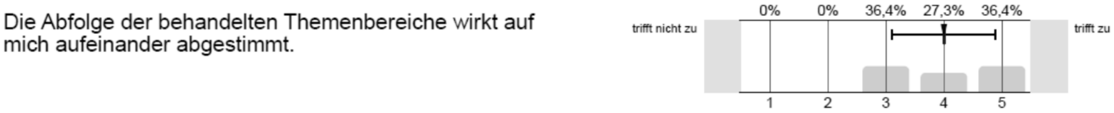


Abb. 7

Möglicherweise leidet der „rote Faden" der Veranstaltung, weil sich das Konzept der produktiven Übungen bei linearen Abbildungen nicht sinnvoll weiter führen lässt. Lineare Abbildungen zwischen verschiedenen produktiven Übungen sind aus momentaner Sicht nicht hilfreich, um ihre Struktur besser zu verstehen. Aus mathematischer Sicht muss abschließend erwähnt werden, dass die Veränderung der zulässigen Zahlbereiche im Vergleich zu den Aufgaben für die (Grund-)Schule die Struktur der Übungen verändert.

Literatur

Beutelspacher, A., Danckwerts, R. et al. (2011). *Mathematik neu denken, Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden

Empfehlungen von DMV, GDM, MNU (2008). *Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik*, http://madipedia.de/images/2/21/ Standards_Lehrerbildung_ Mathematik.pdf [1.3.2016]

Floer, J., Schipper, W. (1992) Zauberquadrate und Zahlenspinnen, Weitere Beispiele für entdeckendes Üben, Kl.2-4, *Die Grundschulzeitschrift*, 51, 59-67

Schwarz, B., Herrmann, P. (2015) Bezüge zwischen Schulmathematik und Linearer Algebra, *Math. Semesterberichte* 62 (2), 195-217

Wittmann, E. Ch. (1985). Objekte – Operationen – Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik, *Mathematik lehren* 11, 7-11

Wittmann, E. Ch., Müller, N. (2005) *Das Zahlenbuch Klasse 3*, Ernst Klett Grundschulverlag, Leipzig

Birgit BRANDT und Sarah KEUCH, Chemnitz

Sprachförderung in mathematischen Erkundungssituationen

Frühe Bildung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich hat in den letzten Jahrzehnten sowohl in der Politik wie auch in der Forschung sehr an Bedeutung und Aufmerksamkeit gewonnen. Mathematik ist als Bildungsbereich in fast allen Bundesländern explizit in den Bildungsplänen aufgenommen und auch mit sprachlicher Bildung verknüpft. So heißt es im Bildungsplan für Hessen von 2007[3]:

„Schon in den ersten Lebensjahren bildet sich die Grundlage für späteres mathematisches Denken heraus, indem das Kind Erfahrungen mit Regelmäßigkeiten, Mustern, Formen, Größen, Gewicht, Zeit und Raum macht. (...) Sprache dient zum einen als Basis von mathematischem Denken, zum anderen entwickelt und verfeinert sich mathematisches Problemlösen vorrangig durch den sprachlichen Austausch mit anderen.“ (S. 75)

Schwerpunkt der Sprachbildung in frühen Bildungsinstitutionen bildet eine alltagsintegrierte Sprach- und Kommunikationskompetenz, die in entsprechenden Handlungssituationen mit fach- und bildungssprachlichen Aspekten verknüpft werden soll. Prediger (2015) fordert, dass fachsprachliche Bildungsprozesse frühzeitig einsetzen müssen und dass eine altersgerechte Gestaltung und Orientierung an spezifischen Inhalten notwendig ist.

Wir setzen uns mit der (fach-)sprachlichen Begleitung in mathematischen Erkundungssituationen in Kindertagesstätten zum Inhaltsbereich *Messen und Größen* auseinander. Messen kann als eine der mathematischen Basisaktivitäten gesehen werden, die kulturhistorisch von Bedeutung ist für die Entwicklung der Mathematik als Wissenschaft und somit auch für die mathematische Denkentwicklung bei Kindern (Bishop, 1988).

1. Forschungsdesign

Datengrundlage unserer Analysen bilden von Erzieherinnen gestaltete mathematische Situationen aus dem Projekt erStMaL (Acar Bayraktar, Hümmer, Huth, & Münz, 2011); insgesamt finden sich in diesem Gesamtkorpus 19 Erkundungssituationen, die dem Inhaltsbereich *Messen und Größen* zuzuordnen sind. Für unsere linguistische Diskursanalyse haben wir im Sinne einer komparativen Analyse zunächst zwei Situationen herausgegriffen, die sich in Hinblick auf Alter und Sprachhintergrund der Kinder unterscheiden, jedoch gleichermaßen von einer mathematischen Fachkraft zum Größenbereich Längen geplant und durchgeführt wurden:

Über Messen Sprechen	*Sachen zum Messen*

[3] Hessisches Ministerium für Soziales und Integration und Hessisches Kultusministerium (2007).

15 Minuten	45 Minuten
Sabine: Fachkraft Mathematik *Mona: w, 5;5, L1* *Sadira: w, 5;11, L2 (L1: Urdu)* *Oslana: w, 5;3, L2 (L1: Kroatisch)* *Omara: m, 4;11, L2 (L1: Tamil)* *Theresa: w, ?, L2 (L1 unbekannt)*	*Barbara: Fachkraft Mathematik; L2 (L1 unbekannt)* *Bella: w, 6;0, L1* *Can: m, 6;0, bl (Deutsch/Türkisch)* *Denis: m, 6;0, L1* *Friedel: m, 6;2, L1*
Lineale, Zollstock, Wolle	Lineale, Zollstock, Maßbänder, Bausteine, Kreide

Tabelle 1: Basisinformationen zu den fokussierten Situationen

Das von Vollmer und Thürmann (2013) entwickelte Modell zur Beschreibung bildungssprachlicher Anforderungen und Kompetenzerwartungen im Fachunterricht bildet die Grundlage unserer linguistisch geprägten Analysen. Dabei beschränken wir uns zunächst auf das Repertoire sprachlicher Mittel (insbesondere Wortschatz inkl. Kollokation, Grammatik und Pragmatik) und deren Beziehung zu konkreten Inhalten und Methoden. Ziel ist es, empirische Sprachgebrauchsmuster zu rekonstruieren und ihre Zusammenhänge zu den in den konkreten Situationen ausgehandelten inhaltsbezogene Bedeutungen und Konzepten aufzuzeigen. Konkret geht es zunächst um folgende Forschungsfragen:

- Greifen die Kinder Fachbegriffe und Sprachgebrauchsmuster der Erzieherinnen auf und/oder entwickeln sie eigene?
- Welche Strategien wenden Kinder an, wenn ihnen Fachbegriffe oder grammatikalische Strukturen fehlen?
- Welche (Korrektur-)Strategien der Erzieherinnen zur sprachsensiblen Gestaltung lassen sich rekonstruieren?

Wir konzentrieren uns hier mit der Satz-Strukturanalyse auf grammatikalische Aspekte.

2. Satz-Strukturanalyse MESSEN

Ausgangspunkt der Sprachgebrauchsmusteranalyse ist zunächst die die Valenz des Verbs MESSEN: Jemand/etwas (K_{sub}) misst etwas (K_{akk}) mit irgendetwas (K_{adv}). Für einen wohlgeformten, (konzeptionell) schriftlichen Satz fordert das Verb MESSEN ein Subjekt sowie ein Akkusativobjekt; die adverbiale Bestimmung des Mittels kann ggf. entfallen (vgl. Institut für deutsche Sprache (o.J.)). In der gesprochenen Sprache können aus pragmatischen Gründen einzelne Satzteile durch Deiktika ausgedrückt werden bzw. auch entfallen, wie in folgenden Beispielen aus unserem Teilkorpus:

Friedel	mit dem Zollstock *(adv)* kann man *(sub)* das *(akk)* messen

Barbara	wir *(sub)* messen jetzt mit dem Zollstock *(adv)*
Sabine	wir backen nicht wir *(sub)* messen

Tabelle 2: Konkrete syntaktische Satzstrukturen MESSEN

Fach- und Sprachlernende können der korrekten Verwendung der Ergänzungen wichtige Informationen entnehmen. Je mehr Ergänzungen das Verb MESSEN in der konkreten Sprachhandlung begleiten, desto konkreter wird der Vorgang beschrieben und desto einfacher ist es, die Bedeutung des Wortes aus dem Kontext zu erschließen. Die korrekte Verwendung der Ergänzungen zu einem bestimmten Verb erfordert ein elaboriertes Sprachgefühl, da sich Art und Anzahl in den verschiedenen Sprachen unterscheiden. Es bietet sich zudem eine Lerngelegenheit für die im Zweitspracherwerb oft vernachlässigten Kasusendungen. Aus sprachdidaktischer Perspektive kann eine Reduktion auf wenige Ergänzungen bzw. Kasus diese betonen und vertiefen.[4] Entfallen die Ergänzungen komplett, so wird die damit verbundene Aussage abstrakter: Sabine verwendet MESSEN als Oberbegriff für verschiedene Tätigkeiten und somit als Bezeichnung für die gesamte Erkundungssituation. Im Verhältnis zu der Dauer der Gesamtsituation verwendet Sabine das Wort MESSEN häufiger als Barbara. Dabei überwiegt bei Sabine im konkreten Sprachgebrauch die Satzstruktur MESSEN + K_{sub}[5], also MESSEN in relativ abstrakteren Äußerungen. Hingegen weisen Barbaras Äußerungen vor allem die Satzstruktur hingegen K_{sub} + K_{akk} auf; Barbara begleitet damit vor allem konkrete Messvorgänge sprachlich und markiert dabei insbesondere das zu messende Objekt durch entsprechende Ergänzungen.

Dieser Unterschied zwischen einem eher abstrakten *Sprachbad Messen* und einem konkreten *Aktivitätsbad Abmessen* zeigt sich schon in der Eröffnungssequenz an den (Sprach-)Handlungen der Erzieherinnen: Barbara präsentiert verschiedene Messgeräte mit den entsprechenden Fachbegriffen (Lineal, Zollstock, Maßband und Metermaß) und führt durch die Frage „was macht man mit den Sachen“ das Wort MESSEN ein. Sabine hingegen beginnt mit einer explizite Themenorientierung „heute wollen wir über Messen sprechen“, auch wenn den Kindern das Wort eventuell nicht bekannt ist und somit die Orientierung eher vage bleiben könnte.

3. (Korrektur-)Strategien & sprachsensible Gestaltung

Die Erzieherinnen unterscheiden sich darüber hinaus in ihrem Korrekturverhalten auf lexikalischer und syntaktischer Ebene. Während Sabine grammatikalische Fehler der Kinder korrekt paraphrasiert und Wortneuschöpfungen

[4] Vgl. die Äußerung von Barbara in Tabelle 2, die sich sprachlich auf die adverbiale Bestimmung im Dativ (gefordert durch die Präposition „mit“) konzentriert.

[5] inkl. Nominalisierungen

positiv evaluiert, produziert Barbara selbst syntaktisch fehlerhafte Äußerungen. Inkorrekte Äußerungen der Kinder werden von ihr ignoriert und Wortneuschöpfungen direkt – ohne Wertschätzung der fachlichen oder sprachlichen Leistungen – korrigiert.

Die Kinder nutzen die Erkundungssituationen sehr unterschiedlich – teilweise ohne eine aktiv-sprachliche Beteiligung am Wortfeld *Messen*. In beiden Situationen lassen sich jedoch Kinder ausmachen, die das Arrangement für sich als Erkundungsfeld, sowohl auf der Ebene der Handlungspraxis, als auch sprachlich, nutzen. Wünschenswert wäre es hier, wenn es den Erzieherinnen gelingen würde, diese proaktive Partizipation für die Gesamtsituation produktiv zu nutzen – was Sabine bei allen Schwächen in der sprachlichen Ausgestaltung ansatzweise gelingt.

Literatur

Acar Bayraktar, E., Hümmer, A.-M., Huth, M., & Münz, M. (2011). Forschungsmethodischer Rahmen der Projekte erStMaL und MaKreKi. In B. Brandt, R. Vogel, & G. Krummheuer (Hrsg.), *Die Projekte erStMaL und MaKreKi. Mathematikdidaktische Forschung am "Center for Individual Development" (IDeA)* (S. 11-24). Münster, New York, München, Berlin: Waxmann.

Bishop, A. (1988). *Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hessisches Ministerium für Soziales und Integration, & Hessisches Kultusministerium (Hrsg.). (2007). *Bildung von Anfang an - Bildungs- und Erziehungsplan für Kinder von 0 bis 10 Jahren in Hessen.* Wiesbaden Hessisches Sozialministerium; Hessisches Kultusministerium.

Prediger, S. (2015). „Die Aufgaben sind leicht, weil ... die leicht sind.“ Sprachbildung im Fachunterricht – am Beispiel Mathematikunterricht. In W. Ostermann, T. Helmig, N. Schadt, & J. Boesten (Hrsg.), *Sprache bildet! Auf dem Weg zu einer durchgängigen Sprachbildung in der Metropole Ruhr* (S. 185-196). Mühlheim: Verlag an der Ruhr.

Vollmer, H. J., & Thürmann, E. (2013). Sprachbildung und Bildungssprache als Aufgabe aller Fächer der Regelschule. In M. Becker-Mrotzek, K. Schramm, E. Thürmann, & H. J. Vollmer (Hrsg.), *Sprache im Fach. Sprachlichkeit und fachliches Lernen.* (S. 41-57). Münster: Waxmann.

Johanna BRANDT, Dortmund

Entwicklung und Erforschung einer Lernumgebung zum Erlernen von Diagnose und Förderung im Rahmen einer mathematikdidaktischen Großveranstaltung der Primarstufe

Die Anbahnung und Entwicklung von fachbezogenen Diagnose- und Förderfähigkeiten ist ein wichtiges Ziel der Lehrerausbildung, das nicht auf die Berufsausbildung verschoben werden darf, sondern bereits in der Grundausbildung angestrebt werden muss (Hascher 2008). Inwiefern kann eine für 330 Studierende konzipierte Lernumgebung hierzu beitragen? Um diese Frage zu beantworten, werden im Rahmen des vorgestellten Projektes die Entwicklung der Fähigkeiten sowie die Akzeptanz einer Lernumgebung näher betrachtet und gegenübergestellt. Im vorliegenden Beitrag liegt der Fokus auf der Akzeptanz der Studierenden bezüglich konzipierter Professionalisierungsmaßnahmen zum Erlernen von Diagnose und Förderung.

1. Theoretische Verortung

Diagnostische Fähigkeiten sind bereichs- und inhaltsspezifisch und sollten diesen empirischen Ergebnissen folgend in den Fachdisziplinen und an spezifischen Inhaltsbereichen ausgebildet werden (Lorenz & Artelt 2009). Zur Frage welche Professionalisierungsmaßnahmen zu diesem Zweck eingesetzt werden sollten, sprechen normative Empfehlungen für die Auseinandersetzung mit Schülerprodukten und Videovignetten sowie die praktische Arbeit mit Kindern (Empson & Jacobs 2008). Wenige Studien belegen bisher empirisch die Wirksamkeit des Einsatzes solcher Maßnahmen. Erste Befunde sprechen für die Wirksamkeit fallbasierten Lernens und simulierter ‚Laborerfahrungen' (Südkamp & Möller 2009) sowie für den Einsatz von authentischen Dokumenten zu Lehr-/Lernsituationen (Dorlöchter, Krüger & Wiebusch 2013).

Notwendige Bedingung für eine Wirksamkeit auf Ebene der Kompetenzentwicklung ist jedoch zunächst die Nutzung und Annahme der Professionalisierungsmaßnahme durch die Zielgruppe. Lipowsky (2010) nennt diese Ebene „Reaktionen und Einschätzungen der teilnehmenden Lehrpersonen" und fasst unter dieser deren Zufriedenheit und Akzeptanz sowie die eingeschätzte Relevanz einer Maßnahme. Obwohl eine allgemein hohe Akzeptanz keine verlässlichen Aussagen über die Wirkung auf Ebene der Kompetenzentwicklung zulässt, ist ein indirekter Zusammenhang über Engagement und Intensität der Nutzung zu vermuten (Lipowsky 2010).

Auf dieser Grundlage wird die Nutzung, Zufriedenheit und Relevanz im Folgenden als *Akzeptanz* zusammengefasst. Hinsichtlich der übergeordneten Forschungsfrage, wie die Studierenden die Lernumgebung bewerten, wird differenzierter betrachtet, inwiefern die Studierenden einzelne Maßnahmen der Lernumgebung akzeptieren und welche Aspekte diese Akzeptanz beeinflussen.

2. ‚Design Lernumgebung'

Die untersuchte *Lernumgebung* verortetet sich in der fachdidaktischen Großveranstaltung ‚Grundlegende Ideen der Mathematikdidaktik in der Primarstufe'. Hintergrund der Veranstaltungskonzeption ist das Projekt dortMINT (2009-2017). In diesem wurden inhaltliche und strukturelle Maßnahmen zum Aufbau von Diagnose- und Förderfähigkeiten angehender Lehrkräfte in fachwissenschaftlichen, fachdidaktischen und in schulpraktischen Bereichen des Studiums konzipiert (Hußmann & Selter 2013). In Anlehnung hieran wurden verschiedene Maßnahmen konzipiert, von welchen folgende im weiteren Verlauf exemplarisch fokussiert werden: Die Durchführung einer praktischen Erkundung (Durchführung und Auswertung einer Standortbestimmung zum Stellenwertverständnis an Schulen in Klasse 3/4), der kontinuierliche Einsatz von schriftlichen Schülerdokumenten sowie videobasierten Vignetten.

3. ‚Design Untersuchung'

Für die empirische Untersuchung wurde ein Mixed-Methods-Design gewählt. Die Erhebungsphase fand im ersten Durchlauf der Veranstaltung (WS 2014/2015) statt, den 330 Studierende des Lehramts Grundschule und Sonderpädagogik des 3. oder 5. Fachsemesters besuchten.

Die Akzeptanz der Studierenden wurde auf *quantitativer* Ebene mithilfe eines schriftlichen Fragebogens erfasst (N=263), in dem auf einer vierstufigen Likert-Skala die Zustimmung bezüglich verschiedener Items zu den Maßnahmen gegeben wurde (1 = geringe Zustimmung, 4 = hohe Zustimmung). Auf *qualitativer* Ebene wurden 10 Studierende in einem leitfadengestützten Interview näher zu den einzelnen Maßnahmen befragt. In der anschließenden Analyse der Interviews wurden maßnahmenunspezifische Aspekte herausgearbeitet, die von den Studierenden in den Begründungen ihrer Einschätzung häufig benannt wurden.

4. Einblicke in die Akzeptanz der Studierenden

Erste deskriptive Auswertungen der *quantitativen* Daten geben zu erkennen, dass die Maßnahmen insgesamt eine hohe Akzeptanz seitens der Studierenden erfahren. Der Erkundung kommt in allen Bereichen die höchste Itemzustimmung zu. Die Gegenüberstellung von schriftlichen und videobasierten Vignetten zeigt, dass schriftliche Vignetten in der betrachteten Lernumgebung intensiver genutzt und positiver wahrgenommen werden sowie der Lernzuwachs im Bereich ‚Rechenschwierigkeiten' durch sie höher eingeschätzt wird.

Items	*Erkundung*	*Schriftliche Dokumente*	*Videos*
I1: Ich habe die Maßnahme intensiv genutzt.	3,45	3,21	2,79
I2: Die Maßnahme ist mir positiv in Erinnerung geblieben.	3,36	3,15	2,93
I3: Ich habe durch die Maßnahme Lernfortschritte im Bereich ‚Rechenschwierigkeiten' gemacht.	3,17	3,04	2,77

Tabelle 1: Arithmetische Mittel der Itemzustimmung (Likert-Skala 1-4)

Erste *qualitative* Analysen der Interviewtranskripte stützen die Ergebnisse der quantitativen Auswertung und weisen auf allgemeine maßnahmenunspezifische Aspekte hin, die die Akzeptanz der Studierenden beeinflussen. Ein exemplarischer Aspekt, der von den Studierenden in den Interviews besonders häufig hervorgehoben wird, ist *Praxisnähe*. Während die Erkundung eine konkrete Praxiserfahrung darstellt, benennen die Studierenden *Praxisnähe* häufig auch als besondere Stärke der Nutzung von schriftlichen Schülerdokumenten. Anhand der folgenden Aussage einer Studierenden wird deutlich, inwiefern hier ein Bezug zur späteren Unterrichtspraxis hergestellt wird. „Ich möchte Lehrerin werden, ich muss und sollte mich damit [schriftlichen Schülerdokumenten] auseinandersetzen wollen." Ein weiterer Aspekt, der wesentlich Einfluss auf die Akzeptanz der Studierenden nimmt, ist die *Authentizität* des Lerngegenstandes. Bezüglich der Erkundung äußert eine Studierende: „Es war gut, dass uns nicht Schülerdokumente vorgesetzt wurden, sondern dass wir das selber herausgefunden haben. [...] Es entstehen nicht so Musterbeispiele wie in der Vorlesung." Schülerprodukte, die die Studierenden im Rahmen der Erkundung selbst generiert haben, wirken auf sie insbesondere glaubwürdig und realitätsnah. Bezogen auf den Einsatz von videobasierten Vignetten wird der Aspekt *Authentizität* zudem auch kritisch angeführt. Insbesondere Vignetten, die Lehrer-Schüler-Interaktionsphasen abbilden, werden von den Studierenden mehrfach als „gestellt", „zu ideal" und damit „zu weit von den eigenen Erfahrungen entfernt" beschrieben.

5. Fazit und Ausblick

Die *quantitativen* und *qualitativen* Ergebnisse zeigen, dass die Maßnahmen der Lernumgebung, die zur Entwicklung der Diagnose- und Förderfähigkeiten von Studierenden beitragen sollen, insgesamt positiv angenommen werden. Besonders intensiv genutzt, positiv wahrgenommen und relevant für den eigenen Lernzuwachs eingeschätzt werden im Rahmen der untersuchten

Lernumgebung die Durchführung einer Erkundung und die intensive Auseinandersetzung mit schriftlichen Schülerdokumenten. Praxisnähe, Authentizität, Eigenaktivität, inhaltliche Relevanz und motivationale Aspekte stärken die Akzeptanz der Studierenden bezüglich einer Maßnahme, während eingeschränkte Authentizität sowie organisatorische Aspekte nach ersten Analyse akzeptanzhemmend wirken.

Die Ergebnisse verdeutlichen, dass es auch im Rahmen einer Großveranstaltung und nicht ausschließlich in Seminaren mit kleiner Teilnehmerzahl möglich ist, praxisnahe und eigenaktive Maßnahmen zur Entwicklung von Diagnose- und Förderfähigkeiten studierendenorientiert umzusetzen. Inwiefern die betrachtete Lernumgebung auch zu einer Entwicklung der Fähigkeiten von Studierenden im Bereich Diagnose und Förderung beitragen kann, soll im weiteren Projektverlauf untersucht werden.

Literatur

Empson, S. B. & Jacobs, V. R. (2008). Learning to listen to children's mathematics. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.): *International handbook of mathematics teacher education: Vol. 2: Tools and processes in mathematics teacher education*, 257–281.

Dorlöchter, H., Krüger, U., Wiebusch, D. (Hrsg.) (2013). Videografie in der Lehrerbildung, *Seminar* Heft 2.

Hascher, T. (2008). Diagnostische Kompetenzen im Lehrberuf. In C. Kraler & M. Schratz (Hrsg.): *Wissen erwerben, Kompetenzen entwickeln. Modelle zur kompetenzorientierten Lehrerbildung*, 71-86.

Hußmann, S. & Selter, Ch. (Hrsg.) (2013). Diagnose und individuelle Förderung in der Lehrerbildung. Das Projekt dortMINT. Müster: Waxmann.

Lipowsky, F. (2010). Lernen im Beruf – Empirische Befunde zur Wirksamkeit von Lehrerfortbildung. In F. H. Müller, A. Eichenberger, M. Lüders & J. Mayr (Hrsg.): *Lehrerinnen und Lehrer lernen. Konzepte und Befunde zur Lehrerfortbildung*, 51-70.

Lorenz, Ch. & Artelt, C. (2009). Fachspezifität und Stabilität diagnostischer Kompetenz von Grundschullehrkräften in den Fächern Deutsch und Mathematik. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, 23 (3/4), 211-222.

Südkamp, A., & Möller, J. (2009). Referenzgruppeneffekte im Simulierten Klassenraum: direkte und indirekte Einschätzungen von Schülerleistungen. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, 23, 161-174.

Katinka BRÄUNLING, Lars HOLZÄPFEL, Wolfgang ROLLET, Freiburg

Präsenzveranstaltung, Unterrichtsmaterial oder Coaching – verschiedene Konzepte der Lehrerfortbildung im Vergleich

In der hier vorgestellten Untersuchung wird die Frage nach dem Einfluss verschiedener Fortbildungsformate auf das fachdidaktische Wissen und Können von Lehrkräften fokussiert.

Während die Bedeutung des Wissens und Könnens für die Qualität des unterrichtlichen Handelns unumstritten scheint (Shulman 1986; Baumert und Kunter 2006), ist wenig geklärt, durch welche Fortbildungsansätze Lehrkräfte fachdidaktische Expertise aufbauen, weiterentwickeln und im Unterricht anwenden (vgl. Desimone et al. 2002).

Verschiedene Professionalisierungsmöglichkeiten von Lehrkräften

Aufgrund eines Mangels an experimentell abgesicherten Ergebnissen darüber, welche Bedeutungen externe Präsenzveranstaltungen, Begleitmaterialien und Unterrichtscoaching für die erfolgreiche Umsetzung von Professionalisierungsmaßnahmen in der Unterrichtspraxis spielen (Lipowsky 2011), möchte die Studie diese drei verschiedenen Ansätze untersuchen und in ihren Wirkzusammenhängen analysieren. Während die Präsenzveranstaltung den Vorteil bietet, dass Einfluss auf die Lehrerkognitionen genommen und fundiertes fachdidaktisches Wissen aufgebaut werden kann (Lipowsky 2010), ist es für Lehrkräfte auf der anderen Seite von großer Bedeutung, konkrete Materialien für den direkten Einsatz im Unterricht zu erhalten. Dadurch wird die eigene Auswahl und Erstellung erleichtert, es besteht jedoch die Gefahr, dass eine Selektion und damit eine Adaption an die eigenen unterrichtlichen Bedingungen erfolgt, die den adäquaten Einsatz dieser Materialien verhindert (Ball und Cohen 1996). An dieser Stelle können Coachingmaßnahmen positive Effekte auf das tatsächliche Lehrerhandeln ausüben (Lipowsky 2011).

Wirkungsebenen

In seinem theoretischen Ebenenmodell unterscheidet Lipowsky (2010) vier verschiedene Ebenen, auf denen sich die Wirksamkeit von Professionalisierungsmaßnahmen verorten lassen:

- Ebene 1: Reaktion und Einschätzung der teilnehmenden Lehrpersonen
- Ebene 2: Erweiterung der Lehrerkognition
- Ebene 3: Unterrichtspraktisches Handeln
- Ebene 4: Effekte auf Schüler/innen

Die hier vorgestellte Untersuchung möchte empirisch die Wirkungen auf den Ebenen 2 und 3 erforschen, indem erfasst werden soll, wie das fachdidaktische und fachliche Wissen der Lehrkräfte bezüglich eines Fortbildungsinhalts beeinflusst, erweitert und verändert werden kann (Ebene 2) und welche Auswirkungen ein solcher Fortbildungsinhalt auf die Planung, Durchführung und Reflexion von Unterricht hat (Ebene 3).

Einflussfaktoren

Der Wirkungsprozess von Professionalisierungsmaßnahmen wird sowohl durch fortbildungsbezogene Faktoren, als auch durch kontext- und personengebundene Faktoren beeinflusst (Reinold 2015). Fortbildungsabhängige Merkmale sind der zeitliche Umfang einer Fortbildung, das aktive Lernen/ die Reflexion der Teilnehmenden, die Offenheit/ Selbstbestimmung bezüglich der Fortbildungsgestaltung, die Ermöglichung von Praxisphasen, der fachliche/ fachdidaktische Input und das Anregen von Kooperationen (vgl. z.B. Lipowsky 2011). Diesen Faktoren wird in der vorliegenden Studie Rechnung getragen.

Untersuchungsdesign

In einem Pre-Posttest-Design wurden vier verschiedene Experimentalgruppen (EG) gebildet, die in einer Pilotierungsphase folgendermaßen angelegt waren:

<table>
<tr><th colspan="2">Termin 1</th><th>Distanzphase (6 Wochen)</th><th colspan="2">Termin 2</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Pretest</td><td>EG 1
Materialpaket &
Präsenzveranstaltung</td><td>Unterrichtscoaching</td><td rowspan="4">gemeinsame Reflexion</td><td rowspan="4">Posttest</td></tr>
<tr><td>EG 2
Materialpaket &
Präsenzveranstaltung</td><td></td></tr>
<tr><td>EG 3
Materialpaket</td><td>Unterrichtscoaching</td></tr>
<tr><td>EG 4
Materialpaket</td><td></td></tr>
</table>

Für die Pilotierung, die im Frühsommer 2015 stattfand, konnten 12 Lehrkräfte einer Grundschule gewonnen werden. Diese Lehrkräfte wurden randomisiert den vier Gruppen zugeordnet und erhielten den Auftrag, in der Distanzphase den Fortbildungsinhalt zwei bis dreimal umzusetzen und diese Umsetzung in einem vorgefertigten Protokollbogen zu dokumentieren und zu reflektieren.

Pre- und Posttest waren gleich gestaltet und enthielten sowohl geschlossene Items zu den Aspekten Lehr/Lernorientierung, Fortbildungsverhalten und

Vorerfahrungen zum Fortbildungsinhalt, als auch offene Items zum fachdidaktischen und fachlichen Inhalt der Fortbildung, als auch zur unterrichtspraktischen Umsetzung dieses Inhalts.

Fortbildungsinhalt und erste Ergebnisse der Pilotierung

Die durchgeführte Fortbildung stand unter dem Titel „Heterogenes Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule mit offenen Lernumgebungen". Das Kennenlernen und Durchdringen offener Lernumgebungen (vgl. Schütte 2008; Rathgeb-Schnierer 2010) und der adäquate Einsatz dieser Lernumgebungen im Unterricht stellten die zentralen Fortbildungsinhalte in allen vier Experimentalgruppen dar.

Im Folgenden werden erste Ergebnisse der Pilotierung vorgestellt. Dazu wird aus einer Experimentalgruppe (EG 1) eine Lehrkraft exemplarisch herausgegriffen und ihre schriftlichen Antworten aus Pre- und Posttest zu einem offenen Item einander gegenübergestellt:

*Erklären Sie bitte, warum es sich bei der Aufgabe **Zahlenmauern erfinden** um ein offenes Lernangebot handelt.*

Pretest	Posttest
entdeckendes Lernen **mehrere Rechenwege** sind möglich **Differenzierung** keine Zielformulierung (schränkt das mathematische Denken des Kindes nicht ein) fördert in hohem Maß **Eigenaktivität** und **schlussfolgerndes Denken** Anwendung einer Regel auf Folgeaktivitäten	differenzierte Aufgabenstellung (**verschiedene Niveaus** zu einem Lerngebiet) **Gespräch über das Angebot und die Lösungswege** Darbietung: **1.Phase** (Austausch): Einzelarbeit/ Partnerarbeit 2.Phase: Aufgabenstellung bearbeiten 3.Phase: **Austausch über die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten** 4.Phase: Tausch der Gruppen (Zusammensetzung mischen) 5.Phase: **Austausch** (gemeinsam)

Wertet man diese Äußerungen mit Hilfe der qualitativen Inhaltsanalyse aus (Mayring 2010), fällt auf, dass die Lehrkraft im Pretest eher allgemeine pädagogische Konzepte benennt, die sie hintereinander auflistet. Im Posttest erfolgen mehr fachdidaktische Konzepte, die den Ablauf eines offenen Lernangebots beschreiben und die Benennung der verschiedenen Unterrichtsphasen und das gemeinsame Kommunizieren hervorheben.

Betrachtet man die untersuchten Lehrkräfte in ihrer Gesamtheit lässt sich sagen, dass die Betonung des Kommunizierens bei allen zwölf Personen an

Bedeutung gewinnt und somit ein Kernelement der unterschiedlichen Professionalisierungsmaßnahmen zu sein scheint, das unabhängig von der jeweiligen Experimentalgruppe verstärkt wird.

Ausblick

Im Zuge der Hauptstudie wird die Untersuchung sowohl bezüglich der Testinstrumente als auch in Hinblick auf die Einteilung der Experimentalgruppen evaluiert und optimiert. Mit ersten Ergebnissen ist im Sommer 2016 zu rechnen.

Literatur

Ball, D. L.; Cohen, D. (1996): Reform by the book: What is – or might be – the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform? In: *Educational Researcher* 25 (9), S. 6-8, 14.

Baumert, J.; Kunter, M. (2006): Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. In: *ZfE* 9 (4), S. 469–520. DOI: 10.1007/s11618-006-0165-2.

Desimone, L.; Porter, A.; Garet, M.; Yoon, K.; Birman, B. (2002): Effects of Professional Development on Teachers` Instruction: Results from a Three-year Longitudinal Study. In: *Educational Evaluation and Policy Analysis* 24 (2), S. 81–112.

Lipowsky, F. (2010): Lernen im Beruf. Empirische Befunde zur Wirksamkeit von Lehrerfortbildung. In: Florian H. Müller (Hg.): Lehrerinnen und Lehrer lernen. Konzepte und Befunde zur Lehrerfortbildung. Münster [u.a.]: Waxmann, S. 51–70.

Lipowsky, F. (2011): Theoretische Perspektiven und empirische Befunde zur Wirksamkeit von Lehrerfort- und weiterbildung. In: Ewald Terhart (Hg.): Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf. Münster, München, Berlin [u.a.]: Waxmann, S. 398–417.

Mayring, P. (2010): Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken. 11. Aufl. Weinheim: Beltz (Beltz Pädagogik).

Rathgeb-Schnierer, E. (2010): Mathematiklernen in der jahrgangsübergreifenden Eingangsstufe. Gemeinsam, aber nicht im Gleichschritt. München: Oldenbourg (Oldenbourg Fortbildung).

Reinold, M. (2015): Lehrerfortbildungen zur Förderung prozessbezogener Kompetenzen. Eine Analyse der Effekte auf den Wirkungsebenen Akzeptanz und Überzeugungen. Wiesbaden, Germany: Springer Spektrum (Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts, Band 24).

Schütte, S. (2008): Qualität im Mathematikunterricht der Grundschule sichern. Für eine zeitgemäße Unterrichts- und Aufgabenkultur. 1. Aufl. München: Oldenbourg (Oldenbourg Fortbildung!).

Shulman, L. S. (1986): Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. In: *Educational Researcher* 15 (2), S. 4–14.

Nils, BUCHHOLTZ, Hamburg

Welchen Beitrag können Mixed Methods Studien zur mathematikdidaktischen Forschung leisten?

In den letzten Jahren finden sich vermehrt Studien, die bewusst qualitative und quantitative Forschungsmethoden miteinander verschränken und sich damit methodologisch im Bereich von „Mixed Methods" verorten (vgl. Kelle & Buchholtz, 2015). Die Nutzung unterschiedlicher methodischer Zugänge zur Forschungsproblematik innerhalb der gleichen Studie ist auch der mathematikdidaktischen Forschung nicht fremd, wie bereits eine Meta-Analyse von 710 englischsprachigen mathematikdidaktischen Journal-Artikeln der Jahre 1995 bis 2005 zeigt: so werden in etwa 29% der berücksichtigten Artikel Studien beschrieben, bei denen sowohl qualitative als auch quantitative Methoden zum Einsatz kommen (Hart et al., 2009). Oftmals unterbleibt bei diesen Studien aber die im Sinne der Mixed Methods Methodologie erforderliche Integration der durch die unterschiedlichen Methoden gewonnenen Ergebnisse und die Darstellung der Ergebnisse verläuft rein parallel bzw. hintereinander ausgeführt, ohne dass gegenseitige Bezüge zwischen den Ergebnissen hergestellt werden (Bryman, 2008).

Aktuell finden sich im deutschsprachigen Raum erst wenige mathematikdidaktische Studien, die eine bewusste Methodenkombination in dieser Hinsicht vornehmen (z.B. Schulz, 2010; Kaiser & Buchholtz, 2014). Jedoch stellt sich nicht zuletzt seit dem Hauptvortrag von Phillip Mayring auf der Jahrestagung der GDM 2010 in München auch für die deutschsprachige Mathematikdidaktik die Frage, welchen Beitrag Mixed Methods Studien speziell für die mathematikdidaktische Forschung leisten können bzw. in welcher Weise sich diese Forschungsmethodologie adäquat zum Gegenstandsbereich der mathematikdidaktischen Forschung verhält.

1. Mixed Methods – eine Methodologie für die Mathematikdidaktik?

Die bislang geringe Verbreitung könnte pragmatische Ursachen haben: das Feld der Mixed Methods Methodologie birgt nämlich für den praktischen Einsatz in konkreten Forschungsvorhaben große Herausforderungen. So werden z.B. verschiedenste Forschungsdesigns in einer großen terminologischen Breite unterschieden und je nach Forschungsgegenstand stellt sich stets aufs Neue die Frage, welchen substanziellen Mehrwert eine Kombination bzw. Integration unterschiedlicher Forschungsmethoden gegenüber monomethodischen Untersuchungen aufweist. Dabei können Gründe für eine methodische Perspektivenerweiterung nicht nur in der Stärkung der Validität von Ergebnissen gesehen werden, sondern beispielsweise gerade auch in der Komplementarität von Ergebnissen liegen – etwa, wenn durch die Erklärung von statistischen Kennwerten ein kaleidokopartiges Gesamtbild und ein besseres Verständnis von wissenschaftlichen Befunden ermöglicht wird. Weitere Gründe für den Einsatz und die Kombination von unterschiedlichen Forschungsmethoden können z.B. auch in der Weiterentwicklung von Forschungsinstrumenten oder in der Expansion von bestehenden Forschungsergebnissen gesehen werden (Greene et al. 1989). Damit der Einsatz und die Kombination unterschiedlicher Forschungsmethoden allerdings zweckgerichtet erfolgen können, gilt es, dem Forschungsgegenstand und der Fragestellung ein Primat gegenüber der Wahl der Forschungsmethode(n) zuzubilligen (vgl. Mayring, 2001).

Der theoretische Gegenstandsbereich der mathematikdidaktischen Forschung und damit auch die Frage nach genuinen mathematikdidaktischen Forschungsmethoden stehen seit den 1970er Jahren immer wieder zur Diskussion. Vielen Auffassungen gemeinsam ist eine interdisziplinäre Auffassung der Mathematikdidaktik als Wissenschaft, die sich durch einen hohen Komplexitätsgrad durch viele unterschiedliche Akteure (z.B. Schülerinnen und Schüler, Lehrkräfte, Ausbilderinnen und Ausbilder, Bildungsadministration) und Arten der Auseinandersetzung mit Mathematik (z.B. Inhalte, Prozesse, Denkstile, Überzeugungen) auf unterschiedlichsten Ebenen innerhalb eines fundamentalen Gefüges aus Theorie und Praxis auszeichnet. Die Mixed Methods Methodologie, die den multiperspektivischen Einsatz von unterschiedlichen Forschungsmethoden innerhalb von Forschungsdesigns beschreibt, bietet sich daher als Möglichkeit an, dieser Komplexität gerecht zu werden, da sich u.a. Forschungsmethoden verschiedener wissenschaftlicher Disziplinen miteinander verknüpfen lassen. Wie der Einsatz der Forschungsmethoden und vor allem die für Mixed Methods maßgebliche Integration der ermittelten Ergebnisse dabei allerdings im Einzelfall aussehen, geschieht in Abhängigkeit von der jeweiligen Fragestellung.

2. Eine exemplarische Studie zu Einstellungen

Als Beispiel für eine Integration von Ergebnissen, die durch unterschiedliche Forschungsmethoden ermittelt wurden, werden im Folgenden exemplarisch Ergebnisse einer mathematikdidaktischen Studie zu Überzeugungen von Lehramtsstudierenden zum Lehren und Lernen von Mathematik beschrieben (siehe Buchholtz et al., 2013). Die Studie verfolgt die Fragestellung, welchen Entwicklungsverlauf die Veränderung der Überzeugungen der Lehramtsstudierenden über die ersten vier Semester des Studiums nimmt, und wie individuell ausgeprägt die Veränderungen sind. Dazu wurden zu drei Messzeitpunkten die Überzeugungen von 235 Lehramtsstudierenden zum Lehren und Lernen von Mathematik mit Hilfe von Skalen-basierten Fragebögen erhoben und quantitativ längsschnittlich mit Hilfe von latenten Wachstumskurvenmodellen ausgewertet. Zusätzlich wird der Frage nachgegangen, welche Erfahrungen die Studierenden mit instruktionell und konstruktivistisch geprägten Lehr- und Lernmethoden in den ersten vier Semestern gemacht haben, und, ob sich diese Erfahrungen auf ihre Überzeugungen zum Lehren und Lernen von Mathematik auswirken. Hierfür wurden mit 19 der Studierenden Interviews geführt, die mit Hilfe der qualitativen Inhaltsanalyse ausgewertet wurden.

Die quantitativen Befunde bezeugen im Bereich der Überzeugungen zum Lehren und Lernen von Mathematik ein niedriges Eingangsniveau für Überzeugungen zur Transmissionsorientierung, das in den folgenden Semestern weiter abnimmt. Im Bereich der konstruktivistischen Orientierung der Überzeugungen weisen die Studierenden hingegen bereits zu Beginn ihres Studiums eine deutlich hohe Zustimmung auf, die sich im Verlauf der ersten vier Semester sogar noch weiter steigert. Die qualitativen Befunde bezeugen ebenfalls die hohe Zustimmung der Studierenden zu konstruktivistisch orientierten Lehr- und Lernmethoden und die gleichzeitige Ablehnung instruktionell orientierter Lehre, wie sie den Studierenden in den Eingangsveranstaltungen des Mathematiklehramtsstudiums begegnet.

Hinsichtlich einer Integration der Ergebnisse im Sinne der Mixed Methods Methodologie lässt sich an individuellen Entwicklungsverläufen nachzeichnen, wie und unter welchen Umständen sich die Überzeugungen über den zeitlichen Rahmen von vier Semestern entwickelt haben. Hierzu können die Daten der 19 Studierenden, die an den Interviews teilgenommen haben, mit den Rohdaten der Transmissions- und konstruktivistischen Skala zu den drei Messzeitpunkten abgeglichen werden. So finden sich beispielsweise in Interview B5 (weiblich, 23 Jahre) Beschreibungen einer zeitlichen Entwicklung der Überzeugungen:

> „*Ja, also im ersten Semester war es sehr gut. Da war aber auch der Unterschied, da hat eine fertige Lehramtsstudentin bei uns die Übung gemacht, und das war was ganz anderes. Da haben wir Gruppenarbeit gemacht. Da haben wir kooperative Lernformen einfach in die Übung integriert, und dadurch wurden wir auch gezwungen, (.) also nicht nur mit der Übungsgruppe zusammen zu arbeiten, sondern mit allen. da hat man viel mehr diskutiert, gemacht, und da war kaum frontal was. Das war in den ersten beiden Semestern, im dritten dann in der Algebra wurde es schon schlechter. Und dann war es vorbei, (.) also da gab es nur noch diese Standardübung. Einer steht vorne, schreibt die Übung an, oder einfach jemand von den Studenten, der halt volle Punktzahl hatte, schreibt es an. Aber man hat auch nur noch einen Lösungsweg präsentiert bekommen, vielleicht mal noch einen zweiten und dann hatte man seine Übungszettel und wenn man dann nicht aktiv nachgefragt hat (...), dann hat man halt Pech gehabt. Und das war halt in den ersten Semestern ganz anders und das war auch sehr, sehr gut.*“

Die Schilderungen der Studentin deuten auf eine starke Abnahme der Überzeugungen zur Transmissionsorientierung hin und tatsächlich spiegelt sich diese Abnahme auch in den quantitativen Daten. Bemerkenswert ist das vergleichsweise hohe Eingangsniveau dieser Überzeugungen bei der Studentin. Erstaunlicherweise stagnieren aber auch ihre Überzeugungen zur konstruktivistischen Orientierung leicht.

Literatur

Bryman, A. (2008). Why do Researchers Integrate/Combine/Mesh/Blend/Mix/Merge/Fuse Quantitative and Qualitative Research? In M. Bergman (Hg.), *Advances in Mixed Methods Research. Theories and Applications* (S. 87-100). Los Angeles: Sage.

Buchholtz, N., Kaiser, G. & Blömeke, S. (2013). Die Entwicklung von Beliefs von Lehramtsstudierenden in der Studieneingangsphase – Ergebnisse aus TEDS-Telekom. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 220-223). Münster: WTM-Verlag.

Greene, J. C., Caracelli, V. J., & Graham, W. F. (1989). Toward a conceptual framework for mixed-method evaluation designs. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 11, 255-274.

Hart, L.C., Smith, S.Z., Swars, S.L. & Smith, M.E. (2009). An Examination of Research Methods in Mathematics Education (1995-2005*). Journal of Mixed Methods Research, 3*(1). 26-41.

Kaiser, G. & Buchholtz, N. (2014). Overcoming the Gap Between University and School Mathematics. The Impact of an Innovative Programme in Mathematics Teacher Education at the Justus-Liebig-University in Giessen. In S. Rezat, M. Hattermann & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Transformation – A Fundamental Idea of Mathematics Education* (S. 85-105). Heidelberg: Springer.

Kelle, U. & Buchholtz, N. (2015). Mixed methods in the research of mathematics education. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Hrsg.), *Doing (qualitative) research: Methodology and methods in mathematics education* (S. 321-361). Dordrecht: Springer.

Mayring, P. (2001). Kombination und Integration qualitativer und quantitativer Analyse [31 Absätze]. *Forum Qualitative Sozialforschung*, 2(1), Art. 6, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0114-fqs010162.

Schulz, A. (2010). *Ergebnisorientierung als Chance für den Mathematikunterricht? Innovationsprozesse qualitativ und quantitativ erfassen*. München: Herbert Utz Verlag.

Andreas BÜCHTER, Essen

Zur Problematik des Übergangs von der Schule in die Hochschule – Diskussion aktueller Herausforderungen und Lösungsansätze für mathematikhaltige Studiengänge

Klagen über Einstellungen und Haltungen sowie über das Qualifikationsprofil bzw. die Qualifikation der jeweils nachwachsenden Generation lassen sich bekanntlich lange zurückverfolgen. Gilfert (2014) hat über die Antike hinaus bis zu den Sumerern (ca. 3000 v. Chr.) zahlreiche einschlägige Zitate aus allen geschichtlichen Epochen zusammengestellt. Bemerkenswert ist dabei, dass die Generation, die die jeweils nachwachsende Generation derart einschätzt oder kritisiert, eine Generation zuvor von der nächstälteren Generation in der Regel vergleichbar eingeschätzt oder kritisiert wurde.

Auch dem folgenden Auszug aus einer Resolution des Deutschen Hochschulverbandes sieht man nicht direkt an, dass er bereits 23 Jahre alt ist:

„*Die Aufnahme eines wissenschaftlichen Studiums erfordert eine allgemeine Studierfähigkeit. Misserfolgsquoten von 50 % bei den Leistungsnachweisen der ersten Semester, ein immer breiteres Angebot von ‚Brückenkursen‘, zunehmende Studienabbrecherquoten und die hohe Zahl von Studienfachwechslern sind Indizien einer fehlenden Studierfähigkeit. […] Die im Deutschen Hochschulverband vereinigten 15.000 Hochschullehrer sehen sich in ihrer generellen Sorge bestätigt, dass das Abitur immer häufiger die allgemeine Studierfähigkeit zwar bescheinigt, aber nicht tatsächlich gewährleistet.*“ (Deutscher Hochschulverband, 1993)

In der aktuellen bildungspolitischen Diskussion um „Studierfähigkeit“ werden unter anderem von Hochschulvertreterinnen und -vertretern für solche Problemwahrnehmungen häufig die jüngeren Reformen in den Schulsystemen der deutschen Bundesländer wie Bildungsstandards, Lehrplanänderungen, Kompetenzorientierung, Vergleichsarbeiten, zentrale Prüfungen, leistungsfähigere Taschenrechner, frühere Einschulung, Verkürzung der Schulzeit usw. verantwortlich gemacht.

Der Deutsche Hochschulverband hatte vor 23 Jahren die Einführung eines Zentralabiturs allerdings als Maßnahme zur Qualitätssicherung gefordert:

„*Der Deutsche Hochschulverband fordert die Kultusministerkonferenz auf, folgende* ***Maßnahmen zur bundesweiten Wiedergewinnung der Studierfähigkeit*** *zu ergreifen: […] Einheitliche Leistungsstandards innerhalb eines Landes können unter den gegebenen Verhältnissen nur durch die* ***Einführung eines landesweiten Zentralabiturs*** *gewährleistet werden.*“ (Deutscher Hochschulverband, 1993; Herv. d. d. Verf.)

Dieses Beispiel verdeutlicht, dass Reformen im Bildungssystem nicht zwangsläufig die intendierten Wirkungen haben und Bildungspolitik zumindest teilweise einem Lernen durch Versuch und Irrtum ähnelt und vielleicht sogar ähneln muss.

Dennoch sollten Problemwahrnehmungen zum Qualifikationsprofil bzw. zur Qualifikation der nachwachsenden Generation nicht einfach als kulturpessimistisches Klagen beiseitegeschoben werden. Gerade in Zeiten intensiver Diskussionen (etwa dokumentiert durch 7 Beiträge in den Mitteilungen der GDM und 15 Beiträge in den Mitteilungen der DMV in den vergangenen zwei Jahren) ist aber eine sachliche und differenzierte Bestandsaufnahme erforderlich, wenn zum wahrgenommenen Problem angemessene Lösungsansätze entstehen sollen. Im Folgenden werden einige aktuelle fachspezifische Problemwahrnehmungen und konzeptionelle Überlegungen für Lösungsansätze skizziert.

1. Problemwahrnehmungen

Das Eingangsniveau der Mathematiklehrveranstaltungen der ersten Semester hat sich seit der Verabschiedung der oben auszugsweise wiedergegebenen Resolution des Deutschen Hochschulverbandes nicht wesentlich verändert. Zugleich haben Schulzeitverkürzungen und curriculare Veränderungen wesentlich Einfluss auf den Mathematikunterricht genommen. Hieraus resultiert auf stofflicher Seite eine größer werdende Lücke zwischen dem Abschlussprofil der Schule und dem Eingangsniveau der Hochschule, die häufig durch Vor- oder Brückenkurse geschlossen werden soll.

In einem solchen Vorkurs für ingenieurwissenschaftliche Studiengänge an der Universität Duisburg-Essen wurden 159 angehende Studierende, von denen 101 in der Schule einen Leistungskurs Mathematik belegt hatten, um ihre Selbsteinschätzung in zentralen Vorwissensbereichen gebeten. Die folgende Tabelle stellt ausgewählte Ergebnisse dar.

fachlicher Gegenstand	*nicht behandelt / beherrschte ich nicht gut*	*ich hatte Vorwissen, aber auch einige Lücken*	*beherrschte ich sicher*
Potenzfunktionen	23 %	49 %	28 %
Trig. Funktionen	53 %	39 %	8 %
Integrationsregeln	24 %	51 %	24 %
Vektorrechnung	22 %	45 %	33 %
Binomialverteilung	65 %	28 %	7%

Tab. 1: Ausgewählte Vorwissensbereiche (n = 159; Prozent von gültigen Angaben)

Da „nicht behandelt“ häufig bedeutet, dass die Befragten sich nicht daran erinnern können oder den entsprechenden fachlichen Gegenstand nicht beherrschen, wurden die entsprechenden Antwortkategorien zusammengefasst. Profundes Wissen und Können unter anderem zu den hier aufgeführten fachlichen Gegenständen sind zentral für die Studieneingangsphase der angestrebten ingenieurwissenschaftlichen Studiengänge. Während sich bei trigonometrischen Funktionen entsprechende curriculare Änderungen niederschlagen, stellt sich daher bei den anderen Themen die Frage, warum die spezifische fachliche Selbsteinschätzung nicht positiver ausfällt.

Natürlich hängen solche Selbsteinschätzungen zum Zeitpunkt der Befragung (hier durchgeführt nach etwa zwei Dritteln des Vorkurses) nicht nur von den vorhandenen Kenntnissen und Fähigkeiten ab, sondern auch davon, wie gut sich die Befragten auf die antizipierten Herausforderungen im Studium vorbereitet sehen. Bereits in den Vorkursen haben sie erfahren, dass Mathematik in der Hochschule häufig anders in Erscheinung tritt als in der Schule. So ist die Darstellung von Mathematik in der Regel formaler und kürzer und die erforderlichen Denk- und Arbeitsweisen enthalten mehr strukturelle Komponenten. Die Komplexität der selbstständig zu bearbeitenden Übungsaufgaben liegt zumeist erheblich über der Komplexität z. B. von Hausaufgaben in der Schule. Ableitinger (2012) hat dies aus der Perspektive der Lösungsprozesse für typische Übungsaufgaben in der Studieneingangsphase herausgearbeitet. Zugleich scheint schulischer Erfolg auch bei einer eher rezeptiven Lernhaltung und gering ausgeprägter Selbstregulation möglich zu sein, während beides im Studium zwangsläufig zu Schwierigkeiten führt.

Zu diesem nicht ganz neuen Unterschied zwischen Mathematik in der Schule und in der Hochschule kommt hinzu, dass viele fachliche Gegenstände in der Schule weniger tief bearbeitet werden. So steht in aktuellen Schulbüchern zu den neuen Kernlehrplänen Mathematik in NRW zum Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung teilweise nur noch die Teilaussage zur Berechnung von bestimmten Integralen mithilfe von Stammfunktionen, ohne dass sie in einer schulmöglichen Allgemeinheit begründet wird. Die andere wesentliche Teilaussage, dass – anschaulich gesprochen – differenzieren integrieren rückgängig macht, war in der Ausgabe zum vorangehenden Lehrplan ebenso wie eine allgemeinere Begründung noch enthalten. Insgesamt können solche Veränderungen zu einer weiteren Schwerpunktverlagerung weg von der Betrachtung mathematischer Zusammenhänge hin zur Fokussierung von konkreten Aufgabentypen und Berechnungen führen.

Ausdünnungen der fachlichen Substanz sind dabei auch den veränderten Stundentafeln geschuldet. Während bei der Wahl eines Leistungskurses Mathematik in NRW vor 25 Jahren noch etwa 30 Schulhalbjahresstunden (SHS) Mathematik zur Verfügung standen, sind dies aktuell bei gleicher Berechnungsmethode noch 23,5 SHS. Berücksichtig man zusätzlich, dass Stochastik früher häufig gar nicht unterrichtet wurde und heute verbindlich ist, steht für den für einige Studiengänge als zentral erachteten Themenbereich Analysis nur noch etwa die Hälfte an Unterrichtszeit zur Verfügung (durchschnittlich etwa 9 SHS statt zuvor 18 SHS).

2. Konzeptionelle Überlegungen für Lösungsansätze

Sowohl Vor- und Brückenkurse als auch Unterstützungsmaßnahmen in der Studieneingangsphase sollten nicht nur versuchen, die „stoffliche Lücke“ zu schließen, sondern auch die Lernhaltung und Selbstregulation in den Blick nehmen, da diese für den Studienerfolg zentral sind. Dies bedeutet, dass Unterstützungsmaßnahmen nicht vorrangig aus weiteren Präsenzangeboten bestehen sollten; vielmehr muss vor allem die Eigentätigkeit angeregt werden.

Für Vor- und Brückenkurse, die wenige Tage oder Wochen dauern, müssen zudem nach zwölf oder mehr Jahren schulischen Mathematikunterrichts die Zielsetzungen bescheiden bleiben. Eine grundsätzliche verstehensorientierte Aufarbeitung der Schulmathematik ist kaum möglich. Mit Blick auf die andere Art der Darstellung und des Betreibens von Mathematik in der Hochschule scheinen algebraischen Denkhandlungen und Fertigkeiten eine Schlüsselrolle spielen zu können. Hier können auch in zeitlich stark begrenzten Vor- und Brückenkursen Effekte erzielt werden.

Für unterschiedliche mathematikhaltige Studiengänge dürften dabei unterschiedliche konzeptionelle Zuschnitte erforderlich sein. Fachmathematische Studiengänge stellen andere Anforderungen als Studiengänge in den Anwendungsdisziplinen und für Lehramtsstudiengänge sind auch Metawissen über Mathematik und eine entsprechende Reflexionskompetenz zentral.

Literatur und Internetquellen

Ableitinger, C. (2012). Typische Teilprozesse beim Lösen hochschulmathematischer Aufgaben: Kategorienbildung und Ankerbeispiele. Journal für Mathematik-Didaktik, 33 (1), 87-111.

Deutscher Hochschulverband (1993): Hochschulverband fordert wirksame Maßnahmen zur Wiedergewinnung der Studierfähigkeit. Resolution des 43. Hochschulverbandstags 1993 vom 25. - 27. März 1993. (Internetquelle: http://www.hochschulverband.de/cms1/550.html; letztes Aufrufdatum: 28.03.2016)

Gilfert, A. (2014): 5000 Jahre Kritik an Jugendlichen – Eine sichere Konstante in Gesellschaft und Arbeitswelt. (Internetquelle: http://www.bildungswissenschaftler.de/5000-jahre-kritik-an-jugendlichen-eine-sichere-konstante-in-der-gesellschaft-und-arbeitswelt/; letztes Aufrufdatum: 28.03.2016)

(Weitere Literaturhinweise können beim Autor angefordert werden.)

Gerda Elisabeth BUHL, Sankt Gallen

Projekt Förderzentrum Mathematik: Lehramtsstudierende fördern Kinder individuell

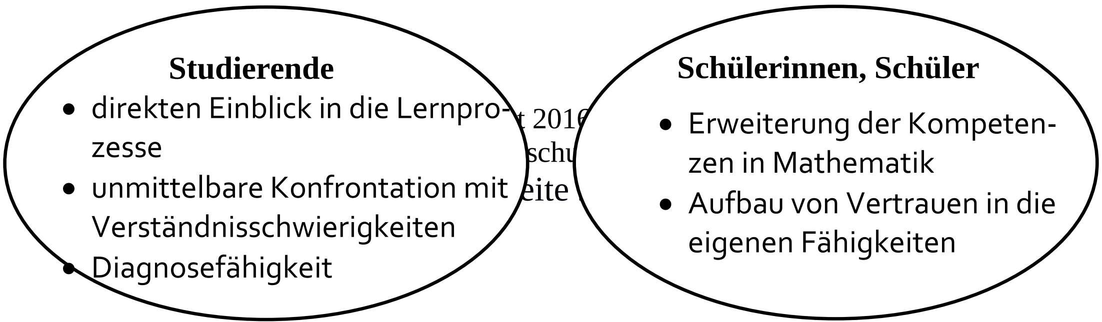
Im Förderzentrum der Pädagogischen Hochschule St. Gallen fördern Studierende des Bachelorstudienganges Kindergarten-Primarstufe Schülerinnen und Schüler der 1. und 2. Klasse, die Schwierigkeiten mit Mathematik haben. Die Fördereinheiten finden innerhalb eines Freifachs (Wahl-Pflicht-Fach) im Rahmen des regulären Studiums statt. Die Förderung geschieht jeweils individuell in einem Eins-zu-eins-Setting, d.h. eine Studierende bzw. ein Studierender fördert eine Schülerin bzw. einen Schüler. Der inhaltliche Schwerpunkt der Förderung liegt auf der Ablösung vom zählenden Rechnen (vgl. Häsel-Weide, Nührenbörger, Moser Opitz & Wittich, 2013; Rechtsteiner Merz, 2011).

Das Förderzentrum ist keine Mathematiknachhilfe und auch keine Hausaufgabenbetreuung. Das bedeutet, dass in den Förderlektionen weder der aktuelle Schulstoff aufgearbeitet wird, noch die Hausaufgaben mit Unterstützung der Studierenden erledigt werden. Im Förderzentrum werden keine standardisierten Leistungstests und schulpsychologische Abklärungen durchgeführt. Es geht vielmehr um eine förderorientierte Lernbegleitung.

Ziele der Förderung

Von der Förderung sollen Studierende wie Schülerinnen und Schüler gleichermaßen profitieren (vgl. Abb. 1). Die Schülerinnen und Schüler werden bei der Ablösung vom zählenden Rechnen unterstützt. Durch die Förderung soll auch ihr Vertrauen in die eigenen mathematischen Fähigkeiten gestärkt werden und die Freude am Fach Mathematik angeregt werden.

Die Studierenden lernen bei der Förderung individuelle Lernprozesse zu begleiten. Sie werden im Förderprozess direkt mit den Schwierigkeiten der Kinder konfrontiert und können bei der Förderung Lernschwierigkeiten unmittelbar wahrnehmen. Weiterhin lernen sie Fördermöglichkeiten kennen und können Darstellungsmittel adäquat einsetzen. Wesentliches Ziel ist zudem, dass die Studierenden lernen Impulse zu geben, statt Lösungen zu präsentieren.



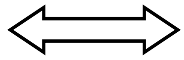


Abb. 1: Ziele für Studierende und Schülerinnen und Schüler

Ziele der Lehre und Interesse der Forschung

Hauptanliegen des Förderzentrums ist die Kompetenzentwicklung auf Seiten der Studierenden. Diese soll im Rahmen einer Begleitforschung erhoben und analysiert werden. Das Kompetenzmodell von Gasteiger und Benz (2016), das für frühpädagogische Fachkräfte entwickelt wurde, dient hierfür als Referenzrahmen. Dieses Kompetenzmodell ist aufgrund seiner Untergliederung in explizites Wissen, situative Beobachtung und Wahrnehmung sowie pädagogisch-didaktische Handlung für die genauere Analyse der individuellen Fördersituationen gut geeignet. Die situative Beobachtung und Wahrnehmung spielt im individuellen Förderprozess der Studierenden eine wesentliche Rolle. Hinsichtlich der pädagogisch-didaktischen Handlungen kommt das explizite Wissen in Form von fachdidaktischem Wissen über den Aufbau der Kompetenzen zur Zahlzerlegungen und über die Bedeutung der Aufgabenstellung für den Lehr-Lernprozess zum Ausdruck.

Das Pilotprojekt

Im Herbstsemester 2015 förderten 13 Studierende in einem Pilotprojekt 13 Zweitklässlerinnen und -klässler je eine Stunde pro Woche. Die Schülerinnen und Schüler wurden von den Lehrpersonen nach dem Kriterium „wendet mehrheitlich Zählen beim Lösen von Aufgaben des kleinen Einspluseins an“ ausgewählt.

Zur Unterstützung der Planung der Förderlektionen dienten den Studierenden die Aufgabenideen zur Zahlenblickschulung von Rechteiner-Merz (2011) und einzelne Förderbausteine zur Ablösung vom zählenden Rechnen von Häsel-Weide u.a. (2013). Zudem hatten die Studierenden in einer Förderbox Wendeplättchen, Würfel, Zwanzigerfeld, Zahlenkarten von 1 bis 20 in Reihendarstellung, Zahlenkarten von 1 bis 10 in Reihen- und Blockdarstellung sowie eine Auswahl an Termkarten des kleinen Einspluseins zur Verfügung. Nach Abschluss des Freifaches wurde eine Evaluation durch halbstandardisierte Gruppeninterviews durchgeführt, u.a. mit folgenden Interviewfragen:

- Gab es Momente, in denen Sie einmal nicht mehr weiter wussten?

- Welche Erkenntnisse haben Sie bei der Arbeit mit dem Kind gewonnen?
- Was haben Sie in der Förderung dazu gelernt für Ihre spätere Arbeit als Lehrperson?

Die Gruppendiskussionen wurden transkribiert und mit qualitativer Inhaltsanalyse nach Mayring (2010) ausgewertet.

Schwierigkeiten hatten die Studierenden mit dem unmittelbaren Handlungsdruck und der Notwendigkeit, Förderimpulse zu geben, was sich beispielweise in folgender Aussage zeigt:

„...man ist auf eine ganz andere Flexibilität angewiesen als sonst in den Praktika, wo man auf 20 Kinder reagieren muss, die man dann auch mal für 5 min im Notfall noch beschäftigen kann, aber da sitzt dann ein Kind vor einem, das nur darauf wartet, bis man ihm sagt, was es als nächstes tun muss, kann, darf, was auch immer.“

Die Erkenntnisse der Studierenden deuten vor allem auf eine Entwicklung der diagnostischen Fähigkeiten hin. Sie bemerkten, dass Kinder anders denken als sie selbst und dass es wichtig ist über dieses Denken der Kinder durch Nachfragen und Hinhören mehr zu erfahren. Dies zeigt sich beispielhaft in den folgenden Äußerungen der Studierenden:

“Ja eben, (...) und auch dass das Kind, manchmal halt nicht so denkt, wie ich denke und dann kann ich auch, muss ich halt manchmal wie fragen: ‚Wie hast du dir das jetzt vorgestellt?’“

„Ich habe so ein bisschen Einblick in einen Kopf - in den Kopf des Kindes - bekommen, da ich gut zusehen konnte, was sie genau macht und ich sie auch oft fragen konnte, was hast du jetzt hier überlegt und (dann) sieht man ein bisschen, was die Fehler sein können, die ein Kind macht oder wo es Schwierigkeiten hat.

„ ...und dass man dann daran denkt, nachzufragen, wie machst es denn du? Und dann wirklich gut hinhört...“

Ausblick

Die Ergebnisse der Pilotstudie geben erste Hinweise darauf, dass Studierende im Verlauf der Förderung Kompetenzen entwickeln. Die eins-zu-eins Situation der Lernbegleitung ermöglicht für die Studierenden eine Fokussierung auf den Lernprozess des Kindes und verlangt nach fachdidaktischen Kompetenzen und Handlungskompetenzen. Insbesondere Handeln in der Situation, diagnostische Fähigkeiten sowie der Einsatz von Aufgaben als Lernimpulsen wurden gefördert. In einer daran anschließenden Videostudie soll die fachdidaktische Qualität der Lernbegleitung genauer analysiert werden. Das Forschungsinteresse richtet sich dabei auf den Kompetenzerwerb der Studierenden im Verlauf der Förderung.

Literatur

Gasteiger, H., Benz , Ch. (2016). *Mathematikdidaktische Kompetenz von Fachkräften im Elementarbereich – ein theoriebasiertes Kompetenzmodell*. Journal für Mathematikdidaktik, 37 (1). doi 10.1007/s13138-015-0083-z

Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E. & Wittich, C. (2013). *Ablösung vom zählenden Rechnen. Fördereinheiten für heterogene Lerngruppen.* Seelze: Kallmeyer.

Mayring, Ph. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken* (11. Aufl.). Weinheim: Beltz.

Rechsteiner-Merz, Ch. (2011). Den Zahlenblick schulen. Flexibles Rechnen entwickeln. *Die Grundschulzeitschrift-Material*, Heft 248/.249,

Christian BÜSCHER, Dortmund

Entwicklung von informellen statistischen Maßen zwischen Werkzeugen und Objekten

Eine der wichtigsten Wirkungsweisen der Statistik ist die Möglichkeit, anhand von Daten mit einem bestimmten Maß von Sicherheit auf größere, unbekannte Prozesse *hinter* den Daten zu schließen – wie etwa der Schluss von reinen Temperaturdaten auf das komplexe Phänomen des Weltklimas. Dies geschieht für gewöhnlich durch die komplexen Methoden der inferentiellen Statistik. Der Begriff der *informellen statistischen Inferenz* rückt diese fundamentale Vorgehensweise der Statistik auch in den Rahmen der Möglichkeiten des Schulunterrichts: Informelle statistische Inferenzen (ISI) sind datengestützte Aussagen über ein größeres Phänomen unter Einbezug einer gewissen Unsicherheit in dieser Aussage (Makar & Rubin, 2009). Damit rückt die Aktivität des Ziehens von ISI in den Mittelpunkt des unterrichtlichen Geschehens.

Informelle statistische Maße

Neben statistischen Normen und Gewohnheiten ist das Wissen um statistische Konzepte und Maße eine wichtige Bedingung für das Ziehen von ISI (Makar, Bakker, & Ben-Zvi, 2011). Das Gründen der Inferenzen auf Maße stellt aus Lernendenperspektive dabei eine Herausforderung dar. Während statistische Maße hochspezialisierte Mittel darstellen, um über spezifische statistische Konzepte zu sprechen, nutzen Lernende intuitive Ansätze, in denen unterschiedliche statistische Konzepte in wenigen Begriffen integriert werden (Makar & Confrey, 2005). Der Median ist ein reguläres Maß für genau das Zentrum einer Verteilung; wenn aber Lernende über die Lage des *normalen Bereichs* sprechen, integrieren sie dabei intuitiv gleichzeitig Konzepte von Zentrum, Streuung und Schiefe (Büscher, 2015). Solche Merkmale von Daten, auf die Lernende sich beim Ziehen von ISI stützen, werden im Folgenden als *informelle* statistische Maße verstanden. Im Gegensatz zu *regulären* statistischen Maßen, welche sich eindeutig auf statistische Konzepte beziehen, beziehen sich diese auf Vorstellungen der Lernenden, die ihrerseits mit verschiedenen statistischen Konzepten korrespondieren (Abb. 1).

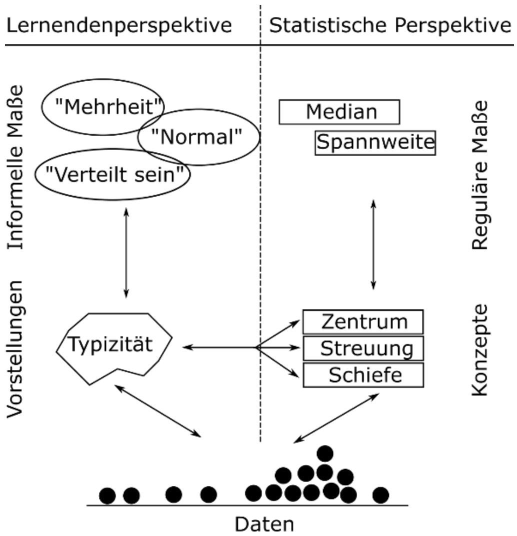


Abb. 1: Informelle Maße

Zwischen Werkzeugen und Objekten

Reguläre Maße können einerseits auf ihren Nutzen für statistische Fragestellungen hin untersucht werden.
Andererseits können sie das Objekt der Untersuchung selbst darstellen, indem ihr Verhalten für bestimmte Arten von Verteilungen untersucht wird, oder um sie in komplexere Prozeduren einzubetten. Diese unterschiedlichen Betrachtungsweisen

lassen sich durch die *tool-object dialectic* (Douady, 1985) beschreiben: Mathematische Konzepte erhalten ihre Bedeutung erst als Werkzeuge für bisher unlösbare Probleme, um später als Objekte in Relation zu anderen Konzepten konsolidiert zu werden. Diese Studie untersucht diesen Wechsel von Werkzeug zu Objekt auf Prozessebene, um die folgenden Forschungsfragen zu klären:

(F1) Wie entwickeln sich Maße zwischen Werkzeug und Objekt?

(F2) Wo sind Verbindungen zwischen informellen und regulären Maßen?

Design der Studie

Die vorliegende Fallstudie bildet einen Ausschnitt aus einem größeren Projekt im Rahmen der fachdidaktischen Entwicklungsforschung (Hußmann, Thiele, Hinz, Prediger, & Ralle, 2013), bei dem in iterativ verschränkten Forschungszyklen Lernprozesse zum Vorstellungsaufbau in der Statistik angeleitet und untersucht werden. Im hier vorgestellten dritten Zyklus wurden Designexperimente mit fünf Paaren von Schülerinnen und Schülern der 7. Klasse eines Gymnasiums in NRW mit jeweils zwei Sitzungen durchgeführt, bei denen die statistischen Inhalte Boxplots und Quartile noch nicht behandelt wurden.

In der Lernumgebung der zweiten Sitzung erhielten die Lernenden Punktdiagramme von der jeweils niedrigsten Eisfläche jedes Monats aus der Arktis in den Jahren 1982, 1992 und 2012. Ein zentrales Designelement bildeten dabei sog. Steckbriefe, die datengestützte Berichtsformen liefern. Die Lernenden werden dabei mit bereits ausgefüllten Steckbriefen konfrontiert, auf denen fiktive Schülerinnen und Schüler informelle Maße in Begründungen einfließen lassen, ob sich die Eisfläche verändert habe (Abb. 2).

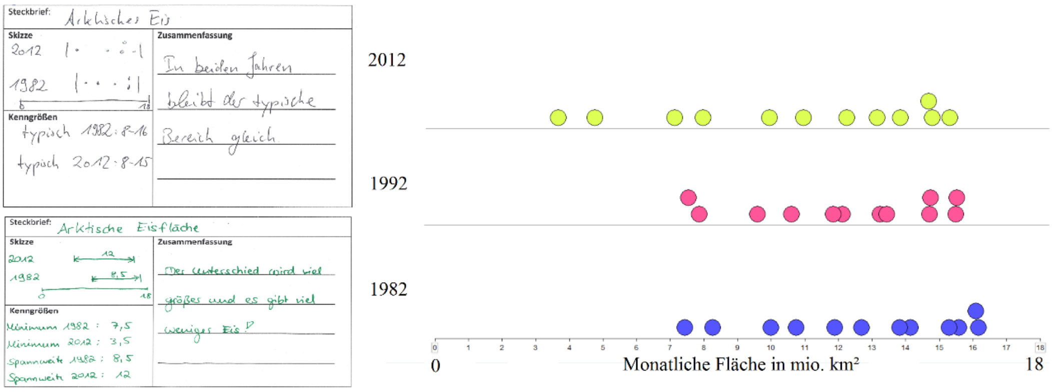


Abb. 2: Arktisches Eis und Steckbriefe

Die Designexperimente wurden vollständig videographiert und teilweise transkribiert, um mittels eines interpretativen Vorgehens die Rolle der informellen Maße in den Lernprozessen aufzudecken.

Einblick in die Empirie: Maria und Natalie entwickeln Typisch

Eines der informellen Maße auf den Steckbriefen ist das Maß *Typisch*. Dieses wurde allerdings zu keinem Zeitpunkt klar definiert, und in den Steckbriefen zeigen sich kontrastierende Interpretationen dieses Maßes. Darum ringen die zwei

Shcülerinenn Maria und Natalie (etwa 12-13 Jahre) über einen Zeitraum von etwa 15 Minuten.

Nachdem die Schülerinnen zunächst andere informelle Maße betrachtet haben, wenden sie sich nun dem Maß Typisch zu:

Maria: *Da steht Typisch ist 14, oder?*

Natalie: *Das kann doch gar nicht sein […] Typisch ist doch eigentlich so ne Spannweite.*

Zunächst klären die Schülerinnen hier die Form von Typisch: Eine Zahl oder eine „Spannweite“ (ihr Wort für Intervall). Typisch ist hier Objekt der Untersuchung, dessen Charakteristik der Form zur Diskussion steht.

Wenig später erläutert Natalie, auf welche Maße man achten sollte:

Natalie: *Durchschnitt ist schon wichtig. Bloß Spannweite, was so Typisch ist, sagt mehr über die einzelnen Tage aus. Weil, wenn der Durchschnitt 12 ist, kann's an einem Tag aber auch 18 Grad sein.*

In Abgrenzung zum Durchschnitt wird Typisch wird hier als Werkzeug für Aussagen über Streuung betrachtet: Typisch wird genutzt, wenn der Durchschnitt allein nicht ausreicht.

Einige Minuten später nimmt Natalie Stellung zu einem inkonsequenten Gebrauch von Typisch:

Natalie: *Ich weiß auch nicht, wie man Typisch ausrechnet. Ich glaube man geht vom Durchschnitt aus. Und dann nimmst du den Durchschnitt und die Kälteste, und machst davon nochmal den Durchschnitt. Und das selbe dann mit der Wärmsten. Und zwischen Durchschnitt und Durchschnitt ist dann Typisch.*

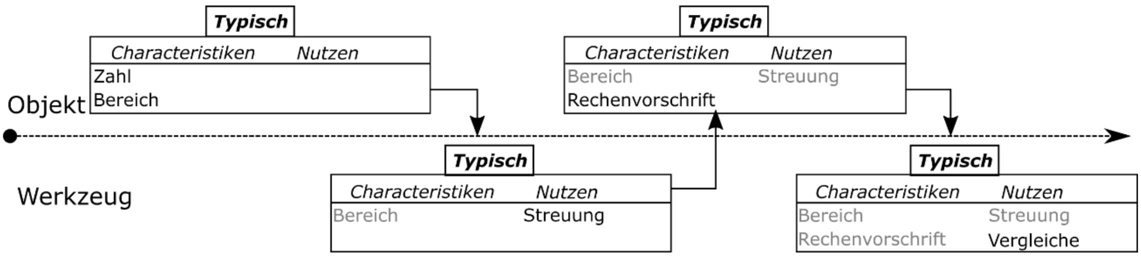


Abb. 3: Die Entwicklung von Typisch zwischen Objekt und Werkzeug

Indem Natalie eine Rechenvorschrift findet, erweitert sie die Charakterisierung von Typisch: Es ist nicht mehr nur ein Bereich in der Mitte der Verteilung, sondern hat feste Regeln zur Bestimmung. Typisch ist hier wieder das Objekt der Untersuchung.

Im Verlauf des Designexperiments wechseln die Schülerinnen die Rolle von Typisch mehrfach: Mal werden Charakteristiken des Maßes betrachtet, mal der Nutzen in bestimmten Fragestellungen. Dabei entwickeln sie ihr Verständnis von Typisch weiter, bis Typisch sogar zum Vergleich von Verteilungen genutzt wird (Abb. 3).

Zusammenfassung

Der Blick auf informelle Maße wie Typisch erlaubt es, Anknüpfungspunkte im Denken und Handeln der Lernenden zu sehen, um einen Vorstellungsaufbau für formalere Statistik zu betreiben. Die Entwicklung von Typisch geschieht in ständigem Wechsel der Betrachtung als Objekt und Werkzeug. Maria und Natalies Konzept von Typisch ähnelt am Ende sogar dem regulären Maß des Interquartilsabstands: Beide werden für Aussagen über Streuung genutzt, beide lassen sich durch Maße des Zentrums berechnen. Wie der Übergang von informellen zu regulären Maßen tatsächlich gelingen kann, und wie dies den Vorstellungsaufbau unterstützt, ist Gegenstand weiterer Forschung.

Literatur

Büscher, C. (2015). Was ist normal? – Individuelle Konzepte von Normalität als Fundament für den Vorstellungsaufbau in der Statistik. In F. Caluori, h. Linneweber-Lammerskitten, & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (S. 224–227). Münster: WTM-Verlag.

Douady, R. (1985). The interplay between different settings. Tool-object dialectic in the extension of mathematical ability. In *Proceedings of the ninth international conference for the psychology of mathematics education* (S. 33–52).

Hußmann, S., Thiele, J., Hinz, R., Prediger, S., & Ralle, B. (2013). Gegenstandsorientierte Unterrichtsdesigns entwickeln und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In M. Komorek & S. Prediger (Hrsg.), *Fachdidaktische Forschungen: Vol. 5. Der lange Weg zum Unterrichtsdesign: Zur Begründung und Umsetzung fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme* (S. 25–42). Münster: Waxmann.

Makar, K., Bakker, A., & Ben-Zvi, D. (2011). The Reasoning Behind Informal Statistical Inference. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(1-2), 152–173.

Makar, K., & Confrey, J. (2005). Variation talk: Articulating meaning in statistics. *Statistics Education Research Journal*, *4*(1), 27–54.

Makar, K., & Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, *8*(1), 82–105.

Christoph COLBERG[1], Rolf BIEHLER[1], Reinhard HOCHMUTH[2], Niclas SCHAPER[1], Michael LIEBENDÖRFER[2], Mirko SCHÜRMANN[1] [1]Universität Paderborn, [2]Leibniz Universität Hannover

Wirkung und Gelingensbedingungen von Unterstützungsmaßnahmen für mathematikbezogenes Lernen in der Studieneingangsphase

1. Ausgangslage und Herausforderungen

Der Übergang von der Schule zur Hochschule ist vor allem bei mathematikhaltigen Studiengängen für die Studierenden eine Herausforderung (vgl. Gueudet 2008, Biehler, Hochmuth, Fischer, Wassong 2011). Viele Studierende beenden ihr Studium vor allem in den ersten beiden Semestern aufgrund vielfältiger Ursachen (vgl. Heublein, Hutzsch, Schreiber, Sommer, Besuch 2009). Die Mathematik an den Hochschulen unterscheidet sich stark von der Mathematik, die die Studierenden aus der Schule kennen (vgl. Fischer, Heinze, Wagner 2009). Sowohl fachliche, als auch motivationale Probleme oder unzureichende Lern- und Arbeitsstrategien sind Gründe für den Studienabbruch.

Zahlreiche Universitäten und Fachhochschulen in Deutschland haben daher im Rahmen des Qualitätspakts Lehre (QPL) des Bundesministeriums für Bildung und Forschung (BMBF) eine Vielzahl von Unterstützungsmaßnahmen für die Studieneingangsphase entwickelt und an ihren Standorten mit dem Ziel etabliert, die Übergangsproblematik und die Studienabbruchsquote zu verringern.

Diese Unterstützungsmaßnahmen sind sehr vielfältig gestaltet, daher schwer vergleichbar und es gibt kaum Untersuchungen bezüglich der Wirksamkeit dieser Unterstützungsmaßnahmen (vgl. Hoppenbrock, Biehler, Hochmuth, Rück 2016). Es existiert insbesondere kein konsentierter Orientierungsrahmen, in den sich einzelne Projekte hinsichtlich ihrer Ziele, Maßnahmen und Rahmenbedingungen einordnen lassen. Durchgeführte Evaluationen beschränken sich in der Regel auf lokale und ad hoc gestaltete Zufriedenheitsbefragungen und Leistungstests. Darüber hinaus fehlen systematische und zielgerichtete Erhebungen bzw. Evaluationen. Studien, denen eine präzise Formulierung und Überprüfung von Wirkungshypothesen zugrunde liegt, fehlen ebenfalls weitgehend. Daraus ergeben sich ein unzureichendes Wissen und fehlende Evidenzen über die Wirksamkeit und die Wirkbedingungen solcher Unterstützungsmaßnahmen.

2. Das Projekt WiGeMath

An diesem Punkt setzt das vom BMBF geförderte Verbundprojekt zur Begleitforschung des Qualitätspakts Lehre „WiGeMath – Wirkung und Gelingensbedingungen von Unterstützungsmaßnahmen für mathematikbezogenes Lernen in der Studieneingangsphase“, Förderkennzeichen 01PB14015A und 01PB14015B, an. Dieses ist an der Universität Paderborn und der Leibniz Universität Hannover angesiedelt und im Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik (khdm) verortet.

Untersuchungsgegenstand sind Unterstützungsmaßnahmen in der Studieneingangsphase für Studierende der Ingenieurwissenschaften und des Bereiches BA Mathematik/Lehramt Mathematik an Gymnasien. Dabei werden die Unterstützungsmaßnahmen Vorkurse, Lernzentren, Semesterbegleitende Maßnahmen und Brückenvorlesungen unterschieden.

Die Ziele des Projektes sind die Entwicklung eines Rahmenmodells zur theoretischen Beschreibung, Analyse und vergleichenden konzeptuellen Vernetzung von QPL-Projekten im Bereich der Mathematik, die Untersuchung von Wirkungen und Gelingensbedingungen der Unterstützungsmaßnahmen sowie die Ausarbeitung von Empfehlungen für die wirksame Gestaltung von Unterstützungsmaßnahmen im Bereich der Mathematiklehre in der Studieneingangsphase. Dazu wurden 17? Kooperationspartner aus acht Bundesländern gewonnen, bei denen umfangreiche Analysen im Rahmen des Projektes stattfinden werden.

3. Methodischer Ansatz

Als theoretische Grundlage für die Untersuchungen dient das 3P-Modell von Thumser-Dauth (2007). Dieses beschreibt eine Programmevaluation für hochschuldidaktische Weiterbildungsmaßnahmen basierend auf Chen’s theory-driven evaluation Ansatz (1990). Dabei werden zunächst Programmtheorien über die Maßnahme bezüglich der Ziele, der Verfahren, der Rahmenbedingungen und der Effekte rekonstruiert. Anschließend werden die Programmumsetzung und die Programmwirkungen insbesondere aus Sicht der involvierten Akteure evaluiert.

Zur Erfassung der Programmtheorien wurde im Projekt zunächst ein maßnahmenübergreifendes Rahmenmodell entwickelt, das zur Rekonstruktion von Zielen, Maßnahmenmerkmalen, Rahmenbedingungen und Wirkungsvariablen für unterschiedliche Maßnahmentypen genutzt wird. Daraus werden dann ein allgemeines Wirkmodell und maßnahmenspezifische Wirkmodelle als Basis für systematische Evaluationen abgeleitet.

4. Erstes Ergebnis: Das Rahmenmodell

Der erste Schritt im Projekt bestand aus der Entwicklung des Rahmenmodells zur theoretischen Beschreibung der Unterstützungsmaßnahmen. Dazu wurden Dokumentenanalysen sowie Interviews und ein Expertenworkshop mit den Kooperationspartnern durchgeführt. Auf dieser Grundalge wurde das Rahmenmodell ausdifferenziert und ergänzt.

Das Rahmenmodell gliedert sich in mehrere hierarchisch strukturierte Ebenen, die unter anderem aus hochschul- und mathematikdidaktischen Konzepten hergeleitet wurden.

Auf der obersten Ebene stehen die Beschreibungskategorien (I-III) „Zielkategorien", „Maßnahmenmerkmale" und „Rahmenbedingungen", die aus dem 3P-Modell abgeleitet sind. Darunter sind Oberkategorien (x.) zu den einzelnen Beschreibungskategorien zu finden. Die Oberkategorien sind wiederum in Unterkategorien (x.x) unterteilt. Die Kategorien der untersten Ebene beschreiben konkretere Merkmalsfacetten (x.x.x). Zu jeder Kategorie/Merkmalsfacette finden sich im Rahmenmodell außerdem begriffserläuternde Kommentare.

I. Zielkategorien

Ober- und Unterkategorien	Merkmalsfacetten	Kommentare
1. Lernziele		Lernziele beziehen sich auf die zu erreichenden Lernergebnisse in den Unterstützungsmaßnahmen. Hierbei handelt es sich um Zielsetzungen, die von den individuellen Lernenden bzw. Teilnehmenden im Kontext des jeweiligen Lernarrangements angestrebt werden sollten und Leitlinien bzw. Ausgangspunkt der didaktischen Gestaltung der Lehr-/Lernumgebung und des Lernprozesses sind. Sie gliedern sich nach wissens-, handlungs- und einstellungsbezogenen Lernzielen.
1.1 Wissensbezogene Lernziele	1.1.1 Schulmathematisches Wissen und Fähigkeiten 1.1.2 Hochschulisches Mathematikwissen und –fähigkeiten 1.1.3 Fachsprache	K.1.1 Mit **wissensbezogenen Lernzielen** sind sowohl das deklarative als auch das prozedurale Wissen gemeint, das durch die Maßnahme vermittelt wird. Es geht darum festzulegen, welche Art von Wissen durch die Maßnahme vermittelt werden soll. K.1.1.1. **Schulmathematisches Wissen und Fähigkeiten** umfasst alle Inhalte und Techniken, die im schulischen Mathematikunterricht vermittelt werden. Werden diese in der Maßnahme wiederholt, abgerundet oder vervollständigt? K.1.1.2. **Hochschulisches Mathematikwissen und -fähigkeiten** umfassen die Inhalte, die in den regulären Veranstaltungen des Studiengangs im Bereich Mathematik vermittelt werden. K.1.1.3. Unter **Fachsprache** werden Symbole (z.B.: Summenzeichen), Abkürzungen (z.B.: oBdA.) und fachliche Ausdrücke (z.B.: injektiv) der Mathematik verstanden.

Abbildung 1: Auszug aus dem Rahmenmodell zur theoretischen Beschreibung von mathematikbezogenen Unterstützungsmaßnahmen

5. Weitere Projektschritte

Nachdem das Rahmenmodell finalisiert ist, wird mit der Erstellung eines allgemeinen Wirkmodells und maßnahmenspezifischer Wirkmodelle begonnen, die als Basis für systematische Evaluationen dienen werden. Darüber hinaus werden Evaluationsinstrumente zur Wirkungsanalyse entwickelt und erprobt. Im Herbst 2016 wird mit der Durchführung systematischer Maßnahmenevaluationen in enger Kooperation mit ausgewählten Partnern begonnen. Dabei werden unter anderem das Ausmaß und die Qualität der Umsetzung von Unterstützungskonzepten aus Sicht der beteiligten Akteure erhoben, eine Analyse der Effektivität bzw. Wirksamkeit ausgewählter Unterstützungsmaßnahmen sowie Untersuchungen des Einflusses von personen- und umfeldbezogenen Faktoren durchgeführt. Im Anschluss werden Empfehlungen für die Durchführungen und Evaluation von Unterstützungsmaßnahmen ausgearbeitet.

6. Ausblick

Im Anschluss an das Projekt sollen das Rahmenmodell zur Durchführung und Evaluation von Unterstützungsmaßnahmen sowie die Instrumente zur Evaluation und Optimierung von Unterstützungsmaßnahmen in der Studieneingangsphase bereitgestellt werden. Außerdem sollen Empfehlungen für die wirksame Gestaltung von Unterstützungsmaßnahmen im Bereich der Mathematiklehre in der Studieneingangsphase formuliert werden.

Literatur

Biehler, R., Hochmuth, R., Fischer, P.R., Wassong, T. (2011). Transition von Schule zu Hochschule in der Mathematik: Probleme und Lösungsansätze. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011* (pp. 111-114). Münster: WTM-Verlag.

Chen, H.-T. (1990). Theory-driven evaluation. California: Sage.

Fischer, A., Heinze, A., Wagner, D. (2009). Mathematiklernen in der Schule – Mathematiklernen an der Hochschule: Die Schwierigkeiten von Lernenden beim Übergang ins Studium. In: A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung beim Mathematiklernen (S. 245-264).* Münster: Waxmann.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. Educational Studies in Mathematics, 67, 237-254.

Heublein, U., Hutzsch, C., Schreiber, J., Sommer, D., Besuch, G. (2009). Ursachen des Studienabbruchs in Bachelor- und in herkömmlichen Studiengängen – Ergebnisse einer bundesweiten Befragung von Exmatrikulierten des Studienjahres 2007/08. Hannover: HIS.

Hoppenbrock, A., Biehler, R., Hochmuth, R., & Rück, H.-G. (Hrsg.). (2016). Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase - Herausforderungen und Lösungsansätze. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Thumser-Dauth, K. (2007). Evaluation hochschuldidaktischer Weiterbildung. Entwicklung, Bewertung und Umsetzung des 3P-Modells. Hamburg, Kovac.

Jenny Christine CRAMER, Christine KNIPPING, Bremen

Das „Lexicon"-Projekt: Weltweite Begriffssysteme zur Beschreibung von Mathematikunterricht

Das Lexicon-Projekt ist ein von internationalen Kollegen gemeinsam getragenes Projekt, das vom International Centre for Classroom Research (ICCR) in Melbourne, Australien, ins Leben gerufen wurde. Das Ziel liegt in der Erfassung und dem Vergleich von Vokabular zur Beschreibung und Analyse von Mathematikunterricht in den teilnehmenden Ländern. Mit Teams aus Australien, Chile, China, Deutschland, Finnland, Frankreich, Japan, USA und der Tschechischen Republik werden dabei Unterrichtstraditionen aus unterschiedlichen Regionen der Erde betrachtet. Wir geben in unserem Beitrag für die GDM-Tagung einen Einblick in den Erstellungsprozess des deutschen „Lexicon" für den Mathematikunterricht und diskutieren Chancen für einen internationalen Dialog anhand eines Beispiels aus Japan.

Motivation für das Lexicon-Projekt

Zwei Annahmen bilden die Motivation für die Beschäftigung mit dem Vokabular zur Beschreibung und Analyse von Mathematikunterricht. Clarke (2013, S. 28f) beschreibt, dass wir gewöhnlich solche Begriffe und theoretischen Werkzeuge auswählen, diese unsere eigenen Wertvorstellungen zum Mathematikunterricht widerspiegeln und begünstigen. Diese finden ihren Ausdruck, so Clarke, in den jeweiligen Begriffen, die zur Beschreibung und Analyse von Mathematikunterricht in einer Kultur genutzt werden: „These educational values find their embodiment in the forms of classroom activity that our culture has chosen to name" (ebd.). Die erste Annahme ist entsprechend, dass die Erfassung von relevanten Begriffssystemen einen Beitrag dazu leisten kann, das Bewusstsein für implizit vorherrschende Werte und Normen zu schärfen und auszuformulieren.

Auf internationaler Ebene werden Theorien über das Lehren und Lernen von Mathematik sowie Beschreibungen von Unterrichtspraxis in der Regel auf Englisch formuliert. Die zweite zentrale Annahme des Lexicon-Projekts ist aus diesem Grund, dass durch diese einseitige Fokussierung der englischen Sprache möglicherweise wesentliche Aspekte anderer Perspektiven auf den Mathematikunterricht nicht berücksichtigt werden. Die Möglichkeiten des Zugriffs auf, der Anknüpfung an und der Aneignung von Expertise aus nicht englischsprachigen Traditionen und Kulturen werden dadurch eingeschränkt. Die Erhebung und Entwicklung eines internationalen Glossars kann hier einen neuen Raum für Kommunikation und Austausch schaffen.

Erkenntnisziele und Erwartungen

Die Erstellung der nationalen Glossare ist von fünf Zielen geleitet[6]:

- Identifikation unterrichtsbezogener Begriffe in ausgewählten etablierten Unterrichtstraditionen, mit denen unterschiedliche Gemeinschaften kompetenter Lehrkräfte Mathematikunterricht beschreiben;
- Identifikation visueller Hinweise in Videomaterial von Unterricht aus den beteiligten Ländern, welche eine Konkretisierung und Veranschaulichung der gefundenen Begriffe erlauben;
- Erstellung detaillierter englischsprachiger Definitionen aller nichtenglischen Begriffe, welche Form und Funktion aller benannten unterrichtlichen Aktivitäten und Ereignisse fassen;
- Einsichten in die Bedeutungen und Zusammenhänge von Fach-Vokabular gewinnen, das Ausbilder und Forscher gleichermaßen nutzen. Dadurch sollen als Bestandteile eines internationalen Lexicons solche Begriffsfelder bestimmt werden können, die offen für einen weiträumigeren Gebrauch in der Mathematikdidaktik sind;
- Erweiterung bekannter Konstrukte der Theoriebildung, um durch die Beschreibung und Reflexion von Unterrichtspraxis zur Identifikation von Merkmalen guter Praxis zu kommen.

Internationale Vergleichsstudien bieten besondere Gelegenheiten, etablierte Unterrichtspraxis zu untersuchen (Clarke, Keitel & Shimizu, 2006). Das Lexicon-Projekt soll einen Spiegel für unterrichtliche Praxis in den teilnehmenden Ländern bieten und Impulse für die Kommunikation über Unterricht unter Forschenden und Lehrenden auf nationaler und internationaler Ebene geben.

Erstellung nationaler Glossare

In den teilnehmenden Ländern haben kleine regionale Teams aus Forscherinnen und Forschern und Lehrkräften gemeinsam die Verantwortung für die Erstellung des jeweiligen nationalen Lexicons übernommen. Das deutsche Team besteht aus drei Forscherinnen und Forschern der Universität Bremen, sowie drei praxisnah tätigen und erfahrenen Lehrkräften mit zusätzlichen Qualifikationen und Funktionen in der Lehreraus- und -fortbildung.

Die Durchführung des Projekts ist in mehrere Phasen gegliedert. Zu Beginn des Projekts haben alle beteiligten Teams Unterricht in einer 8. Klasse (14-Jährige) gefilmt. Die Videos wurden mit Untertiteln versehen, auf Englisch übersetzt und den anderen Teams zugänglich gemacht. Als Paket bildeten diese Videos einen Stimulus, anhand dessen die Länder-Teams ihr jeweiliges

[6] Details siehe Projekthomepage, http://www.lexicon.iccr.edu.au/

Glossar von Begriffen für die Beschreibung und Analyse von Mathematikunterricht entwickelt haben. Es sollten dabei sowohl Begriffe für Ereignisse und Aktivitäten mit unmittelbarem Bezug zu den Videos einbezogen werden, als auch darüber hinaus gehende Begriffe. Der Fokus lag dabei auf einem von Lehrkräften aktiv genutzten Vokabular. Zum Abschluss dieser ersten Phase wurden auf einem gemeinsamen Projekttreffen aller Länder Ende 2015 in Melbourne die Glossare vorgestellt. Insgesamt zeigten sich dabei unterschiedliche Schwerpunktsetzungen der Länder-Teams und verschiedene Ansätze der Strukturierung wurden deutlich.

Merkmale des deutschen Glossars und ein Blick nach Japan

Das deutsche Lexikon soll das Vokabular widerspiegeln, das erfahrene Mathematiklehrkräfte und Ausbilder nutzen um Aspekte von Mathematikunterricht zu beschreiben, die sie bei dessen Beobachtung erkennen. Solche Aspekte von Unterricht schließen Aktivitäten, Phasen und Rollen ein, die beobachtet und diskutiert werden können und die für den Mathematikunterricht spezifisch oder bedeutsam sind. Es wurden Aspekte berücksichtigt, die in tatsächlichem Mathematikunterricht beobachtet wurden, sowie allgemeine und wünschenswerte Aspekte (z.B. gute Praxis), die als fehlend bemerkt wurden. Die aktuelle Fassung des deutschen Lexicons enthält 75 Begriffe mit zugehörigen Beschreibungen in deutscher und englischer Sprache. Diese Fassung wird aktuell mit Lehrkräften aus dem Bremer Umland zunächst regional evaluiert; im Anschluss streben wir eine Evaluation bezüglich der Angemessenheit von Begriffen und Beschreibungen mit möglichst vielen Lehrkräften aus ganz Deutschland an. Die hohe regionale Sprachvielfalt im deutschen Sprachraum ist von besonderem Interesse bei der Erfassung der verwendeten Begriffe. Im internationalen Vergleich liegt in Deutschland zudem eine besondere Situation vor, da Lehrkräfte in Deutschland meist in mehr als einem Fach ausgebildet werden und unterrichten, während Mathematiklehrkräfte in anderen Ländern häufig kein zweites Fach unterrichten oder studiert haben.

Wir verzichten an dieser Stelle auf eine extensive Darstellung der Begriffe des deutschen Glossars und möchten stattdessen anhand des Begriffs *Kikan-Shido* aus Japan der bereits vorher für internationale Vergleiche in der mathematikdidaktischen Forschung herangezogen wurde (O'Keefe, Xu & Clarke, 2006) einen Eindruck der Perspektiven vermitteln, die aus dem Lexicon-Projekt entstehen können.

Kikan-Shido beschreibt das „Herumgehen" eines Lehrers während Schülerinnen und Schüler an einer Aufgabe individuell oder gemeinsam arbeiten. Obwohl diese Lehrertätigkeit im Unterricht kompetenter Lehrkräfte in unterschiedlichen Ländern eine wichtige Rolle einnimmt und unterschiedliche Zwecke erfüllen kann (vgl. O'Keefe, Xu & Clarke, 2006), gibt es in vielen

Ländern keinen feststehenden Begriff für diese Lehrerhandlung. Mithilfe des japanischen Begriffs *Kikan-Shido* wurden Kategorien entwickelt, die Intentionalität beziehungsweise Funktion dieses „Herumgehens“ abbilden. So kann *Kikan-Shido* stattfinden, um die Fortschritte von Lernenden zu erfassen, um Schülerinnen und Schüler anzuleiten oder Lösungen einzelner Lernender für eine anschließende Diskussion mit der Gesamtgruppe auszuwählen. O’Keefe, Xu und Clarke (2006) konnten anhand dieses Begriffs zeigen, dass eine einfache getrennte Betrachtung von Unterrichtskulturen zwischen Ost und West kein wirklichkeitsgetreues Abbild kultureller Einflüsse liefert. Erst eine präzise Beschreibung von Phänomenen ermöglicht die Untersuchung, in welchen Formen und Funktionen diese in unterschiedlichen Unterrichtskulturen auftreten.

Fazit und Ausblick

Die Erfassung des Vokabulars von Lehrkräften und Forschenden zur Analyse und Beschreibung von Unterricht kann Einblicke in die Unterrichtskultur eines Landes bieten. Eine Beschäftigung mit den verwendeten Begriffen im eigenen Land im Vergleich zu Vokabular in anderen Ländern verspricht Erkenntnisse, die über die eigene Perspektive hinausgehen. Sie erlaubt die Erweiterung des eigenen kulturellen Horizonts. Unterrichtsphänomene wie *Kikan-Shido* können dadurch analysierbar und greifbar gemacht werden und bieten eine Plattform des interkulturellen Austauschs.

Literatur

Clarke, D., Keitel, C., & Shimizu, Y. (2006). Mathematics classrooms in twelve countries: The insider’s perspective (1). Rotterdam: Sense publishers.

Clarke, D. J. (2013). Contingent conceptions of accomplished practice: the cultural specificity of discourse in and about the mathematics classroom. ZDM, 45(1), 21-33.

Clarke, D. J. (2015). Comparative Research in Mathematics Education: Boundary Crossing and Boundary Creation. In: K. Beswick, T. Muir, & J. Wells (Hrsg.) Proceedings from PME 39, vol. 2, 169-176. Tasmanien: Hobart.

O’Keefe, C., Xu, H. & Clarke, D. J. (2006). Kikan-Shido: Through the lens of guiding student activity. In: Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Hrsg.) Proceedings from PME 30, vol. 4, S. 265-272. Tschechien: Prag.

Eva DECKER, Offenburg; Barbara MEIER, Offenburg

Schulprojekte zum Einsatz einer Mathe-App als Vorbereitung auf ein MINT-Studium

Im Zuge des Qualitätspakts Lehre entstanden an vielen Hochschulen innovative Ansätze, um den Start in ein WiMINT-Studium zu glätten. Darunter ein Kurs- und Übungskonzept der Hochschule Offenburg, bei dem als Stütze von selbstreguliertem Lernen klassische Medien wie Übungsblätter durch den Einsatz einer Mathe-App ergänzt werden. Seit 2014 begleitet die Hochschule Offenburg Schulprojekte, die den Einsatz der Mathe-App auch im Schulunterricht erproben. Günstige Rahmenbedingungen dazu liefern Mathe-Plus-Kurse. Neben ersten Erfahrungen aus diesen aktuellen Projekten, die durch die Vector-Stiftung gefördert werden, bietet sich die Möglichkeit für interessierte Lehrer, ebenfalls den Einsatz zu erproben.

1. Qualitätspakt Lehre und Mathematik im Übergang Schule-Studium

Gefördert durch das Bund-Länderprogramm Qualitätspakt Lehre widmen sich viele Hochschulen verstärkt den Fragen der Verbesserung der Studierbarkeit von WiMINT-Fächern und den Ursachen der hohen Abbruchquoten. Der Studienbeginn ist eine besonders kritische Phase, in der sich viele Neulinge schlecht vorbereitet und überfordert fühlen, insbesondere zählt hierzu die Mathematik. Wir sprechen dabei primär von den vielen Studierenden, die Mathematik als Servicewissenschaft für ein Studium der Informatik, Ingenieur- Natur- oder auch Wirtschaftswissenschaften benötigen.

Ein Hauptproblempunkt an der Schnittstelle liegt in der Nachhaltigkeit des Mittelstufenstoffes, vor allem beim routinierten Umgang mit Termen und Gleichungen. Einen effizienten Überblick zu Themen und Niveau erhält jeder Mathematik-Lehrer bzw. –dozent effizient anhand des Mindestanforderungskatalogs Mathematik, den die Arbeitsgruppe Cooperation Schule:Hochschulein gemeinsamen Tagungen von Lehrern allgemeinbildender und beruflicher Schulen und aller Hochschulen Baden-Württembergs mit WiMINT-Studienrichtungen erarbeitet hat (COSH 2013).

2. Mathe-App als Aktivierungsunterstützung

Zu den Anstrengungen rund um die Übergangsmaßnahmen zählt auch ein Teilprojekt des Qualitätspakt Lehre der Hochschule Offenburg, in dem ein innovativer Ansatz entwickelt wurde, in den Präsenz-Brückenkursen Phasen des selbstregulierten Übens mit Hilfe einer Mathe-App zu unterstützen.

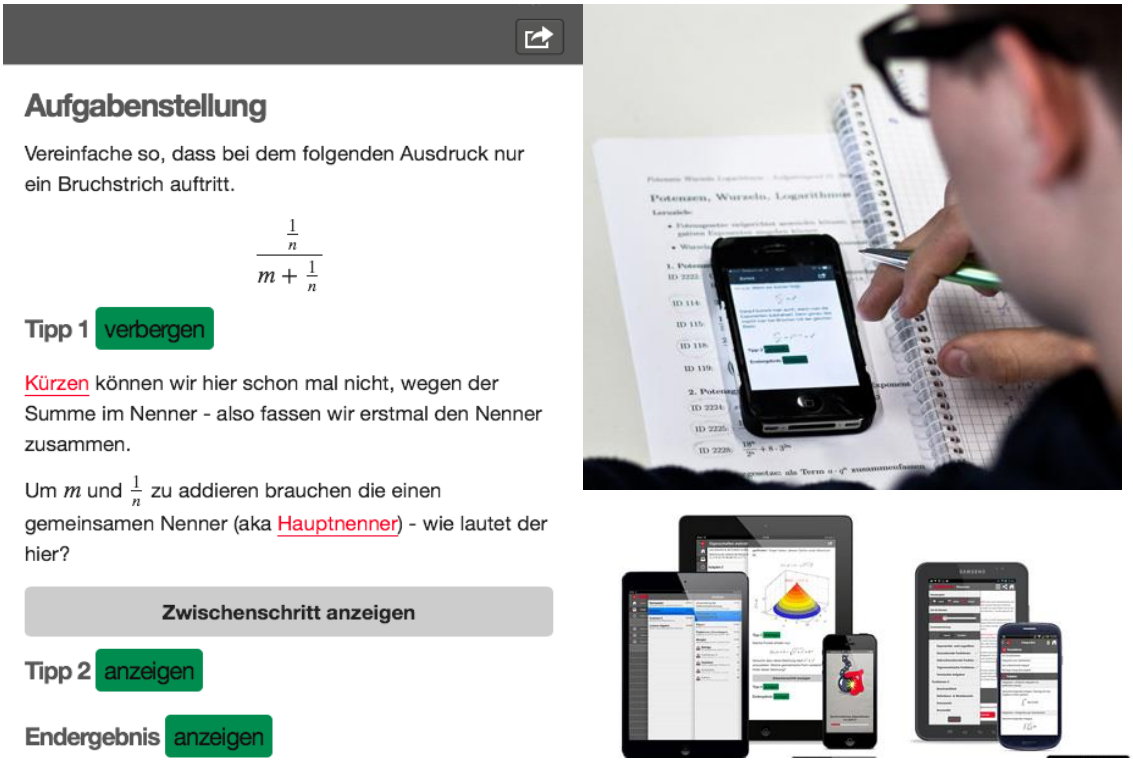


Abbildung 1: Bei Bedarf Tipps, Erklärungen und Teilschritte per App

Die KursteilnehmerInnen üben und erstellen Lösungswege klassisch mit Stift und Papier entlang von Übungsblättern. Zu jeder Aufgabe gibt es jedoch bei Bedarf per Smartphone oder Tablet Hilfen durch die Mathe-App in Form von kleinen Tipps, Erklärungen, Teilschritten in einer verständlichen Tuto-ren-Sprache. Die gezeigte Mathe-App war ursprünglich für Mathematikstudenten im Grundstudium entstanden. Das 600 Aufgabenpaket „Vorbereitungskurs“ zur Wiederholung von Schulstoff wurde an der HS Offenburg entwickelt, orientiert sich am Mindestanforderungskatalog COSH und wurde in einer Kooperation in die MassMatics bzw. TeachMatics App integriert und ist so über die App Stores allgemein verfügbar.

Die App-Hilfe stützt das selbstregulierte Üben in heterogenen Gruppen. Bisher haben allein an der HS Offenburg in sechs Durchläufen insgesamt 1990 Anfänger diese Kurse durchlaufen bei einer Gruppenstärke von 30-50 pro Dozent. Der technische Ablauf funktionierte problemlos. Mobile Learning steht so unkompliziert in jedem normalen Klassenraum zur Verfügung. Dieses didaktische Gesamtszenario, Mobile Learning nach dem Bring-Your-Own-Device-Prinzip in großer Breite einzusetzen, wurde mit dem European Award for Technology Supported Learning eureleA 2014 ausgezeichnet. (Nähere Beschreibung und Evaluation in Decker 2014).

2. Schulprojekte mit Einsatz der Mathe-App

Aufgrund der hohen Zufriedenheit der KursteilnehmerInnen (95 % würden die App weiterempfehlen) und der Tatsache, dass diese selbstständig ihre App installieren und bedienen und so auch „Nicht-Techie“-Dozenten das Konzept leicht umsetzen konnten, kam die Frage auf, ob auch Lehr-Lern-Szenarien mit Mathe-App in Schulen denkbar bzw. interessant sind. Es bietet sich eine unkomplizierte Möglichkeit, ohne sehr spezielles Vorwissen ein Mobile Learning Szenario in Mathematik auszuprobieren bzw. zu adaptieren. Rückflüsse aus Schulsicht zur Weiterentwicklung der App-Inhalte sind wiederum für die Hochschulen von Vorteil. Die bisherigen Hochschul-Erfahrungen beziehen sich primär auf Blockkurse mit freiwilligen und somit grundmotivierten TeilnehmerInnen. Welche Settings könnten sich in der Schule anbieten und bewähren? Naheliegend sind (v.a. in Baden-Württemberg) Mathe-Plus oder Vertiefungskurse. Sie bieten einen Zeitrahmen für Themen der Hochschul-Vorkurse wie Un-/Gleichungen. Denkbar ist zwar auch der „normale“ Mathematik-Unterricht in Stufe 11, 12, jedoch eher zu Bildungsplan-nahen Themen wie Differentialrechnung.

3. Erste Erfahrungen

Die Vector-Stiftung finanziert im Schuljahr 14/15 und 15/16 die App-Downloads für die Schulprojekte. Zwischenstand für das Schuljahr 14/15 sind acht teilnehmende Schulen mit 15 Kursen mit insgesamt 337 SchülerInnen. Davon waren sieben Einsatzszenarien in Mathe-Plus-Kursen. An zwei Schulen fanden drei bzw. vier Kurse nach dem schriftlichen Abitur statt, hinzu kam ein Einsatz in normalen Mathematik-Unterricht eines technischen Gymnasiums. Die LehrerInnen erhielten die Möglichkeit, einen Ein-Ausgangstest der Hochschule durchzuführen sowie neben der App klassische Materialien (z.B. Übungsblätter zum Ausdrucken) zu nutzen.

Um es vorweg zu nehmen: In einer der Schulen mit (verpflichtenden) Kursen für die gesamte Jahrgangsstufe nach dem schriftlichen Abitur war das Motivationslevel, sich zu diesem Zeitpunkt mit Mathematik-Nachhol-Bedarf zu befassen so gering, dass auch eine App keine Aktivierung in der Breite bewirken konnte. Die Rahmenbedingungen müssen im Vorfeld sorgfältig bedacht werden. Dagegen wurden alle Settings in den Mathe-Plus Kursen als gelungen angesehen. Der Fokus des App-Einsatzes lag auf der Förderung selbstregulierter Übungsphasen im Präsenzunterricht sowie der Stütze der Klausurvorbereitung. Seitens der involvierten LehrerInnen wird der Vorbereitungsaufwand als gering angegeben. Von allen wird als Bereicherung genannt: Vertiefung des Problemverständnisses Übergang Schule-Studium („man sollte damit früher beginnen“); der Medieneinsatz bringe Abwechslung in den Unterricht (unkompliziert im Klassenzimmer); die Schulleitung würdige die innovativen Projekte. Der Bedarf einer App-Präsenz-Unterstützung ist durch die bessere Betreuungssituation an der Schule naturgemäß geringer als an Hochschule. Dennoch melden bis auf das oben ausgenommene

Abi-Projekt alle LehrerInnen in der Evaluation zurück, dass sie einen Vorteil in der zusätzlichen Unterstützung des autonomeren, selbstregulierten Lernens sehen und dass sie den Eindruck gewannen, die Motivation und Aktivität sei gefördert worden. Eine nennenswerte Gefahr der Ablenkung durch die Smartphones war nicht zu sehen. Eine LehrerIn thematisierte den Eindruck, die Nachhaltigkeit sei ähnlich gering wie mit klassischen Medien. Die Rückmeldequote der LehrerInnen lag bei ca. 70 %. Die SchülerInnen-Sicht konnte nur ca. zu 30% in schriftlicher Form erfasst werden; man scheute in den Schulen den Aufwand einer schriftlichen Evaluation; wir müssen uns primär auf den Lehrer-Eindruck verlassen. Die verfügbaren Rückmeldungen zeigen eine sehr große Mehrheit, die die App beim Arbeiten im individuellen Tempo und die Tipps bei Bedarf als sehr positiv bewerten. Sehr wenige sahen keinen Bedarf bzw. Vorteil der App-Zusatzunterstützung oder fanden die App-Lösungen zu ausführlich bzw. bevorzugen Erklär-Videos oder Bücher. Während für die Mathe-Plus-Kurse das Niveau passte, wurden in einem Kurs im normalen Unterricht die Algebra-Aufgaben mehrheitlich als zu schwer empfunden. Die LehrerInnen, die im neuen Schuljahr wieder einen Mathe-Plus-Kurs halten, wollen den App-Einsatz wiederholen.

4. Interesse an eigenen Versuchen zum Einsatz der Mathe-App?

Wenn Schulen Interesse haben, den Einsatz der Mathe-App in der Oberstufe zu erproben, bitten wir um Kontaktaufnahme mit der Hochschule Offenburg per E-Mail an barbara.meier@hs-offenburg.de

Wir danken der Vector-Stiftung für ihre großzügige Unterstützung.

Literatur

COSH (2013). Mindestanforderungskatalog. http://lehrerfortbildung-bw.de/bs/bsa/bk/bk_mathe/cosh_neu/katalog/index.html, Stand vom 30. März 2016.

Dürr, R., Dürrschnabel, K., Loose, F. & Wurth, R. (2016). *Mathematik zwischen Schule und Hochschule. Den Übergang zu einem WiMINT-Studium gestalten - Ergebnisse einer Fachtagung, Esslingen 2015*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Decker, E. & Meier, B. (2014). Mathe-App als Aktivierungsunterstützung beim Studienstart. Werkstattbericht. In H. Dehling, K, Roegner, M. Winzker (Eds), ZFHE Jg.9/Nr.4 (November 2014), *Sonderheft Transfer von Studienreformprojekten für die Mathematik in der Ingenieurausbildung*, S. 57-71. Graz.

Lucia DEL CHICCA, Linz; Sandra REICHENBERGER, Linz

Einführungskurs in das Lehramtstudium Mathematik

Die LeherInnenausbildung für die Sekundarstufe erfolgt zur Zeit in Österreich an zwei Bildungsinstitutionen: Padagogische Hochschulen (Sekundarstufe I) bzw. Universitäten (Sekundarstufe I und II). Ab dem Wintersemester 2016/17 wird es im Rahmen der PädagogInnenbildung NEU eine gemeinsame Lehramtsausbildung für die Sekundarstufen I und II geben, die in Oberösterreich gemeinsam von der Johannes Kepler Universität (JKU) und den beiden Pädagogischen Hochschulen (PH Oberösterreich und Private PH der Diozöse Linz) angeboten wird. Der neue Studienplan für das Lehramtsstudium Mathematik enthält eine Studieneingangs- und Orientierungsphase (STEOP), die durch die Lehrveranstaltung „Einführung in das Mathematikstudium und dessen Umfeld“ abgedeckt wird.

Einführungskurse bzw. Vor- und Brückenkurse werden an vielen Universitäten angeboten. Dass vor allem in den MINT-Fächern der Übergang Schule-Universität viele Schwierigkeiten bereitet, ist bekannt und wurde in der didaktischen Literatur bereits vielfältig behandelt (vgl. Allmendinger et al., 2013; Bausch et al., 2014; Beutelspacher et al., 2012; Hoppenbrock et al., 2016; Rach et al., 2013). Im Gegensatz zu vielen anderen Einführungskursen ist der positive Abschluss dieser Lehrveranstaltung Vorraussetzung, um das Lehramtsstudium Mathematik fortsetzen zu dürfen.

Bevor wir uns konkrete Inhalte der Lehrveranstaltung überlegt haben, konzentrierten wir uns bei der Planung vor allem auf folgende Fragen:

- Gibt es bei den aktuellen Studierenden (Lehramt Mathematik) an der JKU spezielle Bedürfnisse oder Schwierigkeiten, die in der Literatur nicht behandelt worden sind?
- Welche Schwierigkeiten sehen die Lehrveranstaltungsleiter, die zur Zeit Mathematikkurse für Erstsemestrige halten, bei den Studierenden?

Um Antworten auf die oben genannten Fragen zu bekommen, haben wir Informationen aus der Literatur zur Übergangsproblematik Schule-Universität gesammelt, Interviews mit Lehrveranstaltungsleitern und der Studierendenvertretung geführt und einen Fragebogen für die Erstsemestrigen des Lehramtsstudiums Mathematik des Studienjahres 2015/16 zusammengestellt.

Interviews

Die geführten Interviews hatten den Charakter einer offenen Besprechung. Es wurden jeweils zwei Fragen gestellt, deren Antworten nun zusammengefasst geschildert werden.

Fragen an die Studierendenvertretung:

- Welche Schwierigkeiten haben Sie am Anfang Ihres Lehramtsstudiums Mathematik gehabt?
- Von welchen Schwierigkeiten berichten die Erstsemestrigen?

Die Antworten der Studierendenvertretung beziehen sich vor allem auf konkrete mathematische Schwierigkeiten/Inhalte: Summenzeichen, Produktzeichen, Rechnen mit Buchstaben, Indexschrift, mathematische Schreibweise, Lösen der Übungsbeispiele (großer Unterschied zu den Aufgaben in der Schule), selbstständig Beweise führen, …

Fragen an die Lehrenden:

- Sie halten einen Mathematikkurs im ersten Semester: Wo sehen Sie die meisten Schwierigkeiten bei den Erstsemestrigen?
- Wie könnte man hier helfen? Welche Inhalte/Informationen könnten für die Studierenden zu Beginn des Studiums hilfreich sein, damit die oben genannten Schwierigkeiten eventuell überwunden werden können?

Einige Antworten der Lehrenden: Rechensicherheit – Bruchrechnen mit Variablen, einfache Ungleichungen lösen, Verständnis des Begriffes Funktion, Gebrauch von Symbolen (Summenzeichen, Summenverschiebung, Produktzeichen, Fakultät, Binomialkoeffizient), Struktur und Rolle von Beweisen, Probleme selbstständig lösen, mathematisch Argumentieren, …

Fragebogen

Basierend auf den Informationen aus der Literatur und den Ergebnissen aus den Interviews, wurde ein semistrukturierter Fragebogen[7] entwickelt. Dieser wurde von 49 Erstsemestrigen (Lehramt Mathematik und Technische Mathematik) Mitte November ausgefüllt.

Es werden nun drei Fragen und deren Antworten genauer betrachtet. Wir haben die Antworten der Erstsemstrigen jeweils in zwei Kategorien unterteilt.

Frage: Welche Kenntnisse werden beim Mathematikstudium vorausgesetzt, die Sie in der Schule nicht bzw. kaum gelernt haben?

- Antworten über die mathematische Denkweise: Eigenständiges Arbeiten, komplexe Definitionen, formale Mathematik, …
- Konkrete mathematische Kapitel: Matrizen, komplexe Zahlen, Folgen und Reihen, …

[7] http://tinyurl.com/q8qm9p5 (Stand: März 2016)

Frage: Welche Informationen/Inhalte hätten Sie sich zu Beginn des Studiums gewünscht und wurden nicht behandelt?

- Studiumsbezogene Aspekte: Ablauf des Studiums, Klausurablauf, Einführungsthemen, …
- Fachspezifische Inhalte: Beweise, Quantoren, Logik, …

Frage: Wo haben Sie bis jetzt die größten Schwierigkeiten gehabt? Versuchen Sie auch zu erklären, warum Sie glauben, dass genau dies so schwierig war.

- Konkrete mathematische Kapitel: Folgen und Reihen, Algebra, Ringe, Körper, …
- Allgemeine Aspekte zum mathematischen Studium: selbstständiges Beweisen, Abstraktion, formale Schreibweise, …

Der Fragebogen wird noch ein zweites Mal (Mitte des Sommersemesters) mit denselben Studierenden durchgeführt werden.

Inhalte

Der Kurs „Einführung in das Mathematikstudium und dessen Umfeld" soll kein Wiederholgskurs des Schulstoffes sein. Diesen Kurs gibt es in Linz für das Mathematikstudium bereits und kann freiwillig vor dem Studienbeginn im September von den zukünftigen MathematikstudentInnen besucht werden.

Aus den Ergebnissen der Interviews, des Fragebogens und den Informationen aus der Literatur konnten wir bereits die ersten Inhalte für den Einführungskurs festlegen.

- Bereiche der Mathematik vorstellen: Analysis, Algebra, Geometrie, …
  Antworten auf Fragen dieser Art geben: Was versteht man unter Analysis? – Beispiele aus der Schule angeben: Differential- und Integeralrechnung
- Konkrete mathematische Schreibweisen üben: Summenzeichen, Produktzeichen, Indexverschiebung, …
- Termumformungen, (Bruch-)gleichungen lösen
- Aufbau der mathematischen Inhalte: Definition-Satz-Beweis
  Diese Struktur soll anhand des Kapitels „Teilbarkeit" gezeigt werden. Um die Definitionen, Sätze und Beweise dieses Kapitels nachvollziehen zu können, benötigen die Studierenden keine Vorkenntnisse. Die Beweise sind kurz und eignen sich gut für die Einführung der formalen Schreibweise.
- Lernkultur: Lernverhalten und Lernstrategien besprechen

Der Kurs sollte neben einem Überblick über die wesentlichen Inhalte des Mathematikstudiums auch eine Entscheidungsgrundlage für die persönliche Beurteilung der eigenen Studienwahl schaffen.

Literatur

Allmendinger, H., Lengnink, K., Vohns, A., Wickel, G. (2013). *Mathematik verständlich unterrichten.* Springer Fachmedien Wiesbaden.

Bausch, I., Biehler, R., Bruder, R., Fischer, P., Hochmuth R., Koepf W., Schreiber, S., Wassong, T. (2014). *Mathematische Vor- und Brückenkurse.* Springer Fachmedien Wiesbaden.

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S.,Wickel, G. (2012). *Mathematik Neu Denken.* Springer Vieweg.

Hoppenbrock, A., Biehler, R., Hochmuth, R., Rück, H.-G. (2016). *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase.* Springer Fachmedien Wiesbaden.

Rach, S., Heinze, A. (2013). *Welche Studierenden sind im ersten Semester erfolgreich?* Journal für Mathematik-Didaktik 34, 121–147.

Rach, S., Siebert, U., & Heinze, A. (2013). Lehrqualität in der Studieneingangsphase im Fach Mathematik: Konzeptualisierung und erste Ergebnisse. In G. Greefrath, F. Käpnick, & M. Stein (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 781-784). Münster: WTM.

Eva DIETZ, Bamberg

Erprobung eines fachlich-orientierten Fortbildungskonzeptes für Grundschullehrkräfte

Professionswissen inkludiert für alle Lehrämter neben pädagogischen und fachdidaktischen Anteilen auch Fachwissen. Im Studium (1. Phase) für das Lehramt an Grundschulen sind fachliche Anteile oft unterrepräsentiert bzw. Mathematikdidaktik ist mitunter gar nicht verpflichtend. Fortbildungen (3. Phase) haben folglich eine große Bedeutung. Im Beitrag wird das Design des eigenen fachlich-orientierten Fortbildungskonzeptes skizziert sowie erste Einblicke in die Evaluation gegeben.

1. Motivation

COACTIV (2008) hat konstatiert, das Gymnasiallehrkräfte über mehr Fachwissen gegenüber anderen Lehrkräften und dadurch auch über mehr fachdidaktisches Wissen verfügen. Somit ergibt sich eine hohe Bedeutung des Fachwissens. Des Weiteren hat TEDS-M (2010) offengelegt, dass Grundschullehrkräfte eine eher durchschnittliche, zum Teil auch unterdurchschnittliche Kompetenz im Fachwissen aufweisen. Lipowsky (2010) weist darauf hin, dass fachdidaktisches und fachwissenschaftliches Wissen der Lehrkräfte für den Schulerfolg der Kinder im Mathematikunterricht wichtig sind. Die Mathematikausbildung im Grundschullehramtsstudium umfasst in Bayern lediglich rund 6 %. Auch im Referendariat spielt die Förderung von Fachwissen kaum eine Rolle. Infolgedessen muss die weitere Professionalisierung mathematischer Kompetenzen in der tertiären Phase der Lehramtsausbildung erfolgen. Da dies durch Fortbildungen gewährleistet wird, wurden in einer Studie Fortbildungsangebote für 2011 analysiert.

2. Ist-Stand Analyse und Forschungsfragen

In Bayern ist die Internetseite *FIBS* (Fortbildung in bayerischen Schulen) die zentrale Anlaufstelle für Lehrkräfte, die eine Fortbildung suchen, da alle Angebote staatlich anerkannt werden müssen und dann ausschließlich dort online zu finden sind. In der Studie wurden alle Fortbildungsangebote für das Beispieljahr 2011 untersucht, die durch die Stichwörter *Mathematik & Grundschule* gekennzeichnet waren. Von den insgesamt 320 Angeboten, wurden 269 durch interne Anbieter (Schulämter, Regierungen, etc.) sowie 51 durch externe Anbieter (Universitäten**,** Verlage, etc.) ausgeschrieben.

Alle Angebote wurden inhaltlich nach den Wissensbereichen (fachlich, fachdidaktisch, allgemeinpädagogisch) nach Shulman (1986) analysiert. Bei den externen Anbietern sind fast 90 % der Angebote fachdidaktischer Natur. Die Angebote der internen Anbieter enthalten fast zur Hälfte allgemeinpädagogische Inhalte. Die Analyse des Ist-Stands zeigt somit, dass die Fortbildungen fachdidaktische und zu einem sehr großen Teil allgemeinpädagogische Inhalte aufweisen (Dietz, 2015). Fachliche Angebote, die für die weitere mathematische Professionalisierung der Lehrkräfte nötig wären, konnten keine identifiziert werden - und das, obwohl Lipowsky (2012) konstatiert hat, dass wirksame Fortbildungen einen engen Fachbezug aufweisen sollten. Daher ist das Ziel der Arbeit ein solch fehlendes, fachlich-orientiertes Fortbildungskonzept theoriegeleitet exemplarisch auszuarbeiten und zu erproben. Handlungsleitend sind folgende Forschungsfragen:

1. Ist das Design fachlicher Fortbildungsmodule nach den Prämissen der Wirksamkeitsforschung von Lehrerfortbildung möglich?
2. Lassen sich Effekte der fachlich-orientierten Fortbildung auf Teilnehmermerkmale nachweisen?
3. Erfahren fachliche Fortbildungen Akzeptanz seitens der Lehrkräfte?

3. Das Fortbildungskonzept „Mathe?Klasse! 4 teachers“

Für die *inhaltliche Konzeption* sind die *Empfehlungen für Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik* von DMV u.a. (2008) richtungsweisend. Aus den dort gelisteten grundschulrelevanten Themen wird der erste Bereich *Arithmetik und Algebra* exemplarisch ausgewählt. Es kristallisieren sich vier Schlagworte für die Inhalte des Fortbildungskonzeptes heraus.

Für die *methodische Konzeption* der Fortbildung sind die Prämissen der Wirksamkeitsforschung für Fortbildungen (Lipowsky 2012) grundlegend. Es ergeben sich vier Fortbildungsmodule, orientiert an den vier Inhaltsbereichen. Weiterhin weisen die Module eine dreigliedrige Struktur auf, beginnend mit der Inputphase. In der nachfolgenden Entdeckerphase erforschen die Lehrkräfte, die gemeinsam erarbeiteten Inhalte der Inputphase im eigenen Unterricht. Diese halten sie in der individuellen Reflexionsphase in einem Entdeckerbericht fest, als Grundlage für den kollegialen Austausch am Beginn des nächsten Moduls, der sozial-interaktiven Reflexion (Dietz, 2015).

Die Begleitforschung folgt einem Pre-Post-Follow up Design mit Leitfadeninterviews und Fragebögen. Der Zeitraum für die Fortbildung einschließlich der Befragungen umfasst 11 Monate. An der Fortbildung nahmen 12 Lehrkräfte teil, das Durchschnittsalter lag bei 49 und fast die Hälfte der Lehrkräfte hat Mathematik weder fachdidaktisch noch fachlich studiert.

4. Auswertung der Evaluation durch Fragebögen

In Fragebögen wurden u. a. Einstellungen der Lehrkräfte zur (1) Natur mathematischer Leistungen und zum (2) Lehren und Lernen von Mathematik zu drei Messzeitpunkten (MZP) erhoben, um potentielle Veränderungen festzustellen.

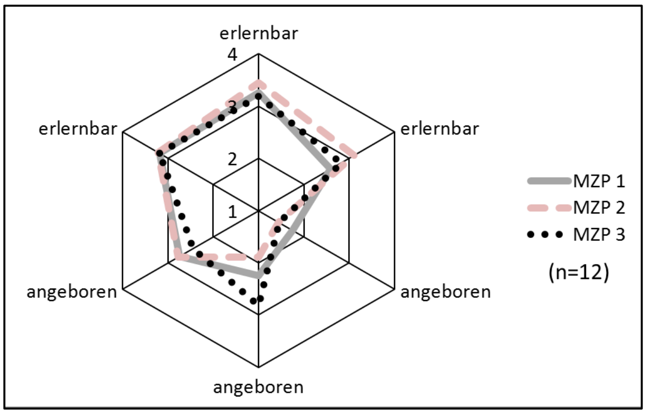


Abbildung 1: Beliefs zur Natur mathematischer Leistungen

(1) Die Überzeugungen der Lehrkräfte über die Natur mathematischer Leistungen sind durch 6 Items erhoben worden. In der Auswertung erfolgt die Skalierung anhand der Selbstzuordnung der Lehrkräfte von 1 – ich stimme nicht zu (der innere Punkt der Grafik) bis hin zu 4 – ich stimme voll zu (der äußere Ring dieser Grafik).

Das Netzdiagramm (Abb. 1) zeigt ein sehr uneinheitliches Bild, wobei die Einstellungen eher in Richtung der Erlernbarkeit mathematischer Leistungen tendieren. Die Antwortstrukturen zur Grundeinstellung, mathematische Fähigkeiten seien angeboren, zeigen aber keine völlige Ablehnung, sondern nur eine tendenzielle.

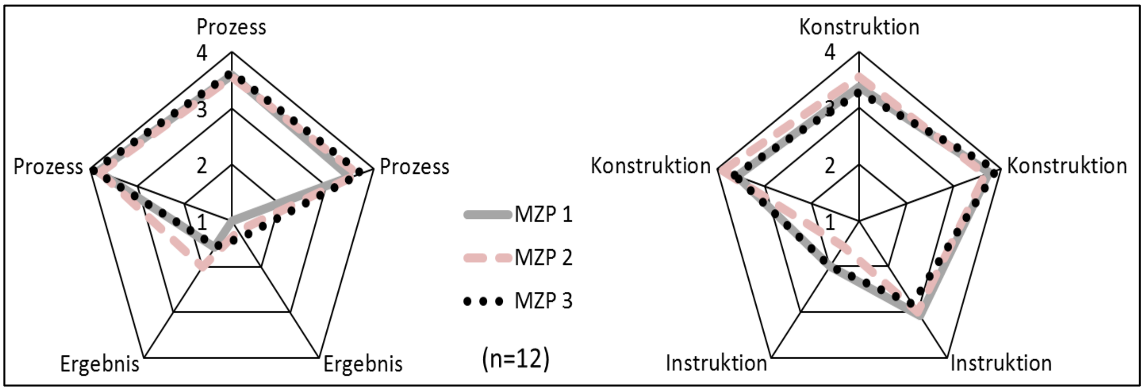


Abbildung 2: Beliefs zu Lehren und Lernen in Mathematik

(2) Beliefs zu Lehren und Lernen in Mathematik sind in insgesamt 10 Items erhoben und unter Verwendung derselben Skalierung wie bei Grafik 1 dargestellt analysiert worden. Beim Antwortverhalten zu den ersten 5 Fragen zum Gegensatzpaar Ergebnis- und Prozessorientierung ist deutlich zu erkennen, dass die Lehrkräfte einer Ergebnisorientierung nicht zustimmen. Konsequent spiegelt sich bei diesem Gegensatzpaar die Einstellung in den hohen Zustimmungswerten zur Prozessorientierung des Mathematikunterrichts wider, sodass sich eine klare, nach oben gerichtete Orientierung der Darstellung im Netzdiagramm ergibt. Beim Gegensatzpaar Instruktion – Konstruktion kann konstatiert werden, dass sich die Lehrkräfte bei den beiden Fragen, die eher von einem Unterricht mit Instruktion ausgehen, uneinig sind und sich so insgesamt hier keine klare Positionierung der Gruppe im Diagramm ausmachen lässt.

Generell kann erkannt werden, dass sich die Selbstauskünfte über Überzeugungen der Lehrkräfte nicht wesentlich über die Messzeitpunkte hinweg bzw. nach der Fortbildung verändert haben.

Im Fragebogen wurden außerdem 8 Items von den Lehrkräften beantwortet, die fachliche und fachdidaktische Kompetenzen erheben. Die Auswertung der Antworten der Lehrkräfte fand nach deduktiv gebildeten Kategorien (*Wissensbereich*, *Lösungsrichtigkeit* und verwendete *Sprache* der Lehrkräfte) statt, kann aber aus Platzgründen hier nicht dargestellt werden.

5. Ausblick

Die bisherige Analyse erfolgte von den Items aus. Die weitere Auswertung der Wirkungen und der Akzeptanz der Intervention wird anhand von Fallstudien erfolgen. Dafür wird die qualitative Inhaltsanalyse (Mayring 2010) verwendet, wofür bereits ein Kategoriensystem deduktiv entwickelt wurde. Die Codierung orientiert sich an den Prämissen der Wirksamkeitsforschung zu Fortbildungen (Lipowsky 2012) und beinhaltet die Kategorien *Konzeption der Fortbildung*, *Wahrnehmung und Nutzen der Lerngelegenheiten* und die *Voraussetzungen der Lehrperson*.

Literatur

Blömeke, S. et al. (2010). *TEDS-M 2008. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primärstufenlehrkräfte für die im internationalen Vergleich.* Münster: Waxmann.

Dietz, Eva (2015). Mathe?Klasse! 4 teachers – Erprobung eines Fortbildungskonzeptes für Grundschullehrkräfte. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (S. 232-235). Münster: WTM Verlag

Krauss, S. et al. (2008). Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und –Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. In *Journal für Mathematik-Didaktik 29,* (3/4), 223–258.

Lipowsky, F. & Rzejak, D. (2012). „Lehrerinnen und Lehrer als Lerner – Wann gelingt der Rollentausch? Merkmale und Wirkungen wirksamer Lehrerfortbildungen“ In *Schulpädagogik heute*, 5 (3), 1–17.

Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse*. Weinheim: Beltz.

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. In *Educational Researcher, 15* (2), 4–14.

DMV, GDM, MNU (2008). *Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik.* Empfehlungen von DMV, GDM und MNU. (http://madipedia.de/images/2/21/Standards_Lehrerbildung_Mathematik.pdf, 12.02.2016).

Christian DORNER, Wien

Finanzmathematik im Unterricht – Was soll unterrichtet werden? – ein Zugang über zentrale Ideen

1. Wieso zentrale Ideen?

Im Bereich Finanzmathematik im Mathematikunterricht gibt es bereits zwei Dissertationen, vgl. DÖHRMANN 2005 und DAUME 2009. Des Weiteren existieren einige Publikationen dazu in Fachzeitschriften, Tagungsbänden und Sammelwerken. Darin findet man beispielsweise das Binomialmodell zum Modellieren von Aktienkursen, die Berechnung von Optionspreisen und zum Teil auch die Portfoliooptimierung. Diese Vorschläge sind zwar jeweils in sich begründet, doch von einem außenstehenden Standpunkt wirken sie isoliert, unzusammenhängend und unfundiert.

Diese Situation erinnert an die Diskussion von *fundamentalen Ideen*. In der fachdidaktischen Literatur existiert kein Konsens über die Definition einer *fundamentalen Idee*. In diesem Aufsatz wird die Definition von SCHWILL verwendet, der unter einer *fundamentalen Idee* ein Denk-, Handlungs-, Beschreibungs- oder Erklärungsschema versteht, das das **Horizontalkriterium**, das **Vertikalkriterium**, das **Zeitkriterium** und das **Sinnkriterium** erfüllt (SCHWILL, 1993, S. 20 ff.). Im folgenden Diskurs wird der Begriff *zentrale Idee* anstatt *fundamentale Idee* benutzt, an dieser Stelle ist auf SCHREIBER 1979 zu verweisen, der in diesem Zusammenhang für ein Teilgebiet der Mathematik den Ausdruck *zentrale Idee* prägte.

Wie gewinnt man nun am besten *zentrale Ideen*? Bis dato existiert kein Werk, welches sich mit *zentralen Ideen* der Finanzmathematik beschäftigt. Das erfordert ein exploratives Vorgehen. Im Rahmen eines qualitativen ExpertInneninterviews wurden sechs FinanzmathematikerInnen befragt. Dieses Vorgehen wird durch die folgende Aussage von BRUNER gestützt:

> *"It (=designing curricula) is a task that cannot be carried out without the active participation of the ablest scholars and scientists."* (BRUNER, 1960, S. 19)

Mit Hilfe einer qualitativen Inhaltsanalyse wurden fünf *zentrale Ideen* der Finanzmathematik aus den Transkripten gewonnen, die alle im großen „Teich" der Modellierung und Optimierung „schwimmen". Die Ideen lauten: *Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik, Handhabung von Risiko* (Nutzentheorie und Diversifikation), *No-Arbitrage-Prinzip*, *Replikation* und *Zeitwert des Geldes* (siehe Abbildung 1). Um nachzuweisen, dass es sich dabei um eine *zentrale Idee* handelt, müssen die vier Kriterien von SCHWILL nachgewiesen werden. Exemplarisch wird das im Folgenden an einer *zentralen Idee* aufgezeigt. In Anlehnung an die Leitfadenkonzeption werden die vier Kriterien in einer anderen Reihenfolge als in der Definition erläutert.

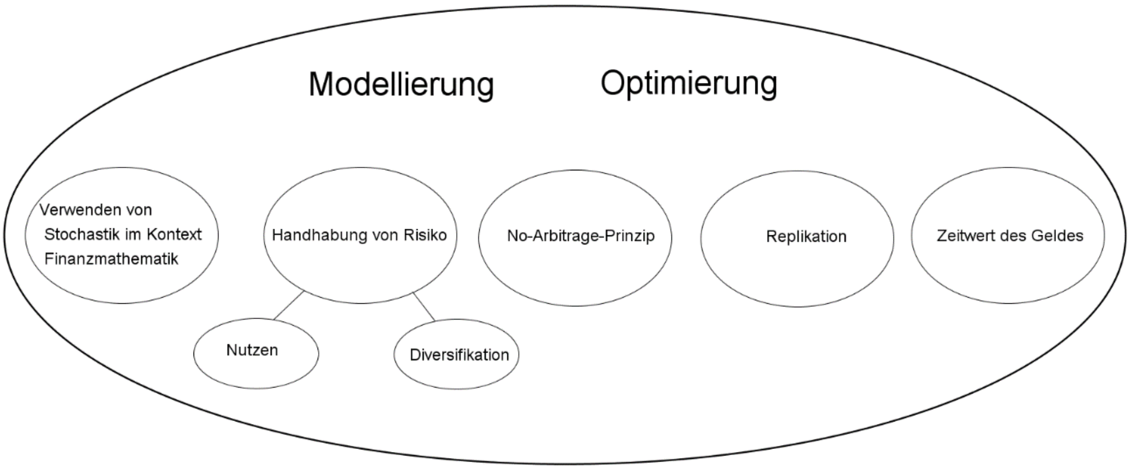


Abbildung 1 Zentrale Ideen der Finanzmathematik

2. Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik

Zeitkriterium: BACHELIER brachte den Zufall in die Finanzmathematik (BACHELIER, 1900). Es besteht kein Zweifel, dass der Einzug des probabilistischen Denkens in der Finanzmathematik hier festzumachen sei, wie einer der Interviewpartner (FM3 für FinanzmathematikerIn 3) bestätigt:

> *FM3: „Die erste zentrale Idee ist das Verwenden von Wahrscheinlichkeitstheorie im Kontext von Finanzmathematik. Das geht zu mindestens auf Bachelier zurück, der eben einen geradezu mythischen Glauben an die Wahrscheinlichkeit hatte* […] *diesen Aspekt überhaupt einzubauen ist eine grundlegende Idee."*

Die längerfristige Relevanz dieser Idee begründet sich allein dadurch, dass mit der stochastischen Finanzmathematik ein eigener Wissenschaftszweig entstanden ist. Ein Blick auf aktuelle Forschungsarbeiten bestätigt, dass diese Idee Zukunft haben wird.

Horizontalkriterium: Aufgrund der Etablierung der stochastischen Finanzmathematik wird dieses Denkschema nahezu überall verwendet, und das nicht nur in der Wissenschaft, sondern auch in der Praxis, wo statistische Anwendungen und Risikoabschätzung zum täglichen Brot gehören.

Sinnkriterium: Die gedankliche Abkehr vom Determinismus stellt einen wichtigen Aspekt dar. Im Alltag dürfte diese Idee noch nicht flächendeckend Niederschlag gefunden haben. Hierzu denke man an seriös wirkende Herren im Anzug, die einem die optimale Investmentstrategie, sei es im Fernsehen oder im Internet oder gar in der Bank, verkaufen.

Die Vorgänge am Finanzmarkt sind nicht deterministisch anzusehen, sondern probabilistisch. Ein börsennotierter Kurs kann nicht vorhergesagt werden. Solche Kurse werden jederzeit vom wirtschaftlichen, politischen und gesellschaftlichen Geschehen beeinflusst. Es ist nicht vorherzusagen, wann neue kursrelevante Ereignisse passieren. Hierzu ein Zitat eines Probanden:

> *FM1„Ich finde eine coole Erkenntnis aus der Finanzmathematik ist schon* […], *dass wenn die letzten fünf Tage der Aktienkurs gestiegen ist, dass das dann überhaupt keine Aussage darüber ermöglicht, ob der Kurs am sechsten Tag auch wieder steigen wird oder nicht steigen wird. Das ist etwas, was man nicht glaubt, oder?"*

Vertikalkriterium: Dieses Schema lässt sich auf unterschiedlichen intellektuellen Niveaus durchführen. Auf einer sehr einfachen Stufe: Es lässt sich nicht in die Zukunft schauen, man kann keinen Kurs vorhersagen. Auf einem höheren Niveau ist es das Modellieren eines Aktienkurses wie zum Beispiel in einem diskreten Setting das Binomialmodell. Wiederum eine Stufe höher steht das Modellieren eines Kurses S in kontinuierlicher Zeit t, der mit einer stochastischen Differentialgleichung und der BROWN'schen Bewegung W beschrieben wird: $\mathrm{d}S(t) = \alpha S(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}W(t)$. Auf einem sehr viel höheren Niveau steht das *Fundamental Theorem of Asset Pricing*, welches die Beziehung zwischen Martingalen und Arbitrage herstellt (vgl. DELBEAN & SCHACHERMAYER, 2006, S. 5).

3. Bedeutung für die Schule

Ausgehend von den *zentralen Ideen* sollen nun Inhalte der Finanzmathematik für den Mathematikunterricht ausgewählt werden. Ein vollständiges Durchdringen einer *zentralen Idee* in der Schule ist per Definition einer solchen nicht intendiert. Es benötigt also weitere Kriterien für einen räsonablen (anwendungsorientierten) Mathematikunterricht zur Finanzmathematik. BLUM 1978, JABLONKA 1999 und WINTER 2016 haben jeweils passende Kriterien ausgewiesen. Aus diesen Katalogen wurden vier Kriterien gewonnen, die im Folgenden stichwortartig beschrieben werden.

- **Formale Aspekte**: Lehrplankonformität, passendes Zeitausmaß
- **Eignung:** unmittelbar für den/die Schüler/in zu gebrauchen oder in seinem/ihrem mutmaßlichen späteren Leben von Nutzen sein
- **Authentizität:** glaubwürdige Probleme sollen behandelt werden, wird durch die Auswahl der Inhalte aus den *zentralen Ideen* erreicht
- **Mathematische Aspekte:** die verwendete Mathematik darf nicht zu trivial und nicht zu anspruchsvoll sein

Mit Hilfe der *zentralen Ideen* und der genannten Kriterien können nun einerseits bestehende Unterrichtsvorschläge zur Finanzmathematik begründet eingeordnet werden und anderseits neue fundiert entwickelt werden.

4. Neue Unterrichtsvorschläge

Ein Bereich, der in der Schule kaum thematisiert wird, sind Unterrichtssequenzen zur *zentralen Idee* mit dem Namen *Handhabung von Risiko*:

- Kredite und Risiko: Kredite werden in der Schule immer relativ starr betrachtet. In Wirklichkeit ändert sich der für die Höhe der Raten bzw. Dauer der Rückzahlung maßgebende Zinssatz während der Laufzeit. Den Auswirkungen (bzw. dem Risiko) sind sich viele KreditnehmerInnen nicht bewusst.
- Diversifikation: Die Diskussion des Prinzips: „Setze nicht alles auf eine Karte", also die Strategie zur Verringerung des Risikos stellt eine weitere Möglichkeit dar.

Literatur

Bachelier L. (1900). *Théorie de la spéculation*. Université Paris Sorbonne: Dissertation.

Bruner J. (1960). *The process of education*. Cambridge: Harvard University Press.

Blum W. (1978). Einkommensteuern als Thema des Analysisunterrichts in der beruflchen Oberstufe. In: *Die berufsbildende Schule, Zeitschrift des Berufsverbandes der Lehrer an beruflichen Schulen,* (S. 642 – 651) Wolfenbüttel: Heckners Verlag.

Daume P. (2009). *Finanzmathematik im Unterricht*. Wiesbaden: Vieweg-Verlag.

Delbean F. & Schachermayer W. (2006). *The mathematics of arbitrage*. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag.

Döhrmann M. (2005). *Zufall, Aktien und Mathematik: Vorschläge für einen aktuellen und realitätsbezogenen Stochastikunterricht*. Hildesheim/Berlin: Verlag Franzbecker.

Jablonka E. (1999). Was sind „gute" Anwendungsbeispiele? In: Maaß J. und Schlöglmann W. (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht,* (S. 65 – 74), Hildesheim: Verlag Franzbecker.

Schreiber A. (1979). Universelle Ideen im mathematischen Denken – ein Forschungsgegenstand der Fachdidaktik. In: *mathmatica didactica,* 2, (165 – 171).

Schwill A. (1993). Fundamentale Ideen der Informatik. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* , 25, 1, (20 – 31).

Winter H. W. (2016). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblick in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Wiesbaden: Springer-Verlag (3. Aufl.).

Anika DREHER, Anke LINDMEIER, Aiso HEINZE, Kiel

Professionelles Fachwissen von Lehrkräften der Sekundarstufen im Spannungsfeld zwischen akademischer und schulischer Mathematik

Konzeptualisierungen des Fachwissens gehen meist vom Schulfachwissen aus und weisen mehr oder weniger Bezüge zum akademischen Fachwissen auf. Insbesondere in der gymnasialen Lehramtsausbildung wird jedoch häufig vertieftes akademisches Fachwissen vermittelt, dessen Zusammenhang mit „schulrelevantem“ Fachwissen unklar ist. Auf Basis von bisherigen Modellen zum Verhältnis Fachwissenschaft und Schulfach schlagen wir daher vor, ein Konstrukt zum berufsbezogenen Verknüpfungswissen zu berücksichtigen.

Die Diskrepanz zwischen schulischer und akademischer Mathematik

Schulmathematik und die Mathematik, die typischerweise an Universitäten praktiziert und gelehrt wird, unterscheiden sich bekanntlich stark voneinander – nicht nur in Bezug auf die Inhalte und das Abstraktionsniveau, sondern auch bezüglich der charakteristischen Epistemologie (z.B. Bromme, 1994; Wu, 2011): Mathematik als Wissenschaftsdisziplin hat eine axiomatisch-deduktive Struktur und ist meist geprägt von einem hohen Abstraktionsniveau sowie einer formalen symbolischen Sprache. Im Gegensatz dazu steht in der Schulmathematik häufig die Anwendung von Mathematik als Werkzeug für das Beschreiben und Verstehen der Umwelt im Vordergrund. Mathematische Objekte werden dabei oft auf empirische Weise kontextgebunden eingeführt und Begriffsbildung erfolgt eher induktiv mit Hilfe von Prototypen.

Auf die Probleme, die diese Diskrepanz für die Lehrerprofession mit sich bringt, hat bekanntlich bereits Felix Klein (1908) hingewiesen:

> Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkte mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat […]. Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so soll er plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten; da er diese Aufgabe kaum selbständig mit der Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so wird er in den meisten Fällen recht bald die althergebrachte Unterrichtstradition aufnehmen, und das Hochschulstudium bleibt ihm nur eine mehr oder minder angenehme Erinnerung, die auf seinen Unterricht keinen Einfluss hat. (S. 1)

Diese Problematik ist noch immer aktuell (z.B. Wu, 2011), obwohl Klein (1908) bereits einen Lösungsansatz angedeutet hat, indem er vorschlug angehenden Mathematiklehrkräften sogenannte Elementarmathematik vom höheren Standpunkt zu lehren. Doch was ist eine aktuelle Interpretation dieses bekannten Schlagworts? Das Verständnis der nicht-trivialen Beziehung zwischen akademischer und schulischer Mathematik ist anscheinend ein Schlüssel zur Lösung des Problems und damit ist eine Analyse dieser Beziehung auch entscheidend dafür ein berufsspezifisches Fachwissen für Sekundarstufenlehrkräfte zu charakterisieren.

Ansätze zur Klärung des Verhältnisses zwischen Mathematik als Wissenschaftsdisziplin und Mathematik als Schulfach wurden bereits in den 1960er und 1970er Jahren im Rahmen der Curriculumforschung, der Gestaltung der universitären Lehrerbildung sowie der Verfahren zur fachbezogenen Unterrichtsanalyse diskutiert. Im Kontext der Curriculumforschung wurde beispielsweise betont, dass Lehrkräfte Wissen über die Struktur der Schulmathematik und auch über Gründe für diese Struktur benötigen (z.B. Fletcher, 1975). Solche Gründe können zumindest teilweise in fundamentalen Ideen der Mathematik gesehen werden, die im Sinne eines Spiralcurriculums auch in der Schulmathematik vermittelt werden sollen und so dabei helfen die Lücke zwischen akademischer und schulischer Mathematik zu einem gewissen Grad zu überbrücken (Bruner, 1960; Schweiger, 2006). Es bleiben jedoch Inkonsistenzen, welchen Lehrkräfte lokal auf Ebene der spezifischen Inhalte begegnen müssen, indem sie Zusammenhänge zwischen akademischer und schulischer Mathematik herstellen. Solche Zusammenhänge können ausgehend von der Wissenschaftsdisziplin (top-down) oder auch ausgehend vom Schulfach (bottom-up) gesehen werden. Ausgehend von der akademischen Mathematik ist die Frage wie solche mathematischen Inhalte in den schulischen Kontext transformiert werden können seit jeher zentral für die Mathematikdidaktik und entsprechendes Wissen ist bedeutsam für Mathematiklehrkräfte (z.B. Fletcher, 1975; Freudental, 1973). Da Lehrkräfte in Schulbüchern und Lernumgebungen jedoch häufig auch mit bereits transformierten mathematischen Inhalten konfrontiert sind, müssen sie auch entscheiden können, ob diese auf angemessene Weise transformiert wurden. Dazu ist Wissen darüber nötig, welche mathematischen Definitionen, Sätze und Beweise hinter den Inhalten der Schulmathematik liegen. Solche bottom-up Zusammenhänge wurden beispielsweise bereits in den 1970er Jahren betrachtet, als die Idee der mathematischen Hintergrundtheorie aufkam (z.B. Vollrath, 1979).

Konzeptualisierung des professionellen Fachwissens

Vor dem Hintergrund dieser Überlegungen zum Verhältnis von akademischer und schulischer Mathematik haben wir Konzeptualisierungen des professionellen Fachwissens von Mathematiklehrkräften aus bekannten Studien analysiert und geben an dieser Stelle einen kurzen Einblick.

Die Beschreibungen der intendierten Fachwissenskonzeptualisierung in der COACTIV-Studie zeigen, dass hier tatsächlich auf Wissen im Spannungsfeld zwischen schulischer und akademischer Mathematik abgezielt wurde – der entstandene Fachwissenstest konnte jedoch prinzipiell auch von sehr guten Lernenden der gymnasialen Oberstufe gelöst werden und ging damit kaum über die Schulfachwissen hinaus (Kunter et al., 2013). Auch für die Untersuchung von Lehramtsstudierenden im Rahmen von TEDS-M zeigen die veröffentlichten Beispielitems nur wenig Bezug zur akademischen Mathematik (Brese & Tatto, 2012). Die Fachwissenskonzeptualisierung der Michigan Group (z.B. Bass & Bass, 2003) enthält als Kernstück das sogenannte *specialized content knowledge* (SCK) als ein berufsspezifisches Fachwissen für Mathematiklehrkräfte. Eine Analyse der Beschreibungen und Beispiele der Autoren zu diesem Konstrukt zeigt, dass SCK im Wesentlichen als ein Wissen über Zusammenhänge zwischen schulischer und akademischer Mathematik gesehen werden kann (vgl. Ball & Bass, 2003). Zu beachten ist dabei allerdings, dass das Modell der Michigan Group anforderungsbezogen speziell für Grundschullehrkräften in den USA entwickelt wurde, die in ihrer Ausbildung kaum akademisches Fachwissen erwerben. Damit bleibt offen, wie ein entsprechendes berufsspezifisches Fachwissenskonstrukt für das Sekundarstufenlehramt beschaffen sein muss.

Durch die hier nur skizzierte Analyse sowohl von Arbeiten zum Verhältnis von schulischer und akademischer Mathematik als auch von unterschiedlichen Konzeptualisierungen des Fachwissens aus neueren Studien sind wir zum Schluss gekommen, neben dem akademischen Fachwissen noch eine weitere, für Sekundarstufenlehrkräfte spezifische Fachwissenskomponente zu betrachten: *Fachwissen im schulischen Kontext (school-related content knowledge, SRCK)*. SRCK ist ein berufsspezifisches Fachwissen über Zusammenhänge zwischen schulischer und akademischer Mathematik und lässt sich durch die folgenden drei Facetten beschreiben: (1) Wissen über die curriculare Struktur der Schulmathematik sowie zu zugehörigen Begründungen und Wissen über Zusammenhänge zwischen akademischer und schulischer Mathematik in (2) top-down und in (3) bottom-up Richtung.

Aus empirischer Sicht stellen sich in Anbetracht dieses Konstrukts, das auf Basis theoretischer Überlegungen vorgeschlagen wurde, insbesondere die Fragen, ob es valide und reliabel gemessen werden kann, und ob es von verwandten Konstrukten (fachdidaktisches Wissen und akademisches Fachwissen) empirisch getrennt werden kann. Diese Fragen konnten mit Hilfe einer empirischen Studie mit 505 angehenden Sekundarstufenlehrkräften bereits positiv beantwortet werden (Heinze, Dreher, Lindmeier, & Niemand, angenommen). Noch unbeantwortet ist aber beispielsweise die Frage, ob Lehramtsstudierende SRCK direkt erwerben können, oder ob dazu notwendigerweise zunächst akademisches Fachwissen als kohärente Grundlage benötigt wird.

Literatur

Ball, D. L. & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In E. Simmt & B. David (Hrsg.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (S. 3–14). Edmonton: CMESG/ GCEDM.

Brese, F. & Tatto, M. T. (Eds.) (2012). *TEDS-M 2008 user guide for the international database. Supplement 4*. Amsterdam: IEA.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Straesser, & B. Winkelmann (Eds.), *Mathematics didactics as a scientific discipline: The state of the art* (pp. 73-88). Dordrecht: Kluwer.

Bruner, J. S. (1960). *The process of education*. Cambridge: Harvard University Press.

Fletcher. T. (1975). Is the teacher of mathematics a mathematician or not? In H. Bauersfeld, M. Otte, & H.-G. Steiner (Hrsg.), *Schriftenreihe des IDM* (S. 203–218). Universität Bielefeld, Institut für Didaktik der Mathematik, Bielefeld.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel.

Heinze, A., Dreher, A., Lindmeier, A., & Niemand, C. (angenommen). Akademisches versus schulbezogenes Fachwissen – ein differenzierteres Modell des fachspezifischen Professionswissens von angehenden Mathematiklehrkräften der Sekundarstufe. Erscheint in *Zeitschrift für Erziehungswissenschaften*.

Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus: Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis. Vorlesung gehalten im Wintersemester 1907-08*. Leipzig: Teubner.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W. Klusmann, U. Krauss, S., & Neubrand, M. (2013) *Cognitive activation in the mathematics classroom and professional competence of teachers. Results from the COACTIV project*. New York: Springer.

Schweiger, F. (2006). Fundamental ideas: A bridge between mathematics and mathematical education. In J. Maass & W. Schlöglmann (Hrsg.), *New mathematics education research and practice* (S. 63–73). Rotterdam: Sense.

Vollrath, J. (1979). Die Bedeutung von Hintergrundtheorien für die Bewertung von Unterrichtssequenzen. *Der Mathematikunterricht 25*(5), 77-8.

Wu, H. (2011). The mis-education of mathematics teachers. *Notices of the AMS 58*(3), 372-384.

Christina DRÜKE-NOE, Weingarten; Henriette HOPPE, Schwäbisch Gmünd; Kerstin METZ, Ludwigsburg

Aufgabenanalysekompetenz von Lehrkräften

Nach kurzen Ausführungen zur Bedeutung von Aufgaben wird ein allgemeindidaktisches Kategoriensystem zur Analyse von Aufgaben verschiedener Fächer vorgestellt, das in Lehrerfortbildungen eingesetzt wird, in denen die Aufgabenanalysekompetenz von Lehrkräften erhoben und weiterentwickelt wird. Erste Erkenntnisse aus Befragungen der Lehrkräfte werden präsentiert; abschließend werden die Ergebnisse kurz bewertet.

Am hier vorgestellten interdisziplinären Projekt zur Erhebung der Aufgabenanalysekompetenz von Lehrkräften sind neben den Autorinnen dieses Beitrages Thorsten Bohl (Universität Tübingen), Uwe Maier (PH Schwäbisch Gmünd) und Marc Kleinknecht (TU München) beteiligt.

1. Bedeutung von Aufgaben

In allen Fächern, und besonders im Fach Mathematik, sind Aufgaben von zentraler Bedeutung, denn sie sind ein wesentliches Steuerungsinstrument des Unterrichts. Mit Aufgaben wird Unterricht geplant und durchgeführt und mit ihnen werden Lernprozesse gestaltet, deren Ergebnisse vielfach anhand von Aufgabenbearbeitungen überprüft werden. Darüber hinaus werden Aufgaben u.a. genutzt, um gesellschaftliche Ansprüche zu kommunizieren, um Unterrichtsentwicklung zu befördern und um Lehrkräfte zu professionalisieren (u.a. Arbaugh & Brown, 2005; Brunner et al., 2006).

Derartig vielfältige Ansprüche an Aufgaben legen es nahe, deren Merkmale genauer zu erfassen, um Aufgaben anschließend gezielt(er) auszuwählen, sie anzuordnen, die in verschiedenen Situationen des Lernens und des Leistens gestellten Aufgaben zu reflektieren und weiterzuentwickeln oder um die Schwierigkeit von Aufgaben kriterial einzuschätzen oder zu variieren.

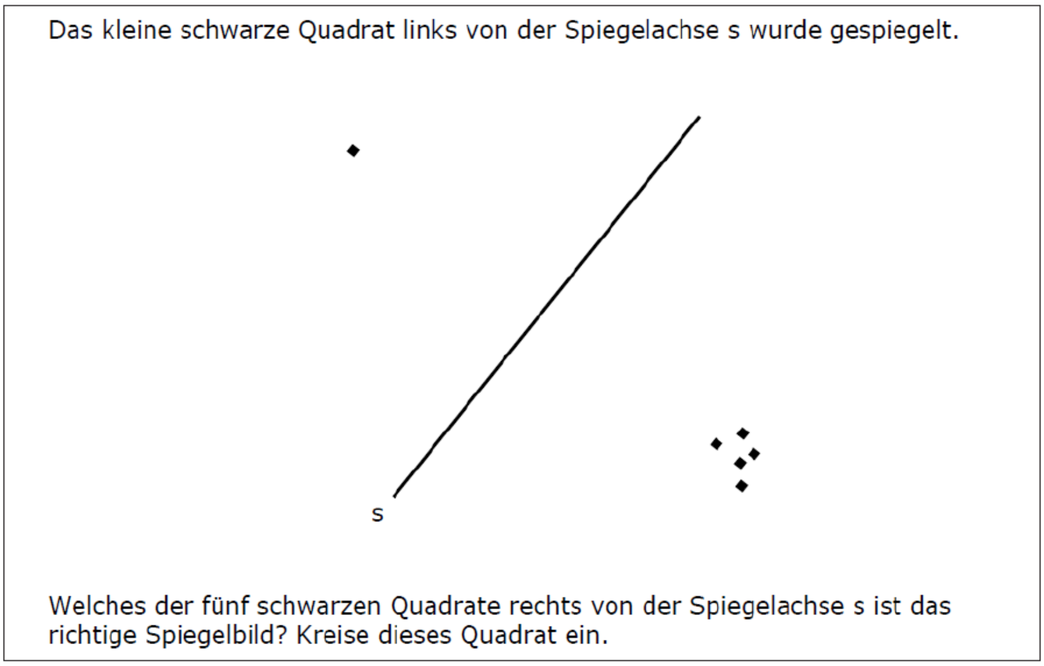
2. Kategoriensystem zur Erfassung von Aufgabenmerkmalen

Im Projekt wird ein allgemeindidaktisches Kategoriensystem zur Erfassung von Aufgabenmerkmalen verwendet, das objektive Anforderungen von Aufgaben, die in unterschiedlichen didaktischen Situationen gestellt werden, übersichtlich erfassen soll, indem es möglichst wenige Analysedimensionen ausweist. Es umfasst sieben Kategorien, die ihrerseits in Subkategorien eingeteilt sind (vgl. Tabelle sowie Kleinknecht et al., 2013).

Das Kategoriensystem fokussiert auf die Analyse des kognitiven Aktivierungspotenzials von Aufgaben und es soll Impulse für die fach- und schulübergreifende Unterrichtsentwicklung geben, indem es eine überfachliche gemeinsame Gesprächsbasis für Lehrkräfte verschiedener Fächer bietet und gut für den schulpraktischen Einsatz geeignet ist. Bei Bedarf kann dieses Kategoriensystem kann durch fachspezifische Kategorien ergänzt werden.

<table>
<tr><th>Kategorie</th><th colspan="7">Subkategorien</th></tr>
<tr><td>1. Art des Wissens</td><td colspan="2">Fakten</td><td colspan="2">Prozeduren</td><td colspan="2">Konzepte</td><td>Metakognition</td></tr>
<tr><td>2. Kognitive Prozesse</td><td colspan="2">Reproduktion</td><td colspan="2">Naher Transfer</td><td colspan="2">Weiter Transfer</td><td>Problemlösen</td></tr>
<tr><td>3. Anzahl der Wisseneinheiten</td><td colspan="2">Eine WE</td><td colspan="3">Bis zu 4 WE</td><td colspan="2">Mehr als 4 WE</td></tr>
<tr><td>4. Offenheit der Aufgabenstellung</td><td colspan="2">Definiert/konvergent</td><td colspan="3">Definiert/divergent</td><td colspan="2">Ungenau/divergent</td></tr>
<tr><td>5. Lebensweltbezug</td><td colspan="2">Kein</td><td colspan="2">Konstruiert</td><td colspan="2">Authentisch</td><td>Real</td></tr>
<tr><td>6. Sprachlogische Komplexität</td><td colspan="2">Niedrig</td><td colspan="3">Mittel</td><td colspan="2">Hoch</td></tr>
<tr><td>7. Repräsentationsformen des Wissens</td><td colspan="2">Eine</td><td colspan="3">Integration</td><td colspan="2">Transformation</td></tr>
</table>

Im Sinne des Kategoriensystems ist z.B. die nachstehende Aufgabe „Spiegelung“, die genauer in Drüke-Noe und Merk (2013) analysiert ist, definiert/konvergent und sie verlangt als Art des Wissens die Anwendung einer Prozedur. Ändert man die Fragestellung in „Identifiziere Punkt und Bildpunkt. Spiegele anschließend beide Punkte so, dass ein Quadrat entsteht.“, so erhält man eine kognitiv anspruchsvollere Aufgabenvariante, die das Konzept Quadrat erfordert und definiert/divergent ist.



3. Erste Erhebungen zur Aufgabenanalysekompetenz

Das Kategoriensystem wird im Rahmen einer zwei Halbtage umfassenden Fortbildung einsetzt, während der üblicherweise alle Lehrkräfte einer Schule es kennenlernen und anwenden, um Aufgaben verschiedener Fächer zu analysieren und zu verändern. Zu Beginn des ersten sowie am Ende des etwa vier Wochen später stattfindenden zweiten Termins werden mittels eines Fragebogens Kenntnisse der Lehrkräfte über schwierigkeitsgenerierende Merkmale von Aufgaben erhoben. Der Fragebogen enthält je zwei Aufgaben der Fächer Deutsch und Mathematik, die bezüglich ihrer Schwierigkeitsmerkmale analysiert sowie gezielt variiert werden sollen, um sie einfacher bzw. schwieriger zu gestalten. Die Ergebnisse dieser Erhebungen geben Hinweise auf Veränderungen des Blicks der Lehrkräfte auf Aufgaben und deren Schwierigkeitsmerkmale.

Bislang nahmen 52 Lehrkräfte zweier Schulen der Sekundarstufe I an diesen Fortbildungen teil. Die ersten Ergebnisse der Eingangsbefragungen geben Hinweise darauf, dass die Lehrkräfte der verschiedenen Fächer zwar vielzählige Merkmale zur Beschreibung und Analyse von Aufgaben angeben, die sich teilweise den sieben Kategorien zuordnen lassen, dass jedoch die verwendeten Begriffe nur sehr vage bei der Analyse und anschließenden Variation von Aufgaben angewendet werden.

Allgemeine Schwierigkeitseinschätzungen zu Aufgaben beziehen sich vorwiegend auf kognitive Prozesse und die Frage, ob es sich um eine Reproduktions- oder eine Transferaufgabe handelt. Weiterhin wird vielfach auf die Verständlichkeit einer Aufgabe verwiesen (sprachlogische Komplexität) bzw. auf ihre Offenheit, wobei Letzteres sich im Unterschied zum Kategoriensystem eher auf das Antwortformat bezogen wird. Weitere, mit Blick auf die Aufgabenschwierigkeit vermehrt genannte Merkmale, die sich keiner Kategorie zuordnen lassen, sind die Bearbeitungszeit, die übersichtliche Darstellung und Optik sowie die Sozialform, in der eine Aufgabe zu bearbeiten ist.

Die von den Lehrkräften gemachten Vorschläge zur Veränderung der Schwierigkeit der angebotenen Aufgaben fokussieren auf nur sehr wenige Aufgabenmerkmale; mehrfach fehlen Vorschläge, wie eine Aufgabe verändert werden könnte. Vorschläge zur Vereinfachung der Aufgabe „Spiegelung“ beziehen sich vorwiegend auf die Anzahl und Lage der Punkte rechts der Spiegelachse sowie auf deren Darstellung auf Karopapier. Vorschläge, diese Aufgabe schwieriger zu gestalten, beziehen sich zumeist ebenfalls auf die Lage der Punkte oder alternativ auf die Lage der Spiegelachse. Vorschläge zur Erhöhung bzw. zur Verminderung des Schwierigkeitsgrades, die man beispielsweise den Kategorien Wissensart, kognitive Prozesse oder Offenheit der Aufgabe zuordnen würde, fehlen.

Die Ergebnisse der Ausgangsbefragung lassen erkennen, dass die Kategorien des Kategoriensystems von allen Lehrkräften angewendet werden. Im Unterschied zur Eingangsbefragung werden bereits verfügbare Kriterien zur Analyse von Aufgaben spezifischer und differenzierter angewendet und es werden seltener Merkmale benannt, die sich nicht auf Kategoriensystem beziehen, sodass dieses bei vorsichtiger Deutung dieses Befundes möglicherweise als erschöpfend für eine differenzierte Aufgabenanalyse angesehen wird. Des Weiteren wird deutlich, dass die teilnehmenden Lehrkräfte zunehmend differenziert von den Kategorien und ihren Subkategorien Gebrauch machen. Insbesondere die Kategorien Sprachlogische Komplexität und Kognitive Prozesse werden differenzierter angewendet.

4. Fazit

Diese ersten Ergebnisse legen nahe, dass dieses Kategoriensystem sich für die Verwendung in der Schulpraxis bewährt, es jedoch Schulungen bedarf, um die enthaltenen allgemeindidaktischen Kategorien fachdidaktisch zu übersetzen und anzuwenden. Es bietet Lehrkräften verschiedener Fächer eine gemeinsame Gesprächsbasis und es scheint geeignet, das Bewusstsein für Aufgabenmerkmale zu schaffen bzw. zu erhöhen, um beispielsweise für heterogene Lerngruppen Aufgaben verschiedenen Schwierigkeitsgrades gezielt auszuwählen oder diese gezielt zu variieren. Schließlich erscheint wünschenswert, dass die Subkategorien gezielter genutzt werden, um das kognitive Aktivierungspotenzial einer Aufgabe zu erhöhen.

Literatur

Arbaugh, F. & Brown, C. A. (2005). Analyzing Mathematical Tasks: A Catalyst for Change? *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(6), 499-536.

Brunner, M., Kunter, M., Krauss, S., Klusmann, U., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Dubberke, T., Jordan, A., Löwen & K., Tsai, Y. (2006). Die professionelle Kompetenz von Mathematiklehrkräften: Konzeptualisierung, Erfassung und Bedeutung für den Unterricht. Eine Zwischenbilanz des COACTIV-Projekts. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (S. 54-82). Münster: Waxmann.

Drüke-Noe, C. & Merk, S. (2013). Fachdidaktische Analyse von Aufgaben in Mathematik. In Kleinknecht et al. (Hrsg.), *Lern- und Leistungsaufgaben im Unterricht – Fächerübergreifende Kriterien zur Auswahl und Analyse* (S. 75-91). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Kleinknecht, M., Bohl, T., Maier, U. & Metz, K. (2013). *Lern- und Leistungsaufgaben im Unterricht – Fächerübergreifende Kriterien zur Auswahl und Analyse*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Korschenbroich

Ein neuer Vorschlag zur Vermittlung von Grundvorstellungen der Integralrechnung

Traditionell wurde und wird in der Schule die Integralrechnung meist über Flächenberechnungen eingeführt. Moderne Ansätze wie auch die Bildungsstandards gehen eher von der Änderung zum Bestand. In beiden Ansätzen kommt man zur Berechnung und Umformung von Produktsummen mit entsprechenden herzuleitenden Formeln. Dann geht es schnell zum Hauptsatz, zu Katalogen von Stammfunktionen und zu Integrationsregeln - oft zu schnell und das Verständnis von Integration und den zugehörigen Grundvorstellungen bleibt auf der Strecke. Schaut man etwas zurück, so stellt man fest, dass dies erst eine Entwicklung seit einigen Jahrzehnten ist:

"Es besteht ja kein Zweifel darüber, dass die Technik des Integrierens nicht zu den Lehraufgaben der höheren Schule gehört, dagegen darf man wohl von einem zur Hochschule gehenden jungen Menschen erwarten, dass er den Sinn des Integralzeichens wirklich begriffen hat." (Kraft, 1948).

1. Integrator I und II

Klassische analoge Geräte wie *Integrimeter* oder *Integraph* konnten auf graphischem Wege Integrale ermitteln oder Integralfunktionen zeichnen. Diese Geräte können heute wieder Impulse geben, mit dynamischer Software anschauliche und kalkülfreie Zugänge zur Integralrechnung und den dazu gehörigen Grundvorstellungen zu beschreiten (Elschenbroich, 2016a).

In der Lernumgebung Integrator (www.integrator-online.de) kann man beliebig Funktionen und Intervallgrenzen sowie einen Schieberegler n eingeben. Damit werden dann die Untersumme U_n und die Obersumme O_n (und bei Bedarf auch die Trapezsumme T_n) berechnet. Vergrößert man das n am Schieberegler, so kann man erleben, wie sich bei schultypischen Funktionen U_n und O_n einander immer mehr nähern. Dafür braucht man keine trickreichen Termumformungen, sondern nutzt GeoGebra als fleißigen Rechenknecht. Auch wenn so kein wirklicher Grenzprozess durchgeführt wird, kann man bis n = 1000 den Annäherungsvorgang schulgemäß verdeutlichen. Auf dieser Basis kann dann in üblicher Weise das Integral $\int_a^b f(x)dx$ eingeführt werden. Als Visualisierung ist es dabei hilfreich, die Flächen zwischen dem Graphen von f und der x-Achse je nach Vorzeichen von f(x) unterschiedlich zu färben.

In Integrator II wird dies dann dynamisiert, indem man von a bis x mit

$x \in [a; b]$ rechnet. Nimmt man die Werte der Untersumme U_n bzw. der Obersumme O_n als y-Koordinate von Punkten, so bekommt man zwei Punkte $U_a = (x, U_n)$ bzw. $O_a = (x, O_n)$, deren Verhalten man bei Veränderung von x untersuchen kann. Ihre Ortslinien liefern die Graphen der Unter- bzw. Obersummenfunktion, die sich dann (bei schultypischen Funktionen) bei Vergrößerung von n immer mehr annähern und schließlich faktisch ununterscheidbar werden (Elschenbroich, 2016b). Das ist ein graphischer Weg zur Integralfunktion (der sich in der Form eher für Leistungskurse empfiehlt).

2. Integrator III

Man kann aber auch alternativ direkt mit dem im Integrator I eingeführten Integral von a bis x arbeiten und dies als y-Koordinate eines Punktes $I_a = (x, \int_a^x f(t)dt)$ nutzen. Damit kommt man zur Integralfunktion, graphisch als Ortslinie von I_a oder funktional mit einem entsprechenden GeoGebra-CAS-Befehl. Lässt man die Integralfunktion nur auf dem Intervall [a; x] zeichnen oder hebt sie dort deutlich hervor, so hat man eine dynamische digitale Repräsentation des Gerätes Integraph.

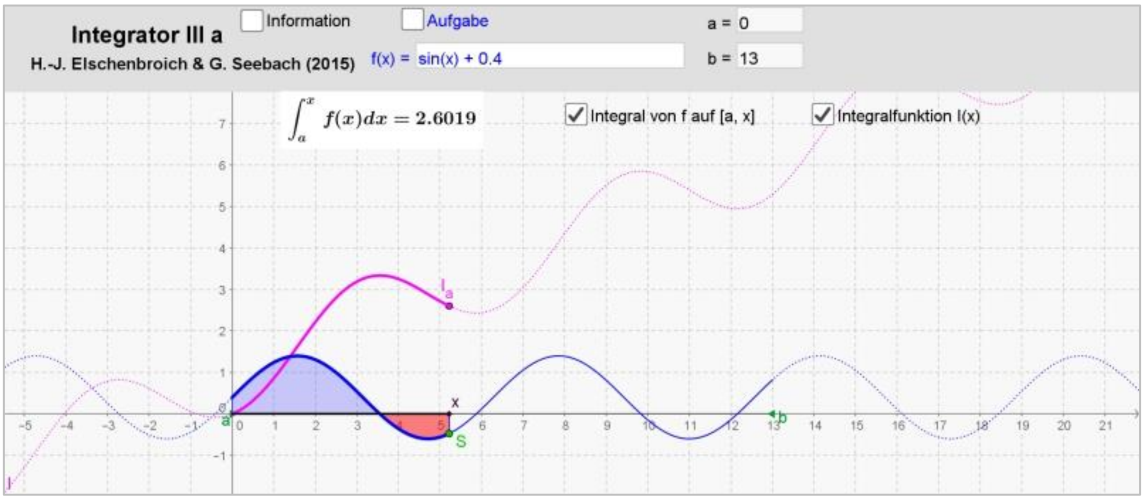


Abb. 1 Integralfunktion/ Integraph

Hier kann man unmittelbar und interaktiv den Zusammenhang zwischen dem Verlauf von f und der Integralfunktion erforschen (z.B. wie wirken sich Extrema oder Vorzeichenwechsel von f aus?).

Mit einer Erweiterung der Lernumgebung kann man weiter die Tangente der Integralfunktion einblenden und ihre Steigung untersuchen. Dabei wird der Zusammenhang zwischen der Steigung (Ableitung) der Integralfunktion und dem Wert von f entdeckt. Das ist die Satz<u>findung</u> des Hauptsatzes!

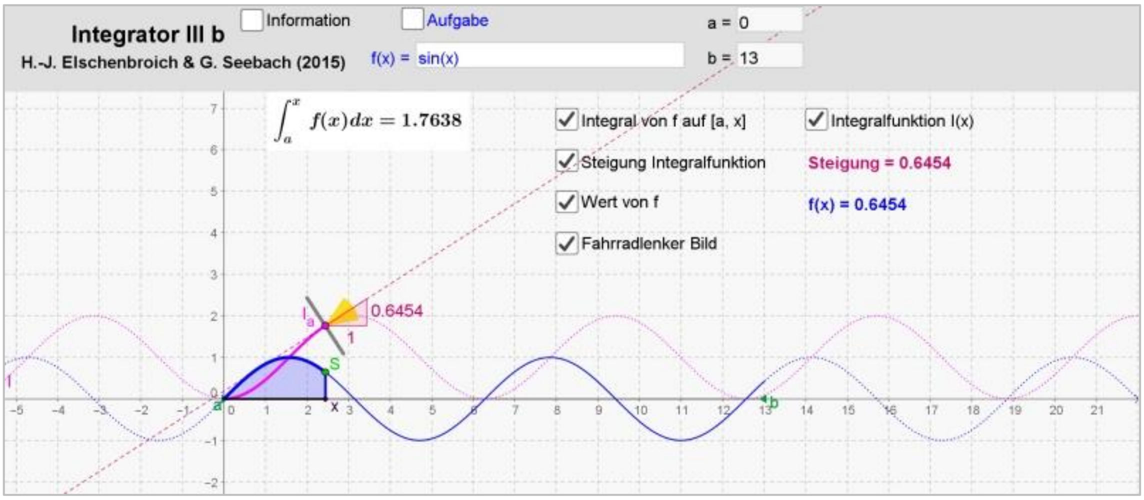


Abb. 2 Entdeckung des Hauptsatzes

3. Integrator V

Mit dem Integrator V werden Volumina von Rotationskörpern berechnet, zunächst klassisch bei der Rotation des Graphen von f um die x-Achse. Aus den Rechteckstreifen werden in der Rotation zylindrische Scheiben, die dann - wieder ohne Termumformungen, nur mit der Rechenpower von GeoGebra - aufsummiert werden.

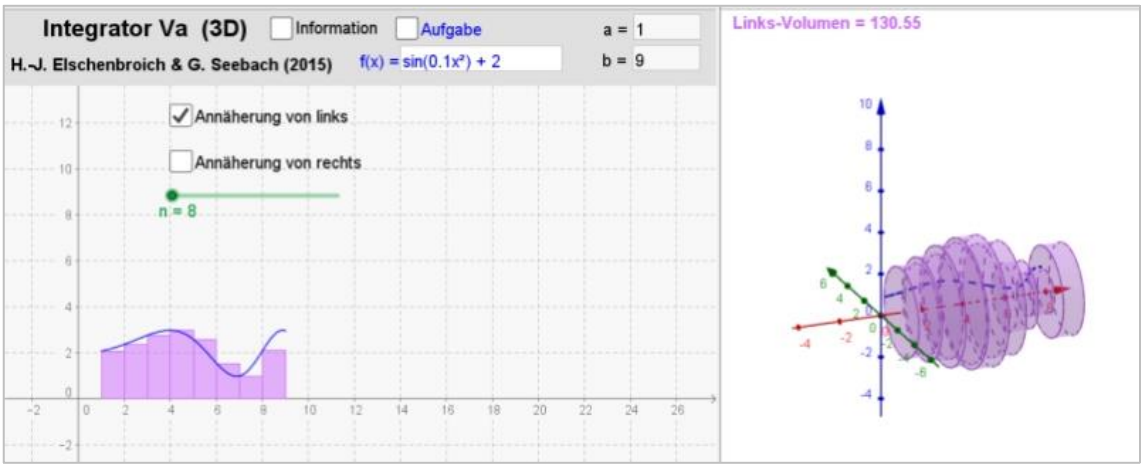


Abb. 3 Rotation um die x-Achse, n = 8.

Für große n bekommt man einen relativ 'glatt' aussehenden Körper. Mit dem GeoGebra-Befehl `Oberfläche` kann man dessen Oberfläche direkt, effizient und gut aussehend erzeugen.

Dies bietet nun die Möglichkeit, eine zur x-Achse orthogonale Fläche durch den Körper wandern zu lassen und die kreisförmigen Schnittflächen zu betrachten. Für die Flächeninhalte dieser Querschnitte erhält man die Funktion $qu(x) = \pi \cdot f^2(x)$. Dies gibt einen Perspektivwechsel: Statt der Rotation der Fläche unter dem Graphen von f um die x-Achse kann man sich den Körper durch die Bewegung von (Kreis-)Flächen längs der x-Achse entstanden denken. Das Volumen ist das Integral von qu(x) über [a, b]. Dies ist die durch dynamische Software gestützte Wiederbelebung eines alten, fast in Vergessenheit geratenen Ansatzes.

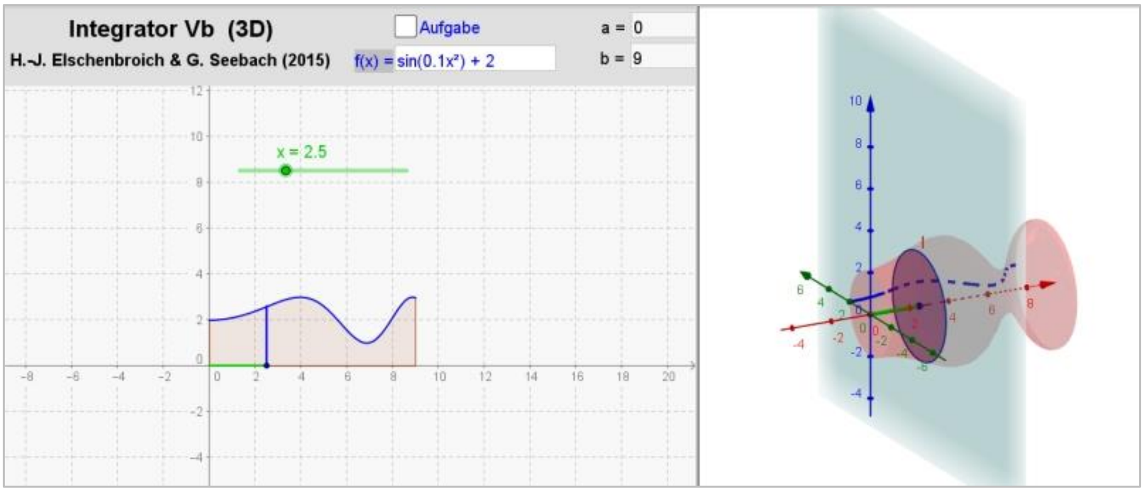


Abb. 4 Querschnittfläche längs der x-Achse

4. Fazit

Dynamische Mathematik-Software ermöglicht dynamische Zugänge zu Grundvorstellungen der Integralrechnung. Dabei steht der Aufbau von Verständnis im Vordergrund. Der typische Integralrechnungskalkül soll dadurch nicht ersetzt werden, sondern es soll eine Grundlage für das anschließende Exaktifizieren und die anschließende Theorie gegeben werden. Es geht darum, zunächst "ohne Kalkül adäquate Grundvorstellungen zum Begriff der Ableitung und des Integrals aufzubauen" (Büchter & Henn, 2010, S. 80), wozu hier für den Bereich der Integralrechnung ein Beitrag geleistet werden soll. Für den hier vorgestellten Weg ist die Fähigkeit der Software entscheidend, umfangreiche Rechnungen durchzuführen, mit Zugmodus und Schiebereglern zu arbeiten, berechnete Werte in dynamische Punkt-Koordinaten zu übertragen und damit Ortslinien zu erzeugen.

Literatur

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2010): Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg

Elschenbroich, H.-J. (2016a): Anschauliche Zugänge zur Analysis mit alten und neuen Werkzeugen. In: *Der Mathematikunterricht 1/2016*, S. 26 - 34

Elschenbroich, H.-J. (2016b): Digitale Werkzeuge im Analysis-Unterricht. In: Blum, W. & Vogel, S. & Drüke-Noe, C. & Roppelt, A. (Hrsg.): *Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II*. S. 244 - 254

Kraft, A. (1948): Propädeutik im mathematischen Unterricht. In: *MNU 1/1948*. S. 9 - 13

Franz Embacher, Universität Wien

Gleichungen, Ungleichungen, Unbekannte, Variable – Auffassungen angehender Lehrkräfte

Mathematische Aufgabenstellungen können im Hinblick auf die mathematischen Objekte, von denen die Rede ist, deren Eigenschaften und Beziehungen und die Frage, was eigentlich gesucht ist, verstanden werden. Sie können aber auch unter einem operationalen Blickwinkel verstanden werden, der sich auf die Handlungen (Lösungsverfahren) bezieht, die zu ihrer Bearbeitung erforderlich sind. Objekt- und Prozessauffassung sind gleichermaßen wichtig. Das Eine schafft die Bedingungen für die Weiterentwicklung des Anderen auf höherer Abstraktionsstufe, nicht nur in der historischen Entwicklung der Mathematik, sondern auch beim individuellen Mathematiklernen. Eine einseitige Betonung des operationalen Zugangs drückt sich oft dadurch aus, dass eine Aufgabenstellung vorschnell eine Handlung auslöst („triggert"), ohne dass die mathematische Fragestellung und die Natur der auftretenden Objekte hinreichend bewusst gemacht werden. Ist heutigen angehenden Lehrkräften dies bewusst, und welche Rolle spielt es in ihrer Konzeption von Mathematikunterricht?

Hintergrund

Angeregt durch die jüngst fertiggestellte Diplomarbeit von Valentin Parzer (2015) und angelehnt an die Literatur der „APOS-Theorie" (Arnon *et. al.* 2014) sowie eine Untersuchung von Anna Sfard und Liora Linchevski (1994) wurde versucht, im Rahmen einer Erhebung mit 58 Studierenden des Lehramts Mathematik an der Universität Wien Ansätze einer Antwort anhand des Themenbereichs Gleichungen und Ungleichungen zu gewinnen. Die Befragung wurde im Jänner 2015 in zwei Lehrveranstaltungen (einer Vorlesung mit Semesterzahlen: 7 ± 3 und einem Seminar mit Semesterzahlen 8 ± 1) durchgeführt.

Befragung

Die Untersuchung bestand aus 5 Fragen mit offenem Antwortformat.

- In Frage 1 wurde gefragt, ob nach Meinung der Studierenden beim Lösen der Gleichung $x+3=8$ und beim Lösen der Ungleichung $x+3>8$ grundsätzlich unterschiedliche kognitive Anforderungen gefordert sind.
- Frage 2 lautete: Wie helfen Sie einem Schüler der Unterstufe, der die Aufgabenstellung „löse $2x+3=6-x$" nicht verstanden hat? Sagen Sie ihm kurz und prägnant, worum es bei dieser Aufgabenstellung geht!
- Frage 3: Analog mit der Aufgabenstellung „löse $2x+3>6-x$".

- Frage 4: Analog mit einem Schüler der Oberstufe und der Aufgabenstellung „löse $x^2 - 5x + 6 = 0$ “.
- Frage 5: Analog mit der Aufgabenstellung „löse $x^2 + x + 1 > 0$ “.

Die Fragestellungen zu den Fragen 2 – 5 waren bewusst so gestellt, dass die Befragten frei waren, zu interpretieren, was es bedeutet, dass ein Schüler die Aufgabenstellung „nicht verstanden hat“ und „worum es“ bei ihr „geht“, also etwa, ob Hilfestellung bei der Anwendung eines Lösungsverfahrens gegeben werden soll oder ob es um das Verständnis geht, was die jeweilige (Un-)Gleichung bedeutet bzw. was eigentlich gesucht ist (oder beides).

Die Studierenden hatten 15 Minuten Zeit, die Fragen zu beantworten.

Auswertung

Die Antworten der Studierenden wurden zunächst entsprechend einem binären-Raster (Ja = 1, Nein = 0) hinsichtlich des Vorhandenseins oder Nichtvorhandenseins der folgenden Aspekte ausgewertet:

- Frage 1:
  a. Gibt der/die Befragte an, dass es einen wesentlichen Unterschied in den kognitiven Anforderungen gibt?
  b. Gibt der/die Befragte an, dass es keinen wesentlichen Unterschied in den kognitiven Anforderungen gibt?
  c. Wird lediglich auf operationale Unterschiede eingegangen?
  d. Wird der Unterschied
     lineare Gleichung: eine Zahl (Unbekannte) gesucht
     lineare Ungleichung: Menge von Zahlen gesucht
     zum Ausdruck gebracht?
  e. Werden Begriffe wie „Unbekannte“, „Platzhalter“ oder „Lösung(en)“ in korrekter Weise verwendet?
- Fragen 2:
  a. Bringt der/die Befragte lediglich operationale Aspekte des Lösungsverfahrens zum Ausdruck, interpretiert also „worum es geht“ in dieser Weise?
  b. Gibt der/die Befragte ausdrücklich an, dass es gilt, eine (zunächst unbekannte) Zahl zu finden?
- Frage 3:
  a. wie Frage 2
  b. Analog zu Frage 2: ...mehrere (viele) Zahlen (eine Menge von Zahlen) zu finden und anzugeben?
- Frage 4:
  a. wie Frage 2
  b. Gibt der/die Befragte ausdrücklich an, dass man hier unter Umständen mehrere (maximal 2) Zahlen finden muss?
- Frage 5:
  a. wie Frage 2
  b. Analog zu Frage 4: ...dass man hier mehrere (viele) Zahlen (eine Menge von Zahlen) finden und angeben muss?

Dabei ist zu betonen, dass es nicht um eine Überprüfung fachlichen Wissens ging, sondern um die Frage, welche Aspekte die Studierenden von sich aus und in eigenen Worten auf die gestellten Fragen zum Ausdruck brachten.

Zuletzt wurde für jedeN BefragteN ein „Gesamtscore" nach dem Muster

$$\text{score} = 1a - 1b - 1c + 1d + 1e - 2a + 2b - 3a + 3b - 4a + 4b - 5a + 5b + 6$$

aus den binären Antwortdaten berechnet. Er kann ganzzahlige Werte zwischen 0 und 12 annehmen und stellt einen Versuch dar, die Auffassungen der Studierenden auf einer Skala zwischen objekt- und verstehensorientiert (hoher Score) und verfahrensorientiert (niedriger Score) anzusiedeln.

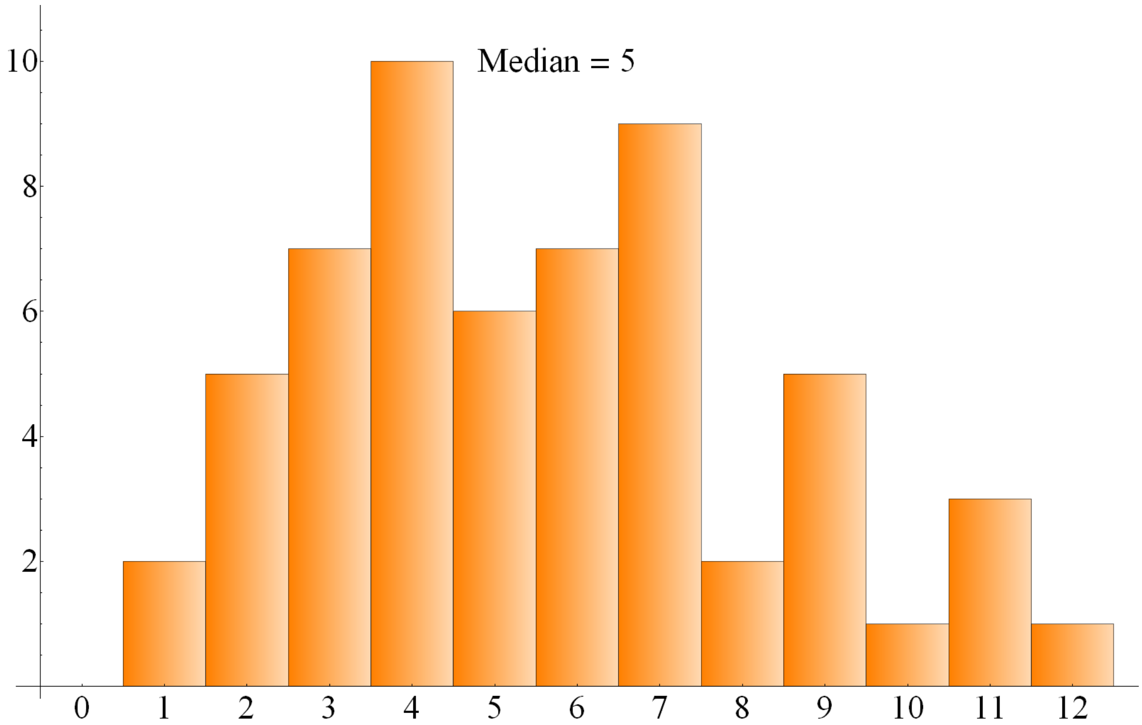


Abbildung 1: Verteilung der Gesamtscores.

Ergebnisse

Generell zeigt sich ein Überhang des verfahrensorientierten Zugangs. Abbildung 1 zeigt die Verteilung der Gesamtscores.

Die Detailauswertung der einzelnen Fragen unterstützt dieses Muster:

- 36% der Befragten äußern in ihrer Antwort zu Frage 1 ohne Einschränkung, dass kein wesentlicher Unterschied in den kognitiven Anforderungen beim Lösen von Gleichungen und Ungleichungen besteht.
- Nur 31% der Befragten erwähnen bei Frage 1 den entscheidenden Unterschied beim Lösen einer linearen Gleichung (Zahl gesucht) und einer linearen Ungleichung (Menge von Zahlen gesucht).
- 20% der Befragten gehen bei Frage 1 lediglich auf operationale Unterschiede beim Lösen von Gleichungen und Ungleichungen ein (vor allem auf dem Umgang mit dem Ungleichheitszeichen bei Äquivalenzumformungen).

- Nur 12% der Befragten verwenden bei Frage 1 Begriffe wie „Unbekannte", „Platzhalter" oder „Lösung" in korrekter Weise.
- Bei den Fragen 2 – 5 geben viele Befragte lediglich eine auf ein Lösungsverfahren bezogene Antwort, d.h. sie interpretieren „worum es bei der Aufgabenstellung geht" in dieser Weise: Frage 2: 41%, Frage 3: 55%, Frage 3:59%, Frage 4: 50%.
- Ein Hinweis, was eigentlich gesucht ist, kommt bei den Fragen 2 – 5 mit folgenden relativen Häufigkeiten vor: Frage 1: 52%, Frage 3: 33%, Frage 4: 26%, Frage 5: 29%.
- Nur 7% geben bei beiden Oberstufenaufgaben (Fragen 4 und 5) einen Hinweis, was eigentlich gesucht ist.

Für weitere Details zur Auswertung siehe Embacher (2016).

Literatur

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., and Weller, K. (2014): *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer.

Embacher, Franz (2016): http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/MatheDidaktik/GDM2016.

Parzer, Valentin (2014): *Die Entwicklung mathematischer Konzeptvorstellungen von rechenbetonten Prozessen zu abstrakten Objekten*, Diplomarbeit an der Universität Wien. Online: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/Diplomarbeiten/DIPLOMARBEIT_Valentin_Parzer.pdf.

Sfard, Anna and Linchevski, Liora (1994): *The gains and the pitfalls of reification – The case of algebra*. Educational Studies in Mathematics 26, pp. 191-228.

Joachim ENGEL, Ludwigsburg

Mathematische Bildung und Gesellschaft: Die Rolle von Zivilstatistik

Hintergrund

Kenntnisse und Fähigkeiten Daten zu verstehen und in angemessener Weise mit quantitativer Information zu argumentieren sind eine wichtige Voraussetzung für das Funktionieren der Demokratie in unseren Massengesellschaften. Während offene Daten heutzutage durch Statistische Ämter, UN-Einrichtungen und Nichtregierungsorganisationen wie Gapminder (www.gapminder.org) leicht zugänglich sind, stehen wir als Didaktiker vor der Herausforderung, quantitative Fähigkeiten zum Verstehen und Interpretieren dieser Daten zu vermitteln. In einer zunehmend komplexeren Welt ist das Engagement von Zivilbürgern eine kritische Ressource bei öffentlichen Entscheidungen auf nationalem wie lokalem Niveau. In Erweiterung des Begriffs „mathematische Bildung" konzipiert eine vom EU-Erasmus+ Programm seit September 2015 geförderte internationale Kooperation eine als *Zivilstatistik* bezeichnete Teildisziplin, in deren Mittelpunkt das Erschließen von Sinn aus Daten steht, die über gesellschaftliche Vorgänge informieren. Ein Verstehen dieser oft komplexen und multivariaten Daten setzt Kenntnisse voraus, die im regulären Mathematik- und Statistikunterricht, geschweige denn in Politik oder Gemeinschaftskunde gewöhnlich nicht vermittelt werden. Kompetenzen im Bereich *Zivilstatistik* sind zur informierten Partizipation in demokratischen Gesellschaften nötig. Im EUProjekt ProCivic-Stat (siehe www.procivicstat.org) werden neben konzeptionellen Entwürfen dazu innovative Lehr- und Lernmaterialien für Unterricht an Schule und Hochschule entwickelt.

Zivilstatistik: Konzepte und Herausforderungen

Ein zentrales Ziel schulischer Bildung besteht darin junge Menschen zu informierten und engagierten Staatsbürgern zu erziehen, die zu Themen wie z.B. Einkommensgerechtigkeit, Migration, demographischer Wandel, den Arbeitsmarkt eine informierte und durch Fakten gestützte Position beziehen können. Entsprechende Informationen, bereitgestellt von statistischen Ämtern oder NGOs und der Öffentlichkeit oft in Printmedien oder Internet übermittelt, basieren in der Regel auf offen zugänglichen, sehr umfangreichen, offiziellen und multivariaten Datensätzen. Moderne Technologie bietet mächtige digitale Hilfsmittel zur Visualisierung dieser Daten an. Die Bereitstellung von mächtigen Werkzeugen alleine, ohne die Vermittlung entsprechender Fertigkeiten, führt allerdings noch nicht zu selbstbestimmten Bürgern. Statistik ist heutzutage in fast allen Ländern der Welt

Teil des Schulcurriculums. Statistische Bildung sowohl an Schulen (wie auch an Hochschulen) hinkt jedoch trotz der curricularen Verankerung der Leitidee

Daten und Zufall den Ansprüchen und Möglichkeiten an eine informierte Bürgerbeteiligung hinterher. Während z.B. Prozentdarstellungen zweifellos ein elementares Mittel bei Berichten über soziale Phänomene sind (und „Prozent“ hinter „Jahr“ und „Uhr“ das am dritthäufigsten verwendete Wort der deutschen Sprache ist[8]) , verlangt Zivilstatistik ein tiefergehendes Verständnis. Wenn z.B. ein Politiker davon spricht, die Ausgaben zur Unterstützung benachteiligter Bevölkerungsgruppen um 3% erhöht zu haben, so kann das Unterschiedliches bedeuten: eine Zunahme von nicht inflationsbereinigten Ausgaben über einen längeren Zeitraum, eine prozentuale Zunahme bezogen auf das Bruttosozialprodukt das für Bedürftige ausgegeben wird oder eine inflationsbereinigte pro-Kopf-Zunahme; das Erstere könnte sogar eine reale Verminderung bedeuten. Auf etwa anspruchsvollerem Niveau geht es darum, wie zwei oder mehrere Variable zusammenhängen und sich in Bezugnahme aufeinander verändern, d.h. um die Modellierung funktionaler Zusammenhänge.

Relevante Datensätze aus dem Sozial- und Gesundheitsbereich haben in der Regel eine komplexe multivariate Struktur und beinhalten viele miteinander korrelierte Variable – ganz im Gegensatz zu den Daten des aktuellen Mathematikunterricht, in dem die Schüler Statistik lernen. Mit großen multivariaten Datensätzen zu argumentieren und ihre graphischen Darstellungen zu verstehen, verlangt andere Fähigkeiten als die Analyse uni- oder bivariater Datensätze, die auf kleinen Stichproben basieren und die das gegenwärtige Curriculum dominieren. Bei Zivilstatistik geht es nicht um das Meistern von Forschungsmethoden der multivariaten Statistik (Faktoranalysis, Clusteranalysis, multivariate Regression etc.). Vielmehr geht es um das Verstehen von multivariaten *Phänomenen*, der Herausbildung tragfähiger Heuristiken, einschließlich der Konfrontation mit Verzerrungen und Fehlvorstellungen (Engel, 2015). Eine wichtige Komponente dabei spielt dabei kritisches Denken und kritisches Nachfragen: Wie vertrauenswürdig sind die Daten? Wie und warum wurden sie erhoben? Wie wurden die interessierenden Variablen operationalisiert? Wie wurden sie gemessen? Welche Kovariable sind für die mich interessierende Fragestellung relevant, welche eher unbedeutend? Gibt es verborgene Drittvariable, die beobachtete Zusammenhänge erklären können? Selbst sozio-ökonomische Indikatoren aus den täglichen Nachrichten wie z.B. die Arbeitslosenquote sind keineswegs trivial zu definieren. Manche Definitionen entsprechen nicht der alltäglichen Verwendung dieser Begriffe. In der Arbeitsmarkterhebung von Eurostat gilt z.B. als beschäftigt, wer mindestens eine Stunde pro Woche gegen Entlohnung arbeitet. Das Verstehen sozio-ökonomischer Trends setzt ein Verständnis von komplexen Indikatoren wie „Sterblichkeitsrate“, „Lebenserwartung“ oder der “Teuerungsrate“ voraus. Die Operationalisierung eines komplexen Konstrukts wie „Diskriminierung“ ist nicht einfach und beinhaltet philoso-

[8] http://www.duden.de/sprachwissen/sprachratgeber/die-haeufigsten-woerter-indeutsch-sprachigen-texten

phische, ethische und kulturelle Aspekte. Eine Diskussion hierüber und Methoden zur Messung der involvierten Variablen bietet Herausforderungen und Gelegenheiten den Diskurs im Unterricht anzureichern. Argumentieren mit großen multivariaten Datensätzen und ihren Eigenschaften anhand von graphischen Darstellungen verlangt andere Fähigkeiten als die Analyse kleiner Datensätze, die die heutigen Curricula dominieren. Es verlangt ein Verständnis unterschiedlicher graphischer Repräsentationen wie z.B. Streudiagramm-Matrizen, Spinnennetzdiagramme oder multivariate Zeitreihen. Multivariate Daten zu verstehen verlangt auch ein Wissen um Konstrukte, die selten in einführenden Statistikeinheiten behandelt werden wie z.B. Interaktionen, Drittvariable oder nichtlineare Beziehungen.

IMPLIKATIONEN FÜR CURRICULA UND LEHRERAUSBILDUNG

Es gibt ernsthafte Probleme mit der Art und Weise, wie Statistik an Schulen unterrichtet wird (Batanero, Burrill und Reading, 2011, Schiller 2016). Wenige Lehrer für Mathematik oder Sozialkunde/ Gemeinschaftskunde haben eine Ausbildung im Unterrichten von Statistik. Als Konsequenz bleiben die meisten Lehrer innerhalb ihrer Komfortzone und überbetonen einen engen Bereich statistischer Techniken und algorithmischer Berechnungen (Mathematik) bzw. vermeiden Statistik ganz (Politik/ GK) und verpassen dabei sich auf tiefere statistische Ideen einzulassen.

Der aktuelle Unterricht, egal welchen Faches, widmet dem Verstehen multivariater Datensätze, die soziale Trends beschreiben, und der Interpretation und Kommunikation über diese Daten kaum Aufmerksamkeit. Curricula im Bereich Daten und Zufall fokussieren in der Regel auf Fragen mit einer oder zwei Variablen, auf der technischen Beherrschung von mathematischen Verfahren, die vor über 100 Jahren entwickelt wurden; sie verwenden artifizielle Daten und nutzen nur selten moderne Visualisierungstechniken. Ein Verstehen von komplexen Datensätzen verlangt andere Fertigkeiten und Kenntnisse als der traditionelle Unterricht. Schlüsselfertigkeiten schließen auch die Berücksichtigung von Metadaten ein: Wo kommen die Daten her, wie sind sie erhoben worden, wie vertrauenswürdig sind sie? Methoden der Inferenzstatistik wie z.B. das Testen von Hypothesen verlieren an Bedeutung, wenn sehr große Datensätze analysiert werden. Stattdessen stehen zum Verstehen multivariater Phänomene im Mittelpunkt: die Suche nach Interaktionen, ein Bewusstsein um erklärende Drittvariable, ein Verständnis der Vor- und Nachteile der Aggregierung von Daten (z.B. Simpsons Paradox); Nutzen und Nachteile von Beobachtungsstudien im Vergleich zu kontrollierten Experimenten. Wichtige mathematische Methoden, die von technologie-basierten Visualisierungen unterstützt werden können, beziehen auch die Modellierung von funktionalen Beziehungen zwischen zwei und mehreren Variablen ein, inklusive des Erkundens nichtlinearer Beziehungen und explorativer Glättungstechniken.

FAZIT

Dieser Beitrag wirbt dafür, das Konzept von mathematischer Bildung zu erweitern und Zivilstatistik in das Schulcurriculum und das Denken der Lehrkräfte mit einzubeziehen. Zivilstatistik ist interdisziplinär und bezieht sich auf notwendige Fertigkeiten zum evidenzbasierten Verstehen wichtiger gesellschaftlicher Phänomene mit Hilfe grundlegender mathematischer, statistischer und technologischer Mittel und Konzepte. Wir glauben, dass das Unterrichten der Inhalte von Zivilstatistik junge Menschen ermutigen und befähigen wird, sich als informierte Zivilbürger bei öffentlichen Entscheidungsprozessen zu engagieren. Ideen und Materialien zur Ausgestaltung von Zivilstatistik im Schul- und Hochschulbereich werden im Projekt ProCivicStat entwickelt, das darauf abzielt, Ressourcen (Konzepte, Unterrichtsmaterialien, Datenvisualisierungen, Datensätze) zu entwickeln, die den Statistik- und Mathematikunterricht auf dem sekundären und tertiären Niveau durch innovatives online Lernmaterial zu bereichern .

Die Vorbereitung dieses Beitrags wurde in Teilen finanziert mit Unterstützung der Europäischen Kommission. Diese Veröffentlichung stellt lediglich die Ansichten des Verfassers dar und die

Kommission ist nicht verantwortlich für irgendwelche Ansichten, die sich aus den hier geäußerten Informationen ergeben.

Literatur

Batanero, C, Burrill, G., & Reading, C. (2011). Teaching Statistics in School Mathematics – Challenges for Teaching and Teacher Education. 18th Study of the International Commission on Mathematical Instruction, Springer: Heidelberg

Engel, J. (2016). Open data at the interface of mathematics and civics education: Challenges of the data revolution for the statistics curriculum. *Journal of Mathematics and Statistical Sciences* 2 (5)

Ridgway, J. (2015). Implications of the Data Revolution for Statistics Education. *International Statistical Review*. doi:10.1111/insr.12110

Schiller, A. (2016). Entwicklung von Modulen zur Förderung von Statistical Literacy an der Hochschule. *Beiträge zum Mathematikunterricht*.

Heiko ETZOLD, Potsdam

Neue Zugänge zum Winkelbegriff – Vorstellung eines Promotionsprojektes

Ziel dieses Beitrages ist es, den Werdegang meines in der Anfangsphase befindlichen Promotionsprojektes darzustellen, zentrale Fragen aufzuwerfen und methodische Überlegungen anzustellen. In diesem Sinne soll der Beitrag weniger als eine Ergebnisdarstellung sondern vielmehr als eine Entwicklungspräsentation verstanden werden.

Motivation: Winkel-Allerlei

Wenn ich mit Mathematiklehrern oder -didaktikern über Winkel spreche, erhalte ich vielfältige Meinungen darüber, wie Winkel betrachtet werden sollen: als Feld und damit Teil der Ebene, als Paar zweier Strahlen, als Darstellung einer Drehbewegung, und all das mit einer neuen Sichtweise, wenn Winkelmaße außerhalb des Intervalls [0°,360°] zugelassen werden.

Gerade bei dieser Vielfältigkeit des Winkelbegriffs ist ein roter Faden unerlässlich. Doch ist dieser auch zu finden? Dohrmann und Kuzle (2015) haben in einer Schulbuchanalyse aufgezeigt, dass bei der Repräsentation von Winkeln unterschiedliche Schwerpunkte gesetzt werden. An zwei weiteren Schulbüchern möchte ich exemplarisch darstellen, dass eine systematische Behandlung in den Klassenstufen 5/6 keineswegs selbstverständlich ist.

Im Lambacher Schweizer (2011) wird ein Winkel „von zwei Schenkeln mit gemeinsamen Anfangspunkt eingeschlossen", allerdings nicht geklärt, welche geometrischen Objekte die Schenkel sind (Strahlen? Strecken? Schlängellinien?). Ebenso ist unklar, ob mit „eingeschlossen" die dazwischen liegende Punktmenge oder vielleicht nur ein Bogen gemeint ist, wie es die zugehörige Abbildung vermuten lässt. In Mathe.LOGO (2012) wird der Winkel über folgende Formulierung definiert: „Ein Winkel kann dadurch entstehen, dass sich ein Schenkel um den anderen dreht, wie etwa die Zeiger einer Uhr." Die beschriebene Bewegung ist ohne ein Vorwissen über Winkel nicht nachvollziehbar und anscheinend gibt es auch noch andere Möglichkeiten zur Entstehung. Solch offene Formulierungen machen eine systematische Behandlung kaum mehr möglich. Diese an mehreren Stellen auftretenden Unklarheiten motivieren mich, drei zentrale Fragen abzuleiten:

- Frage 1: Welche(s) Winkelverständnis(se) soll(en) aufgebaut werden?
- Frage 2: Nach welcher Systematik soll dies geschehen?
- Frage 3: Wie kann dies konkret (im Unterricht) umgesetzt werden?

Die Fragen haben zwar noch nicht zwangsweise den Charakter von Forschungsfragen, aus ihnen heraus sollen diese aber entwickelt werden. Erste Lösungsideen finden sich in den nächsten Abschnitten.

Der oder die Winkel? Eine Definitions- und Begriffssuche

Die große Diversität des Winkelbegriffs lässt sich anhand vieler Autorenbeiträge ablesen. Interessant ist für mich dabei insbesondere die Frage, nach welchen Kriterien die Autoren zu der von ihnen dargestellten Vielfältigkeit kommen.

Eine Unterscheidung anhand *fachlich-mathematischer Kriterien* sieht man beispielsweise bei Freudenthal (1973) oder Mitchelmore (1990). Freudenthal differenziert danach, ob als Bestandteile des Winkels Strahlen- oder Geradenpaare betrachtet werden und ob dies in der orientierten oder unorientierten Ebene geschieht. Daraus formuliert er vier Winkel*begriffe*, die er nach mathematisch-fachlicher und mathematikdidaktischer Diskussion um einen weiteren Winkelbegriff, der Umläufe beschreiben kann, ergänzt.

Eher anhand von *Vorstellungen* über Winkel unterscheiden Strehl (1983) und Krainer (1989). Strehl spricht beispielsweise von drei aufeinander aufbauenden *Grundvorstellungen* von Winkeln, Krainer arbeitet vier *Vorstellungen* über Winkel heraus, hier mit leicht vereinfachten Bezeichnungen dargestellt: Winkel als *Knick*, als *Feld*, als *Richtungsänderung* und als *Überdrehung*.

Eine stärker *psychologische* Sichtweise dagegen zeigt zum Beispiel Matos (1999), worauf ich hier aber nicht weiter eingehen werde.

So unterschiedlich die Herangehensweisen aller Autoren auch sind: sie eint, dass es nicht *den einen* Winkelbegriff oder *die eine* Winkeldefinition gibt, sondern dass mit einer Vielfältigkeit umgegangen werden muss.

Es ist noch nicht klar absehbar, ob ich einen Konsens entwickeln kann oder mich auf bestimmte aufzubauende Winkelverständnisse festlegen werde. Für das prinzipielle Verständnis des weiteren Vorgehens möchte ich mich zunächst auf die vier von Krainer (1989) dargestellten Vorstellungen (Knick, Feld, Richtungsänderung und Überdrehung) festlegen.

Ein Abstraktionsprozess zum systematischen Aufbau

Ist geklärt, welche Winkelverständnisse beim Schüler aufgebaut werden sollen, so ist damit jedoch noch nicht der rote Faden gefunden, dessen Fehlen ich oben kritisiert hatte. Es bedarf also eines Prozesses, für den Mitchelmore und White (1998) einen empirisch gestützten Vorschlag machen. Sie sehen einen dreistufigen Abstraktionsprozess von *situativen* Winkelbegriffen über *kontextuelle* zu *abstrakten* Winkelbegriffen.

Während situative Winkelbegriffe, aufgebaut im Vorschulalter, zwischen verschiedenen Situationen unterscheiden (z. B. der Drehung eines Kran-Armes von der eines Deckenventilators), können in der Phase der kontextuellen Winkelbegriffe gemeinsame geometrische Konfigurationen verschiedener Situationen erkannt werden (z. B. der Kontext der Umdrehung). Dafür haben die Autoren sieben Kontexte unterschieden, wobei sich diese Krainers vier Winkelvorstellungen zuordnen lassen. Ich werde daher ab sofort Krainers Vorstellungen als Kontexte bezeichnen, wobei es hierfür sicher noch ausführlicherer Diskussionen bedarf.

Mit Beginn der Sekundarstufe erfolgt der Übergang in die dritte Phase, die der abstrakten Winkelbegriffe. Nun können Kontexte begründet voneinander abgegrenzt werden, wobei für die Begründungen geometrische Begriffe, Objekte und Relationen herangezogen werden. Abbildung 1 stellt den Abstraktionsprozess noch einmal dar, wobei dieser von außen nach innen zu lesen ist.

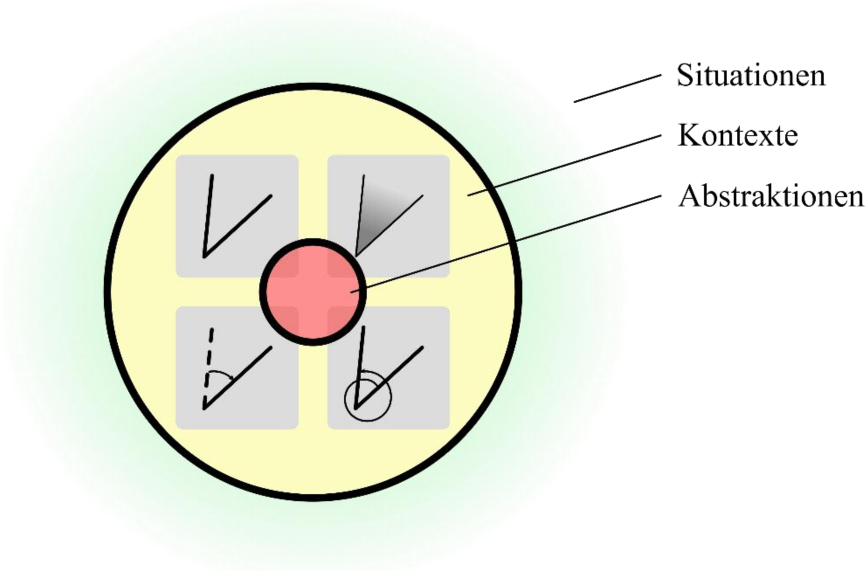


Abbildung 1: Abstraktionsprozess nach Mitchelmore/White (1998)

Ein Vorteil dieses Abstraktionsprozesses ist die Möglichkeit, mehrere Winkeldefinitionen (also Abstraktionen) parallel zu verwenden. So sind Definitionen möglich, die sich für ganz spezielle Kontexte eignen, für andere dagegen nicht. Ein Winkel kann also tatsächlich ohne schlechtes Gewissen als Teilmenge der Ebene definiert werden, solange man sich beispielsweise nicht im Kontext von Überdrehungen befindet.

Die Fragen 1 und 2, also die nach den zu vermittelnden Verständnissen und die nach der zugehörigen Systematik, lassen sich dabei nicht getrennt voneinander und auch nicht aufeinander aufbauend beantworten. Die zu vermittelnden Verständnisse (Antwort auf Frage 1) tauchen in den Kontexten (Antwort auf Frage 2) wieder auf, die Abstraktionen (Antwort auf Frage 2) wiederum können beeinflussen, welche zu vermittelnden Verständnisse voneinander unterschieden werden müssen (Antwort auf Frage 1). Als Bindeglied zwischen diesen beiden Fragen bzw. zwischen kontextuellen und abstrakten Winkelbegriffen kann der sogenannte *informatorische Winkelbegriff* dienen. Dieser geht der Frage nach, welche Informationen benötigt werden, um einen Winkel zu beschreiben, und reduziert die Informationen dann auf das Nötigste. In Etzold (2016) finden sich erste Gedanken dazu, eine genauere Darstellung folgt im Rahmen der Dissertation.

Die Umsetzung im Unterricht (erste Ansätze)

Nachdem nun ein Ansatz für den theoretische Rahmen gefunden ist, stellt sich die Frage nach dem letzten Schritt: der konkreten Umsetzung im Unterricht. Den Schwerpunkt werde ich dabei auf die Verknüpfung der einzelnen Kontexte legen, Mitchelmore/White sprechen hier von dem Aufbau eines Beziehungsgefüges. Methodisch bietet sich zur Entwicklung entsprechender Lernumgebungen der Design-Based-Research-Ansatz an. Genaueres kann an dieser Stelle jedoch noch nicht dargestellt werden.

Literatur

Dohrmann, C. und A. Kuzle (2015): Winkel in der Sekundarstufe I – Schülervorstellungen erforschen. In: *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen*, S. 29 – 42.

Etzold (2016): *Winkel aus der Sicht von Informationen*. Tagungsbeitrag zum Arbeitskreis Geometrie 2015 (Beitrag in Entwicklung)

Mitchelmore, M. (1990): Psychologische und mathematische Schwierigkeiten beim Lernen des Winkelbegriffs. In: *mathematica didactica* (13/2), S. 19 – 37.

Mitchelmore, M. und P. White (1998): Development of Angle Concepts: A Framework für Resarch. In: *Mathematics Education Research Journal* (10/3), S. 4 – 27

Strehl, R. (1983): Anschauliche Vorstellung und mathematische Theorie beim Winkelbegriff. In: *mathematica didactica* (6), S. 129 – 146

Krainer, K. (1989): *Lebendige Geometrie. Überlegungen zu einem integrativen Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffs*. Dissertation. Alpen-Adria-Universität Klagenfurt.

Freudenthal, H. (1973): *Mathematik als pädagogische Aufgabe 2*. Stuttgart: Klett.

Matos, J. (1999): Cognitive Models for the Concept of Angle. Dissertation. University of Georgia

Lambacher Schweizer (2011): Sachsen, Gymnasium 6. Stuttgart: Klett-Verlag.

Mathe.LOGO (2012): Gesamtausgabe 6. Bamberg: C. C. Buchner-Verlag.

Christian FAHSE, Ralf WAGNER, Landau

„Propädeutischer“ Grenzwertbegriff - eine erprobte Konkretisierung für die Unterrichtspraxis

Ein rigoroser Grenzwertbegriff baut auf Folgen auf. Interessanterweise kommt das Wort „Folgen“ in den Bildungsstandards (KMK, 2015) gar nicht vor. Die Auslassung bzw. Verschiebung des Themas „Folgen“ erlaubt es, gleich zu Beginn des Analysisunterrichts den Ableitungsbegriff anzusteuern. Ein "propädeutischer" Grenzwertbegriff müsste also genügend tragfähig sein, um mit ihm Grenzwerte von Differenzenquotienten ohne Folgen und ohne einen formalen Grenzwertbegriff behandeln zu können. Gleichzeitig sollte er anschlussfähig an die fachmathematischen Definitionen sein und persistierende Fehlvorstellungen vermeiden.

Unterrichtsvorschlag – Einstieg in die Analysis

Im Folgenden soll eine konkrete Unterrichtsidee grob skizziert werden. Diese wurde von beiden Autoren in insgesamt 7 Kursen an rheinland-pfälzischen Gymnasien erprobt. Direkt am Anfang wird eine Aufgabe gestellt, die problemorientiert auf die Steigung in einem Punkt führt (z. B. Weiterführung eines Brückenbogens in ein gerades Element). Zunächst werden die Schüler nur Näherungslösungen erzielen. Die naheliegende Betrachtung mit der Funktionenlupe (Elschenbroich, 2015) zeigt das erste erstaunliche Ergebnis: Die geschwungene Kurve ist vergrößert (fast) „gerade“, und die Weiterführung erweist sich als Sekante. Schülerlösungen können in einer Tabelle (vgl. Tab. 1) gesammelt werden. Das Problem einer knickfreien Fortführung lässt die Tabelle naheliegenderweise mit immer kleinerem Abstand h der Stützstellen fortführen. Im Falle einfacher Funktionen und ganzzahliger Stützstellen lässt sich oft ein optimaler Wert raten. Die zugehörige Gerade erweist sich als Tangente, die in der Funktionenlupe lokal deckungsgleich mit dem Graphen der Funktion erscheint. Schreibt man die letzte Zeile der Tabelle allgemein, so lässt sich in manchen Fällen der Stützstellenabstand h im Nenner kürzen und der geratene Wert kann algebraisch bestätigt werden. Das Limeszeichen kann als Umschreibung dieses Grenzwertüberganges an der Tabelle plausibel eingeführt werden.

Hinsichtlich des methodischen Vorgehens ist es wichtig, zunächst ganz nah am gewählten Kontext zu bleiben und das Modellieren (Gruppenarbeit) in den Vordergrund zu stellen, also authentisch problemorientiert zu unterrichten. Die dargestellte Tabelle stellt also nur den Endpunkt einer Entwicklung dar, in der insbesondere bei der Aufstellung der Formel des Differenzenquotienten der Impuls zur Verallgemeinerung durch die Lehrkraft gegeben werden muss. Der untersuchte Grenzübergang wird parallel dazu mittels entsprechender Applets visualisiert.

Stützpunkte		Differenzenquotient	Steigung
(2|4) und	(3|9)	(9 – 4)/(3 – 2)	5
	(2,5|6,25)	(6,25 – 4)/(2,5 – 2)	4,5
	$(2{,}1 \mid 2{,}1^2)$	$(2{,}1^2 - 4)/(2{,}1 - 2)$	4,1
	(2,01|...)	...	4,01
$(x \mid x^2)$ und	$(x+h \mid (x+h)^2)$	$((x+h)^2 - x^2)/(x+h-x)$	2x + h
	$(x \mid x^2)$	/	2x

Abb. 1 Tabelle

Die Tabelle zur numerischen und algebraischen Bestimmung der Ableitung entwickelt sich in mehreren Doppelstunden.

Theoretischer Hintergrund

Der Vorschlag, den Ableitungsbegriff ohne vorherige Thematisierung von Folgen einzuführen, ist nicht neu. Bereits zu Beginn des 20. Jahrhunderts kam die Idee intuitiver Zugänge zur Analysis auf. Artin (1957) und Lang (1964) stellten Zugänge mittels eines intuitiven Grenzwertbegriffes dar, die in der deutschen didaktischen Landschaft zunehmend Widerhall fanden (Blum 1979). Auch aktuelle Standardwerke behandeln zunächst einen "propädeutischen" oder "anschaulichen" Grenzwertbegriff (Büchter & Henn 2010, S. 85, 88). Blum betont die Vorteile auch bzgl. der Anschlussfähigkeit: „Ein vereinfachter Grenzwertbegriff verbaut also nichts, er ist im Gegenteil noch offen für sämtliche Arten der Präzisierung“ (Blum 1979). Dennoch wird bis heute die fehlende Strenge im mathematischen Verständnis eines solchen anwendungsorientierten, anschaulichen Ansatzes kritisch gesehen (Weigand 2015, S. 97).

Der hier unterbreitete Unterrichtsvorschlag stellt heraus, dass für das Modellieren im Rahmen der Differenzialrechnung ein intuitiver Grenzwertbegriff ausreichen kann. Die Frage, ob es curricular vertretbar ist, auf das Thema „Folgen“ und einen rigoroseren Grenzwertbegriff gänzlich zu verzichten, wird hier nicht behandelt. Stattdessen wird im Folgenden argumentiert, dass es legitim ist, einen intuitiven Grenzwertbegriff ohne die *vorherige* Behandlung von Folgen mit einem exakten Grenzwertbegriff zu unterrichten, indem die mathematische übliche Auffassung des Begriffs "Grenzwert" in eine Abfolge von Vorstellungen eingeordnet wird.

Ausweitung des Grenzwertbegriffs

Zunächst soll die Vielfältigkeit des Grenzwertbegriffes beispielhaft dargestellt werden. Am einfachsten können Grenzwerte numerisch näherungsweise berechnet werden – nur dies wurde im Praxisvorschlag verwendet. Man denkt beim Thema „Grenzwerte“ wohl meist an Zahlenfolgen, die algebraisch auf einen Grenzwert führen oder graphisch gegen einen Wert streben. Aber dies ist nur ein Aspekt. Folgen geometrischer Figuren (archimedischer Polygone) können gegen eine Grenzfigur (Kreis) konvergieren, was anschaulich beispielsweise als Daumenkino realisiert werden kann. Zufallsvariablen konvergieren stochastisch nur "fast sicher", Abweichungen kann es geben, aber sie sind "beliebig unwahrscheinlich". Bei der Konvergenz von

Funktionen kann neben der Konvergenz von Funktionswerten etwa bei hebbaren Definitionslücken, auch der Verlauf der Funktion als Ganzes gegen eine Asymptote konvergieren. Topologische Filter verallgemeinern den Grenzwertbegriff, Non-Standard-Zahlen stellen die Konvergenz reeller Zahlenfolgen in einen besonderen Zusammenhang.

Gemeinsam ist allen Beispielen eine geordnete Menge von Objekten in einem gemeinsamen Raum, in dem ein Konzept der "Nähe" definiert ist. Wichtiger sind allerdings die Unterschiede. Die angeführten Beispiele sollen verdeutlichen, dass die gedankliche Fixierung des Konvergenzbegriffs auf Zahlenfolgen zu eng ist. Erstens gibt es vielfältige relevante Zielräume. Zweitens kann man die Indexmenge einerseits auf die reellen Zahlen ausweiten, andererseits treten beim Daumenkino und der numerischen Grenzwertbestimmung sogar endliche Indexmengen auf, die auf Näherungsverfahren führen.

Propädeutischer Grenzwert als ein Schritt in der Begriffsbildung

Grenzwerte von Zahlenfolgen sind deshalb auch nur eine Stufe in einer Folge von Verallgemeinerungen des Grenzwertbegriffes. Dies soll nun durch einen Vergleich mit der Zahlbereichserweiterung deutlich gemacht werden. Statt nach dem Grenzwert fragt man hier: Was ist eine Zahl? Zunächst sind dies nur die natürlichen Zahlen. Dann kommt die Null hinzu, die gar nichts zählt. Die negativen Zahlen zählen vielleicht noch Fehlendes, die rationalen Zahlen messen zwar noch, aber nicht alles. Dies führt auf die irrationalen Zahlen. Spätestens mit den komplexen Zahlen ist die Vorstellung, dass mit Zahlen die Größe einer Menge bestimmt wird, nicht mehr zu halten, denn sie sind nicht anzuordnen. Schließlich können mit Hamiltonschen Quaternionen, Non-Standardzahlen und Zufallsvariablen als verallgemeinerten Zahlen zusätzliche Erweiterungen stattfinden. Obwohl Zahlen letztlich nur algebraische Objekte sind, gilt es als legitim, in der Primarstufe das Verständnis von Zahlen damit zu verbinden, dass sie etwas Konkretes zählen. Dieser Zahlbegriff muss dabei nur flexibel und anschlussfähig sein.

Und hier kommen wir zu dem zentralen Punkt: Die Autoren stellen zur Diskussion, bei der Entwicklung des Grenzwertbegriffs analog zu verfahren. Zunächst kann der Grenzwert durchaus ungefähr gleich dem letzten Wert in einer endlichen Tabelle von Folgengliedern sein. Dies ist beim Differenzenquotient praktikabel, wenn die Stützstellendifferenz h nur klein genug ist (und führt für die in der Schule üblichen lokalkonvexen oder –konkaven Funktionen sogar zu einer Fehlerabschätzung!). In einem weiteren Schritt muss dann die Problematik einer solchen Definition aufgezeigt werden, genauso wie in der Zahlbereichserweiterung die Problematik der "Zählvorstellung" thematisiert wird. Dieses Konzept kann dann mittels formaler Schreibweisen für geeignete Termumformungen nutzbar gemacht werden und ist anschlussfähig an formale Grenzwertdefinitionen und -sätze.

Fazit

Das hier vorgestellte Konzept soll im Zusammenhang mit dem propädeutischen Grenzwertbegriff der Bildungsstandards als Beitrag auf unterschiedlichen Ebenen verstanden werden. Zum einen stellt es ein konkretes unterrichtliches Vorgehen dar. Dabei wird "propädeutisch" so interpretiert, dass nicht der Grenzwert, sondern der Ableitungsbegriff im Vordergrund steht. Zum anderen wurde die Verengung des Grenzwertbegriffes auf Folgen als fachmathematisch problematisch herausgestellt und die Stufenhaftigkeit des Grenzwertbegriffes in Analogie zur Zahlbereichserweiterung gesetzt, welche in akzeptierter Weise anschlussfähige Begriffsbildungen und ihre Erweiterungen thematisiert.

Literatur

Artin, E. (1957). A freshman honors course in calculus and analytic geometry. Taught at Princeton University. Charlottesville, VA: Mathematical Association of America.

Blum, W. (1975). Ein Grundkurs in Analysis. Didaktik der Mathematik, 3, 163–184.

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2010). Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Elschenbroich, H.-J. (2015). Anschauliche Differenzialrechnung mit der Funktionenlupe. MNU, 68(5), 273–277.

Lang, S. (1964/1973). A first course in calculus. Dordrecht: Springer.

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) (2015). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012). Köln: Link.

Törner, G., Potari, D., & Zachariades, T. (2014). Calculus in European classrooms: curriculum and teaching in different educational and cultural contexts. ZDM, 46(4), 549–560.

Weigand, H.-G. (2015). From an intuitive-oriented to a content-oriented understanding of the basics of calculus. Proceedings of the ICTMT12, Fargo.

Maria FAST, Wien

Folgerungen aus einer Längsschnittstudie zum Addieren und Subtrahieren von Klasse 2 bis Klasse 4

Die Lösungswege bei zwei- und dreistelligen Additionen und Subtraktionen entwickeln sich bei allen Kindern im Laufe der Grundschulzeit weiter, unterscheiden sich jedoch in den Herangehensweisen. Im Rahmen einer Längsschnittstudie konnten sieben typische Entwicklungsverläufe identifiziert werden (Fast, 2016). In diesem Beitrag werden die zentralen Ergebnisse vorgestellt und interpretiert.

Zentrale Ergebnisse

Manche Kinder zerlegen beim Addieren und Subtrahieren immer beide Zahlen in die einzelnen Stellenwerte und verknüpfen die einzelnen Zahlen bzw. Ziffern variationsreich. Dieses Vorgehen mit den sich daraus ergebenden Lösungswegen wird als *Rechnen in den Stellenwerten* bezeichnet. Neben dem *stellenweisen Rechnen* und dem *algorithmischen Rechnen,* die im Schulbuch angeboten und im Unterricht thematisiert werden, zeigt sich als weitere Lösungsmethode *Rechnen mit den Ziffern in den Stellenwerten*. Diese Lösungsmethode fehlt in didaktischen Kategorisierungen und wird auch nicht in Schulbüchern thematisiert, trotzdem tritt sie in unterschiedlichen Ausprägungen auf. Die Kinder verknüpfen die Ziffern in den einzelnen Stellenwerten nicht nur als vorgegebenes algorithmisches Verfahren, sondern wie beim stellenweisen Rechnen auf vielfältige Art, sowohl richtig, entsprechend der Rechengesetze, als auch falsch.

Andererseits gibt es Kinder, die beim Addieren und Subtrahieren vorerst die Zahl in ihrer Ganzheit erfassen und nicht sofort in ihre Stellenwerte zerlegen. Sie bevorzugen eine ordinale Sicht auf Zahlen, gehen sukzessive fortschreitend vor. Als Lösungsmethoden praktizieren die Kinder nicht nur das im Schulbuch angebotene und im Unterricht thematisierte *schrittweise Rechnen*, sondern auch die in dieser Stichprobe nicht im Unterricht explizit thematisierten Lösungsmethoden *Ableiten* (Nutzen einer Hilfsaufgabe, gegensinniges und gleichsinniges Verändern, Ergänzen bei der Subtraktion) und *kombinierte Lösungsmethoden*. Diese Sicht auf Zahlen mit den sich daraus ergebenden Lösungswegen wird als *Rechnen mit Zahlganzheiten* bezeichnet.

Weiters können Entwicklungsverläufe identifiziert werden, die von an Zahlganzheiten orientierten Lösungsmethoden zu stellenwertorientierten Lösungsmethoden wechseln.

Zahlverständnis und Wissen um Rechenoperationen

Kinder zeigen in ihren Lösungswegen hohe Kontinuität. Die intraindividuellen Unterschiede über drei Schuljahre hinweg sind wesentlich geringer als die interindividuellen Differenzen. Vieles deutet darauf hin, dass ein Zusammenhang zwischen den Lösungswegen und dem individuellen konzeptuellen Wissen über Zahlen besteht. Somit können die Ergebnisse von Hiebert und Wearne (1996) bzw. Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema und Empson (1997) bestätigt werden, die ebenfalls in ihren Längsschnittstudien das Ausführen von Additions- und Subtraktionsaufgaben in einem Zusammenhang mit dem Zahlverständnis, insbesondere Kenntnissen des dekadischen Systems, sehen.

Während von einem Zusammenhang zwischen den Lösungswegen und dem individuellen Konzept von Zahlen ausgegangen werden kann, gibt es keinen unmittelbaren Zusammenhang zwischen Lösungsquote und dem Konzept von Zahlen. Wenn algorithmische Rechenverfahren prozedural ausgeführt werden, kann es sehr wohl zu hohen Lösungsquoten, aber zu keinem ausgeprägten Zahlverständnis kommen, wie es der Typ *Von ziffernrechnend zu algorithmisch rechnend (mit niedriger Lösungsquote)*, einer der sieben typischen Entwicklungsverläufe, am Ende der vierten Schulstufe zeigt.

Die niedrigsten Lösungsquoten und die unsichersten Konzepte treten bei Entwicklungsverläufen auf, bei denen vorrangig das *Rechnen in den Stellenwerten* praktiziert wird. Bedingt durch das unbedingte Trennen der jeweiligen Zahlen in ihre Stellenwerte kann es zu einem reduzierten Verständnis von Zahlen kommen, das als „Concatenated single digit conception" (Fuson et al., 1997, S. 142) bezeichnet wird und vor allem im Zusammenhang mit sehr frühem algorithmischem Rechnen beschrieben wurde. In der vorliegenden Untersuchung kann dieses Phänomen durch den Typ *Von ziffernrechnend zu algorithmisch rechnend (mit niedriger Lösungsquote)* über drei Jahre bestätigt werden.

Algorithmische Rechenverfahren verstärken ziffernorientierte Lösungsmethoden. Der in dieser Studie forcierte differentielle Ansatz zeigt, dass dies nicht ein universelles Phänomen ist, wie es implizit in früheren Studien (Csikos, 2012; Selter, 2000) aufscheint, sondern nur bei gewissen Entwicklungsverläufen auftritt und mit einem damit zusammenhängenden fehlenden Verständnis von Zahlen und defizitären Wissen über Rechenoperationen gekoppelt ist.

Für flexibles Rechnen ist *Rechnen mit Zahlganzheiten* Voraussetzung. Das Praktizieren aufgabenadäquater Lösungsmethoden (insbesondere Ableiten) erfordert, Zahl- und Aufgabenbeziehungen zu erkennen. Das ist nur möglich, wenn Zahlen in ihrer Ganzheit erfasst und nicht sofort in die einzelnen Stellenwerte zerlegt werden. Dies gelingt sehr wohl Kindern in dieser Studie, obwohl der Unterricht nicht darauf ausgerichtet war. Damit können die Forschungsergebnisse von Torbeyns, Verschaffel und Ghesquière (2006) bzw. Torbeyns, De Smedt, Ghesquière und Verschaffel (2009) bestätigt werden, dass Kinder mit einem guten Auffassungsvermögen, unabhängig vom Unterricht, flexibles Rechnen durchführen.

Divergenz zwischen stoffdidaktischen und empirischen Kategorien

Die Studie zeigt, dass die in der gängigen didaktischen Literatur üblichen Kategorisierungen in mündliches, halbschriftliches Rechnen, zusammengefasst als *Zahlenrechnen* und schriftliches Rechnen, als *Ziffernrechnen* bezeichnet, von einer empirischen Kategorisierung abweicht (Abbildung 1).

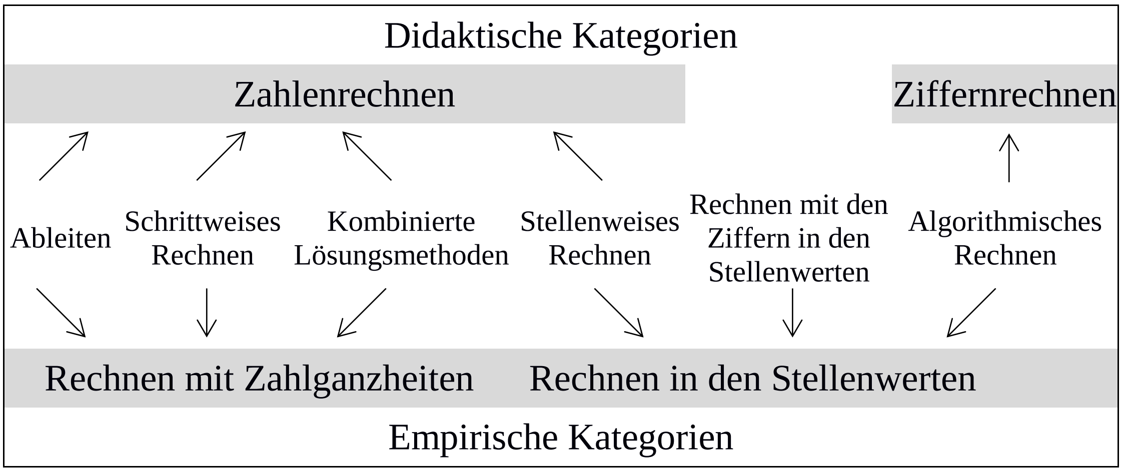


Abbildung 1: Divergenz zwischen didaktischen und empirischen Kategorien

Die Kinder verwenden beim *Rechnen in den Stellenwerten* unter anderem auch Mischformen, bei denen sie einen Teil der Aufgabe durch *Zahlen*-, einen anderen durch *Ziffernrechnen* bewältigen. Sie wechseln auch innerhalb einer Aufgabe zwischen Ziffern und Zahlen, was sich darin äußert, dass sie z. B. erst mit 3 und fortgesetzt mit 30 rechnen.

Die grundlegenden Unterschiede, welche didaktisch *Zahlen- und Ziffernrechnen* zugeordnet werden, verschwinden in den Aussagen der Kinder. Sie zerlegen in die Stellenwerte und setzen frei, ‚halb frei' oder normiert wieder zusammen. Obwohl didaktisch *stellenweises Rechnen* dem *Zahlenrechnen* und *algorithmisches Rechnen* dem *Ziffernrechnen* zuzuordnen ist, sind diese beiden Lösungsmethoden bezüglich Zahlvorstellungen und den daraus sich ergebenden Verknüpfungen empirisch in den Lösungswegen der Kinder weitgehend ähnlich. Somit ist *stellenweises Rechnen* eng an die zwei weiteren stellenorientierten Lösungsmethoden angebunden. Daraus ergibt sich, dass die zwei „fundamental verschiedenen Denkweisen" (Selter, 1999, S. 7) des *Zahlen- und Ziffernrechnens,* die aus normativ curricular-didaktischer Sicht nicht organisch auseinander hervorgehen können, im Denken der Kinder fließend ineinander übergehen.

Empirisch scheint beim Addieren und Subtrahieren ausschlaggebend zu sein, ob Kinder Zahlganzheiten sehen oder ob sie Zahlen sofort in Stellenwerte zerlegen. Das bedeutet, dass die Kategorisierung in mündliches, halbschriftliches und schriftliches Rechnen für die Beschreibung von Lösungswegen und auch für das Erfassen des Lernstands im Unterricht nur bedingt weiterführt.

Gesamt kann festgehalten werden, dass die Schritte zum verständigen Rechnen konzeptuell anspruchsvoller sind, als gemeinhin angenommen wird. Vieles deutet darauf hin, dass die Sicht auf Zahlen prägend ist. Diese Sicht auf Zahlen zeigt sich in dieser Studie sehr stabil und konnte im Rahmen des stattfindenden, eher traditionell orientierten Unterrichts kaum aufgebrochen werden.

Literatur

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E. & Empson, S. B. (1997). A Longitudinal Study of Invention and Understanding in Children's Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education 29*(1), 3–20.

Csíkos, C. (2012). Sucess and strategies in 10 year old students' mental three-digit addition. In T.-Y. Tso (Hrsg.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 2,* 179–186. Taipei, Taiwan: PME.

Fast, M. (2016, in Druck). *Wie Kinder addieren und subtrahieren. Längsschnittliche Analysen in der Primarstufe.* Heidelberg, Wiesbaden: Springer Research.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P.& Fennema, E. (1997). Children's Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(2), 130–162.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1996). Instruction, Understanding, and Skill in Multidigit Addition and Subtraction. *Cognition and Instruction, 14*(3), 251–283.

Selter, C. (1999). Flexibles Rechnen statt Normierung auf Normalverfahren. *Die Grundschulzeitschrift* (Heft 125), 6–11.

Selter, C. (2000). Vorgehensweisen von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. *Journal für Mathematik-Didaktik, 21*(3–4), 227–258.

Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009). Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally schooled children. *Educational Studies in Mathematics, 71*(1), 1–17.

Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Ghesquière, P. (2006). The Development of Children's Adaptive Expertise in the Number Domain 20 to 100. *Cognition and Instruction, 24*(4), 439–465.

Marei FETZER, Frankfurt

Argumentationsfähigkeit fördern – Toulmin in der Lehrerfortbildung

Für Lehrerinnen und Lehrer stellt es eine große Herausforderung dar, die Kinder in ihrer Klasse bei der Entwicklung der Argumentationskompetenz zu fördern. Wie könnte man Lehrkräfte hierbei unterstürzen? Im Beitrag wird die empirische Studie „Argumentationsfähigkeit fördern - Toulmin in der Lehrerfortbildung“ vorgestellt. In der Studie wird die Grundidee verfolgt, Lehrerinnen und Lehrer für die Struktur von Argumentationen zu sensibilisieren. Was macht eine Argumentation aus? Wann ist eine Argumentation gut? Entsprechend wird in der Lehrerfortbildung mit Toulmins argumentationstheoretischem Ansatz gearbeitet. Ausgestattet mit einem Grundwissen zu Argumentationsstrukturen können die Lehrkräfte gezielter auf die Entwicklung der Argumentationsfähigkeit hinwirken.

1. Theoretischer Rahmen: Toulmin

In seinem Werk „The Uses of Argument“ (2013) geht Toulmin der Frage nach, wie Argumentationen eingesetzt werden, um andere von etwas zu überzeugen. Er stellt heraus, dass Argumentationen durch einen bestimmten Aufbau gekennzeichnet sind. Laut Toulmin sind Datum, Konklusion, Garant und Stützung die zentralen Elemente einer Argumentation. Die Konklusion ist die Aussage, die belegt werden soll. Das Datum ist eine unstrittige Aussage, eine Information oder ein Sachverhalt, den wir als gegeben ansehen. Es kann als Antwort auf die Frage „Was nimmst du als gegeben?“ gedacht werden. Garanten bedeuten eine erweiterte Möglichkeit zu argumentieren. Garanten sind allgemeine oder hypothetische Aussagen, die als Brücken dienen können und die Zulässigkeit des Schlusses legitimieren: „Wie kommst du dahin? Was ‚garantiert‘ die Zulässigkeit des Schlusses?“ Stützungen schließlich sind Aussagen, die klären, warum ein Garant allgemein als zulässig akzeptiert werden soll. Argumentationen können unterschiedlich komplex sein. Die kürzest denkbare Argumentation ist der einfache Schluss: Datum, deswegen Konklusion. Kommt ein Garant hinzu, entsteht eine im Kern vollständige Argumentation. Stützungen schließlich steigern die Komplexität der Argumentation weiter.

2. Empirische Studie

Was hilft Lehrerinnen und Lehrern? In der empirischen Studie „Argumentationsfähigkeit fördern – Toulmin in der Lehrerfortbildung“ wird Toulmins argumentationstheoretischer Ansatz eingesetzt, um Lehrerinnen und Lehrer für die Struktur von Argumentationen zu sensibilisieren und ihnen eine Orientierung zur Förderung der Argumentationsfähigkeit der Kinder anzubieten.

Folgende Forschungsfrage ist leitend für die Studie: Inwiefern ist Toulmins Ansatz geeignet für den Einsatz in der Lehrerfortbildung? Zur Klärung werden zwei Ebenen betrachtet. Einerseits werden Entwicklungen auf der Ebene der Argumentationsstrukturen beforscht. Im Fokus stehen dabei sowohl das Lehrerhandeln als auch Argumentationen, die von Schülern hervorgebracht werden. Andererseits wird die Reaktion der Lehrerinnen auf den theoretischen Input untersucht.

Die Studie ist in drei Phasen aufgebaut:

Phase 1: Unterrichtsbeobachtung (Video)

Phase 2: Lehrerfortbildung (Input 1 und Input 2)

Phase 3: Unterrichtsbeobachtung (Video)

In der ersten Phase wurde der Ist-Zustand des Unterrichtalltags mit drei Videokameras dokumentiert.

Thema der ersten Fortbildung war die Struktur von Argumentationen. Den Einstieg bildete eine Annäherung an den *Begriff des Argumentierens* im Mathematikunterricht. Schwerpunkt der Veranstaltung war *Toulmins argumentationstheoretischer Ansatz*. Im Anschluss wurde das *Argumentieren im Mathematikunterricht der Grundschule* thematisiert: Im Kern vollständige Argumentationen bestehen aus den drei Elementen Datum, Garant und Stützung. Einfache Schlüsse sind, strukturell betrachtet, ein Anfang. Ausschlaggebend für ‚gute' und anspruchsvollere Argumentationen sind jedoch Garanten. Auf der Grundlage theoretischen Inputs einerseits (Fetzer 2015; 2011; Toulmin 2003) und Erfahrungen der Lehrerinnen andererseits wurden *Entwicklungsfelder* umrissen. Darauf aufbauend wurden die *Ansätze zur Förderung* zusammengetragen. Konzeptionell war die Fortbildung eine Kombination aus Vortrag und gemeinsamer Erarbeitung. Dabei fand eine enge Verzahnung der Theorie mit den Erfahrungen der Lehrerinnen statt. Prägend war ein hohes Maß an Eigenaktivität. Anhand einzelner Videosequenzen aus der ersten Phase untersuchten die Lehrkräfte Schülerargumentationen mit Toulmins Ansatz. Schließlich wurden individuelle Ziele für den eigenen Unterricht formuliert.

In der zweiten Veranstaltungen stand die Arbeit an Sequenzen aus Phase 1 der Unterrichtsbeobachtung im Vordergrund. Dabei wurde insbesondere das eigene Lehrerhandeln im Rahmen von Argumentationsprozessen fokussiert.

Im Anschluss an die Lehrerfortbildung wurde bzw. wird der Unterricht erneut mit Video aufgezeichnet, um Entwicklungen untersuchen zu können. Diese dritte und letzte Phase dauert derzeit noch an.

3. Empirische Ergebnisse

Welche Entwicklungen lassen sich im Anschluss an die Lehrerfortbildung beobachten? Inwiefern ist Toulmins Ansatz geeignet für den Einsatz in der Lehrerfortbildung? Die Analyse der Daten folgt einem qualitativen Paradigma, wobei die Argumentationsanalyse neben der Interaktionsanalyse die zentrale Forschungsmethode darstellt (vgl. Fetzer 2011). Die Unterrichtsbeobachtungen der ersten Phase bilden die Folie, auf deren Grundlage sich Veränderungen beschreiben lassen. Folgende ‚Ausgangssituation' lässt rekonstruieren:

(1) Wenig Partner- oder Gruppenarbeit:
Im Unterricht herrschen Plenumsphasen und Einzelarbeit vor. Wenn es beim Argumentieren darum geht, *andere* von etwas zu überzeugen, scheint Einzelarbeit nicht die besten Lernbedingungen zu schaffen.

(2) Konzentration auf methodische Aufbereitung:
Viele der beobachteten Stunden haben eine durchdachte methodische Rahmung. Der mathematische Inhalt fällt demgegenüber stark ab.

(3) Einfache Schlüsse:
Es lassen sich viele einfache Schlüsse rekonstruieren. Ein Garant fehlt, und wird auch nicht eingefordert.

(4) Nicht *ob* eine Augmentation gültig ist, sondern *warum*:
In den meisten dokumentierten Fällen ist der Schluss vom Datum zur Konklusion nicht umstritten. Verhandelt wird der Garant: „*Warum* kommt die 500 000 auf die Hälfte zwischen die 0 und die eine Million?"

(5) Initiierung der Argumentation durch die Lehrerin:
Meist ist es die Lehrerin, die den Garanten erfragt.

(6) Unpassende Garanten werden akzeptiert:
Garanten werden hervorgebracht, die entweder inhaltlich oder strukturell unpassend sind. Dennoch schreitet die Argumentation voran.

(7) Keine im Kern vollständige Argumentation durch die Lehrerin:
Argumentation, die ausschließlich von der Lehrerin hervorgebracht werden, lassen sich nicht finden.

Die Auswertung der Lehrerfortbildungsveranstaltungen sowie die Analysen des Unterrichts zeigen deutlich auf, inwiefern sich Entwicklungen rekonstruieren lassen.

Zu (3), (4) und (6): Im Unterricht lässt sich eine deutliche Konzentration auf das jeweilige Datum rekonstruieren. „Was genau meinst du?" Vor allem rücken die Garanten zunehmend in den Blickpunkt. Sie werden nicht nur eingefordert, sondern auch auf inhaltliche und strukturelle Passung überprüft. Phasen, in denen verschiedene Garanten ausprobiert und gegeneinander abgewogen werden, nehmen deutlich zu: „Wir haben mehrere Ideen. Was überzeugt uns (in Mathe) am meisten?"

Neben diesen Entwicklungen auf der Mikroebene einzelner Argumentationen, lassen sich auch Veränderungen ausmachen, welche die gesamte Stundenstruktur betreffen. Gleichsam auf der Makroebene der Unterrichtsstruktur lässt sich ein Aufbau in Analogie zu Toulmins Argumentationsstruktur rekonstruieren: Ausgehend von einem klaren Startpunkt (Datum) wird ein Ziel (Konklusion) fokussiert. Statt der methodischen Aufbereitung rückt dabei der mathematische Inhalt stärker ins Zentrum, als dies zuvor der Fall war (2). Gemeinsam suchen Lehrerin und Kinder nach Wegen zum Ziel. "Wie kommen wir dahin?" (5). Damit einher geht auch eine veränderte Wahl der Sozialform: Partnerarbeit wird gewählt, um Argumentationsprozesse zu ermöglichen (1).

Entscheidend ist die Erkenntnis, dass Lehrerinnen als Vorbild beim mathematischen Argumentieren fungieren. Sie sollten vollständige Argumentationen produzieren und auf diese Weise vormachen, wie mathematisches Argumentieren aussehen kann. (7).

Die Reaktionen der Lehrerinnen auf den theoretischen Input der Fortbildung waren überaus positiv. Insbesondere die Verzahnung des theoretischen Angebots mit der eigenen Unterrichtspraxis gelang gut und wurde von den Teilnehmerinnen als besonders positiv hervorgehoben.

Die systematische Analyse der Schülerargumentationen der dritten Phase ist erst in den Anfängen. Gleichwohl zeichnen sich bereits Veränderungen in Richtung zunehmend komplexerer Argumentationen ab.

Literatur

Fetzer, M. (2015). Argumentieren im Mathematikunterricht - Entwicklungen auslösen. In Steinweg, A. S. (Hrsg.), *Mathematikdidaktik Grundschule - Band 5: Entwicklung mathematischer Fähigkeiten von Kindern im Grundschulalter*. Bamberg: University of Bamberg Press (UBP).

Fetzer, M. (2011): Wie argumentieren Grundschulkinder im Mathematikunterricht? Eine argumentationstheoretische Perspektive. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, 32 (1), 27–51.

Toulmin, S. (2003): *The Uses of Argument*. Updated Edition. Cambridge: University Press.

Vincenzo FRAGAPANE, Mutfried HARTMANN, Thomas BORYS, Karlsruhe

Mobilising and Transforming Teacher Education Pedagogies - Entwicklung eines Frameworks für mobile Lernumgebungen

Im Rahmen des Erasmus+ Projekts „Mobilising and Transforming Teacher Education Pedagogies“ (www.mttep.eu) wird in Kooperation verschiedener europäischer Bildungseinrichtungen sowie der University of Technology Sydney ein Framework für mobile Lernumgebungen entwickelt, das Lehrer und Lehrerausbilder in der Entwicklung und Beurteilung mobiler Lernumgebungen unterstützen soll. Dazu werden ein online-Werkzeugkasten, ein offener online-Kurs und eBooks entwickelt. Der theoretische Hintergrund des Frameworks soll hier vorgestellt und an einem Beispiel erläutert werden.

PAC ein theoretisches Modell zur Analyse mobilen Lernens

Die Entwicklung eines Frameworks für mobile Lernumgebungen macht es erforderlich pädagogische Ansätze zu untersuchen, die für Mobile-Learning geeignet sind. Der Ansatz besteht darin Mobile-Learning stärker aus der Perspektive der Lernenden zu konzeptualisieren als aus der alleinigen Sicht auf technologische Anforderungen (Traxler 2009a, S. 13). Dabei wird angenommen, dass das Lernen von verwendeten Werkzeugen beeinflusst und verändert wird, gleichzeitig jedoch auch die Werkzeuge immer angepasst werden, damit sie für das Lernen in geeigneter Weise verwendet werden können. Darüber hinaus wird in diesem Kontext Lernen als soziales Bestreben verstanden, das sich durch Interaktionen und Gespräche entwickelt (Vygotsky 1978) und durch den Einsatz von Werkzeugen begünstigt wird (Wertsch 1991). Ziel ist die Identifizierung spezifischer Aspekte von Mobile-Learning, die (1) Forschern eine Analyse bestehender pädagogischer Konzepte erlauben, (2) Lehrern helfen Lernprozesse kritisch zu reflektieren und (3) Unterstützung bei der Gestaltung von Lernumgebungen bieten.

Ein wichtiges Ergebnis dieser Bemühungen ist das von Kearney, Schucka, Burden und Aubusson entwickelte *PAC-Modell* (Kearney et al. 2012). Namensgebend sind hierbei die Anfangsbuchstaben der englischen Begriffe: (1) *Personalisation*, (2) *Authenticity* und (3) *Collaboration*, die zentrale pädagogische Aspekte mobilen Lernens berücksichtigen.

Das PAC-Modell wurde iterativ in einem *Design-Test-Analyse-Refine*-Zyklus in Anlehnung an Kemmis und McTaggart (1988) entwickelt. Die Grundlage hierfür waren Untersuchungen bestehender Modelle im Kontext soziokultureller Theorien, die im Hinblick auf die Identifizierung wichtiger Aspekte von Mobile-Learning erfolgten (Koole (2009), Traxler (2009b), Klopfer, Squire & Jenkins (2002), Danaher, Gururajan & Hafeez-Baig (2009)).

Das Zentrum des Modells bilden die Begriffe *Time* und *Space*, zwei Dimensionen in die Lernen stets eingebettet ist. Es ist zu berücksichtigen, dass *Mobile-Learning* das Potenzial hat, räumliche und zeitliche Einschränkungen zu überwinden. Dies hat direkten Einfluss auf die drei Hauptaspekte des Modells (1) *Personalisation*, (2) *Authenticity* und (3) *Collaboration*, die wiederum in jeweils zwei Teilaspekte unterteilt werden. In der folgenden Übersicht werden zusätzlich Hinweise zur Ausprägung dieser Teilaspekte gegeben.

(1) ***PERSONALISATION*** (Personalisierung oder Individualisierung)

	Schwache Ausprägung	**Starke Ausprägung**
	Lernziele, -inhalte und -wege sind...	
AGENCY (Selbstwirksamkeit)	Extern festgelegt	Gemeinsam oder selbständig festgelegt
CUSTOMISATION (Anpassung)	Einheitlich strukturiert	Individuell zugeschnitten

Der Aspekt *Personalisiation* wird einerseits charakterisiert durch Chancen zur Selbstwirksamkeit bzw. durch die Eigenverantwortlichkeit bei der Wahl der Lernziele, Lerninhalte und Lernwege und andererseits durch die Anpassung der Lernumgebung selbst an den Lerner.

(2) ***AUTHENTICITY*** (Authentizität)

	Schwache Ausprägung	**Starke Ausprägung**
	Lernziele, -inhalte und -wege sind...	
CONTEXTUALISATION (Kontextualisierung)	Konstruiert oder erfunden	Realistisch und relevant
SITUATEDNESS (Verortung)	Simuliert	Eingebunden in reale Situation

Unter dem Aspekt *Authenticity* wird geprüft, ob die Lernziele, -inhalte und -wege realistisch, relevant und in eine reale Situation eingebettet sind.

(3) ***COLLABORATION*** (Zusammenarbeit)

	Schwache Ausprägung	**Starke Ausprägung**

CONVERSATION (Konversation)	Keine	Dynamisch
DATA SHARING (Daten Teilen)	Monodirektional	Vernetzt

Findet unter Verwendung mobiler Technologien dynamische Konversation statt und werden selbsterstellte Daten vernetzt geteilt, ist die Lernumgebung im Bezug auf den Aspekt *Collaboration* optimal ausgerichtet.

Lehrern und Forschern wird mit dem *PAC-Modell* bereits ein praktisches Werkzeug zur Reflexion von Lehr- und Lernaktivitäten zur Verfügung gestellt, das sich auf soziale und persönliche Lernprozesse konzentriert. Dieses erweist sich als hilfreich, auch wenn seine Entwicklung noch nicht endgültig abgeschlossen gelten kann. Im folgenden wird ein Unterrichtsprojekt zum mobilen Lernen unter den Gesichtspunkt des PAC-Modells analysiert.

Mobilising Statistics - eine mobiles Unterrichtsprojekt

In dem Projekt führen Schüler eine statistische Untersuchung mit Tablets zur Datenerhebung, Datenzusammenführung, Datenanalyse und Datenpräsentation durch. Der Ablauf wird im Folgenden kurz skizziert und hinsichtlich des obigen Modells reflektiert.

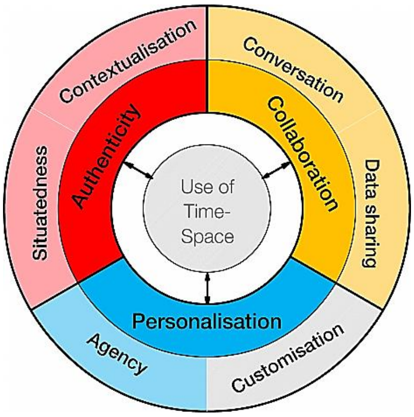
An einer Nachbarschule wurden Daten zur folgenden Frage erhoben: Wie gefällt dir deine Schule? Der Lehrende stellt mit einer Präsentationssoftware die Datenerhebung und deren Ergebnis seinen Schülerinnen und Schülern vor. Die Problemstellung entstammt damit einem authentischen Kontext (Authenticity/Contextualisation). Nach der Diskussion der fremden Daten werden Themen für eine eigene Fragestellung von den Lernenden vorgeschlagen. Die Vorschläge werden gesammelt und diskutiert (Collaboration/Conversation). Schließlich haben sich die Schülerinnen und Schüler für die folgende Fragestellung entschieden: Wie lange nutzt du das Internet täglich? (Personalisation/Agency) Mit der Untersuchung der eigenen Fragestellung wird propädeutisch-wissenschaftliches Arbeiten in authentischer Weise erfahrbar (Authenticity/Situatedness).

Zur Vorbereitung der Befragung erstellen die Schülerinnen und Schüler eine Tabelle mit ihren Tablets in einer Tabellenkalkulationssoftware. Anschließend führen die Schülerinnen und Schüler die Befragung durch (Authenticity/Situatedness) und vergleichen ihre Ergebnisse in ihren Gruppen (Collaboration/Conversation). Dabei stellen sie fest, dass die Ergebnisse aufgrund zu kleiner Datensätze stark divergieren. Zur Vergrößerung der Datenlage werden Daten außerhalb der Schule nacherhoben und schließlich per E-Mail zusammengeführt, so dass die Gruppe nun zu einem valideren gemeinsamen

Ergebnis kommt (Collaboration/Data sharing).

Bis auf den Aspekt Customization konnten in dem Projekt also alle Dimensionen des PAC-Modells berücksichtigt werden (vgl. Abbildung).

Besondere Bedeutung würde die angestrebte Überwindung von Raum und Zeit bekommen, wenn die Daten nicht nur innerhalb der Schule, sondern europaweit erhoben und ausgetauscht werden könnten. Derartige Kooperationen wären im Sinne eines fächerübergreifenden Lernens und nicht zuletzt im Sinne des europäischen Austausches eine wirkliche Bereicherung traditionellen Unterrichts durch mobile, digitale Lernumgebungen.



Literatur

Danaher, P., Gururajan, R. & Hafeez-Baig, A. (2009). Transforming the practice of mobile learning: promoting pedagogical innovation through educational principles and strategies that work. In H. Ryu & D. Parsons: *Innovative mobile learning: Techniques and technologies* (S. 21-46). Hershey: IGI Global.

Kearney, M., Schuck, S., Burden, K., & Aubusson, P. (2012). Viewing mobile learning from a pedagogical perspective. *Research In Learning Technology, 20*. URL: http://www.researchinlearningtechnology.net/index.php/rlt/article/view/14406

Kemmis, S. & McTaggart, R. (1988). *The action research planner.* Victoria: Deakin University Press.

Klopfer, E., Squire, K. & Jenkins, H. (2002). Environmental detectives: PDAs as a window into a virtual simulated world. In *Proceedings of IEEE international workshop on wireless and mobile technologies in education* (S. 95-98). Vaxjo: IEEE Computer Society.

Traxler, J. (2009a). Current state of mobile learning. In M. Ally: *Mobile Learning: Transforming the Delivery of Education and Training* (S. 9-24). Edmonton: AU Press

Traxler, J. (2009b). Learning in a Mobile Age. *International Journal of Mobile and Blended Learning (IJMBL), 1*(1) (S. 1-12). URL: http://www.igi-global.com/article/learning-mobile-age/2754

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society*. Cambridge: MIT Press.

Wertsch, J. V. (1991). *Voices of the mind: a socio-cultural approach to mediated action.* Cambridge: Harvard University Press.

Andreas FRANK, Stefan KRAUSS, Regensburg

Wie werden Schülerüberzeugungen (Beliefs) zu Mathematik durch die neuen Unterrichtsformate der gymnasialen Oberstufe beeinflusst?

Schülerüberzeugungen zu Mathematik spielen eine wichtige Rolle dabei, wie Schülerinnen und Schüler Mathematik sehen, wie sie Mathematik betreiben, wie sie an mathematische Probleme herangehen und wie sie Mathematik lernen. Dadurch haben sie große Bedeutung für die Leistungsentwicklung in Mathematik (Grigutsch, 1997; Köller et al., 2000). Wie werden nun bestehende Schülerüberzeugungen durch die neuen Unterrichtsformaten der gymnasialen Oberstufe beeinflusst? Im vorliegenden Beitrag wird eine Studie vorgestellt, die der Beantwortung dieser Frage nachgeht.

Theoretischer Hintergrund

Im Schuljahr 2009/10 traten in Bayern erstmals Schülerinnen und Schüler in die Oberstufe des 8-jährigen Gymnasiums ein und besuchten die mit Abschaffung des Grund- und Leistungskurssystems neu eingerichteten *Wissenschaftspropädeutischen Seminare* und *Projekt-Seminare zur Studien- und Berufsorientierung* (kurz W- und P-Seminare). Die Teilnahme an je einem W- und P-Seminar ist verpflichtend, die jeweilige Fächerwahl jedoch frei. Gemäß ISB Bayern (2008) sind Ziele dieser Unterrichtsformate die Vermittlung der Kompetenz in selbstständigem, wissenschaftlichem Arbeiten (W-Seminar) sowie die Förderung der Berufswahl- und Berufsweltkompetenz (P-Seminar). Gerade in mathematischen W-Seminaren sollen sich Schülerinnen und Schüler in hohem Maße eigenverantwortlich und selbstständig mit der Wissenschaft Mathematik auseinandersetzen. Auf diese Weise können sie selbst Dinge (nach-)entdecken und Erkenntnisgewinnungsprozesse durchlaufen. Im Gegensatz dazu ist der Mathematikunterricht häufig geprägt von der Vermittlung von Fakten und Rechenprozeduren sowie deren Anwendung. Somit ist anzunehmen, dass insbesondere in W-Seminaren Schülerinnen und Schüler neue Erfahrungen sammeln können dahingehend, was mathematisches Wissen ist, wie es entsteht und wie es erworben werden kann, und dass sich folglich auch ihre Überzeugungen diesbezüglich verändern.

Überzeugungen werden beispielsweise im Rahmen der COACTIV-Studie definiert als *überdauernde, relativ feste Annahmen einer Person über bestimmte Phänomene oder Objekte der Welt, welche subjektiv für wahr gehalten werden und somit die Wahrnehmung der Umwelt und das Handeln beeinflussen* (Baumert & Kunter, 2011). Nach Voss et al. (2011) lassen sich die *fachspezifischen* Überzeugungen in einem zweidimensionalen Modell strukturieren, in dem hinsichtlich der lerntheoretischen Fundierung unterschieden wird (vgl. Tab. 1). Es wird differenziert nach konstruktivistischen und transmissiven Überzeugungen, die dabei keine gegenseitigen, sich ausschließenden Endpunkte *einer* Dimension bilden, sondern *zwei* unterschiedliche, jedoch negativ korrelierte Dimensionen repräsentieren. Voss et al. (2011) konnten nachweisen, dass sich konstruktivistische Überzeugungen von Lehrkräften positiv auf die Unterrichtsqualität und den Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler auswirken.

Tabelle 1: Strukturierung von Überzeugungen nach Voss et al. (2011)

		Lerntheoretische Fundierung	
		konstruktivistisch	**transmissiv**
Inhaltsbereich	Epistemologische Überzeugungen zum Wesen von Mathematik	▪ Mathematik als Prozess	▪ Mathematik als Toolbox
	Überzeugungen über das Lernen von Mathematik	▪ Selbstständiges und verständnisvolles diskursives Lernen ▪ Vertrauen auf mathematische Selbstständigkeit der SuS	▪ Eindeutigkeit des Lösungswegs ▪ Rezeptives Lernen durch Beispiele und Vormachen ▪ Einschleifen von technischem Wissen

Bisherige Forschungsergebnisse zeigen, dass höhere Lernleistungen mit stärker ausgeprägten konstruktivistischen Überzeugungen von Schülerinnen und Schülern zusammenhängen (Grigutsch, 1997; Köller et al., 2000). Zudem konnten Holzäpfel et al. (2012) in einer Interventionsstudie zeigen, dass sich die konstruktivistische Sichtweise beispielsweise nach vermehrtem selbstregulativem, problemlösendem Arbeiten verstärkt.

Fragestellungen

Basierend auf diesen Ergebnissen stellen sich folgende Forschungsfragen:
(1) Welchen Einfluss hat die Teilnahme an einem mathematischen W-Seminar (oder P-Seminar) auf die Schülerüberzeugungen zu Mathematik?
(2) Welche Faktoren (z. B. selbstständiges Arbeiten, Interesse, Lernstrategien) hängen mit der Veränderung der Überzeugungen zusammen?

Methode

In einer längsschnittlich angelegten Mixed-Methods-Studie mit Prä-Post-Design wurden 206 Schülerinnen und Schüler untersucht. Davon nahmen 57 an einem W-Seminar (G_W), 54 an einem P-Seminar (G_P) und 95 an keinem Seminar (Kontrollgruppe, G_K) im Fach Mathematik teil. Um die Frage nach den Veränderungen der Überzeugungen beantworten zu können, bearbeiteten alle drei Gruppen Anfang der 11. Jahrgangsstufe (Seminar-Beginn) sowie Mitte der 12. Jahrgangsstufe (Seminar-Ende) einen Fragebogen. Dabei wurden neben Überzeugungen noch weitere Konstrukte (z. B. Interesse, Lernstrategien) erhoben, bei denen Zusammenhänge mit den Überzeugungen vermutet werden. Um mögliche Ursachen für diese Veränderungsprozesse identifizieren zu können, wurden nach Beendigung der Seminare zusätzlich Leitfadeninterviews mit ausgewählten Schülerinnen und Schülern der W- und P-Seminare geführt.

Erste Ergebnisse

Für die ausgewählte Stichprobe zeigt sich: Konstruktivistische Überzeugungen nehmen im Laufe der Seminar-Phase zu, am deutlichsten bei den Teilnehmerinnen und Teilnehmern der W-Seminare (d = 0.48). Gleichzeitig nehmen transmissive Überzeugungen bei allen drei Gruppen (vergleichsweise weniger) ab (vgl. Tab. 2).

Tabelle 2: Mittelwertunterschiede in den Überzeugungen der Schülerinnen und Schüler (N = 206)

Überzeugungen	Gruppe	N	Prä M (SD)	Prä α	Post M (SD)	Post α	d	p-Wert
konstruktivistisch	G_W	54	2.96 (0.33)	.87	3.12 (0.37)	.91	0.48**	< .01
	G_P	49	2.73 (0.47)		2.89 (0.43)		0.34*	.02
	G_K	85	2.55 (0.43)		2.65 (0.49)		0.23*	.02
transmissiv	G_W	52	2.56 (0.41)	.84	2.50 (0.49)	.88	–0.14	.27
	G_P	49	2.87 (0.44)		2.80 (0.41)		–0.17	.31
	G_K	80	2.90 (0.42)		2.83 (0.46)		–0.16	.19

Bem.: M: arithm. Mittel; SD: Standardabweichung; α: Reliabilitätskoeffizient nach Cronbach; d: Effektstärke nach Cohen
*: signifikanter Unterschied ($p \leq .05$); **: sehr signifikanter Unterschied ($p \leq .01$)

Der paarweise Vergleich zwischen den Gruppen führt zu folgendem Ergebnis: Konstruktivistische Überzeugungen unterscheiden sich zu beiden Messzeitpunkten signifikant, transmissive Überzeugungen sind ebenfalls zu beiden Messzeitpunkten (außer zwischen G_P und G_K) signifikant unterschiedlich. Die Unterschiede zum ersten Messzeitpunkt legen nahe, dass bereits die Seminarwahl der Schülerinnen und Schüler mit unterschiedlichen Überzeugungen zusammenhängen könnte.

Der Post-Unterschied in den konstruktivistischen Überzeugungen von Schülerinnen und Schülern mit W-Seminar und von denjenigen ohne Seminar im Fach Mathematik bleibt auch bestehen, wenn die bereits zu Beginn vorhandenen Unterschiede statistisch kontrolliert werden (Kovarianzanalyse, $F(1, 136) = 9.22$, $p \leq .01$).

Diskussion und Ausblick

Die bisherigen Ergebnisse deuten darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler im Rahmen eines W-Seminars tatsächlich auf andere Weise Mathematik betreiben. Die noch anstehende Auswertung der qualitativen Interviews soll Aufschluss darüber geben, welche neuen Erfahrungen die Schülerinnen und Schüler dort sammeln konnten, welchen ungewohnten Herausforderungen und Problemen sie sich stellen mussten und welche neuartigen Aspekte in ihrer Sichtweise auf Mathematik sie daraus gewinnen konnten. Im Anschluss sollen unter Berücksichtigung von weiteren auf Schülerseite erhobenen Konstrukten (z. B. Interesse, Lernstrategien) Strukturgleichungsmodelle zur Änderung von Überzeugungen postuliert und überprüft werden.

Literatur

Baumert, J. & Kunter, M. (2011). Das Kompetenzmodell von COACTIV. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 29-53). Münster: Waxmann.

Grigutsch, S. (1997). Mathematische Weltbilder von Schülern. Struktur, Entwicklung, Einflußfaktoren. *Journal für Mathematik-Didaktik, 18*(2/3), 253-254.

Holzäpfel, L., Bernack, C., Leuders, T. & Renkl, A. (2012). Schreiben, forschen und reflektieren in der Mathematiklehrerausbildung: Veränderung mathematikbezogener Überzeugungen. In M. Kobarg, C. Fischer, I. Dalehefte F. Trepke & M. Menk (Hrsg.). *Lehrerprofessionalisierung wissenschaftlich begleiten – Strategien und Methoden* (S. 15-34). Münster: Waxmann.

Köller, O., Baumert, J. & Neubrand, J. (2000). Epistemologische Überzeugungen und Fachverständnis im Mathematik- und Physikunterricht. In J. Baumert, W. Bos & R. Lehmann (Hrsg.). *TIMSS/III. Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie. Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn, Band 2* (S. 229-269). Opladen: Leske und Budrich.

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (2008). Die Seminare in der gymnasialen Oberstufe. https://www.isb.bayern.de/download/1581/isb_seminare_komplett_2-aufl.pdf (04.03.2016)

Voss, T., Kleickmann, T., Kunter, M. & Hachfeld, A. (2011). Überzeugungen von Mathematiklehrkräften. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 235-257). Münster: Waxmann.

Julia FRIEDLE, Frankfurt am Main

Inklusion im Mathematikunterricht – Empirische Studie zur Zusammenarbeit von Regelschul- und Förderschullehrkräften

Inklusion im Mathematikunterricht und die Arbeit in multiprofessionellen Teams gewinnen zunehmend an Bedeutung, sowohl in der Praxis als auch in der Forschung. Die Umsetzung von Inklusion in der Schule stellt einen wichtigen Teil von Inklusion in der Gesellschaft dar. Eine gleichberechtigte Teilhabe aller Schülerinnen und Schüler, die sich alle untereinander in verschiedensten Aspekten unterscheiden, ist das Ziel. Deshalb gilt es, einen Unterricht anzubieten, von dem alle Schülerinnen und Schüler profitieren können. Im Lernbereich Mathematik ist es die Aufgabe der Lehrkräfte, individuelles und gemeinsames Lernen in einem differenzierten und flexiblen Unterricht zu initiieren. Spezielle Aufgabenformate und Lernumgebungen liefern Ideen für die Umsetzung, die laut Forschung in der Praxis oft eine große Herausforderung darstellt. Auf Lehrkräfte, die sich der Inklusion annehmen, kommen neue Aufgaben, neue Bedingungen und eine neue Art des Arbeitens zu. Ihr Berufsbild wandelt sich. Regelschullehrkräfte und Förderschullehrkräfte werden kooperierende Professionen. An die Teams werden Anforderungen gestellt, die es mit einer inklusiven Haltung anzunehmen gilt, sodass positive Effekte aus der Kooperation für sich selbst, den Unterricht und die Schülerinnen und Schüler gezogen werden können.

Studie

Die nachfolgend beschriebene Studie ist im Rahmen der ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Grundschulen im Fach Mathematik unter der Betreuung von Frau Dr. Marei Fetzer entstanden. Bei der durchgeführten Lehrkräftebefragung handelt es sich um eine qualitative Interviewstudie. Die Erhebungsmethode stellen hierbei erzählgenerierende Interviews dar, die auf die Schilderung von Erfahrungen abzielen, sodass auch Bewertungen der Lehrkräfte deutlich werden können (Korff 2015). Ein offen gehaltener Interviewleitfaden eröffnet den Befragten die Möglichkeit, eigene Schwerpunkte zu setzen (Flick 2011).

Die Lehrenden (Teams bestehend aus einer Regelschul- und einer Förderschullehrkraft) wurden lediglich danach ausgewählt, ob sie folgendes Kriterium erfüllen: Sie arbeiten gemeinsam und regelmäßig in einer Inklusionsklasse der Grundschule. Die Einstellung der Lehrkräfte oder deren Kompetenzen bezüglich des Fachs Mathematik waren für die Auswahl nicht relevant. Denn auch Lehrkräfte, die dem Lernbereich Mathematik gegenüber nicht positiv eingestellt sind, sich unsicher fühlen oder ihre Kompetenzen darin als gering einschätzen, müssen in der Realität mit dem Lernbereich umgehen.

Bei der Studie wurden zwei Teams, bestehend aus einer Regelschul- und einer Förderschullehrkraft, interviewt, die regelmäßig in einer Inklusionsklasse zusammenarbeiten. Die Befragung nimmt die Struktur Inklusion im Allgemeinen, Zusammenarbeit im Allgemeinen und Inklusion sowie Zusammenarbeit im Mathematikunterricht ein. Der Fokus der Befragung liegt dabei darauf, in welcher Form inklusiver Mathematikunterricht als Team umgesetzt wird.

Ergebnisse

Die durchgeführte Studie gewährt Einblicke in die Praxis und zeigt Aspekte bezüglich der Zusammenarbeit von Regelschul- und Förderschullehrkräften allgemein und konkret im inklusiven Mathematikunterricht auf. Die Aussagen der befragten Lehrkräfte bezüglich Teamarbeit, Inklusion sowie individuellem und gemeinsamem Mathematiklernen geben Anhaltspunkte, inwiefern Vorschläge wie auch Idealvorstellungen der Theorie in der Praxis vorzufinden sind. Die Auswertung der Studie zeigt durch den Vergleich mit der Theorie, dass bereits einige Aspekte in der Praxis gelingen, andere wiederum (noch) nicht. Die zentralen Erkenntnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen.

Die Rahmenbedingungen erschweren oder verhindern es den Lehrkräfteteams oftmals Teamarbeit und inklusiven Mathematikunterricht, wie es in der Theorie gefordert und beschrieben wird, umzusetzen. Doch auch den Lehrkräften beziehungsweise den Teams kommt ein großer Teil der Verantwortung bezüglich des Gelingens von Inklusion (im Mathematikunterricht) zu. Die Einstellung und Haltung der Lehrkräfte ist maßgeblich für das Gelingen von Teamarbeit sowie für eine gelingende Umsetzung von Inklusion (im Mathematikunterricht). Bei den beiden Teams zeigte sich jedoch eine unterschiedlich stark ausgeprägte inklusive Haltung. Beiden Teams gelingt es, individuelles Mathematiklernen zu initiieren, ihre Zusammenarbeit selbständig zu organisieren und dem Entwicklungsprozess mit Offenheit zu begegnen. Dem Team, das eine stärker ausgeprägte inklusive Haltung zeigte, gelingt es besser, sich dem Gedanken der Inklusion im Mathematikunterricht anzunähern.

In beiden Teams kann jedoch nicht von gelingendem inklusivem Mathematikunterricht gesprochen werden. Dafür fehlt es beiden an zentralen Elementen, die einen inklusiven Mathematikunterricht ausmachen. Allem voran gelingt es beiden Teams nicht, gemeinsames Mathematiklernen zu initiieren. Weiterhin gelingt es unter anderem nicht die Kompetenzen beider Lehrkräfte kontinuierlich für alle Lernenden zu nutzen. Schwierigkeiten resultieren jedoch auch aus der Tatsache, dass wie die Praxis so auch die Forschung bezüglich Inklusion im Mathematikunterricht noch nicht ausgereift ist.

Fazit

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der in dieser Studie gewonnene Einblick in die Praxis folgendes Bild abzeichnet: Die aktuellen Rahmenbedingungen ermöglichen es den Lehrkräften nicht, gelingenden inklusiven Mathematikunterricht umzusetzen, selbst wenn sie die Kompetenzen dafür haben. Die Teams gaben zu erkennen, dass sie von ihrer neuen Aufgabe überrumpelt, unvorbereitet, unsicher, überfordert und allein gelassen sind. Die Bedingungen, die Ressourcen und die Unterstützung in Form von Ausbildungen, Vorbereitungen und Hilfe während des gesamten Prozesses können als unzureichend bewertet werden (Fetzer et al. 2015). Gerade an diesen Stellen sollte angesetzt werden, um sich einem gelingenden inklusiven Mathematikunterricht anzunähern und den Teams, die sich dieser Herausforderung stellen, gute Bedingungen zu bieten. So ist es beispielsweise notwendig, Ressourcen zur Verfügung zu stellen, um organisierten Erfahrungsaustausch sowie organisierte Fort- und Weiterbildungen anzubieten. Dies stellt einen Lösungsweg dar, um die Weitergabe und Aneignung von fachdidaktischem Wissen und spezifischem Wissen zur Zusammenarbeit zu ermöglichen. Auch wenn die Bedingungen aktuell noch nachteilhaft sind, sollten sich Lehrkräfte nicht davon entmutigen lassen, sich der Aufgabe der Inklusion (im Mathematikunterricht) anzunehmen. Denn durch ihre Erfahrungen wird Fortschritt überhaupt erst möglich.

Für eine Veränderung der Situation ist es daher wesentlich, dass aktuelle Probleme, wie sie hier beschrieben wurden, kommuniziert werden. Damit liegt die Verantwortung für eine solche Veränderung zum einen bei Forschungsprojekten, die aktuelle Problematiken in der Praxis wiedergeben. Zum anderen tragen auch die beteiligten Lehrkräfte eine Verantwortung, um Veränderungen der Situation zu bewirken, indem sie ihre Erfahrungen kommunizieren. Dies wiederum gelingt gerade durch die Teilnahme an empirischen Studien. In diesem Zusammenhang können Erweiterungen der vorliegenden Studie einen wertvollen Beitrag zur Entwicklung der Zusammenarbeit von Regelschul- und Förderschullehrkräften im inklusiven Mathematikunterricht leisten.

Literatur

Fetzer, M., Friedle, J., Pfeiffer, L. & Schneider, F. (2015). Inklusion – Ideen für Unterricht und Lehrerausbildung. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2015 (S. 280-283). Münster: WTM-Verlag.

Flick, U. (2011). Qualitative Sozialforschung. Eine Einführung (5. Aufl.). Reinbek bei Hamburg: Rowolth-Taschenbuch-Verlag.

Korff, N. (2015). Inklusiver Mathematikunterricht in der Primarstufe. Erfahrungen, Perspektiven und Herausforderungen. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Torsten FRITZLAR, Frieder HÖCHE, Karin RICHTER, Halle

Wie funktioniert Mathematiklernen – zu Vorstellungen von Studienanfängern zum Lehren und Lernen von Mathematik

1. Rahmung

Beliefs, Einstellungen oder Vorstellungen von Lehrpersonen sind ein von Schulforschern und in den letzten Jahrzehnten auch von Fachdidaktikern vielbeachtetes Forschungsgebiet (z. B. Forgasz & Leder, 2008). Allerdings gibt es keine allgemein akzeptierte Definition dieses Forschungsgegenstandes; was darunter verstanden wird, hängt nicht zuletzt von der jeweiligen Fachdisziplin bzw. vom Forschungsinteresse ab.

Pehkonen (1994) beschreibt „beliefs“ als relativ stabiles, erfahrungsbasiertes, subjektives und oft implizites Wissen, verbunden mit einer affektiven, bedeutungskonstituierenden Komponente. Darüber hinaus sind sie selbstverständlich auch nicht frei von Normen und Wertvorstellungen (Zimmermann, 1991). Die kognitiven Komponenten werden häufig auch als Vorstellungen („conceptions“) angesprochen (Pehkonen & Törner, 1996).

Vorstellungen von Lehrpersonen haben einen enormen Einfluss auf das Unterrichtsgeschehen, auf Interaktions- und Kommunikationsprozesse im Klassenraum und letztendlich darauf, was Schülerinnen und Schüler lernen (Forgasz & Leder, 2008; Thompson, 1992). Sie können als Brücke zwischen Wissen und Handeln angesehen werden (Felbrich, Schmotz, & Kaiser, 2010), allerdings ist dabei nicht von einem einfachen unidirektionalen oder monokausalen Zusammenhang auszugehen (Devlin, 2006).

Studierende und Lehrende bei der Entwicklung angemessener Vorstellungen zu unterstützen, erscheint somit als eine wichtige Aufgabe der Lehreraus- und –weiterbildung. Diese ist allerdings nicht einfach, denn zum einen verfügen beispielsweise bereits Studienanfänger aus langjähriger Schulzeit über ausgeprägte, in der Regel eher traditionelle Vorstellungen zum Unterrichten, zum guten Lehrer oder zu sich selbst als Lehrperson (z. B. Kagan, 1992). Zum anderen gelten einmal erworbene Vorstellungen als stabil und schwierig zu verändern, auch weil sie sowohl durch ihren Filtereffekt (Pajares, 1992) als auch durch Vernetzungen bzw. Clusterbildung selbststabilisierend wirken (Pehkonen, 1994).

Dennoch könnte die universitäre Phase der Lehrerbildung mit ihrem Übergang vom Schüler(innen)- zum Lehrer(innen)dasein in besonderer Weise geeignet sein, die Weiterentwicklung individueller Vorstellungen zum Lernen und Lehren zu unterstützen. Informationen über die vorfindbare Ausgangslage wären dabei sicher hilfreich.

Zur Erfassung von Vorstellungen von (zukünftigen) Lehrpersonen gibt es ganz unterschiedliche (mit jeweils spezifischen Schwierigkeiten behaftete) methodische Ansätze, von der standardisierten Befragung bis hin zur Betrachtung von Unterrichts- und Planungsprozessen. In jüngerer Zeit kommt auch die Analyse von Zeichnungen in den Blick. Sie gelten einerseits als Zugriffsmöglichkeit auf atheoretisches Wissen des Individuums, das dessen alltägliche Handlungspraxis orientiert. Andererseits stellt der methodisch kontrollierte Zugang zum Bild immer noch eine der größten Herausforderungen der gegenwärtigen sozialwissenschaftlichen Forschung dar (Bohnsack, 2011).

2. Eine Fallstudie

Davon ausgehend soll in einer Fallstudie erkundet werden, über welche Vorstellungen zum Lehren und Lernen von Mathematik Studierende für ein Lehramt an Grundschulen zu Beginn ihrer fachdidaktischen Ausbildung verfügen, wobei wir uns insbesondere dafür interessieren, wie stark konstruktivistisch orientiert derartige Vorstellungen sind. Aus methodischer Perspektive gehen wir gleichzeitig der Frage nach, welche Aussagen sich durch die Analyse spezifischer Zeichnungen gewinnen lassen, unter anderem im Vergleich zu einer einschlägigen Fragebogenuntersuchung.

Die Datenerhebung fand im Herbst 2015 an der Universität Halle-Wittenberg statt. 81 Studierende der Einführungsveranstaltungen bearbeiteten zunächst einen elektronischen Fragebogen zur konstruktivistischen Orientierung von Vorstellungen zum Lehren und Lernen von Mathematik (Peterson et al., 1989; Staub & Stern, 2002). Dabei konnten sie zu 48 Items den Grad ihrer Zustimmung auf einer 5-punktigen Likertskala (4: „sehr einverstanden“, …, 0: „überhaupt nicht einverstanden“) ausdrücken. 44 Studierende fertigten anschließend eine Zeichnung zur folgenden, schriftlich vorgegebenen Fragestellung an: *Wie funktioniert Mathematiklernen, welche Rolle bzw. Funktion haben Lehrer und Schüler im Unterricht?* Zu neun, aus unserer Sicht besonders interessanten Zeichnungen wurden zusätzlich ausführliche Interviews durchgeführt, auf die an dieser Stelle allerdings nicht eingegangen werden kann.

Die Analyse der Zeichnungen erfolgt angelehnt an die dokumentarische Methode in mehreren Schritten. Mit der formulierenden Interpretation wird danach gefragt, was auf dem Bild zu sehen ist. Dabei wird noch einmal zwischen der vor-ikonografischen Ebene der sichtbaren Gegenstände und Phänomene und der ikonografischen Interpretation des subjektiv Gemeinten unterschieden. Bei letzterer sind allerdings nur kommunikativ-generalisierte Wissensbestände einzubeziehen und fallspezifische Besonderheiten auszuklammern. Grundgerüst der reflektierenden Interpretation, die nach dem Wie der Darstellung fragt, ist die Rekonstruktion der formalen Komposition des

Bildes. Sie stellt einen entscheidenden Schritt für den Zugang zur Sinnebene dar, der zugleich die Eigensinnigkeit des Bildes berücksichtigt. Die ikonologisch-ikonische Interpretation zielt schließlich durch die Überlagerung des Was und des Wie auf den Dokumentsinn des Bildes (Bohnsack, 2011; Przyborski & Wohlrab-Sahr, 2014).

3. Ergebnisausblick

Der eingesetzte Fragebogen besteht aus vier Subskalen, darüber hinaus ist die Berechnung eines Gesamtmittelwerts möglich. In der befragten Studierendengruppe ergab sich dieser zu $\mu=1{,}57$ ($\sigma=1{,}16$). Der relativ deutliche Abstand zum arithmetischen Mittel $m=2$ macht die erwartete geringe konstruktivistische Orientierung der Vorstellungen der Studienanfänger deutlich.

Die folgende Abbildung zeigt die Zeichnungen zweier Studentinnen mit noch einmal geringeren Mittelwerten. Was könnten diese Werte und was könnte der eher geringe Unterschied zwischen diesen bedeuten?

Susanne ($\mu=1{,}48$) Anna ($\mu=1{,}35$)

Ausgewählte Ergebnisse der Bildanalysen werden im Folgenden teilweise pointiert gegenübergestellt:
Susanne stellt eine eher traditionelle Lehr-Lern-Situation dar, in der der Lehrer als Wissensvermittler wirkt, aber oftmals zu scheitern droht. Der Lernerfolg ist auch von den Schülerinnen und Schülern abhängig, die kooperativ arbeiten, mit- und voneinander lernen. Ziele des Unterrichts könnten neben alltagsbezogener mathematischer Grundbildung auch die individuelle Weiterentwicklung der Lernenden sein.
Für Anna ist der Lehrer zwar kein Dompteur mit Peitsche und Feuerreifen, allerdings führt er als Jongleur wohl schwierige mathematische Tricks vor, die man nur durch langes Üben erlernen kann. Die Schüler(innen) setzen sich individuell und in Einzelarbeit mit Mathematik auseinander. Die Zeichnung deutet eine heterogene Lerngruppe an, in der es keine Sonderrollen gibt.

Anna verortet den Mathematikunterricht in der Zirkusmanage, damit kommt ihm außerhalb des „Schulzeltes“ wohl kaum Relevanz zu.

Bislang vorliegende Ergebnisse und hoffentlich auch die dargestellten Beispiele machen deutlich, dass Interpretationen der Zeichnungen im Vergleich zu den Resultaten der Fragebogenuntersuchung viel detailliertere und qualitativ andere Einblicke in Vorstellungen der Studierenden auch im Hinblick auf deren konstruktivistische Orientierung ermöglichen. Dabei scheinen interindividuelle Unterschiede in Fragebogenergebnissen und Bildinterpretationen auch bezüglich der Subskalen weitgehend stimmig.

Literatur

Bohnsack, R. (2011). *Qualitative Bild- und Videointerpretation: Die dokumentarische Methode* (2. Aufl.). Opladen: Budrich.

Devlin, M. (2006). Challenging Accepted Wisdom about the Place of Conceptions of Teaching in University Teaching Improvement. *International Journal of Teaching and Learning in Higher Education*, *18*(2), 112–119.

Felbrich, A., Schmotz, C., & Kaiser, G. (2010). Überzeugungen angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich. In S. Blömeke, G. Kaiser, & R. Lehmann (Hrsg.), *TEDS-M 2008* (S. 297–325). Münster: Waxmann.

Forgasz, H. J., & Leder, G. C. (2008). Beliefs about mathematics and mathematics teaching. In P. Sullivan & T. Wood (Hrsg.), *The international handbook of mathematics teacher education* (S. 173–192). Rotterdam: Sense Publishers.

Kagan, D. M. (1992). Professional Growth among Preservice and Beginning Teachers. *Review of Educational Research*, *62*(2), 129–169.

Pajares, M. F. (1992). Teachers’ beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, *62*(3), 307–332.

Pehkonen, E., & Törner, G. (1996). Mathematical beliefs and different aspects of their meaning. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *28*(4), 101–108.

Peterson, P. L., Fennema, E., Carpenter, T. P., & Loef, M. (1989). Teachers’ Pedagogical Content Beliefs in Mathematics. *Cognition and Instruction*, *6*(1), 1–40.

Przyborski, A., & Wohlrab-Sahr, M. (2014). *Qualitative Sozialforschung: Ein Arbeitsbuch* (4. Aufl.). München: Oldenbourg.

Staub, F. C., & Stern, E. (2002). The nature of teachers’ pedagogical content beliefs matters for students’ achievement gains: quasi-experimental evidence from elementary mathematics. *Journal of Educational Psychology*, *94*(2), 344–355.

Thompson, A. G. (1992). Teachers’ Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook Of Research On Mathematics Teaching And Learning* (pp. 127–146). New York: MacMillan.

Zimmermann, B. (1991). *Heuristik als ein Element mathematischer Denk- und Lernprozesse*. Habilitationsschrift, Hamburg.

Daniel FROHN, Bielefeld & Alexander SALLE, Osnabrück

Gruppenpuzzle als Methode in Tutorien – Eine Untersuchung zu Einstellungen von Lehramtsstudierenden im Rahmen einer Fachvorlesung „Arithmetik und Algebra“

Für die Vermittlung mathematischer Inhalte in Fachvorlesungen ist die Bearbeitung von Übungsaufgaben ein zentrales Element. Hierbei werden Studierende aktiv und wenden die in der Vorlesung thematisierte Mathematik auf konkrete Probleme an. Die – oftmals durch Tutorinnen und Tutoren – korrigierten Lösungen werden vorlesungsbegleitend in wöchentlichen Tutorien besprochen. Für die methodische Gestaltung der Tutorien gibt es verschiedene Möglichkeiten. Der vorliegende Beitrag liefert erste Einblicke, wie Studierende verschiedene Methoden bewerten und wie sich diese Bewertungen verändern.

1. Methodische Gestaltung von Tutorien durch Vorrechnen

Üblicherweise werden die drei bis fünf Aufgaben eines Übungsblattes in diesen Tutorien von ausgewählten Studierenden an der Tafel vorgestellt. Je nach Qualität dieser Lösungen ergänzen die Tutorinnen und Tutoren Lösungsschritte, stellen besondere Lösungsverfahren heraus oder thematisieren alternative Bearbeitungsmöglichkeiten. Diese methodische Gestaltung von Tutorien wird im Folgenden als „Vorrechnen“ bezeichnet.

Durch dieses Vorgehen sind z.B. folgende positive Effekte zu erwarten:

- Durch die vorherige Auswahl der vorgestellten Lösungen werden zu allen Übungsaufgaben korrekte Lösungen vorgestellt. Somit gibt es – insbesondere auch hinsichtlich späterer Prüfungen – Musterlösungen, auf die sich Studierende verlassen können („Autorität des Tafelanschriebs“, vgl. Beutelspacher et al., S. 155).
- Aufgrund ihrer Expertise und ihres Überblicks über alle Studierendenlösungen können Tutorinnen und Tutoren typische Fehler thematisieren und zudem Ziele, Voraussetzungen und zentrale Begriffe bestimmter Lösungsschritten explizieren. Zudem können allgemeinere Einordnungen hinsichtlich verschiedener Beweistypen und Erläuterungen des heuristischen Vorgehens bei Aufgabenlösungen gegeben werden.
- Fragen der Studierenden und entsprechende Antworten sind für alle hörbar und können im Plenum ergänzt und diskutiert werden.

Gleichzeitig folgen aus dieser Umsetzung einige Einschränkungen, die im Hinblick auf kokonstruktive Lernprozesse nachteilig sein können:

- Durch die frontale Instruktion besteht die Gefahr, dass manche Studierende der Lösungspräsentation nur passiv folgen.

- Studierende sprechen eher wenig über Mathematik, womit eine als wesentlich angesehene Grundbedingung einer mathematischen Wissenskonstruktion fehlt. Dadurch haben Tutorinnen und Tutoren zudem weniger Möglichkeiten, Lernschwierigkeiten zu diagnostizieren.
- Das stetige Besprechen im Plenum führt zu einer höheren Schwelle für das Stellen von Fragen – Studierende könnten ihre eigenen Fragen für den Fortgang des Tutoriums als „zu dumm“ einschätzen.

2. Das Gruppenpuzzle als methodische Alternative

Eine Möglichkeit, diesen Einschränkungen entgegenzutreten, stellt eine alternative methodische Organisation der Tutorien mit Betonung von Kleingruppenarbeit, wie beispielsweise das Gruppenpuzzle (Expertenmethode), dar (vgl. Beutelspacher et. al. 2011, S.150ff, Barzel et al. 2007).

Eine mögliche Umsetzung des Gruppenpuzzles in Tutorien gliedert sich in drei Phasen (im Folgenden als „Gruppenpuzzle“ bezeichnet):

1) *Arbeit in Expertengruppen:* Zu jeder Aufgabe des zu besprechenden Übungsblattes wird eine Expertengruppe gebildet, in der die Studierenden Expertinnen bzw. Experten für diese Aufgabe werden, um sie in der nächsten Phase einer neuen Unterrichtsgruppe vorzustellen.

2) *Arbeit in Unterrichtsgruppen:* Aus jeder Expertengruppe wird ein Studierender oder eine Studierende in je eine der neu formierten Unterrichtsgruppen entsandt, in der er oder sie ihre Expertenaufgabe vorstellt. In dieser Phase sollen zudem Rückfragen diskutiert bzw. beantwortet werden.

3) *Besprechung im Plenum:* In dieser Phase können offene Fragen aus den Unterrichtsgruppen, Anmerkungen der Tutorinnen und Tutoren und weitergehende Hinweise thematisiert werden.

Die Tutorinnen und Tutoren 1) organisieren den methodischen Ablauf, 2) stehen während des Gruppenpuzzles für Fragen und bei Problemen zur Verfügung und 3) beantworten in der dritten Phase aufgetretene Fragen und geben eventuelle weiterführende Hinweise zu den Aufgaben.

3. Forschungsfragen und Durchführung des GruMiT-Projektes

Im Wintersemester 2013/14 und 2014/15 wurde das Konzept des Gruppenpuzzles in den Tutorien einer Fachvorlesung „Arithmetik & Algebra“ eingesetzt. Die Vorlesung ist obligatorisch für Studierende der Lehrämter für Grundschule und für Haupt- und Realschule.

Die Tutoriumsevaluationen und informellen Rückmeldungen von Studierenden sowie Tutorinnen und Tutorinnen zeichneten ein sehr heterogenes Bild bezüglich der Einstellung zum Gruppenpuzzle. Es entstand unter anderem der Eindruck, dass kooperative Arbeitsformen im Schulkontext eher als geeignet und für fachlich anspruchsvollere universitäre Veranstaltungen als weniger geeignet eingeschätzt wurden. Um ein differenziertes Bild darüber zu bekommen, wurden die Tutorien im Wintersemester 2015/16 systematisch in einer Studie evaluiert, deren Durchführung und erste Ergebnisse im Folgenden skizziert werden. Insgesamt nahmen ca. 500 Studierende an der Veranstaltung teil. In jeder Gruppe wurden in sechs der 13 Wochen die Tutorien als Gruppenpuzzle organisiert, in den restlichen sieben wurden die Aufgaben vorgerechnet. Eine zentrale Frage der Untersuchung, auf die in diesem Beitrag eingegangen werden soll, lautet:

Bewerten Studierende das Gruppenpuzzle im Vergleich zum Vorrechnen hinsichtlich des Lernens in der Schule und des Lernens in der Universität unterschiedlich und wie verändern sich diese Einschätzungen?

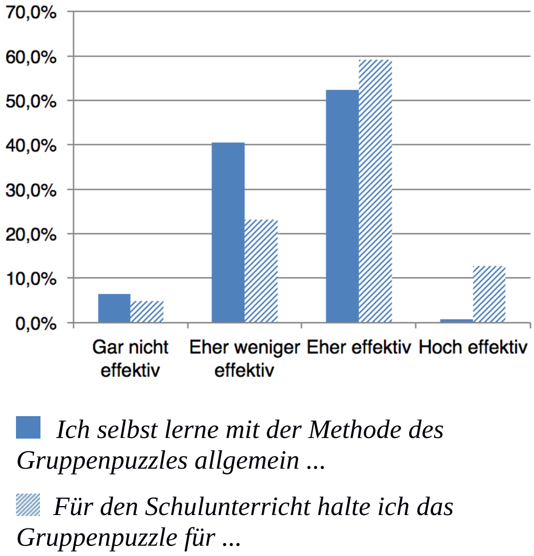
An drei Messzeitpunkten (MZP 1: Erste Vorlesungswoche, MZP 2: Siebtes Tutorium, MZP 3: Vorletzte Vorlesungswoche) wurden neben dem mathematischen Leistungsstand der Studierenden Bewertungen der Methoden in Schul- und Universitätskontexten in Form von vierstufigen Likert-Skalen erhoben. Zusätzlich wurden die Tutorinnen und Tutoren nach ihren Einschätzungen befragt.

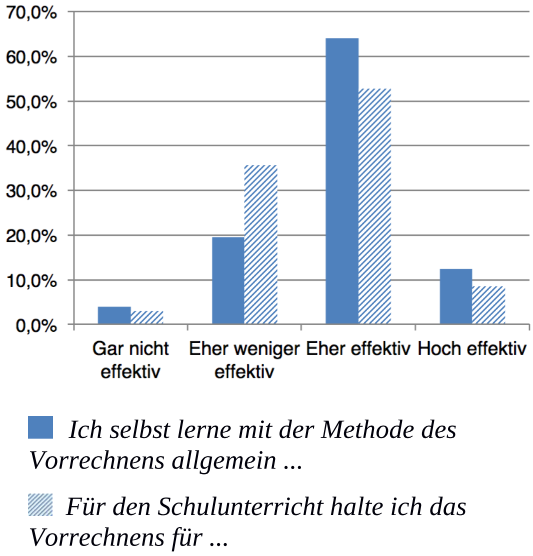
4. Erste Ergebnisse und Diskussion

Im Rahmen dieses Beitrags werden erste Ergebnisse der Bewertungen einer Teilstichprobe der Studierenden am MZP 1 ($n = 130$) vorgestellt.

Die Bewertungen der Studierenden zeigen vier Muster (s. Abb. unten): *Erstens* schätzen sie das Gruppenpuzzle durchschnittlich als weniger effektiv für ihren eigenen Lernprozess ein als das Vorrechnen. *Zweitens* schätzen Studierende das Gruppenpuzzle im Schulunterricht als etwas effektiver im Vergleich zum Vorrechnen in der Schule ein. *Drittens* fällt auf, dass Studierende das Gruppenpuzzle im eigenen Lernprozess als weniger effektiv im Vergleich zum Gruppenpuzzle im Schulunterricht einschätzen. Umgekehrt bewerten sie *viertens* das Vorrechnen für ihren Lernprozess als effektiver im Vergleich zum Vorrechnen in der Schule.

Eine Ursache für diese unterschiedlichen Einschätzungen könnten die unterschiedlichen Inhalte sein. So könnten Studierende Inhalten der Hochschulmathematik andere Überzeugungen entgegenbringen als Inhalten der Schule, was durch die bereits erfolgreiche Bewältigung der Schulinhalte noch verstärkt werden könnte.





Des Weiteren könnten Studierende Vorrechnen für sich selbst als präferierte Methode im Lernprozess ansehen, während sie im Hinblick auf den Schulunterricht eine allgemeine Einschätzung hinsichtlich aller Schülerinnen und Schüler treffen.

5. Ausblick

Inwieweit die Überlegungen mit Faktoren wie den Überzeugungen in Bezug auf mathematisches Wissen und Lernprozesse zusammenhängen, ob Zusammenhänge zwischen Vorwissen bzw. Lernerfolg und der Methodenbewertung bestehen und ob bzw. auf welche Weise sich Bewertungen von Studierenden über das Semester verändern, bleibt in weiteren Analysen der vorliegenden Daten zu klären.

Durch solche Analysen hoffen wir, die offensichtlichen Vor- und Nachteile der beiden Methoden vom Standpunkt des Lehrenden durch Erkenntnisse hinsichtlich der Akzeptanz und der Einschätzungen von Seiten der Lernenden zu ergänzen, um Lehrenden so eine breite Entscheidungsgrundlage für die Methodenauswahl bei der Tutoriumsgestaltung zu bieten.

Literatur

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., Wickel, G. (2011). Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Barzel, B., Büchter, A., & Leuders, T. (2007). Mathematik-Methodik: Handbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen Scriptor.

***Anmerkung**: Das GruMiT-Projekt-Team besteht zusätzlich zu den Autoren aus Joachim Lotz und Bertolt Lampe vom Projekt „richtig einsteigen.“ an der Universität Bielefeld.*

Julia GAA, Kaiserslautern; Jürgen ROTH, Landau

Inputs im Flipped-Classroom-Konzept eines Mathematikvorkurses

In Flipped-Classroom-Veranstaltungen haben Lernende immer wieder Probleme beim Einstieg in die Selbstlernphase. Es fällt ihnen schwer, sich selbständig adäquat mit den Lernmaterialien auseinanderzusetzen. Ein vorbereitender Input könnte helfen den Start in die Selbstlernphase zu erleichtern. Im Projekt werden Merkmale eines guten Inputs identifiziert und deren Einfluss auf den Lernerfolg der Studierenden eines Blended-Learning-Mathematikvorkurses in einer Experimentalstudie empirisch überprüft.

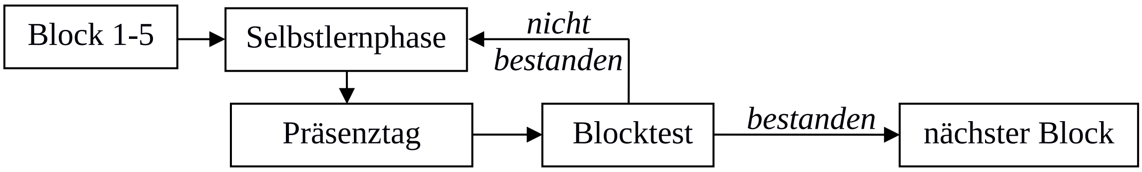
Flipped-Classroom

Vor allem im englischsprachigen Raum sind Flipped-Classroom-Konzepte seit der ersten Dekade des 21. Jahrhunderts weit verbreitet. Traditionelle Vorlesungen, die einer reinen Wissensübermittlung dienen, werden in eine Selbstlernphase ausgelagert, in welcher sich Studierende die Themen mit Hilfe von Texten, Videos und Animationen aneignen. Die dadurch entstandene freie Präsenzzeit wird dann für Übungsaufgaben und die Vertiefung des Materials genutzt. Die Ideen des Konzepts werden explizit erstmals von Mazur (1997) erwähnt. Der Begriff „Flipped-Classroom“ oder „Inverted-Classroom“ findet seit 2000 zahlreiche Erwähnungen in der Literatur. Lage, Platt und Treglia (2000) schreiben beispielsweise: „Inverting the classroom means that events that have traditionally taken place inside the classroom now take place outside the classroom and vice versa.“ Dabei wird das Unterrichtskonzept in vielen Fächern und auf vielen Niveaustufen eingesetzt. Strayer (2007) vergleicht beispielsweise in seiner Dissertation eine Statistikvorlesung für Erstsemester im klassischen Format mit der inhaltlich identischen Veranstaltung im Flipped-Classroom-Format. Aber auch im deutschsprachigen Raum verbreitet sich das Konzept langsam. Unter anderem experimentieren Braun, Metzger, Ritter, Vaski und Voss (2012) an der Hochschule in Karlsruhe sowie Gaa, Lakatos und Wolf (2015) an der Hochschule Kaiserslautern mit dem Format. Abeysekera und Dawson (2015) haben festgestellt, dass für das Flipped-Classroom-Format bisher eine einheitliche Definition fehlt und nur sehr wenig systematische empirische Forschung dazu existiert.

Umsetzung im Mathematikvorkurs

Der Blended-Learning-Vorkurs der Hochschule Kaiserslautern wurde für berufsbegleitende Studiengänge im Bereich der Angewandten Ingenieurwissenschaften konzipiert. Dabei wird das in der Schule erworbene mathematische Wissen wiederholt und gefestigt. Neben dem sicheren Umgang mit elementaren Rechenoperationen muss insbesondere für die Anwendungsfächer von Anfang an ein gewisses mathematisches Handwerkszeug zu Verfügung stehen. Da etwa ein Drittel der Studierenden in den berufsbegleitenden Studiengängen keine klassische Hochschulzugangsberechtigung hat, handelt es sich hierbei zum Teil um für sie gänzlich neue Themen, wie beispielsweise die Differential- oder Integralrechnung.

Der Mathematikvorkurs ist in fünf aufeinander aufbauende Blöcke gegliedert. Jeder dieser Blöcke enthält vier bis sechs mathematische Themengebiete und hat im Regelfall einen zeitlichen Umfang von zwei Wochen.



Die Selbstlernmaterialien, die zur Theorievermittlung dienen, werden auf einem Lernmanagementsystem zur Verfügung gestellt. Dabei wird jedes mathematische Thema über ein Rahmenmodul gestartet. Die Rahmenmodule sind für alle Themen identisch aufgebaut und erleichtern somit die Orientierung. Innerhalb des jeweiligen Rahmenmoduls dient ein Anwendungskontext dazu, die Studierenden zu motivieren und einen Realitätsbezug herzustellen. Außerdem können sich die Studierenden hier über die Lernziele informieren und von dort direkt auf die bereitgestellten Lernmaterialien zugreifen. Im Lernmodul wird die Theorie mit Hilfe von Lehrtexten, die mit Animationen, Simulationen und ausgearbeiteten Lösungsbeispielen angereichert werden, sowie einem Video aufbereitet. Im maximal zehnminütigen Video werden die wesentlichen Aspekte des jeweiligen Themas auf den Punkt gebracht und die Studierenden durch eingeschobene und direkt zu beantwortende Quizfragen zum Mitdenken aufgefordert. Nachdem die Studierenden die Selbstlernphase absolviert haben, findet eine Präsenzveranstaltung statt. In kleinen Gruppen werden offene Fragen und Probleme erläutert sowie das bereits vorhandene Wissen vertieft. Die Gruppen werden jeweils von Tutoren, i. d. R. Studierende aus höheren Semestern, betreut. Sind alle Fragen und Problem geklärt, werden gemeinsam Übungsaufgaben bearbeitet. Dabei geben die Tutoren Hilfestellungen und Tipps. Außerdem werden die Studierenden dazu angehalten über die Aufgaben und mögliche Lösungswege zu diskutieren. Im Anschluss an die Präsenzphase wird online ein Blocktest bearbeitet. Erst wenn ein Studierender den Blocktest bestanden hat, wird der nächste Block für ihn freigeschaltet.

Forschungsvorhaben

Erfahrungen zeigen, dass es Lernenden schwerfällt, sich selbständig adäquat mit den Lernmaterialien auseinanderzusetzen. Strayer (2007) stellt etwa fest, dass Studierende Zeit benötigen um sich an das Format zu gewöhnen. Sie wünschen sich eine bessere (Vor-)Strukturierung und sind insgesamt verunsichert über die genaue Zielsetzung des Kurses. Außerdem fühlen sie sich auch oft alleine gelassen. Dieser Problematik könnte mit Hilfe eines Inputs vor der Selbstlernphase begegnet werden. Dabei ergeben sich unter anderem die folgenden Forschungsfragen:

- An welcher Zugriffstelle („Lernen-Lernen“, Material, Inhalt …) muss ein Input ansetzen um möglichst effizient zu sein?
- Welchen zeitlichen Umfang sollte ein Input haben, um möglichst gut von Studierenden aufgenommen und verarbeitet werden zu können?
- Welche Methoden und Hilfsmaterialien sind für diese Inputphasen gut geeignet?

Um diesen Forschungsfragen auf den Grund zu gehen, sind die folgenden Projektphasen geplant:

Unter Einbeziehung der aktuellen Literatur sowie der Ergebnisse aus den Interviews, die mit Studierenden aus dem Vorkurs zum Ablauf ihrer Selbstlernphase geführt wurden, sollen verschiedene Inputs entwickelt werden. Dabei sind bereits die verschiedenen möglichen Zugriffstellen („Lernen-Lernen“, Material, Inhalt …) zu beachten. In einer Vorstudie sollen dann die verschiedenen Inputs qualitativ getestet werden. Ziel ist es die Merkmale eines guten Inputs zu identifizieren sowie die entwickelten Inputs weiter zu optimieren. Mit Hilfe dieser optimierten Inputs soll dann in einer Hauptstudie quantitativ überprüft werden, ob durch die Inputs ein besserer Lerneffekt erzielt werden kann.

Literatur

Abeysekera, L. und Dawson, P. (2015). Motivation and cognitive load in the flipped classroom: definition, rational and a call for research. *Higher Education Research & Development, 34(1)*, 1-14.

Braun, I., Metzger, G., Ritter, S., Vasko, S. und Voss, H. (2012). Inverted Classroom an der Hochschule Karlsruhe – ein nicht quantisierter Flip. In J. Handke, A. Sperl (Hrsg.), *Das Inverted Classroom Model: Begleitband zur ersten deutschen ICM-Konferenz*. Münschen: Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 117-138.

Gaa, J., Lakatos, M. und Wolf, K. (2015). Durchlässigkeit der Bildungswege. In *Gute Lehre für erfolgreiches Studieren*. Mainz: MBWWK Rheinland-Pfalz, 29-30. Abgerufen von: mbwwk.rlp.de/fileadmin/mbwwk/Publikationen/Wissenschaft/Hochschulen_
Gute_Lehre.pdf

Lage, Maureen J.; Platt, Glenn J. und Treglia, M. (2000). Inverting the Classroom: A Gateway to Creating an inclusive Learning environment. *Journal of Economic Education, 31(1)*, 30-41.

Mazur, E. (1997). Peer instruction. A user's manual. Prentice Hall.

Strayer, J. (2007). The effects of the classroom flip on the learning environment: A comparison learning activity in a traditional classroom and a flip classroom that used an intelligent tutoring system. Ohio State University, USA.

Stefan GARCIA, Basel

Massnahmen zur Lernbegleitung und ihre Bedeutung für mathematische Aktivitäten von Kindern in der Vorschule (Dissertationsprojekt)

Theoretischer Hintergrund

Auch wenn die mathematische Frühförderung spätestens seit PISA ins öffentliche Bewusstsein gerückt ist (vgl. Hasemann, 2005; Wittmann, 2003), ist noch wenig darüber bekannt, wie mathematische Lernprozesse bei Kindern im Vorschulalter in sinnvoller Weise unterstützt und begleitet werden können. Der individuellen Unterstützung von Lernenden im Unterricht wird eine grosse Bedeutung zugeschrieben. Sie kann sowohl als Teil der Prozessqualität (Tietze, 2008), als auch als Antwort auf die Heterogenität im Unterricht gesehen werden (Krammer, 2009). Das Potential von individuellen Lernbegleitungen wird jedoch nur bedingt genutzt. Aufgrund der vielen Wechsel der Gesprächsgegenstände und Interaktionsprozesse, welche häufig parallel stattfinden, ist eine pädagogische Fachperson hohen Belastungen ausgesetzt, wenn sie allen Interaktionen gerecht werden will (König, 2009). Förderorientierte Interaktionen scheinen besonders dann zu gelingen, wenn pädagogische Fachpersonen Geduld darin zeigen, die Kinder ihre Lösungsschritte selbständig vollziehen zu lassen und erst dann gezielt eingreifen, wenn sich eine produktive Gelegenheit bietet (Wullschleger & Stebler, in press). Bruns und Eichen (in press) weisen darauf hin, dass sich der Anforderungsgrad der Aktivitäten an einem mittleren Leistungsniveau der Gruppe orientiert. Es fehlen den pädagogischen Fachpersonen möglicherweise die inhaltlichen und methodischen Kompetenzen, um allen Kindern herausfordernde Aktivitäten zu ermöglichen. Bei individueller Unterstützung im Bereich der Mathematik im Kindergarten kann allgemeine mathematische Aktivität vor allem in Situationen mit inhaltlich ausgerichteter Kommunikation mit wechselseitiger Bezugnahme und gemeinsamer Materialreferenz beobachtet werden (Schuler, 2013).

Forschungsfrage und Methode des Dissertationsprojekts

Anknüpfend hieran lässt sich folgende zentrale Forschungsfrage formulieren: In welcher Weise wirken sich Massnahmen der Lernbegleitung auf die mathematischen Aktivitäten von Kindern in der Vorschule aus?

Damit soll ein Beitrag dazu geleistet werden, herauszufinden, unter welchen Bedingungen mathematisch gehaltvolles Tätigsein der Kinder angeregt und unterstützt wird.

Bei der Untersuchung handelt es sich um eine qualitative Videostudie, bei der die Interaktionen zwischen Kindergartenlehrpersonen und Kindern untersucht wird. Die Lehrpersonen sind erfahrene Pädagogen, von denen erwartet wird, dass sie über ein gewisses Spektrum an (gelungenen) Formen der Lernbegleitung verfügen. Die teilnehmenden Lehrpersonen haben vor der Erhebung die Fortbildung „MATHElino – Kinder und Mathematik“ besucht. Dadurch kennen die Kindergartenlehrpersonen die eingesetzten Materialien bereits. Geplant ist eine Erhebung mit 10 Lehrpersonen, die Unterrichtssequenzen in ihren eigenen Gruppen durchführen. Eine solche Lernsequenz sieht dabei wie folgt aus: Die Kinder sind an Gruppentischen frei mit Würfeln bzw. Patternblocks tätig (Royar & Streit, 2010). Das Material wird in allen Settings identisch sein. Die Lehrperson unterstützt die Kinder nach eigenem Ermessen. Die Lernsettings haben eine Dauer von etwa 60 Minuten und werden mit zwei Lernendenkameras und einer Lehrerkamera gefilmt (vgl. Seidel, 2003).

Alle Videoszenen werden so transkribiert, dass auch Materialhandlungen erfasst werden können und anhand eines fünfschrittigen Vorgehens ausgewertet:

Auswertung Kinder	Auswertung Lehrperson	Szenen-auswahl	Kategori-sierung	Interaktions-analyse
• Beobachtungs-raster von Streit (2015) in Anlehnung an Schließmann (2005, 2006) und Barriault (1999)	• Erfassung der Sichtstrukturen • Identifikation der Unter-stützungs-massnahmen • Beurteilung der inhaltlichen Massnahmen (Vgl. Streit 2016)	• Interaktionen zwischen Lehrperson und Kind • Keine unterrichtsor-ganisatorische oder disziplinarische Interaktionen	• Erfassung der Verhaltens-weise der Kinder • Kategorisie-rung zur Identifikation der Reaktionen der Kinder	• Rekonstruktion der Auswirkung der Lernbegleit-ungsmass-nahme auf die mathematische Aktivität der Kinder

– Die Videoszenen der Lernendenkameras werden mithilfe eines Beobachtungsraster von Streit (2015) in Anlehnung an Schliessmann (2005, 2006) und Barriault (1999) ausgewertet. Dieses Verfahren soll Aufschluss darüber geben, in welcher Phase des Umgangs mit dem Material sich die die einzelnen Kinder befinden. Das Beobachtungsraster unterscheidet zwischen Eingangsverhalten, Übergangsverhalten, Durchbruchverhalten und Abbruchverhalten. Unter Berücksichtigung geeigneter Literatur (z.B. Leuvener Engagiertheits-Skala, 1997; Mischo, Weltzien & Fröhlich-Gildhoff, 2011) soll dieses in einem deduktiv-induktivem Vorgehen weiterentwickelt werden.

- Die Videosequenzen der Lehrpersonen werden anhand bereits vorhandener Kodierungs- und Beobachtungsraster einem dreischrittigen Analyseverfahren unterzogen (Streit 2016). Dabei werden zunächst die unterrichtlichen Sichtstrukturen erfasst (Vgl. Hugener, Pauli & Reuss, 2006), dann die verschiedenen praktizierten Unterstützungsmassnahmen identifiziert und schliesslich die inhaltlichen Massnahmen nach einem zweidimensionalen Beurteilungsraster geratet.
- Im Anschluss findet eine Szenenauswahl der Interaktionen zwischen Lehrperson und Kind statt. Aufgrund der Voruntersuchung, konnte festgestellt werden, dass auch nichtmathematikbezogene Interventionen der Lehrpersonen einen Einfluss auf das Verhalten der Kinder beim Umgang mit den Materialien zu haben scheinen. Lediglich Szenen, bei denen es um unterrichtsorganisatorische oder disziplinarische Themen geht, werden nicht untersucht. Wichtig für die Auswahl der Szenen ist, dass jeweils etwas Zeit vor und nach der Interaktion berücksichtigt wird, um zu untersuchen, was das Kind zu diesen Zeitpunkten macht.
- Der nächste Schritt soll die Daten der Kinder und die der Lehrpersonen zusammenbringen, um die Wirkung der Interaktionen auf die Kinder identifizieren zu können. Dafür wird anhand der Daten in einem deduktiv-induktivem Vorgehen ein Kategoriesystem erstellt.
- Schliesslich werden die ausgewählten Szenen anhand einer Interaktionsanalyse ausgewertet. In der Analyse soll rekonstruiert werden, wie sich Massnahmen der Lernbegleitung auf die mathematischen Aktivitäten der Kinder auswirken und welche sinnhaften Muster im Verlauf der Interaktionen zwischen Lehrperson und Kind nachvollzogen werden können. Aus der anschliessenden zusammenfassenden Interpretation soll die Theoriegenese entstehen.

Literatur

Barriault, C. (1999). The Science Centre Learning Experience: A Visitor-Based Framework. *Informal Learning Review*, 35(1), 14-16.

Bruns, J. & Eichen, L. (in press). Individuelle Förderung im Kontext früher mathematischer Bildung. In: S. Schuler, C. Streit & G. Wittmann (Hrsg.), *Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule*. Heidelberg: Springer Spektrum, Reihe Research

Hasemann, K. (2005). Ordnen, Zählen, Experimentieren –Mathematische Bildung im Kindergarten. In Weber, S. (Hg.), *Die Bildungsbereiche im Kindergarten*, Freiburg: Herder, 181- 205

Hugener, I., Pauli, C. & Reusser, K. (2006). *Videoanalysen (Teil 3 der Dokumentation Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerischdeutschen Videostudie "Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis"*, hrsg. von E.

Klieme, C. Pauli & K. Reusser). Frankfurt am Main: Gesellschaft zur Förderung Pädagogischer Forschung (GFPF)/Deutsches Institut für Internationale Pädagogische Forschung (DIPF).

König, A. (2009). *Interaktionsprozesse zwischen ErzieherInnen und Kindern. Eine Videostudie aus dem Kindergartenalltag.* VS Verlag für Sozialwissenschaften, GWV Fachverlage GmbH: Wiesbaden.

Krammer, K. (2009). *Individuelle Lernunterstützung in Schülerarbeitsphasen. Eine videobasierte Analyse des Unterstützungsverhaltens von Lehrpersonen im Mathematikunterricht.* Waxmann: Münster.

Laevers, F. (1997). *Die Leuvener Engagiertheitsskala für Kinder.* LES-K. Universität Leuven, Belgien: Centre for Experimental Education.

Mischo, Ch., Weltzien, D. & Fröhlich-Gildhoff, K. (2011). Beobachtungs- und Diagnoseverfahren in der Frühpädagogik. *Grundlagen der Frühpädagogik*. Band 4. Kronach: Carl Link.

Royar. T. & Streit, Ch. (2010). *MATHElino. Kinder begleiten auf mathematischen Entdeckungsreisen*. Seelze: Kallmeyer

Schließmann, F. (2005). *Informelles Lernen an interaktiven Chemie-Stationen im Science Center.* Aachen: Shaker.

Schließmann, F. (2006). *Wie arbeiten Vorschulkinder an interaktiven Experimentier–Stationen? Eine kategoriegeleitete Untersuchung der Verhaltensweisen an der Station „Begehbare Brücke“.* Verfügbar unter http://archiv.ub.uniheidelberg.de/volltextserver/volltexte/2006/6796/pdf/BerichtKita.pdf [22.1.11]

Schuler, S. (2013). *Mathematische Bildung in formal offenen Situationen. Eine Untersuchung am Beispiel von Spielen zum Erwerb des Zahlbegriffs*. Waxmann Verlag: Münster.

Seidel, T. (2003). *Lehr- Lernskripts im Unterricht*. Waxmann: Münster.

Streit, Ch. (2015). Frühe mathematische Lernprozesse in Kindergarten und in der Unterstufe begleiten - das Projekt "Für einen guten Mathestart". In L. Amberg, Th. Duetsch, E. Hildebrandt, Ch. Müller, F. Vogt & E. Wannack (Hrsg.), *Perspektiven und Potentiale in der Schuleingangsstufe.* Münster: Waxmann

Streit, CH. (2016). In: S. Schuler, C. Streit & G. Wittmann (Hrsg.), *Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule*. Heidelberg: Springer Spektrum, Reihe Research

Tietze, W. (2008). Qualitätssicherung im Elementarbereich. In: *Qualitätssicherung im Bildungswesen. Zeitschrift für Pädagogik.* 53. Beiheft, S. 16-35.

Wittmann, E. Ch. (2003). Design von Lernumgebungen zur mathematischen Frühförderung. In Faust, G. u.a. (Hg.). *Anschlussfähige Bildungsprozesse im Elementar- und Primarbereich.* Bad Heilbrunn: Klinkhardt 2003, 49-63.

Wullschleger, A. & Stebler, R. (in Press). Spielbasierte Förderung früher Mengen-Zahlen-Kompetenzen – Individuelle Lernunterstützung beim Regelspiel Klipp-Klapp. In: S. Schuler, C. Streit & G. Wittmann (Hrsg.), *Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule.* Heidelberg: Springer Spektrum, Reihe Research

Hedwig GASTEIGER, Osnabrück, Christiane BENZ, Karlsruhe

Mathematikdidaktische Kompetenz von Fachkräften im Elementarbereich – ein theoriebasiertes Kompetenzmodell

Die mathematikdidaktische Fachkompetenz von Fachkräften im Elementarbereich rückte in letzter Zeit zunehmend mehr in den Fokus des Forschungsinteresses. Eine Reihe von Studien beschäftigen sich mit der Struktur, dem Niveau oder der Entwicklung von professionellen Kompetenzen dieses Personenkreises im Bereich Mathematik und mit mathematikdidaktischen Überzeugungen und Praktiken. Dazu wurden bislang Modelle aus der Lehrerkompetenzforschung oder allgemeine, nicht-fachspezifische Modelle aus dem Elementarbereich adaptiert. Gerade im Hinblick auf die mathematisch-mathematikdidaktische Professionalisierung von Fachkräften im Elementarbereich oder auf die Evaluation von entsprechenden Aus- und Weiterbildungsmaßnahmen lohnt es sich, zu hinterfragen, welche Kompetenzen frühpädagogische Fachkräfte für die Gestaltung elementarerer mathematischer Bildungsprozesse wirklich brauchen und ob die bisher verwendeten Modelle professioneller Kompetenz genutzt werden können.

1. Analyse der Anforderungen

Um Kompetenz in einem bestimmten Bereich definieren zu können, ist es erforderlich, die Anforderungen zu analysieren, die an Personen bei der Ausübung ihrer konkreten Aufgabe gestellt werden, und dabei die entsprechenden Randbedingungen zu berücksichtigen (Blömeke et al., 2015). Für die mathematikdidaktische Kompetenz von Fachkräften im Elementarbereich heißt das zunächst, zu analysieren, welche Aspekte bei der Gestaltung früher mathematischer Bildungsprozesse maßgeblich bedeutsam sind. National herrscht hier weitgehend Konsens: Mathematische Bildung im Elementarbereich sollte bruchfreies Weiterlernen ermöglichen, trotz der Notwendigkeit zu elementarisieren fachliche Richtigkeit garantieren, sich an zentralen fundamentalen Ideen der Mathematik orientieren, über eine reine Vermittlung von Prozeduren hinausgehen und das Spiel als kindgemäße mathematische Lernaktivität berücksichtigen (Gasteiger, 2015; Kaufmann, 2010; Lorenz, 2012; Schuler, 2013; Steinweg 2008). Die zentrale Frage lautet nun, wie sich die Kompetenz des elementarpädagogischen Fachpersonals, das diese Aufgabe zu erfüllen hat, charakterisieren lässt.

2. Kompetenz von Lehrkräften und Fachkräften im Elementarbereich

Oelkers und Reusser (2008) verstehen unter Kompetenz „wissensbasierte Fähigkeiten in bestimmten kulturellen und lebensweltlichen Domänen“, die „in aktuelle Lern- und Problemlöseleistungen umgesetzt werden müssen“ (S. 24). Dieses Verständnis von Kompetenz lässt Dispositionen erkennen, wie

Wissen oder Fähigkeiten, die darüber hinaus aber in Anwendungssituationen zur Wirkung kommen müssen (Performanz). Allerdings führt eine gewisse Disposition nicht zwangsläufig zu einer gewünschten Performanz. Es kann angenommen werden, dass zwischen Disposition und Performanz eine weitere Facette von Kompetenz erforderlich ist, die darüber entscheidet, wie erfolgreich jemand seine Fähigkeiten und sein Wissen anwenden kann. Blömeke et al. (2015) sehen sogenannte „situation-specific skills" in der Mittlerrolle zwischen Disposition und Performanz. Darunter fassen sie z. B. die Fähigkeit, in einer konkreten Situation wesentliche Aspekte wahrnehmen und interpretieren oder kompetente Handlungsentscheidungen treffen zu können. Modelle zur mathematikdidaktischen Kompetenz bei Lehrkräften zeigen häufig die Kompetenzstruktur von Dispositionen auf, indem verschiedene Wissensfacetten unterschieden werden (Shulman, 1987; Krauss et al., 2008), oder berücksichtigen zusätzlich die Ebene der Performanz, indem Kompetenzen zur Reflexion oder in der konkreten Handlung als Teil der Lehrerkompetenz gesehen werden (Lindmeier, 2011). Die „black box" zwischen Disposition und Performanz bleibt bei diesen Modellen weitgehend ungeklärt. Ein gängiges Modell zur Kompetenz frühpädagogischer Fachkräfte (Fröhlich-Gildhoff et al., 2014) beschreibt mit Situationswahrnehmung und –analyse sowie mit Handlungsplanung und -bereitschaft zwei Facetten, die für die oben angesprochene „Mittlerrolle" zwischen Disposition und Performanz relevant sein können (Situationswahrnehmung und –analyse ist im Modell jedoch als Disposition verortet). Dieses allgemeine, nicht-fachspezifische Kompetenzmodell bildet allerdings die für eine erfolgreiche Gestaltung früher mathematischer Bildungsprozesse erforderlichen Wissensfacetten nicht detailliert ab.

3. Ein Modell zur mathematikdidaktischen Kompetenz von Fachkräften im Elementarbereich

Auf Basis der vorliegenden Kompetenzmodelle und empirischer Ergebnisse wurde ein Modell zur mathematikdidaktischen Kompetenz von Fachkräften im Elementarbereich entwickelt (s. Abb. 1, Gasteiger & Benz, 2016). Es soll die fachlich-fachdidaktische Spezifizität abbilden und berücksichtigen, dass Bildungsprozesse im Elementarbereich in der Regel anders organisiert sind, als im Schulkontext: Lernen findet mehr in informellen Situationen statt. Dadurch sind andere Kompetenzen gefordert. Es geht weniger um ein Vorausplanen von Lerneinheiten als um ein wachsames Wahrnehmen der Aktionen und Äußerungen der Kinder, damit aus alltäglichen Situationen mathematische Lernsituationen werden (s. Abb.1, PDH). Erst in der Performanz zeigt sich die Kompetenz dieses Personenkreises in aller Deutlichkeit. Sie wird in Verbindung mit Fähigkeiten zur Beobachtung und Wahrnehmung in der konkreten Situation gesehen (SWB). Gerade, weil Mathematik und Mathematikdidaktik oft nicht Teil der Ausbildung der frühpädagogischen Fachkräfte ist, ist im Bereich des Wissens kritisch zu hinterfragen, welches Wissen wirklich nötig ist, um frühe mathematische Bildung gewinnbringend gestalten zu können. Es scheint durchaus vorstellbar, dass es nicht der mathematische Schulstoff ist, der hier ausschlaggebend ist, sondern u. a. ein Wissen um die mathematischen Konzepte, die im Elementarbereich von Relevanz sind, und um die entsprechenden fachlichen Linien, damit Anschlussfähigkeit des Lernens garantiert werden kann (EW). Auch zeigt sich in der Praxis, dass Fachkräfte im Elementarbereich zum Teil hervorragend mathematisches Lernen anregen, obwohl sie manchmal in eher geringem Maß über explizites Wissen verfügen. Dies lässt annehmen, dass eine Art implizites, erfahrungsbasiertes Wissen (IW) vorliegt, das den Fachkräften in Handlungssituationen ermöglicht, Performanz zu zeigen.

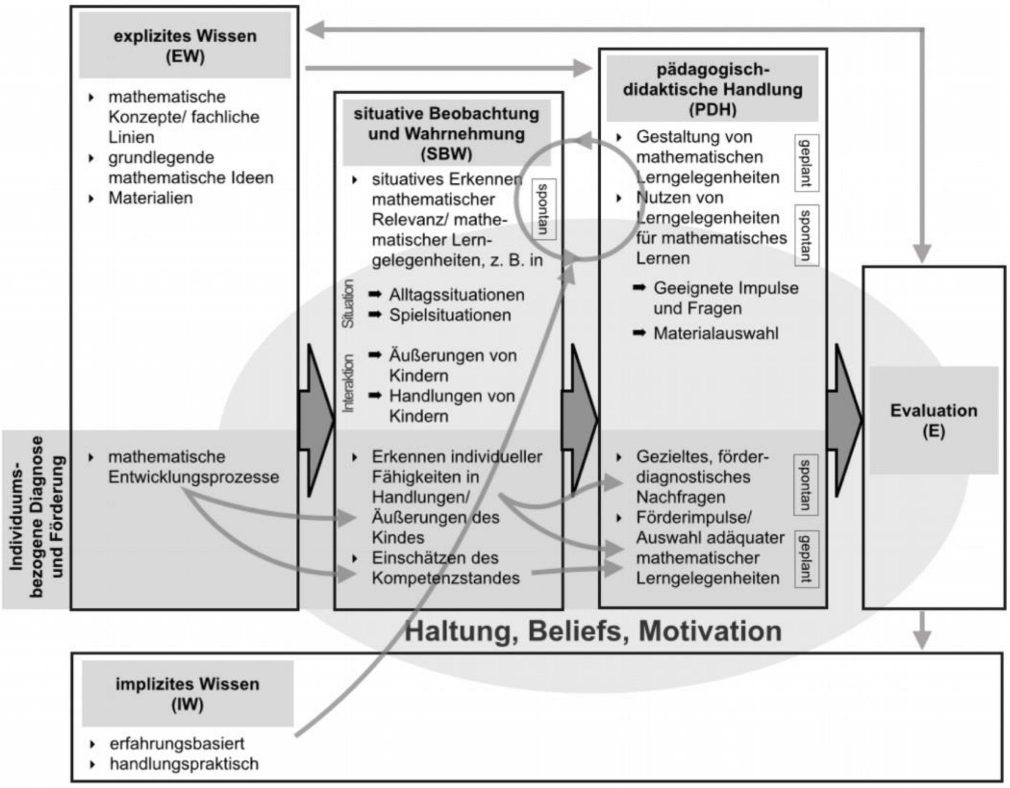


Abbildung 1: Modell zur mathematikdidaktischen Kompetenz frühpädagogischer Fachkräfte (Gasteiger & Benz, 2016)

Im Elementarbereich kommt der kompensatorischen und der präventiven Förderung eine wichtige Rolle zu (Lorenz, 2012). Deshalb enthält das Modell die querliegende Kompetenzfacette „Individuumsbezogene Diagnose und Förderung“. Sie ist wissensbasiert (EW), umfasst eine genaue Beobachtung der Kinder sowie die Wahrnehmung vorhandener Fähigkeiten (SBW) und zeigt sich dann in der Auswahl geeigneter mathematischer Lerngelegenheiten (PDH). Es gibt begründete Vermutungen zu Zusammenhängen zwischen den verschiedenen Kompetenzfacetten, die das Modell aufzeigt. Sie können an dieser Stelle leider nicht ausführlicher dargestellt werden – hierzu sei auf Gasteiger & Benz (2016) verwiesen.

Perspektivisch gesehen, steht eine empirische Analyse der Kompetenzfacetten sowie der verschiedenen Zusammenhänge noch aus. Dazu ist zunächst die Analyse und Entwicklung geeigneter Erhebungsinstrumente erforderlich. Langfristig könnte das Modell – so es sich empirisch bewährt – als Grundlage für die Konzeption der Aus- und Weiterbildung der Erziehenden dienen.

Literatur

Blömeke, S., Gustafsson, J. & Shavelson, R. J. (2015). Beyond dichotomies. Competence viewed as a continuum. *Zeitschrift für Psychologie*, 223(1), 3-13.

Fröhlich-Gildhoff, K., Weltzien, D., Kirstein, N., Pietsch, S., & Rauh, K. (2014). *Kompetenzen früh-/kindheitspädagogischer Fachkräfte im Spannungsfeld von normativen Vorgaben und Praxis.* Freiburg: Zentrum für Kinder- und Jugendforschung.

Gasteiger, H. & Benz, C. (2016). Mathematikdidaktische Kompetenz von Fachkräften im Elementarbereich – ein theoriebasiertes Kompetenzmodell. Journal für Mathematik-Didaktik. http://dx.doi.org/10.1007/s13138-015-0083-z

Gasteiger, H. (2015). Early mathematics in play situations: continuity of learning. In B. Perry, A. Gervasoni, & A. MacDonald (Hrsg.), *Mathematics and Transition to School. International Perspectives* (S. 255-272). Singapore: Springer.

Kaufmann, S. (2010). *Handbuch für die frühe mathematische Bildung.* Braunschweig: Schrödel.

Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., & Jordan, A. (2008). Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers. *Journal of Educational Psychology*, 100(3), 716-725.

Lindmeier, A.M. (2011). *Modeling and Measuring Knowledge and Competencies of Teachers.* Münster: Waxmann.

Lorenz, J. H. (2012). *Kinder begreifen Mathematik. Frühe mathematische Bildung und Förderung*. Stuttgart: Kohlhammer.

Oelkers, J., & Reusser, K. (2008). *Qualität entwickeln – Standards sichern – mit Differenzen umgehen*. Bildungsforschung Band 27. Bonn, Berlin: BMBF.

Schuler, S. (2013). *Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen.* Münster: Waxmann.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Steinweg, A. S. (2008). Zwischen Kindergarten und Schule – Mathematische Basiskompetenzen im Übergang. In F. Hellmich & H. Köster, H. (Hrsg.), *Vorschulische Bildungsprozesse in Mathematik und Naturwissenschaften* (S. 143-159). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Thomas GAWLICK & Elisabeth LUCYGA, Hannover

Entwicklungsstufen der Problemlösekompetenz

Kompetenzen verstehen wir mit Klieme/Weinert als kontextspezifische kognitive Leistungsdispositionen. Unser Stufenmodell für das Problemlösen ordnet sich ein in das Forschungsprogramm von Blömeke et al. (2015, S. 5) "We should be able to examine the developmental trajectories of competence, identify groups of students with differential developmental patterns, and determine effective educational strategies for development."

Der Ansatz

Aus Platzgründen können wir unser Modell nur skizzieren – Details siehe Gawlick & Lucyga (eingereicht). Die Grundidee ist: Die Kompetenzstufen entsprechen den Pólya-Phasen – allerdings sind diese so empirisch kaum nachweisbar (Kilpatrick 1967, p. 98), und auch bei Schoenfeld (1985) sind Planentwicklung und –durchführung kaum zu trennen. Statt der beiden mittleren Phasen unterscheiden wir daher drei. Wie Pólya gliedern wir den Problemlöseprozess in Abschnitte unterschiedlicher Qualität, die unterschiedliche, aufeinander aufbauende heuristische und epistemische Teilkompetenzen erfordern. Grundlegend dafür ist die Unterscheidung von Problem- und Routineaufgabe, etwa so: "A task is said to be a problem if its solution requires that an individual combine previously known data in a way that is new (to him). If he can Immediately recognize the measures that are needed to complete the task, it is a routine task." (Pehkonen 2004, S. 55) Basierend auf der Unterscheidung von epistemischer und heuristischer Struktur von Dörner (1976) charakterisieren wir Problemlösen durch das Anpassen von **Schemata** – gesteuert durch **Heurismen**: „Denkoperationen, die bei diesem Prozeß in typischer Weise von Nutzen sind." (Pólya 1949, S. 155) Wie in Gawlick (2013) erläutert, entsteht durch das Wechselspiel solcher heuristischer und epistemischer Aktivitäten ein **Denkprozesstyp**, der sich durch die Piagetschen Begriffe Assimilation, Akkommodation oder Akquisition beschreiben lässt: Die epistemische Struktur des Problemlösers wird bei Assimilation verwendet, durch Akkommodation verändert und durch Aquisition erweitert – letzteres erwarten wir indes bei Nichtexperten nicht. Die Akkommodation der Lösungsschemata kann dabei routiniert oder problemhaft ablaufen: Im ersten Fall etwa durch schrittweise **Zurückführung** der gestellten Aufgabe auf bereits gelöste – das ist **Schemaadaptation**; im zweiten durch tiefgreifendere strukturelle Veränderungen: **Schemarestrukturierung.** Die **Kompetenzstufen** werden nun durch die Prozessqualität der jeweiligen Phase definiert und verknüpfen die erwartete Prozessqualität mit der tatsächlich vom Probanden erbrachten:

Zu einer Aufgabe existieren i.d.R. verschiedene zulässige, erwartbare Lösungswege, bestehend aus Teilschritten, deren Findung vom Bearbeiter unterschiedlich hohe heuristische und epistemische Kompetenzen erfordert:

- Die **Kompetenzstufe eines Lösungsweges** ist gleich der höchsten bei einem Schritt erforderlichen.
- Die **Kompetenzstufe einer Aufgabe** ist gleich der geringsten eines zulässigen, erwartbaren Lösungsweges.
- Die **Kompetenzstufe eines Bearbeiters** ist größergleich der höchsten gezeigten, d.h. die des höchsten zulässigen Schritts seines (u.U. unvollständiger, teils unzulässiger) Lösungswegs.

Diese Ablösung der Stufe vom Prozess zeigt Abb.1 bei Aeblis **Imker-Aufgabe**: „Ein Imker erntet in einen schlechten Honigjahr 16kg Honig. Er füllt ihn in Gläser ab, die ¼kg fassen. Wie viele Gläser bekommt er?

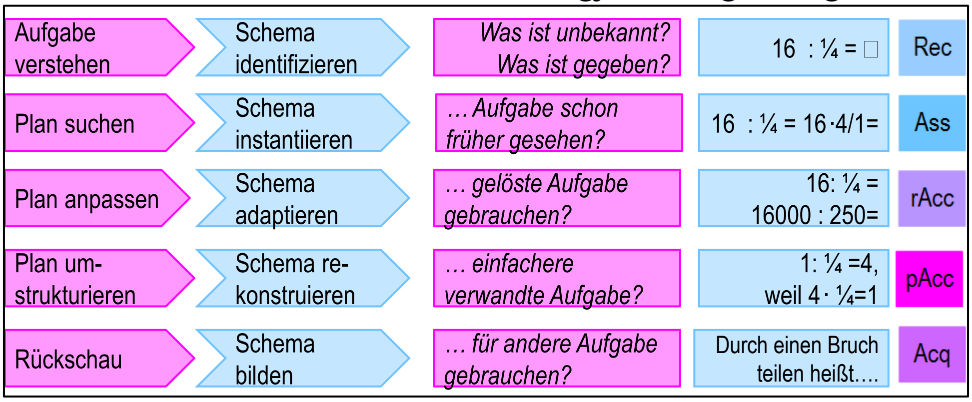


Abb. 1: Kompetenzstufeninterpretation bei der Imkeraufgabe

Anwendung

Im Projekt HeuRekAP wurden 46 Neuntklässler eines Hannoveraner Gymnasiums beim Lösen der TIMSS-Aufgabe K10 videographiert (Gawlick 2014).

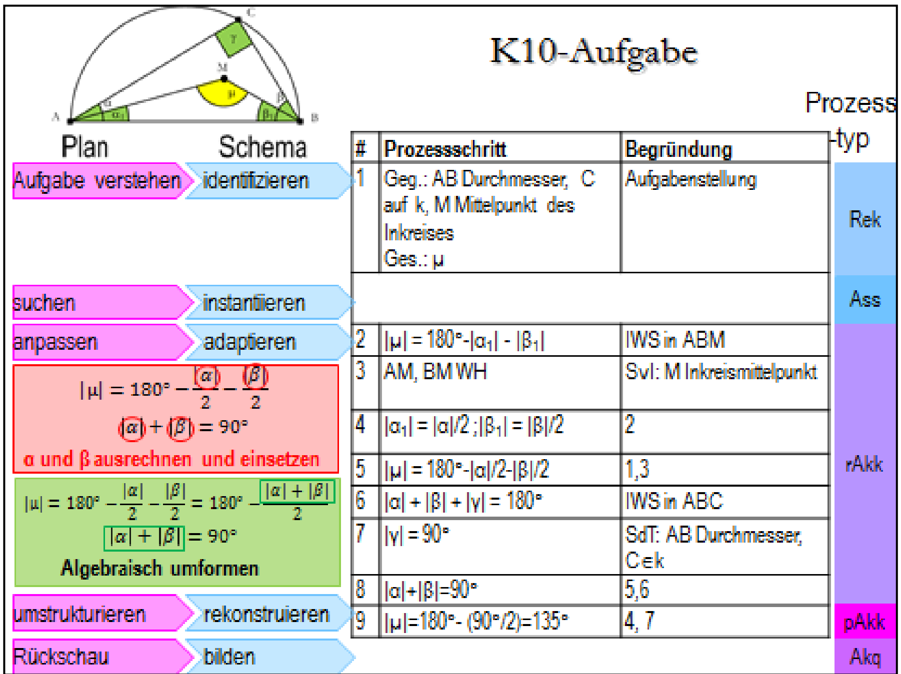


Abb. 2: Heuristische und epistemische Aktivitäten bei der K10-Aufgabe

Wir wenden nun unser Modell bei den von Lucyga (in diesem Band) ausgewählten Problemlöseprozessen an, um auf die Kompetenz der Bearbeiter zu schließen. Betrachten wir zunächst die Kompetenzstufe von K10: Gefragt ist die Größe des Winkels μ =∠AMB, wobei ABC ein Thalesdreieck und M der zugehörige Inkreismittelpunkt ist. Abb. 2 zeigt die erwarteten heuristischen und epistemischen Aktivitäten des meistversuchten Lösungswegs. Er erfordert heuristische Impulse zum Umstrukturieren eines Plans, die epistemisch zu einer Schemarekonstruktion führen. Folglich wird bei K10 ein Teilprozess vom Typ problemhafter Akkommodation erwartet.

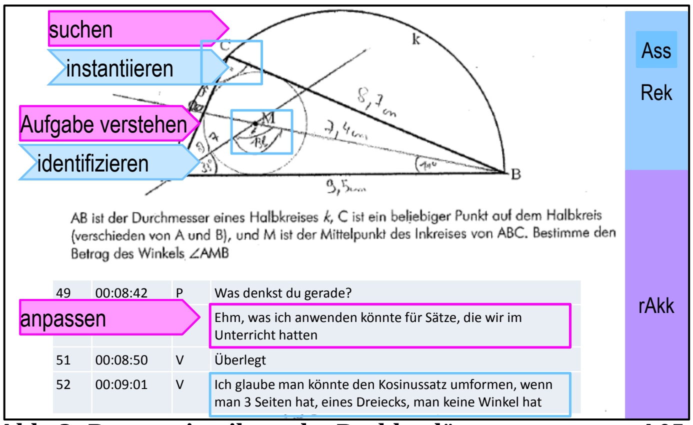


Abb. 3: Prozesseinteilung des Problemlöseprozesses von A05

Der Fall A05 Beim „Aufgabe verstehen“ identifiziert A05 neben dem Gesuchten auch teils das Gegebene und sucht einen dazu passenden Plan – er instantiiert das „Thales“-Schema. Innerhalb der Rekognition tritt damit eine Assimilation auf. Da A05 keinen Plan finden kann, der die gesamte Aufgab löst, versucht er ein Schema durch Umformen anzupassen (vgl. Abb. 3). Diese auf routinemäßige Akkommodation zielende heuristische Aktivität bewältigt A05 allerdings nicht epistemisch erfolgreich. Die höchste im Prozess gezeigte heuristische Aktivität ist „Plan anpassen“, die höchste epistemische „Schema instantiieren“, damit hat A05 gezeigt, dass er mindestens die Kompetenzstufe der **routinemäßigen Akkommodation** erreicht hat.

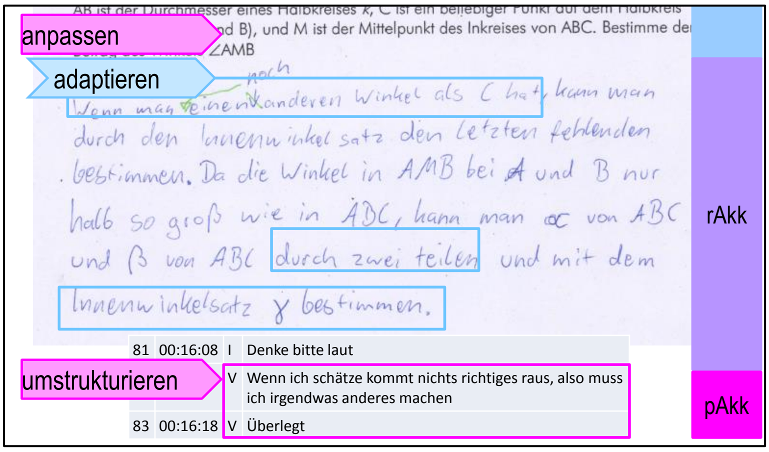
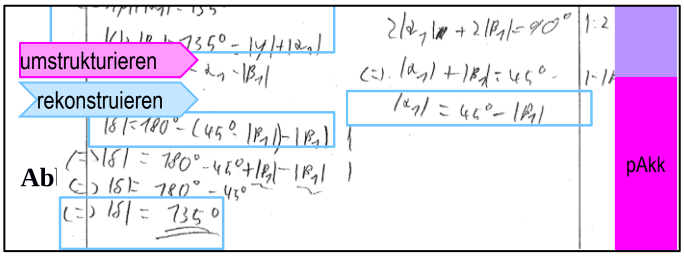


Abb. 4: Prozesseinteilung des Problemlöseprozesses von A32

Der Fall A32 Wie auch bei A05 kommt es bei A32 innerhalb der Rekognition zu einer Assimilation - das „Thales“-Schema wird dabei instantiiert. Anschließend folgt eine routinemäßige Akkommodation, wobei der heuristischen Aktivität des „Plan anpassens“ eine Schemaadaptation folgt (vgl. Abb. 4). A32 erkennt dann, dass dies nicht ausreicht um K10 zu lösen und beginnt mit der problemhaften Akkommodation –er stellt sich heuristische Fragen zum Umstrukturieren. Er vermag indes nicht, diese zu beantworten und damit sein bereits adaptiertes Schema zu restrukturieren. Die höchste im Prozess gezeigte heuristische Aktivität ist „Plan umstrukturieren“, die höchste epistemische Aktivität

„Schema adaptieren". A32 hat also mindestens die Kompetenzstufe der **problemhaften Akkommodation** erreicht.

Der Fall D11 Der Problemlöseprozess von D11 beginnt analog zu denen von A05 und A32. Allerdings schafft D11 es, sein adaptiertes Schema (μ mit dem Innenwinkelsummensatz in ABM berechnen und dazu die Winkelhalbierendeneigenschaft nutzen, dafür werden α und β benötigt) zu restrukturieren ($2|\alpha_1|+2|\beta_1|=90°$ umstellen und in $|\mu|=180°-|\alpha_1|-|\beta_1|$ einsetzen). Der Problemlöseprozess zeigt, dass D11 mindestens die Kompetenzstufe der **problemhaften Akkommodation** erreicht hat, da er sowohl die heuristische Aktivität „Plan umstrukturieren" als auch die zugehörige epistemische Aktivität „Schema rekonstruieren" erfolgreich durchführt.



Fazit

Unser Stufenmodell der Problemlösekompetenz fußt auf Dörners Unterscheidung von epistemischer und heuristischer Struktur und definiert entsprechende Teilkompetenzen. Die präzise Charakterisierung von deren Stufen erfolgt durch einschlägige Impulse und Aktivitäten in Gawlick & Lucyga (eingereicht) über eine Ablösung von entsprechenden Prozessabschnitten und die Anbindung an Sequenzen aufeinander *aufbauender* Aufgaben (Abb. 6). Letzteres sehen wir qua Passung zum Unterrichtsverlauf als Vorteil gegenüber vorhandenen Kompetenzmodellen, in denen die Aufgaben aufgrund der Rasch-Modellierung voneinander unabhängig sein müssen (und nur dichotom bewertbar sind). In unserem Modell ist die Fähigkeit, Schemata restrukturieren zu können, die Kernkompetenz des Problemlösens.

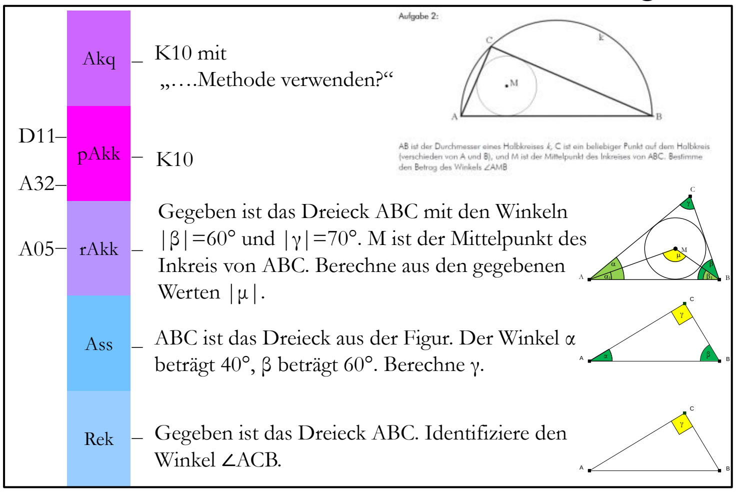


Abb. 6: Anbindung der Kompetenzstufen an Aufgabensequenz

Literatur

Siehe Langfassung unter http://www.idmp.uni-hannover.de/downloads.html

Boris GIRNAT, Basel

Mathematikbezogene Selbstwirksamkeitserwartung: Eine Reanalyse der PISA-Skala anlässlich der Überprüfung der mathematischen Grundkompetenzen in der Schweiz

Skalen zur Selbstwirksamkeitserwartung gehen auf die Idee zurück, subjektive Leistungseinschätzungen nicht über *verallgemeinerte* Überzeugungen wie „In Mathematik bin ich gut“ zu messen, sondern durch Einschätzungen darüber, ob man *konkrete* Problemstellungen erfolgreich bewältigen kann (vgl. Bandura, 1977). Im Begleitfragebogen der PISA-Studie 2012 wurde die mathematische Selbstwirksamkeitserwartung mit der folgenden Skala erhoben (vgl. Schiepe-Tiska & Schmidtner, S. 103):

Einleitung: Wie sicher bist du, dass du die folgenden Mathematikaufgaben lösen könntest?

Selfeff_1) Ausrechnen, wie viele Quadratmeter Fliesen du bräuchtest, um einen Fussboden damit auszulegen.

Selfeff_2) Ausrechnen, wie viel billiger ein Fernseher bei 30% Rabatt wäre.

Selfeff_3) Anhand des Zugfahrplans ausrechnen, wie lange die Fahrt von einem Ort zu einem anderen dauern würde.

Selfeff_4) Diagramme in Zeitungen verstehen.

Selfeff_5) Eine Gleichung wie 3x+5=17 lösen.

Selfeff_6) Auf einer Karte mit einem Massstab von 1:10 000 die tatsächliche Entfernung zwischen zwei Orten bestimmen.

Selfeff_7) Eine Gleichung wie 2(x+3)=(x+3)(x-3) lösen.

Selfeff_8) Den Benzinverbrauch eines Autos berechnen.

Die Skala erreicht in der PISA-Studie ein Cronbachsches Alpha von 0,81 und es wird ein Geschlechterunterschied von Cohens d = 0,56 zugunsten der Jungen festgestellt (vgl. ebd., S. 103 und 110).

Die PISA-Skala wurde 2015 im Begleitfragebogen einer Vorstudie zur Überprüfung der mathematischen Grundkompetenzen in der Schweiz eingesetzt. Hier wurde als Cronbachs Alpha sogar 0,87 ermittelt. Exploratorische und konfirmatorische Faktorenanalysen lassen jedoch Zweifel an der Eindimensionalität der Skala aufkommen: Eine Parallelanalyse nach Horn legt vier Dimensionen nahe; ausserdem erweist sich das Item Selfeff_4 wegen niedrigerer und mehrfacher Ladungen als problematisch (wahrscheinlich ist es zu vage formuliert). Nach Entfernen dieses Items schlägt die Parallelanalyse drei Dimensionen vor. Eine exploratorische Faktorenanalyse (EFA) liefert das folgende Bild (zu den Verfahren vgl. Bühner 2011, S. 309ff.; die Parallelanalyse und die EFA wurden mit dem Paket psych unter R durchgeführt, vgl. Revelle 2015; Ladungen unter 0,2 sind unterdrückt):

	MR1	MR3	MR2	h2	u2	com
selfeff1		0.53		0.66	0.337	1.6

selfeff2		0.68		0.63	0.374	1.1
selfeff3		0.72		0.64	0.359	1.0
selfeff5	0.83			0.90	0.097	1.3
selfeff6			0.64	0.59	0.408	1.1
selfeff7	0.94			0.87	0.125	1.1
selfeff8			0.70	0.65	0.347	1.1

Die drei Faktoren könnte man folgendermassen interpretieren: 1) Algebra (Selfeff_5 und _7); einfache Anwendungen (Selfeff_1, _2 und _3); schwierige Anwendungen (Selfeff_6 und 8). Eine konfirmatorische Faktorenanalyse mit dem R-Paket lavaan (Rosseel, 2012) bestätigt, dass die Drei-Faktoren-Lösung eine wesentlich bessere Passung hat als die einfaktorielle (beides mit DWLS-Schätzungen der Parameter, Telnehmerzahl n=949):

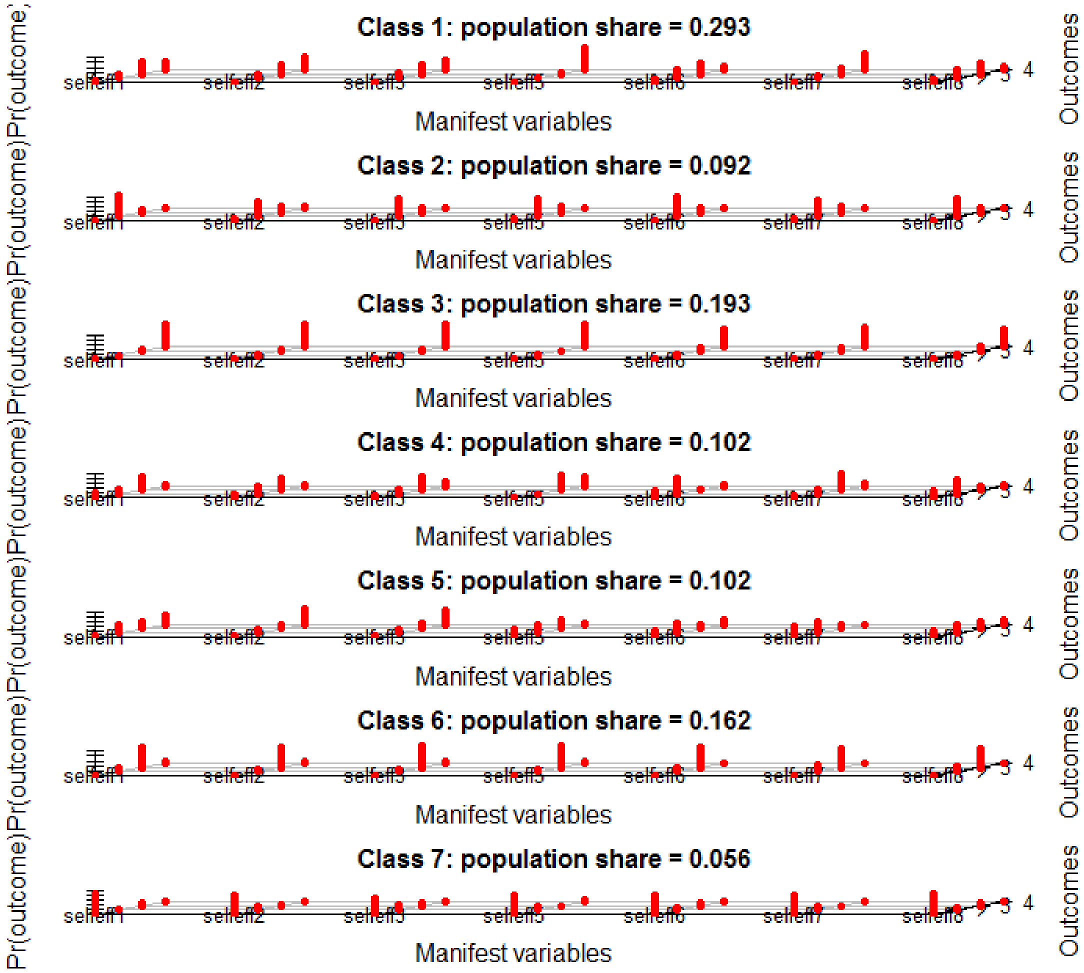
	1 Faktor (df 14)	3 Faktoren (df 11)
p-Wert chi²	0.000	0.474
CFI	0.971	1.000
RMSEA	0.086	0.000
SRMR	0.068	0.021

Die Korrelationen zwischen den drei Faktoren wurden wie folgt geschätzt:

	MR1	MR3	MR2
Algebra (MR1)			
Anwendung einfach (MR3)	0.690		
Anwendung schwer (MR2)	0.552	0.820	

Es fällt auf, dass insbesondere die Algebra nur gering mit den beiden Anwendungsskalen korreliert. Insgesamt erscheint es nicht sinnvoll, die PISA-Selbstwirksamkeitsskala als eindimensional aufzufassen. Die drei Skalen zeigen getrennt andere Geschlechterunterschiede als die Gesamtskala. Bei PISA 2012 betrug der Unterschied 0,56 zugunsten der Jungen (s. o.), in der Schweizer Vorstudie 0,347 ebenfalls zugunsten der Jungen. Bei drei getrennten Skalen verändert sich das Bild: Für die Algebra -0,024, für die einfachen Anwendungen 0,276 und für die „schweren“ Anwendungen 0,766 zugunsten der Jungen. Bemerkenswert ist, dass der Geschlechterunterschied in der Algebra verschwindet und bei den „schweren“ Anwendungen massiv steigt.

Die „Sonderrolle“ der Algebra-Items wurde zum Anlass genommen, den Datensatz auf latente Klassen hin zu untersuchen (vgl. Rost, 2004, S. 183 – 200). Die Berechnungen wurden mit dem R-Paket poLCA durchgeführt (Linzer & Lewis, 2011). Nach dem BIC-Kriterium liegt eine Einteilung in sieben Klassen nahe. Die Abb. 1 stellt die Antwortmuster der Klassen dar.



Interessant ist die erste Klasse mit einer geschätzten Grösse von 29,3 %: Die beiden Algebra-Items 5 und 7 weisen extrem hohe Zustimmungsraten auf (dritte/vierte Kategorie mit 4,67%/93,7% in Item 5 und 23,8%/67,5% in Item 7), während die Antworten bei den übrigen Items in etwa normalverteilt sind. Man könnte diese Klasse als „selbsternannte Algebra-Experten" bezeichnen. Diese Klasse soll im Weiteren genauer untersucht werden.

Die Algebra-Experten sind leicht überwiegend weiblich (55,6%). Sie sind mit steigender Niveaustufe der Schule stärker vertreten (im Niveau I zu 16,1%, im Niveau II zu 29,1% und im Niveau III zu 54,8%). Ihre Note ist nur geringfügig höher als die der restlichen Schüler (0,144, nicht signifikant). Sie schätzen sich folgendermassen selbst ein (Sternchen geben das übliche Signifikanzniveau an): Selbstwirksamkeitserwartung ohne Algebra 0,187*, nur Algebra 1,135***, einfache Anwendungen 0,282*** und schwierige Anwendungen -0,128**. Dabei sind jeweils die standardisierten Abweichungen zu den übrigen Schülern als Bezugsgruppe angegeben. Auffällig ist die unterdurchschnittliche Selbstwirksamkeitserwartung bei „schweren" Anwendungsaufgaben.

Diese Gruppe hat auch bei anderen Skalen des Begleitfragebogens Unterschiede gezeigt: Bezüglich der Vorlieben für Lernformen und Ansichten über mathematische Weltbilder (vgl. zu den Skalen Girnat, 2015) zeigen sie eine bemerkenswerte Vorliebe für repetitives Üben (0,464***, Beispiel-Item: „Ich finde es hilfreich, viele ähnliche Mathematik-Aufgaben nacheinander zu bearbeiten, um ein Verfahren richtig zu verstehen.“), für den Formalismusapekt (0,330***, „Es ist wichtig, dass man sich in der Mathematik an Fachbegriffe und vereinbarte Schreibweisen hält.“) und für den Verstehensaspekt (0,435***, „Man muss mathematische Verfahren auch verstehen, und nicht nur anwenden können.“), nicht jedoch für das Erforschen (0,041, „Ich mag Mathematik-Aufgaben zum Ausprobieren und Tüfteln.“). Zusätzlich wurden im Begleitfragebogen einige Skalen aus PISA 2012 eingesetzt: Hier sind die Algebra-Experten überdurchschnittlich intrinsisch motiviert (0,386***, „Es ist für mich wichtig, die Dinge im Mathematik-Unterricht zu verstehen.“), nicht jedoch extrinsisch (0,019, „Ich lerne sehr viel für Mathematik, weil ich in den Prüfungen besser abschneiden will als die anderen.“); sie schätzen sich nicht überdurchschnittlich gut in Mathematik ein (0,034, „Im Fach Mathematik bekomme ich gute Noten.“), was ihren Noten entspricht; sie freuen sich nicht überdurchschnittlich am Mathematikunterricht (0,049, „Ich freue mich auf die Mathematik-Stunde.“) und sind leicht überdurchschnittlich ängstlich (0,148*, „Ich mache mir oft Sorgen, dass es für mich im Mathematik-Unterricht schwierig sein wird.“)

Literatur

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a unifying theory of behavioral change. *Psychological Review, 84*, 191–215.

Bühner, M. (2011): *Einführung in die Test- und Fragebogenkonstruktion.* 3. Auflage. München: Pearson Studium.

Girnat, B. (2015): Konstruktivistische und instruktivistische Lehrmethoden aus Schülersicht – Entwicklung eines Fragebogens. In BzMU, WTM-Verlag Münster.

Linzer, D., & Lewis, J (2011). poLCA: An R Package for Polytomous Variable Latent Class Analysis. *Journal of Statistical Software, 42(10)*, 1-29. URL http://www.jstatsoft.org/v42/i10/.

Revelle, W. (2015): *psych: Procedures for Personality and Psychological Research,* http://CRAN.R-project.org/package=psych, Version = 1.5.1.

Rosseel, Y. (2012). lavaan: An R Package for Structural Equation Modeling. *Journal of Statistical Software, 48(2)*, 1–36. URL http://www.jstatsoft.org/v48/i02/.

Rost, J. (2004): *Lehrbuch Testtheorie – Testkonstruktion.* 2. Auflage. Bern, Göttingen, Toronto und Seattle: Verlag Hans Huber.

Schiepe-Tiska, A., & Schmidtner, S. (2013): Mathematikbezogene emotionale und motivationale Orientierungen, Einstellungen und Verhaltensweisen von Jugendlichen in PISA 2012. In M. Prenzel et al. (Hrsg.), *PISA 2012 – Fortschritte und Herausforderungen in Deutschland* (S. 99–122). Münster: Waxmann.

Lisa GÖBEL, Bärbel BARZEL, Essen

Vergleich verschiedener dynamischer Visualisierungen zur Konzeptualisierung von Parametern bei quadratischen Funktionen

Hintergrund

Viele Studien zeigen, dass durch den Einsatz von Technologien das Lernen von Mathematik unterstützt werden kann, aber auch neue Herausforderungen entstehen. Dieses Projekt geht der Frage nach, inwiefern es Unterschiede im Verständnis von Parametern bei quadratischen Funktionen in Abhängigkeit vom Einsatz verschiedener dynamischer Visualisierungen gibt.

Von einem tragfähigen Verständnis zu Parametern bei quadratischen Funktionen kann dann gesprochen werden, wenn die Lernenden die Vorstellungen zu den Funktionen und den Variablen tragfähig aufgebaut haben.

Bei Funktionen wird zwischen drei Grundvorstellungen unterschieden: Zuordnung, Kovariation und Objekt als Ganzes (Malle, 2000).

Für ein tragfähiges Verständnis müssen alle drei Vorstellungen ausgebildet werden. Zusätzlich wird dieses Verständnis durch die Variablen in den Funktionsgleichungen beeinflusst, die situationsspezifisch im Sinne der Grundvorstellungen der Variablen gedeutet werden müssen. Diese wurden bereits oft klassifiziert (vgl. z.B. Malle, 1993). Drijvers (2001) expliziert zusätzlich verschiedene Rollen von Parametern. Er unterscheidet folgende relevante Vorstellungen von Parametern: Platzhalter, generalisierte Zahl und Veränderliche. Konkret bedeutet dies: Wenn man den Parameter a in y=a*x+b als Platzhalter sieht, steht a für je einen spezifischen Wert mit einem dazu passenden Graphen, der sich verändert, wenn für a ein anderer Wert eingesetzt wird. Wird der Parameter a als Veränderliche angesehen, bewegt sich a hingegen dynamisch durch eine Menge von Werten und das graphische Modell ist ein „Film der Graphenveränderung" (Drijvers, 2001).

Der Aufbau dieser Vorstellungen kann gezielt durch den Wechsel von Repräsentationen geschehen, der auch als Schwelle zum mathematischen Verständnis aufgefasst wird (Duval, 2006). Dieser bedeutsame Wechsel zwischen den Repräsentationen kann durch Technologie unterstützt werden (Penglase & Arnold, 1996). Allerdings scheint auch genau diese Unterstützung zu (neuen) Herausforderungen zu führen. So fragen sich Zbiek et al. (2007), ob Schieberegler die Erkenntnis vom Zusammenhang zwischen der Veränderung des Parameters und der Veränderung am Graph aufgrund ihrer Schnelligkeit nicht verschleiern statt hervorzuheben.

Im Fokus des hier vorgestellten Projektes liegt die Frage, welche Rolle Schieberegler im Vergleich zu anderen Visualisierungen beim Erlernen der Rolle der Parameter in der Scheitelpunktform quadratischer Funktionen einnehmen. Dazu arbeiteten drei Experimentalgruppen mit unterschiedlichen Visualisierungen in der TI-Nspire CX CAS App für Ipads, während die Kontrollgruppe nur mit wissenschaftlichen Taschenrechnern ohne Graphikfähigkeit arbeitete. Bezogen auf die vorgegebenen Visualisierungen unterschieden sich die Gruppen wie folgt: Die Funktionenplotter-Gruppe hatte lediglich das digitale Werkzeug zur Verfügung. Die Lernenden konnten sich also nach Belieben Funktionen und dazu die jeweilige Wertetabelle anzeigen lassen. Die Zugmodus- und Schieberegler-Gruppen hatten vorprogrammierte Dateien, wo bereits die Normalparabel und die dynamisch verlinkte Wertetabelle voreingestellt war. In der Zugmodus-Gruppe konnten die Lernenden den Graphen „anpacken", um Form und Lage der Parabel zu variieren. Bei der Schieberegler-Gruppe erfolgte das Variieren mittels voreingestellter Schieberegler. Die Kontrollgruppe konnte sich Wertetabellen anzeigen lassen, jedoch keine Graphen zeichnen lassen, dies musste per Hand geschehen.

Der Hauptfokus des Projektes kann durch folgende Frage konkretisiert werden: Inwieweit können Lernprozesse von Schülerinnen und Schülern zur Bedeutung von Parametern bei quadratischen Funktionen rekonstruiert werden, unter Berücksichtigung von Herausforderungen im Lernprozess und Beliefs?

In diesem Artikel werden erste Ergebnisse aus dem Forschungsprojekt vorgestellt.

Design der Studie und Materialien

Zur Beantwortung der Forschungsfrage wurde eine Kontroll-Gruppen-Design Studie mit 14 Klassen der Jahrgangsstufe 9 durchgeführt. Insgesamt nahmen 379 Schülerinnen und Schüler von Gymnasien teil.

Die Studie beinhaltet einen Pre- und Posttest, sowie eine dreistündige Intervention. Abbildung 1 gibt einen Überblick über das Design der Studie.

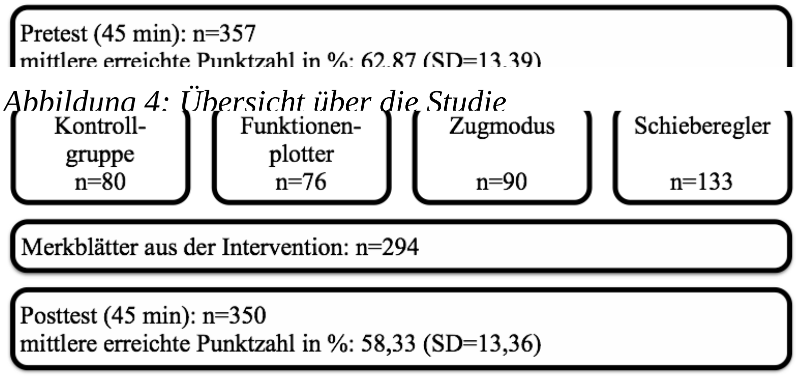


Abbildung 4: Übersicht über die Studie

Die einzelnen Teile der Studie sind wie folgt aufgebaut:

Pretest: Im Pretest wurde das Wissen der Jahrgangsstufe 8 im Kontext der linearen Funktionen mit offenen und single-choice Aufgaben als Baseline erhoben, um die einzelnen Klassen zu vergleichen.

Intervention: In der Intervention sollen die Lernenden möglichst selbsttätig das Konzept der Parameter erlernen. Die Interventionsaufgabe war für alle Experimental- und Kontrollgruppen gleich. Der Designprozess war empirisch fundiert und die Interventionsaufgabe ist wie folgt strukturiert: Zunächst sollte ein Beispiel beschrieben werden, dann verschiedene Werte für die einzelnen Parameter in der Scheitelpunktform untersucht werden, anschließend Begründungen gefunden und zuletzt ein Merkblatt mit allen Ergebnissen erstellt werden.

Während der Intervention wurden alle Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung beobachtet und 13 Fokusgruppen bei der Bearbeitung gefilmt. Alle Schülerinnen und Schüler haben zudem Merkblätter zum Thema erstellt.

Posttest: Nach der Intervention wurde ein Posttest durchgeführt. In diesem Test wurden die Themen der Intervention überprüft, um den Lernerfolg zu erheben. Der Test war zudem über 6 Ankeritems mit dem Pretest verbunden. Sowohl im Pretest als auch im Posttest lag der Fokus auf den erworbenen Vorstellungen und nicht auf der technischen Bedienkompetenz, deshalb fanden beide Tests technologiefrei statt.

Die Videoaufnahmen, Beobachtungen und Merkblätter aus der Intervention bilden den Schwerpunkt der interpretativen, qualitativen Analyse. Die quantitative Auswertung der Tests kann für weitere Befunde genutzt werden.

Erste Ergebnisse und Ausblick

In der Intervention wurde festgestellt, dass viele Schülerinnen und Schüler versuchen, die Begriffe aus dem Bereich der linearen Funktionen (z.B. y-Achsenabschnitt, Steigung) auf die quadratischen Funktionen zu übertragen. Neben technischen Verwirrungen in der Zugmodus-Gruppe wurde außerdem beobachtet, dass in den beiden anderen Experimentalgruppen zu wenige Funktionen betrachtet wurden, um alle Veränderungen der Parabeln zu erkennen.

Erfreulicherweise wurden in den drei Experimentalgruppen häufig alle Veränderungen durch die drei Parameter in der Scheitelpunktform erkannt. Während in der Kontrollgruppe nur 21 von 35 Gruppen (60%) alle Veränderungen erkannt haben, waren es in der Funktionenplotter-Gruppe 23 von 32 Gruppen (71%), bei der Zugmodus-Gruppe 36 von 43 Gruppen (83%) und bei der Schieberegler-Gruppe 59 von 64 Gruppen (92%). Insbesondere der Schieberegler scheint nützlich zu sein, alle Veränderungen durch die drei Parameter zu erkennen. Die Vermutung von Zbiek et al. (2007) war, dass der Schieberegler für das Lernen der Bedeutung von Parametern nicht geeignet ist. Dies konnte in der hier vorgestellten Studie nicht bestätigt werden. Vielmehr scheint gerade der Moduswechsel vom Schieberegler zum Graphen förderlicher zu sein, die Beziehung zwischen zwischen Parameter im Term und Graphveränderung zu verstehen als das unmittelbare Ziehen am Graphen selbst ohne Moduswechsel.

Eine häufig über alle Gruppen auftretende Fehlvorstellung war, dass bei einer Verschiebung der Parabel nach oben die Parabel enger wird. Diese Fehlvorstellung wurde erfreulicherweise aber fast immer im Lauf der Intervention noch innerhalb der Gruppenarbeit revidiert. Bei einigen Paaren von Schülerinnen und Schüler wurde die Fehlvorstellung erst mehrere Minuten nach der Äußerung oder sogar erst beim eigenen Korrekturlesen der aufgeschriebenen Ergebnisse revidiert. In den Zugmodus- oder Schieberegler-Gruppen geschah die Revidierung durch erneute Visualisierung, meist bereits direkt im Anschluss an die Äußerung der Fehlvorstellung.

Im weiteren Verlauf des Projektes soll durch eine tiefere qualitative Analyse der Videos und der Merkblätter versucht werden, Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler zu rekonstruieren, um eventuelle Unterschiede, die durch die Visualisierungen bedingt sind, besser verstehen zu können.

Literatur

Drijvers, P. (2001). The concept of parameter in a computer algebra environment. In Heuvel-Panhuizen, M. van den (Hrsg.): *Proc. 25th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 2*. Utrecht, Netherlands: PME, 385-392.

Duval, R. (2006) A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 61(1), 103-131.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra.* Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.

Malle, G. (2000) (Hrsg.) Funktionen untersuchen. Mathematik lehren 103. Seelze: Friedrich Verlag.

Penglase, M. & Arnold, S. (1996). The graphics calculator in mathematics education: a critical review of recent research. *Mathematics Education Research Journal 8*(1), 58–90.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on Technology in Mathematics Education – A Perspective of Constructs. In F. Lester (Hrsg.): *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Charlotte, NC: Information Age, 1169-1207.

Robin GÖLLER, Kassel

Zur lernstrategischen Bedeutung von Übungsaufgaben im Mathematikstudium

Lernstrategien können als „jene Verhaltensweisen und Gedanken, die Lernende aktivieren, um ihre Motivation und den Prozess des Wissenserwerbs zu beeinflussen und zu steuern" (Friedrich & Mandl, 2006, S. 1) definiert werden. Unterschieden werden dabei i. d. R. kognitive Strategien (wie z. B. Wiederholungs-, Organisations- und Elaborationsstrategien), metakognitive Strategien (Lernschritte planen, überwachen und regulieren) und ressourcenbezogene Strategien (wie z. B. die Nutzung von Informationsquellen, das Lernen mit Kommilitonen oder die Beeinflussung der eigenen Anstrengung und Konzentration) (siehe z. B. Wild, 2005 für einen Überblick).

Welche dieser Lernstrategien dabei zielführend sind, hängt davon ab, welche Ziele erreicht werden sollen. Für eine Bewertung der eingesetzten Lernstrategien ist somit immer eine Klärung der Ziele notwendig. Im Drei-Phasen-Model des selbstregulierten Lernens (Zimmerman & Campillo, 2003) werden diese Ziele in der „Forethought Phase" definiert und durch die eingesetzten Lernstrategien in die „Performance Phase" zu erreichen versucht. In der „Self-Reflection Phase" wird dann überprüft, ob die Ziele erreicht wurden.

Grundsätzlich stellt sich die Frage, ob die o. g. Lernstrategien die tatsächlichen Verhaltensweisen von Mathematikstudierenden abzubilden, oder ggf. angepasst, bzw. erweitert werden müssen. Nach Pólya (1979, S. 12) besteht unser Wissen auf irgendeinem Gebiet „aus zwei Komponenten: *aus Kenntnis der Tatsachen* und *praktischem Können*. Für den, der echte Erfahrung in mathematischer Arbeit hat, sei es auf elementarem oder fortgeschrittenem Niveau, kann kein Zweifel bestehen, dass in der Mathematik praktisches Können viel wichtiger ist als der bloße Besitz von Kenntnissen." Laut Pólya (ebd.) ist dieses praktische Können in der Mathematik „die Fähigkeit Aufgaben zu lösen". Da das Lösen von Aufgaben in den o. g. Lernstrategien nicht explizit thematisiert wird, ist die lernstrategische Rolle der Aufgaben zunächst offen.

Im Mathematikstudium können Übungsaufgaben verschiedene lernstrategische Rollen annehmen. Einerseits kann das Lösen von Übungsaufgaben als Strategie die Vorlesungsinhalte nachzuarbeiten bzw. zu lernen angesehen werden. Im Sinne metakognitiver Lernstrategien kann dabei etwa überprüft werden, ob Vorlesungsinhalte ausreichend verstanden wurden. Zudem sind viele kognitive Strategien schon durch die Aufgabenstellung angelegt: Z. B.

können Aufgaben darauf abzielen Verfahren einzuüben (Wiederholungsstrategie) oder Verbindungen zwischen Begriffen herzustellen (Elaborationsstrategie).

Andererseits kann das Lösen von Übungsaufgaben als Ziel an sich angesehen werden. In diesem Fall sind Problemlöse- (z. B. Pólya, 1945) oder Beweisstrategien (z. B. Boero, 1999), aber auch die o. g. ressourcenbezogenen Strategien, mögliche Strategien, um dieses Ziel zu erreichen.

Für das Lernverhalten von Studierenden sind dabei vor allem deren Ansichten zur Rolle der Übungsaufgaben von Bedeutung. Deshalb soll hier folgende Frage untersucht werden: Welche lernstrategischen Rollen haben Übungsaufgaben für Studierende im ersten Semester des Mathematikstudiums?

Methode

Zur Beantwortung dieser Frage wird auf Daten aus leitfadengestützten Interviews zu Lernstrategien mit 14 Studierenden, davon 8 (6 weiblich, 2 männlich) Studierende des gymnasialen Lehramts, 4 (2 weiblich, 2 männlich) Bachelor-Mathematik-Studierende und 2 (1 weiblich, 1 männlich) Bachelor-Physik-Studierende zurückgegriffen. Alle Interviewteilnehmer besuchten eine Analysis I - Vorlesung, bei der das Abgeben von Übungsaufgaben eine Voraussetzung für das Bestehen des Moduls war. Die Interviews fanden in der 3. bis 5. Woche des ersten Semesters statt, wurden durch eine Tonaufnahme festgehalten und später transkribiert. Die Teilnahme an den Interviews war freiwillig und nicht vergütet. Die Auswertung der Interviews ist noch unsystematisch.

Erste Ergebnisse

Das Bearbeiten der Übungsaufgaben nimmt eine dominante Position bei der Beschäftigung der Studierenden mit Mathematik ein. Es strukturiert das Arbeitsverhalten in einer Semesterwoche und ist oft mit einem hohen zeitlichen Aufwand verbunden.

> Wenn man mal anfängt von Freitag. Da hab ich mir den Aufgabenzettel durchgelesen. Hab angefangen mit 2a), weil ich dachte, die wäre einfach. Dann hab ich aber nichts gerafft, hab ich gedacht, gut, lässt du es mal, saß ich auch drei Stunden. […] Dann saß ich Montag gestrichene drei Stunden, vier, vier Stunden an Mathe an Aufgabe 1 und 2. Wieder nichts geschafft. Dann bin ich Dienstag zum [Kommilitone] gegangen, also zu einem, der mit mir studiert, saßen wir acht Stunden, haben Aufgabe 1 und 3 hinbekommen. Und dann saß ich gestern von acht bis zwölf, bin wieder an die Uni gegangen, weil ich Pflichtübung hab, bin dann wieder nach Hause und saß bis vier. Warum? Was ist das denn für ein Leben?

Dieser Ausschnitt zeigt auch, dass das Bearbeiten der Übungsaufgaben neben der zeitlichen auch zur emotionalen Belastung wird, wenn Erfolgserlebnisse ausbleiben und keine erfolgversprechenden Lösestrategien auszumachen sind.

In den meisten Fällen ist das Nacharbeiten der Vorlesung eine Strategie für das (Ziel) Lösen der Aufgaben, z. B. „ich gucke mir den Übungszettel an, und dann blättere ich die Vorlesung durch, wo irgendwas Brauchbares dazu stehen könnte.“ Die Ansicht, dass das Vorlesungsskript „natürlich das [ist], womit wir arbeiten und über das wir eigentlich lernen sollen“ wird selten formuliert und wird auch dann meist nicht handlungsleitend, wie hier schon das Wort „eigentlich“ andeutet. Dadurch tritt das Nacharbeiten der Vorlesung meist in den Hintergrund.

> Ich weiß nicht, ob man das Nacharbeiten, also mir geht es zumindest so, ein bisschen vernachlässigt dadurch, dass man immer die Vorlesung nur mit dem Übungszettel in Zusammenhang bringt und nicht die Vorlesung sich separat anguckt.

Zum Vorgehen beim Aufgabenlösen betrachten wir das folgende Zitat:

> Also ich versuche halt auch am Anfang immer erstmal selber irgendwie auf die Ansätze zu kommen und gucke dann erst im Internet oder frage irgendwen, weil ich halt erstmal sehen möchte, ob ich das überhaupt selber hinkriegen würde. […] Und sonst, ja, danach google ich halt immer dann, wenn ich irgendwie gar nicht weiterkomme, dann gucke ich, ob ich irgendwie bei Google was finde, irgendwelche Erklärungen oder so was. Und wenn das dann auch nicht funktioniert dann frage ich irgendwen nach der Lösung oder gucke eben bei Google nach der kompletten Lösung dazu, weil sonst, weil ich denke mir dann immer, besser, erstmal das Zeug haben, du kannst es nachher in der Übung immer noch verstehen. Also ich versuche es wirklich immer erstmal selber, und wenn es dann gar nicht geht, wie gesagt, besser, als wenn ich nachher einen leeren Zettel abgebe.

Die beiden letzten Sätze verdeutlichen, dass in diesem Fall weniger das *Lösen* der Aufgaben, sondern vielmehr das *Abgeben* von Aufgabenlösungen das eigentliche Ziel ist. Das Lernziel wird auf später verschoben.

Das hier beschriebene Vorgehen beim Aufgabenlösen ist typisch:

- Zuerst wird versucht die Aufgaben selbständig ohne Hilfsmittel zu lösen.
- Dann wird im Vorlesungsmitschrieb nach Lösungsansätzen gesucht.
- Dann wird in Büchern und im Internet gesucht.
- Dann werden Lösungen von Kommilitonen/innen erfragt oder abgeschrieben.

Der Einsatz dieser Strategien kann auch in Gruppenarbeit erfolgen und ist nicht beliebig, da weiter oben angeordnete Strategien bevorzugt werden. Dabei werden metakognitive Strategien eingesetzt, zunächst um zu überprüfen, ob man „das überhaupt selber hinkriegen würde.“ Bleibt der Erfolg aus, muss eine weiter unten gelistete Strategie angewandt werden. Dies wird als Misserfolg erlebt, der zuletzt nach außen offenbart werden muss: „Aber ich schreibe auch generell lieber aus dem Internet ab als bei irgendwelchen anderen Leuten, weil, dann komme ich mir immer so blöd vor.“

Zusammenfassung und Diskussion

Das Bearbeiten von Übungsaufgaben nimmt in den ersten Wochen des Mathematikstudiums eine dominante Rolle bei der Beschäftigung von Studierenden mit Mathematik ein und muss als deren Hauptziel angesehen werden. Dabei bekommt oft das Abgeben von Aufgabenlösungen einen größeren Stellenwert, als das Aufgabenlösen an sich. Insbesondere für letzteres ist wohl vor allem die Pflichtabgabe der Übungsaufgaben verantwortlich.

Die Strategien um dieses Ziel zu erreichen reichen vom selbständigen Lösen bis zum Abschreiben von fertigen Aufgabenlösungen, wobei selbständigere Strategien bevorzugt, aber oft nicht realisiert werden (können). Als problematisch anzusehen ist, dass wenn die Aufgaben nicht selbständig gelöst werden können oft viel Zeit darauf verwendet wird Aufgabenlösungen zu „organisieren“ und dabei die inhaltliche Arbeit und das Nacharbeiten der Vorlesung in den Hintergrund treten.

In der dominanten Rolle der Übungsaufgaben liegt aber auch das Potential das Arbeitsverhalten der Studierenden durch diese zu steuern. Daraus ergibt sich die Frage wie Übungsaufgaben gestellt werden können, um bei möglichst vielen Studierenden wünschenswerte Lernstrategien anzuregen.

Literatur

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 7*(8).

Friedrich, H. F., & Mandl, H. (2006). Handbuch Lernstrategien. *Göttingen: Hogrefe*.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical model*. Princeton University Press Princeton.

Pólya, G. (1979). *Vom Lösen mathematischer Aufgaben*. Basel: Birkhäuser Basel.

Wild, K. P. (2005). Individuelle Lernstrategien von Studierenden. Konsequenzen für die Hochschuldidaktik und die Hochschullehre. *Beiträge zur Lehrerbildung*, *23*(2), 191-206.

Zimmerman, B. J., & Campillo, M. (2003). Motivating self-regulated problem solvers. *The psychology of problem solving*, 233–262.

Robin GÖLLER, Kassel; Michael LIEBENDÖRFER, Hannover

Eine alternative Einstiegsvorlesung in die Fachmathematik – Konzept und Auswirkungen

Der Einstieg ins Mathematikstudium ist für viele Studierende mit großen Schwierigkeiten verbunden, was sich zum einen in hohen Abbruchquoten (Dieter, 2012) und oft hohen Durchfallquoten in den Klausuren zu traditionellen Einstiegsvorlesungen widerspiegelt. Zum anderen ist bei vielen Studierenden ein Nachlassen des Interesses an der (Hochschul-)Mathematik (Liebendörfer, 2014; Rach & Heinze, 2013) und eine Überforderung beim selbständigen Erarbeiten der Vorlesungsinhalte und Übungsaufgaben (Rach & Heinze, 2013) im ersten Studienjahr zu beobachten. Letzteres äußert sich oft dadurch, dass Aufgabenlösungen vermehrt von Mitstudierenden, aus Büchern oder dem Internet abgeschrieben werden (Liebendörfer & Göller, in Druck). Gründe für diese Schwierigkeiten könnten darin liegen, dass in traditionellen Mathematikvorlesungen, durch die systematische Vermittlung des Gebäudes der Mathematik in seiner modernen Form, fertige Ergebnisse präsentiert werden und eher wenig Gewicht darauf gelegt wird, wie man zu solchen Ergebnissen kommt. Auf diese Weise beantworten traditionelle Vorlesungen Fragen, die Studierenden zu diesem Zeitpunkt oft gar nicht haben, da sie nicht zum Entwicklungsstand vieler Studienanfänger passen (Grieser, 2015).

Konzeption einer neuen Einstiegsvorlesung

Um diesen Schwierigkeiten entgegenzuwirken wurden an den Universitäten Kassel und Oldenburg neue Vorlesungen eingeführt, die zum Ziel haben einen kreativen, problemorientierten Zugang zur Mathematik anzubieten. In Kassel wurde die ursprüngliche Lineare Algebra 1 (4+2 SWS) aufgeteilt in eine „Elementare Lineare Algebra“ (2+1 SWS) und eine neu eingeführte Vorlesung „Grundlagen der Mathematik“ (2+2 SWS). Beide Veranstaltungen sind für die Studiengänge gymnasiales Lehramt und Bachelor Mathematik Pflichtmodule im ersten Semester. In Oldenburg wurde das Modul „Mathematisches Problemlösen und Beweisen“ (2+2 SWS) neu eingeführt. Es ist ein Pflichtmodul für Studierende des gymnasialen Lehramts und ein Wahlmodul für Bachelor-Mathematik-Studierende.

Durch den problemorientierten Zugang dieser neuen Vorlesungen soll den Studierenden ein Beweisbedürfnis und das Gefühl „Mathematik kann ich verstehen“ vermittelt, gleichzeitig aber anspruchsvolle Mathematik behandelt werden. Dadurch soll die Selbstwirksamkeitserwartung (SWE) der Studierenden gesteigert und das Gefühl der Überforderung verringert werden.

Außerdem haben die neuen Vorlesungen zum Ziel, selbständiges mathematisches Arbeiten anzuregen und damit die Häufigkeit des Abschreibens zu verringern (vgl. Grieser 2015, Grieser 2016).

Inhaltlich orientieren sich beide Vorlesungen an Grieser (2012). Behandelte Themen sind z. B. die Idee der Rekursion, was ist ein Beweis?, vollständige Induktion, systematisches Abzählen, oder das Schubfachprinzip. Dabei werden Problemlösestrategien explizit thematisiert und an konkreten Problemen besprochen, z. B. Pólyas (1949) vier Stufen des Problemlösens, Spezialfälle und Beispiele betrachten, Skizzen oder Tabellen anfertigen, Zwischenziele formulieren, Notation einführen, Vermutungen formulieren, Muster entdecken oder doppeltes Abzählen. Dadurch bekommt die Vorlesung teilweise die Form eines Dialogs zwischen Dozent/in und Studierenden. Außerdem wird Zeit für Reflexionsphasen eingeräumt. Um den Fokus ganz auf das Problemlösen legen zu können beschränken sich die Vorlesungen inhaltlich auf elementare, intuitiv leicht zugängliche Themen.

In den Übungsgruppen werden Abgabeaufgaben und Präsenzaufgaben diskutiert, wobei die Präsenzaufgaben teilweise auf die Abgabeaufgaben vorbereiten. Bei der Besprechung und der Korrektur der Aufgaben wird darauf geachtet Ideen der Studierenden wertzuschätzen und verschiedene Lösungswege darzustellen.

Erhebung der Auswirkungen

Um die Veränderungen zu erfassen, die die neugestalteten Einstiegsvorlesungen mit sich bringen, wurden im Rahmen des WiGeMath-Projektes (Colberg et al., in diesem Band) in einer Pilotstudie die Fragen untersucht, ob die SWE tatsächlich höher ausfällt und die gefühlte Überforderung abnimmt. Weiter sollte der Einfluss der Maßnahme auf das Arbeitsverhalten der Studierenden, also selbständiges Arbeiten, Gruppenarbeit, Abschreiben, und Nacharbeiten der Vorlesung beschrieben werden. Dafür wurden in der Vorlesung jeweils Fragebögen vor Ort beantwortet. Die Stichprobe umfasst in Kassel N = 60 Personen (20 Fachstudierende / 35 Gymn. Lehramt), die im Dezember 2015 befragt wurden. In Oldenburg wurden N = 133 Personen (13 / 112) im Januar 2016 befragt. Zum Vergleich wurden Daten aus einer klassisch an der Universität Kassel gehaltenen Vorlesung zur Linearen Algebra I aus dem Dezember 2012 herangezogen, N = 92 (26 / 48).

Eingesetzt wurden dabei eine an den Hochschulkontext adaptierte Skala zur SWE ($\alpha > .75$) basierend auf der Skala von Kunter et al. (2002) sowie selbst entwickelte Items. Zur Überforderung waren dies Item 1: „Bei den Übungsaufgaben weiß ich meist gar nicht, was ich tun soll.“ und Item 2: „Es scheint mir unmöglich, die Übungsaufgaben alleine und nur mit Hilfe des Skripts zu lösen.“. Zu den Arbeitsweisen gab es zu dem Anfang „Ich habe dieses Semester…(nie,…, immer):“ die folgenden Fortsetzungen:

Item 3: … mir eigene Ansätze zu den Übungsaufgaben überlegt.

Item 4: … Aufgaben, die ich abgegeben habe, alleine gelöst.

Item 5: … Aufgaben, die ich abgegeben habe, in einer Kleingruppe gelöst.

Item 6: … fertige Lösungen von anderen Studenten übernommen.

Item 7: … aus dem Internet / Büchern Lösungen für die Übungsaufgaben abgeschrieben.

Item 8: … die Inhalte aus der letzten Vorlesung nachgearbeitet.

Hohe Werte der 6-stufigen Likert-Skalen drücken dabei eine hohe Zustimmung aus. Wir berichten die Ergebnisse in folgender Tabelle:

Mittelwerte und SD	*Kassel*	*Oldenburg*	*Kassel 2012*
SWE	3.44 (1.06)	3.69 (0.89)	3.57 (0.91)
Item 1	2.92 (1.28)	2.60 (0.99)	3.85 (1.46)
Item 2	3.10 (1.43)	2.92 (1.19)	4.43 (1.54)
Item 3	4.47 (1.28)	4.44 (1.05)	4.02 (1.16)
Item 4	3.95 (1.35)	3.21 (1.28)	3.30 (1.39)
Item 5	3.77 (1.60)	4.99 (1.31)	4.33 (1.48)
Item 6	2.35 (1.34)	2.30 (1.18)	3.39 (1.63)
Item 7	2.48 (1.23)	2.42 (1.15)	3.81 (1.48)
Item 8	2.63 (1.24)	2.82 (1.29)	3.43 (1.28)

Die Veranstaltungen unterscheiden sich bezüglich der SWE nicht (F-Test, $p = .21$), sonst aber schon ($p < .02$). Die Überforderung ist im Vergleich zur klassisch gehaltenen Vorlesung deutlich geringer (Cohens d: 0.77 – 1.12), die Studierenden haben sich mehr eigene Ansätze überlegt (d: 0.39 / 0.37) und die Studierenden in Kassel lösen mehr Aufgaben alleine (d: 0.49). Außerdem schreiben die Studierenden weniger ab (d: 0.77 –1.09) und bereiten die Vorlesung weniger nach (d: 0.63 / 0.48).

Diskussion

Überraschend ist, dass sich keine erhöhte SWE feststellen ließ, obwohl die Angaben zu den Items 1-4 darauf hindeuten, dass die Studierenden mehr Selbstwirksamkeitserfahrungen machen. Denkbar wäre, dass hier die Item-Formulierungen eine Rolle spielen, die sich auf die Mathematik der Vorlesung beziehen, und genau die wurde ja verändert. Positiv zu bewerten ist, dass die Überforderung abnimmt, die Eigenaktivität zunimmt und insbesondere weniger abgeschrieben wird. Letzteres stützt unsere These (Liebendörfer & Göller, im Druck), dass Abschreiben vor allem als Symptom einer fachlichen Überforderung gesehen werden sollte. Beim Arbeitsverhalten werden außerdem Standortunterschiede deutlich, da in Oldenburg eine starke Kultur der Gruppenarbeit etabliert ist. Wie sich die hier beschriebenen Vorlesungen auf das weitere Studium auswirken bleibt als Kernfrage, die wir in diesem Beitrag nicht beantworten können. Unsere Ergebnisse würden auch zu einer Veranstaltung passen, die nur leichter geworden ist, obwohl wir das nicht glauben.

Ein besonderer Dank gilt Prof. Dr. Grieser und Prof. Dr. Defant an der Universität Oldenburg sowie Prof. Dr. Maria Specovius-Neugebauer an der Universität Kassel für ihre freundliche Unterstützung.

Literatur

Dieter, M. (2012). *Studienabbruch und Studienfachwechsel in der Mathematik: Quantitative Bezifferung und empirische Untersuchung von Bedingungsfaktoren*. Dissertation, Universität Duisburg-Essen.

Grieser, D. (2012*). Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Eine Entdeckungsreise in die Mathematik*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Grieser, D. (2015). Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Entdeckendes Lernen in der Studieneingangsphase. In J. Roth, T. Bauer, H. Koch, & S. Prediger (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv gestalten: Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik* (S. 661–675). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Grieser, D. (2016). Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Ein neues Konzept in der Studieneingangsphase. In Hoppenbrock et al. (Hrsg.). *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 295-309). Springer Fachmedien Wiesbaden.

Kunter, M., Schümer, G., Artelt, C., Baumert, J., Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, M., Schiefele, U., Schneider, W., Stanat, P., Tillmann, K.-J., & Weiß, M. (2002). *PISA 2000: Dokumentation der Erhebungsinstrumente*. Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

Liebendörfer, M. (2014). Self-determination and interest development of first-year mathematics students. *Oberwolfach Reports, 11*(4), 3132–3135.

Liebendörfer, M., & Göller, R. (in Druck). Abschreiben – Ein Problem in mathematischen Lehrveranstaltungen?. In Paravicini, W., Schnieder, J. (Hrsg.) *Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2014.* Münster: WTM Verlag.

Pólya, G. (1949). *Schule des Denkens: Vom Lösen mathematischer Probleme*. Bern: Francke.

Rach, S., & Heinze, A. (2013). Welche Studierenden sind im ersten Semester erfolgreich?. *Journal für Mathematik-Didaktik, 34(1),* 121-147.

Stefan GÖTZ, Wien, Evelyn SÜSS-STEPANCIK, Baden bei Wien

Was soll LehrerInnenausbildung im Fach Mathematik leisten? Einsichten in das Wesen fach- und schulmathematischer Lehrveranstaltungen

1. LehrerInnenbildung alt und neu in Österreich

Bisher wurden zukünftige LehrerInnen für Pflichtschulen (Volks-, Haupt-, Sonder-, Berufsschulen, Polytechnikum) an Pädagogischen Hochschulen (PHn) ausgebildet. Das Studium hatte eine Mindestdauer von sechs Semestern und schloss mit dem akademischen Grad „Bachelor" ab. Im Gegensatz dazu studierten LehramtskandidatInnen (LAK) an Universitäten, wenn sie später an einer berufsbildenden Mittleren oder Höheren Schule (allgemeinbildend oder berufsbildend) unterrichten wollten. Diese Studien dauerten mindestens neun Semester und schlossen mit „Magister/Magistra" ab.

Im Zuge der Einführung der Bologna-Architektur für alle Lehramtsstudien in Österreich wurde eine Vereinheitlichung derselben für die Sekundarstufe (5. bis 12. bzw. 13. Schulstufe) vorgenommen. Dabei ist ein achtsemestriges (!) Bachelorstudium zu absolvieren, dessen Abschluss schon eine befristete Anstellung als LehrerIn erlaubt. Parallel zur „Induktionsphase", die eine begleitete Berufseinführung ist, kann ein dreisemestriges Masterstudium ergänzt werden, das eine unbefristete Anstellung ermöglicht.

Tabelle 1 gibt eine Übersicht der an der Universität Wien ab dem Wintersemester 2014/15 implementierten Bachelorstudien für das Lehramt. Die insgesamt 240 ECTS teilen sich in je 100 für die beiden Unterrichtsfächer und 40 für die Pädagogik auf (Mitteilungsblatt der Universität Wien, Studienjahr 2013/2014, 39. Stück).

<table>
<tr><td>Fachwissenschaft
Unterrichtsfach 1: 70-80 ECTS</td><td>Unterrichtsfach 2:
70-80 ECTS</td><td rowspan="2">Allgemeine Bildungswissenschaftliche Grundlagen: 34 ECTS (19 ECTS für pädagogisch-praktische Studien)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Wahlbereich: 10 ECTS</td></tr>
<tr><td>Fachdidaktik
Unterrichtsfach 1: 15-25 ECTS</td><td>Unterrichtsfach 2:
15-25 ECTS</td><td>Schulpraxis:
6 ECTS</td></tr>
</table>

Tabelle 1: Aufbau der neuen Lehramtsstudien (Bachelor) für die Sekundarstufe (Universität Wien)

Organisatorisch wird die Vereinheitlichung der LehrerInnenbildung durch Verbünde aus Universitäten und PHn realisiert. Die PHn in Wien und Niederösterreich, die kirchliche PH Wien/Krems und die Uni Wien bieten im Verbund Nord-Ost ab 2016/17 ein gemeinsames Sekundarstufenlehramt an.

2. Motivation und Vorgaben für die LehrerInnenbildung NEU

„Die Aufgaben und Anforderungen an die Rolle des Lehrers haben sich verändert, österreichische Lehrer sind sehr wissensorientiert, aber oftmals nicht gut vorbereitet auf die Verschiedenheit ihrer Schülerinnen und Schüler und deren Bedürfnisse“ (OECD-Bericht zur Untersuchung der Situation der Lehrerinnen und Lehrer in Österreich, 2003, https://www.bmbf.gv.at/ schulen/lehr/labneu/warum.html). Eine politische Vorgabe ist die Suche nach Kompetenzen für „gute“ PädagogInnen und nach einem Integrationsmodell, das Fachausbildung, fachdidaktische Ausbildung und Pädagogik mit starkem Praxisbezug enthält (vgl. ebd.). Im Folgenden greifen wir zwei Bausteine des komplexen Kompetenzbegriffs auf, die im Zuge der Diskussionen im Verbund bei der Entwicklung eines gemeinsamen Curriculums im Fokus standen: fachliches Wissen und fachspezifisch-pädagogisches Wissen (vgl. Schwarz 2013, S. 41 ff.).

3. Unser Forschungsinteresse und seine Umsetzung

Nach Beutelspacher et al. (2011, S. 192) sind die Aspekte Basismathematik, Schnittstelle und Didaktik der Mathematik die Elemente eines idealtypischen Studienplans. Im Curriculum des Verbunds Nord-Ost beginnt die fachmathematische Ausbildung – anders als früher! – mit Geometrie und linearer Algebra im IR^2 und IR^3. Diese Themengebiete „haben nicht nur ein besonderes elementarmathematisches Potenzial, sondern sie sind als Lehr- und Lerngebiete für angehende Gymnasiallehrerinnen und -lehrer von zentraler Bedeutung.“ (ebd., S. 111). Die zugehörige Schnittstelle wird von der Schulmathematik „(Elementar-)Geometrie und Vektorrechnung“ im Semester darauf bedient. Sie soll einen kritisch konstruktiven Rückblick auf die Oberstufenmathematik bieten, Verbindungen von fach- und Berufsfeldbezug sichtbar machen und so zu einem reflektierten Umgang mit der Mathematik in der Schule beitragen (vgl. ebd., S. 199). Diese Abfolge Basismathematik – Schnittstelle wird im gesamten Curriculum beibehalten.

Um Charakteristika der fachlichen bzw. schulmathematischen Ausbildung herauszuarbeiten, wurden nach einer Curriculumsrecherche Leitfadeninterviews mit vier Fachmathematikern (Wien, Graz) und vier FachdidaktikerInnen (Wien, Graz, Linz) im Sommer 2015 geführt. Dabei wurde nach themenspezifischen Zugängen bei schulmathematischen Lehrveranstaltungen (LVn) gefragt, nach dem Verständnis von Hintergrundwissen und von Elementarmathematik und schließlich nach dem Einfluss des Vorwissens der Studierenden auf die Gestaltung der jeweiligen Schulmathematik. Die Wahl des Abstraktions- und Exaktheitsniveaus (inkl. Rolle der Beweise) in einer fachmathematischen Lehrveranstaltung, die Entscheidung deduktiver Aufbau versus Anwendungen (rasches Herleiten von Resultaten) bzw. genetische Einführung von Fachbegriffen bildeten den Leitfaden für Interviews mit den Fachmathematikern. Die Frage der Motivation der LAK in fachmathematischen LVn war eine weitere, wie auch die nach der Vermittlung eines fundierten Bildes der Wissenschaft Mathematik.

4. Ergebnisse

Die Auswertung der Interviews erfolgte nach der Grounded Theory (Glaser & Strauss 2010), um gemeinsame Sichtweisen zu extrahieren. Für die fachmathematischen Veranstaltungen wurden unterschiedliche Ausbildungsziele bei LAK und Mathematikstudierenden ausgemacht: die Betonung der Bedeutung mathematischer Begriffe und der ihnen zugrunde liegenden Ideen, der Konzepte und Sätze geht auf Kosten mathematischer Techniken, technischer Anwendungen und beweistechnischer Vollständigkeit. Das der Mathematik innewohnende hohe Abstraktionsniveau wird stellenweise zugunsten eines exemplarischen oder Überblick verschaffenden narrativen Vorgehens unterbrochen. Der Konnex zur Schulmathematik wird als wichtig erkannt, gelingt aber nicht.

Ein fundiertes Bild der Wissenschaft Mathematik den LAK zu vermitteln, wird als unbedingt notwendig, aber auch als Herausforderung gesehen. Folgende Möglichkeiten werden genannt:

- Mathematische Themen, *„wo du nicht viel Technik brauchst“*
- Besuch von Vorträgen prominenter Mathematiker/innen, um ein Kennenlernen „*wissenschaftlicher Kultur*“ zu initiieren
- Zeit nehmen zur Aneignung einer „*kritischen Masse an grundlegenden Werkzeugen*“, um aktuelle Anwendungsprobleme behandeln zu können
- Selbstständiges Arbeiten der Studierenden abseits des klassischen Vorlesungssettings im Stile von tatsächlichem Mathematik Betreiben

Beweise sind als „*Sprache der Mathematik*“ unverzichtbar, allerdings werden technische Beweis(teil)e hintangestellt. Dafür wird das Eingehen der Voraussetzungen explizit gemacht, und weiterhin steht das Herausarbeiten des „*springenden Punkts*“ einer Beweisidee im Fokus.

Das Einführen von Begriffen / Konzepten ist abhängig vom individuellen Forschungshintergrund: einerseits vom Allgemeinen zur Anwendung, andererseits vom (Gegen-)Beispiel zum Konzept. Durch eine Beschränkung des Umfangs der Begriffe im Vergleich zu jenem in LVn für Mathematikstudierende kann ausführlicher auf sie eingegangen werden.

Das Spannungsfeld systematischer vs. genetischer Aufbau bzw. Anwendungen wird kontrovers beurteilt. Einerseits liefern konkrete Anwendungsbeispiele Motivation, andererseits „*stört der mathematisch genetische Zugang*“ die „*Schönheit eines mathematischen Gedankens*“. Außerdem braucht es *„viel zu viel Theorie“* für „*echte*“ Anwendungen.

Die „*ökonomische Sichtweise*“ der Studierenden und die immer noch manchmal gegebene „*Auslesefunktion*“ fachmathematischer LVn konterkarieren den Kampf um „*die Leute*“ bzw. den „*Appell*“ an alle.

Konzepte von schulmathematischen LVn sind wegen curricularer Modifikationen, wechselnder Bezugsfachvorlesungen, bildungspolitischer Maßnahmen (extrinsische Beweggründe) oder aus intrinsischen Motiven verändert worden, z. B.: „*Studierende haben nicht erfasst, was es überhaupt bedeutet, das im Kontext zu erklären, und haben das dann sehr syntaktisch erklärt;[...]und überhaupt nicht auf den inhaltlichen Hintergrund da geachtet*“ beim Erklären des Dividierens zweier natürlicher Zahlen.

Unterschiedliche fachliche Vorerfahrungen der LAK bedingen themenspezifische Zugänge: wenn diese vorhanden sind, dann stehen Querverbindungen zwischen Schule und Universität im Vordergrund (Analysis), wenn nicht, dann gibt es inhaltliche (Geometrie) oder semantische (Arithmetik, elementare Algebra) Schwerpunkte.

Schulmathematik-LVn sollen didaktische, elementarmathematische (i. e. voraussetzungsarme) und Schnittstellenaspekte abdecken. Die letzten beiden tragen zum Hintergrundwissen der LAK bei, über das allerdings kein einheitliches Verständnis herrscht. Einerseits geht es um „*zentrale Sätze, die ich in der Schule brauche*“, andererseits dient es der unmittelbaren Einordnung und Bewertung von SchülerInnenäußerungen im Unterricht.

Die Vermittlung des Hintergrundwissens sollte in den fachmathematischen LVn passieren (Basisbildung), während die fachmathematischen „*Wurzeln*“ der Schulmathematik auch in schulmathematischen LVn angesprochen werden können: *„Welche Pflänzchen aus der Fachmathematik haben ihre Blüten dann in der Schulmathematik?“*

Literatur

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S. & Wickel, G. (2011). *Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Glaser, B. & Strauss, A. (2010). *Grounded Theory. Strategien qualitativer Forschung*. Bern: Huber.

Schwarz, B. (2013). *Professionelle Kompetenz von Mathematiklehramtsstudierenden. Eine Analyse der strukturellen Zusammenhänge*. Wiesbaden: Springer.

Martina GREILER-ZAUCHNER, Pädagogische Hochschule Kärnten

Helfen Kindern die Ableitungsstrategien des kleinen Einmaleins, wenn es um das große Einmaleins geht?

Theoretischer Hintergrund

Im Unterschied zum kleinen Einmaleins sollen die Kinder Multiplikationen mit mehr als einstelligen Faktoren nicht auswendig lernen. Das Ziel ist, dass Kinder Lösungsstrategien für solche Multiplikationsaufgaben entdecken, beziehungsweise erfahren und diese dann sicher anwenden können (Radatz et al. 1999, S. 100). Die Lösung der Aufgaben sollte entweder im Kopf oder halbschriftlich erfolgen. Wobei halbschriftliches Rechnen definiert wird als ein Rechnen bei dem Zwischenschritte und Zwischenergebnisse in einer nicht festgelegten Art und Weise schriftlich fixiert werden können, gerechnet wird aber im Kopf.

Zum halbschriftlichen Multiplizieren sind im deutschsprachigen Raum nur wenige Untersuchungen vorhanden. Padberg und Benz nennen diesbezüglich nur eine unveröffentlichte Studie (Hirsch 2002), die die Vorgangsweise von Grundschulkindern bei Aufgaben zum halbschriftlichen Multiplizieren genauer analysiert (Padberg und Benz 2011, S. 192). Trotz sorgfältiger Recherche konnte in Österreich bzw. im deutschsprachigen Raum keine Untersuchung zum halbschriftlichen Multiplizieren gefunden werden, die neben den von den Kindern angewendeten Rechenstrategien auch die unterrichtliche Umsetzung des Themas mitberücksichtigt, wie es im weiteren Verlauf des beschriebenen Projekts vorgesehen ist.

Ausgangssituation und Fragestellungen

Die vorgestellte Untersuchung ist Teil eines laufenden Forschungsprojektes, in dem Unterrichtsaktivitäten zur Erarbeitung der halbschriftlichen Multiplikation entwickelt und erprobt werden. In der Studie wurde erhoben, welche Strategien zur Lösung von Multiplikationen mit mehr als einstelligen Faktoren Kinder anwenden, bevor das Thema im Unterricht des dritten Schuljahres behandelt wird. Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung werden dann im späteren Verlauf des Projekts herangezogen um festzustellen, ob und wie sich die Strategien der Kinder im Laufe des dritten und vierten Schuljahres weiterentwickeln, nachdem im Unterricht gezielt an halbschriftlichen Strategien gearbeitet wurde.

In den untersuchten Klassen wurde das kleine Einmaleins unterschiedlich erarbeitet. In zwei Klassen wurden einzelne Malreihen jeweils für sich behandelt. In den anderen drei Klassen wurde in der Erarbeitung auf die Strukturierung der Aufgaben in Reihen gänzlich verzichtet. Stattdessen wurde das Einmaleins konsequent über Kernaufgaben erarbeitet, d.h.: nach Erarbeitung des Verdoppelns, Verfünffachens und Verzehnfachens aller Zahlen bis 10 wurden die Kinder zum Entdecken und Nutzen von Strategien des Ableitens für alle anderen Einmaleinsaufgaben angeregt (vgl. Gaidoschik 2014). Die Lehrkräfte, die das Einmaleins konsequent über das Ableiten aus Kernaufgaben erarbeiteten, wurden im Zuge eines Entwicklungsforschungsprojekts (vgl. Gaidoschik, Guggenbichler & Deweis, in Vorb.) von der Pädagogischen Hochschule Kärnten fachdidaktisch begleitet.

Im vorliegenden Beitrag werden ausgewählte Ergebnisse zu folgenden Forschungsfragen vorgestellt:

(1) Welche Strategien zur Lösung von Multiplikationen mit mehr als einstelligen Faktoren benutzen Kinder im dritten Schuljahr, bevor das Thema im Unterricht des dritten Schuljahres behandelt wird?

(2) Lassen sich bei der Lösung von Multiplikationen mit mehr als einstelligen Faktoren Unterschiede zwischen Kindern, die das kleinen Einmaleins verschiedenartig erarbeitet haben, erkennen?

Methodisches Vorgehen

Zur Beantwortung der Forschungsfragen wurden mit den Kindern qualitative Interviews nach der revidierten klinischen Methode durchgeführt (Selter und Spiegel 1997, S. 100–112). Es wurden insgesamt 96 Interviews in 6 verschiedenen österreichischen Grundschulklassen geführt. Die Interviews fanden zu Beginn des dritten Schuljahres (Nov./Dez. 2015) statt. Im Interview wurden die Kinder aufgefordert unter anderen folgenden Aufgaben zu lösen:

(a) $5 \cdot 14$ (b) $4 \cdot 16$ (c) $19 \cdot 6$ (d) $12 \cdot 15$ (e) Hilft $2 \cdot 15=30$ für $4 \cdot 15$? (f) Hilft $20 \cdot 4=80$ für $19 \cdot 4$?

Die Kinder hatten die Möglichkeit schriftliche Aufzeichnungen zu machen.

Ausgewählte Ergebnisse zur ersten Forschungsfrage

Aufgrund des begrenzten Umfangs des Beitrags kann nur auf einige ausgewählte Ergebnisse eingegangen werden.

Die Aufgaben $5 \cdot 14$ und $19 \cdot 6$ wurden von den 96 interviewten Kindern am häufigsten mittels einer Zerlegungsstrategie unter Verwendung des Distributivgesetzes gelöst, so wie Hannah es in Abbildung 1 am Beispiel von $5 \cdot 14$ gemacht hat. Die Aufgabe $4 \cdot 16$ wurde jedoch am häufigsten durch Verdoppeln von $2 \cdot 16$ gelöst. Aufgefallen ist auch, dass die fehlerhafte Zerlegungsstrategie von $12 \cdot 15$ in $10 \cdot 10+2 \cdot 5=110$ von insgesamt einer relativ großen Anzahl von Kindern (18) angewendet wurde. Dies waren vor allem jene Kinder, die bei den vorangegangenen Aufgaben mit nur einem zweistelligen Faktor die distributive Zerlegung richtig verwendeten.

Abbildung 1: Hannahs Lösungsstrategie für $5 \cdot 14$

$5 \cdot 10 = 50 \quad 5 \cdot 4 = 20 \quad 50 + 20 = 70$

Alle vorgekommenen Lösungsstrategien wurden zu sieben Kategorien zusammengefasst, die in Tabelle 1 (teilweise mit Beispielen belegt) aufgelistet sind. In den Spalten rechts stehen die jeweiligen absoluten Häufigkeiten der aufgetretenen Lösungsstrategien pro Aufgabe.

Tabelle 1: Gewählte Lösungsstrategien für 5·14, 4·16, 19·6 und 12·15

Gewählte Lösungsstrategien	**5·14**	**4·16**	**19·6**	**12·15**
1. Vollständiges Auszählen mit Hilfe von Fingern/Strichlisten/Kreisen	5	2	2	0
2. Wiederholte Addition eines Faktors (z.B.: 5·14=14+14+14+14+14=70)	16	15	11	10
3. Verdoppelungsstrategien (in Verbindung mit wiederholter Addition) und Halbierungsstrategien (z.B.: 5·14=10+10+10+10+10+10+10=70, 4·16=32+32=64, oder 19·6=(19·3)·2=57+57=114)	9	24	11	11
4. Verwendung der Verzehnfachung als Ankeraufgabe und anschließendes additives Weiterrechnen (z.B.: 5·14=50+5+5+5+5=70)	16	15	9	3
5. Zerlegungsstrategien unter Verwendung des Distributivgesetzes (z.B.: 5·14=5·10+5·4=70, oder 19·6=10·6+10·6-6=114)	27	22	33	10
6. Fehlerhafte Strategien (z.B.: 5·14=5·10+4=54, oder 12·15=10·10+2·5=110)	19	13	18	38
7. Die Aufgabe konnte nicht gelöst werden	4	5	12	24
Gesamt	**96**	**96**	**96**	**96**

Ausgewählte Ergebnisse zur zweiten Forschungsfrage

Wenn man nur die Kinder, die das kleine Einmaleins konsequent über das Ableiten aus Kernaufgaben erarbeiteten, betrachtet, dann wählten diese zur Lösung aller vier Aufgaben am häufigsten Zerlegungsstrategien unter Verwendung des Distributivgesetzes, so wie Hannah in Abbildung 1 (5·14 (34%), 4·16 (30,2%), 19·6 (40,4%), 12·15 (15,1%)).

Bei den Kindern, die das kleine Einmaleins Reihe für Reihe erarbeiteten, war die Verteilung der verwendeten Strategien etwas anders. So war die Verwendung der Verzehnfachung als Ankeraufgabe mit anschließendem additiven Weiterrechnen, so wie es Lea in der Abbildung 2 exemplarisch gemacht hat, bei den Aufgaben 5·14 (32%) 4·16 (28%) 19·6 (24%) die am häufigsten aufgetretene Lösungsstrategie.

Auf die Frage: „Hilft 2·15 für 4·15?" konnten rund 85% der Kinder aus den Klassen, die das kleine Einmaleins konsequent über das Ableiten aus Kernaufgaben erarbeiteten, erklären, dass man von 2·15=30 durch Verdoppeln auf das Ergebnis von 4·15 kommen kann. Unter den Kindern, die das kleine

Einmaleins Reihe für Reihe erarbeiteten, konnten dies nur 36% ebenso erläutern. Bei der Frage: „Hilft 20·4=80 für 19·4?“ waren keine wesentlichen Unterschiede beobachtbar.

Abbildung 2: Leas Lösungsstrategie für 4·16

$$40+4=44 \quad 44+4=48+4=52+4=60+4=64$$

Fazit

Zusammenfassend legen die Befunde die Vermutung nahe, dass Kinder, die das kleine Einmaleins konsequent über Kernaufgaben erarbeiteten, zur Lösung von Aufgaben aus dem großen Einmaleins häufiger distributive Zerlegungsstrategien anwenden. Während Kinder, die das kleine Einmaleins Reihe für Reihe erarbeiteten, häufiger von einer Ankeraufgabe (der Verzehnfachung) ausgehend sukzessive additiv bis zur gesuchten Vervielfachung weiterrechnen.

Weiters fällt auf, dass Kinder, die das kleine Einmaleins konsequent über das Ableiten aus Kernaufgaben erarbeiteten, ein größeres Repertoire an Strategien, die auf Verdoppeln, Verdreifachen und Halbieren beruhen verwenden. Von den beobachteten Verdoppelungs- und Halbierungsstrategien zu den vier Aufgaben (5·14, 4·16, 19·6, 12·15) konnten komplexere Verdoppelungs- und Halbierungsstrategien, wie 12·15 als zweifache Verdoppelung von 3·15, oder 5·14 als Halbierung von 10·14 ausschließlich bei den Kindern beobachtet werden, die das kleine Einmaleins konsequent über das Ableiten aus Kernaufgaben erarbeiteten.

Literatur

Gaidoschik, M. (2014). Einmaleins verstehen, vernetzen, merken: Strategien gegen Lernschwierigkeiten(1. Aufl.). Seelze: Kallmeyer.

Padberg, F., & Benz, C. (2011). Didaktik der Arithmetik: Für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung(4. erw., stark überarb. Aufl.). Heidelberg: Spektrum Akad. Verl.

Selter, C., & Spiegel, H. (1997). Wie Kinder rechnen(1. Aufl.). Leipzig: Klett-Grundschulverl.

Radatz, H., & Schipper, W., & Dröge, R., & Ebeling A. (1999). Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen: 3. Schuljahr. Hannover: Schroedel.

Birgit GRIESE, Michael KALLWEIT, Bochum

Lernverhalten und Klausurerfolg in der Ingenieurmathematik - Selbsteinschätzung und Dozentensicht

Will man Studierende zu Studienbeginn sinnvoll unterstützen, ist ein erster Schritt, die Faktoren für Klausurerfolg zu bestimmen. In unserer Untersuchung beschrieben 508 Studierende ihr Lernverhalten in sechs Kategorien. Die Daten wurden in Bezug auf Klausurpunkte und Studiengang ausgewertet. Zusätzlich wurden Dozenten gebeten, Klausurerfolg anteilig auf dieselben Kategorien zu verteilen. Die Ergebnisse liefern Einsichten zur Relevanz einzelner Kategorien und entkräften gängige Annahmen.

Einleitung

Der Übergang zu tertiärer mathematischer Bildung wird oft als problematisch beschrieben (z.B. Liston & O'Donoghue, 2009, Gueudet, 2008). Dies veranlasste verschiedene Untersuchungen, wie Studienanfänger unterstützt werden können (vgl. Hoppenbrock, Biehler, Hochmuth, & Rück, 2016), oft mit einem Fokus auf dem Lernverhalten (Dehling et al., 2014). Hier ist unsere Studie verortet.

Theoretische Einordnung und Forschungsfragen

Die Hürden, die Studierende in Mathematik zu Studienbeginn überwinden müssen, sind vielfältig (de Guzmán, Hodgson, Robert & Villani, 1998; Tall, 2004). Mathematische Kompetenz und schulische Qualifikationen bestimmen bereits zu etwa einem Drittel den akademischen Erfolg (Rach, 2014, S. 219). Als Hauptgründe für Studienabbruch gelten Leistungsprobleme und fehlende Motivation (Dieter, 2012; Heublein, 2010). Die vorliegende Studie trägt dazu bei, Einsichten zu gewinnen, wie das Lernverhalten mit dem Klausurerfolg zusammenhängt. Die Forschungsfragen lauten:

FF1: Welche Struktur haben die gesammelten Daten?

FF2a: Was sind die Verbindungen zwischen (selbsteingeschätztem) Lernverhalten und Klausurerfolg?

FF2b: Gibt es Unterschiede in den verschiedenen Studiengängen?

FF3: Lassen sich Cluster von Studierenden mit verschiedenem Lernver-halten finden? Zeigen sich Unterschiede bzgl. Klausurerfolg?

FF4: Inwiefern spiegeln die Einschätzungen der Dozenten die aus den Daten gewonnenen Ergebnisse wider?

Methodologie

Die Items zur Erfassung des Lernverhaltens decken die sechs Kategorien *Hausaufgaben*, *Vorlesungen*, *Übungen*, *Tiefenlernen*, *Oberflächenlernen* und *Anstrengung* ab. Die Items wurden aus Wild und Schiefele (1994), Himmelbauer

(2009) sowie Trautwein, Lüdtke, Schnyder und Niggli (2006) nach Rach (2014) übernommen und auf einer 4-Punkt Likert-Skala bewertet. 508 Datensets aus drei Mathematik-Vorlesungen für verschiedene Ingenieur-Studiengänge wurden gesammelt. Zusätzlich schätzten 10 erfahrene Dozenten den prozentualen Einfluss der verschiedenen Kategorien auf den Studienerfolg ein. Für sie wurde eine siebte Kategorie (*Intelligenz / Begabung*) und eine offene achte hinzugefügt.

Zur Untersuchung der Daten wurden deskriptive Statistiken, explorative Faktoranalyse und Cronbach's α genutzt. Multiple lineare Regression wurde eingesetzt, um den Einfluss der verschiedenen Faktoren auf akademischen Erfolg zu beschreiben. Die kombinierten Item-Scores einer Skala dienten als Prädiktoren auf die Outcome-Variable *Klausurerfolg*. Eine k-means Clusteranalyse lieferte zwei Cluster, deren durchschnittliche Klausurpunkte berechnet wurden. Die Einschätzungen der Dozent*innen wurden mittels deskriptiver Statistiken, inklusive Medianen, kombiniert.

Ergebnisse

Faktor	# Items	α	% Varianz
Hausaufgaben (H)	7	.75	12%
kontinuierliche Anstrengung (kA)	7	.72	10%
Vorlesungen (V)	3	.72	7%
Oberflächenlernen (O)	4	.57	7%
Tiefenlernen (T)	5	.56	7%
Übungen (U)	3	.53	5%

Tabelle 1: Faktorbeschreibungen und Itemzahlen, aufgeklärte Gesamtvarianz 48%.

Die explorative Faktorenanalyse (Hauptkomponentenanalyse, Varimax-Rotation) zeigte, dass eine Skalenanpassung notwendig war. Die Anzahl der Faktoren wurde variiert; schließlich wurde entschieden, zwei Items zu tilgen und sechs Faktoren zu extrahieren. So konnten fünf der ursprünglich sechs Kategorien erhalten werden; ein Faktor wurde in *kontinuierliche Anstrengung* umbenannt (siehe Tabelle 1), da ihm auch Items zugeordnet wurden, die ursprünglich für *Tiefenlernen* vorgesehen waren. Das Sampling war gut (KMO=.84), und Bartlett's Test auf Sphärizität ($X^2(406)=3257.72$, p=.000) zeigte eine ausreichend große Korrelation zwischen den Items. Für drei der sieben Faktoren entspricht die interne Reliabilität den akzeptierten Standards (α > .7)

	BI, UTRM				MB			
Prädik-	b	SE b	β	Sig.	b	SE b	β	Sig.
Konst.	25.95	18.09		.15	-30.04	23.85		.21
H	21.50	4.16	.48***	.00	28.20	5.86	.47***	.00
O	-7.27	3.09	-.19*	.02	-3.03	4.57	-.06	.51
T	-7.46	4.16	-.15	.07				

kA	-2.77	4.01	-.06	.49				
V					5.80	3.23	.17	.08

Tabelle 2: Regressionsmodell mit vier bzw. drei Prädiktoren und Outcome Variable *Klausurerfolg*, Bauingenieurwesen und Umwelttechnik / Ressourcenmanagement

(BI, UTRM) und Maschinenbau (MB), R^2=.27 bzw. R^2=.32.

Die Korrelationen zwischen den Faktoren lagen unterhalb von .48, was lineare Modellierung erlaubt. Zunächst wurden alle sechs Faktoren im Modell berücksichtigt, was Einsichten in die Bedeutung und Relevanz der einzelnen Faktoren ermöglichte: R^2=.28 (Bauingenieurwesen und Umwelttechnik / Ressourcenmanagement, BI, UTRM) bzw. R^2=.32 (Maschinenbau, MB). Für BI, UTRM wurde ein Modell mit vier Faktoren, für MB mit drei Faktoren präferiert, siehe Tabelle 2.

Versuche mit unterschiedlichen Anzahlen von Clustern führten zu einer Lösung mit zwei Clustern. Die Studierenden in Cluster 2 beschäftigen sich intensiver mit ihren *Hausaufgaben*, zeigen mehr *kontinuierliche Anstrengung*, bevorzugen *Tiefenlernen* vor *Oberflächenlernen* und nutzen die *Übungen* stärker – im Vergleich zu Cluster 1. Cluster 2 erzielte dann auch bessere Ergebnisse in den Klausuren (im Durchschnitt 52.70 für BI, UTRM und 77.70 für MB) als Cluster 1 (47.78 für BI, UTRM und 53.82 für MB).

Die Einschätzungen der Dozent*innen setzten *Hausaufgaben* an erste (M=26.17, SD=13.65, Median=22.50), *Anstrengung* an zweite Stelle (M=15.60, SD=6.19, Median=15.00) und *Intelligenz / Begabung* ans Ende.

Zusammenfassung und Diskussion

In Bezug auf die Struktur der Daten (FF1) konnten sechs Faktoren identifiziert werden, siehe Tabelle 1. Dies passt zum Design der Studie, jedoch wiesen nur drei Skalen die erforderliche interne Reliabilität auf.

Die Analyse des Einflusses des Lernverhaltens auf den Klausurerfolg (FF2a) betonte die Relevanz von *Hausaufgaben*, die den stärksten positiven Einfluss aufwies. Es gab auch Unterschiede (FF2b): Für BI, UTRM hatte *Oberflächenlernen* einen (signifikanten) negativen Einfluss, genau wie *Tiefenlernen* (wenn auch nicht signifikant). Für MB hat *Oberflächenlernen* nur einen schwachen (und nicht signifikanten) negativen Einfluss auf *Klausurerfolg*, und *Tiefenlernen* trägt gar nicht relevant bei. Erfreulicherweise hat hier *Vorlesungen* einen positiven Einfluss. Insgesamt erklären die Faktoren aus unserem Modell 27% bzw. 32% der Outcome-Variable *Klausurerfolg*.

Die Clusteranalyse (FF3) liefert zwei Cluster: Studierende mit erwünschtem Lernverhalten (Cluster 2) und solche mit wenig empfehlenswertem Lernverhalten (Cluster 1). Es gibt den erwarteten Effekt auf *Klausurerfolg*, der jedoch bei Multiple-Choice-Fragen weniger ausgeprägt ist.

Die Dozenteneinschätzungen (FF4) zeigen als stärkste Abweichung zu unseren Erkenntnissen die hohe Einschätzung von *Anstrengung*. Die hohe Relevanz der

Hausaufgaben auf *Klausurerfolg* scheint allgemein akzeptiert. Dementsprechend sollten auf Aufgaben Zeit und Mühe verwendet werden.

Literatur

Dehling, H., Glasmachers, E., Griese, B., Härterich, J., & Kallweit, M. (2014). MP² - Mathe/Plus/Praxis, Strategien zur Vorbeugung gegen Studienabbruch. *Zeitschrift für Hochschulentwicklung, 9*(4), 39–56.

Dieter, M. (2012). *Studienabbruch und Studienfachwechsel in der Mathematik: Quantitative Bezifferung und empirische Untersuchung von Bedingungsfaktoren* (Dissertation). Universität Duisburg-Essen.

de Guzmán, M., Hodgson, B. R., Robert, A., & Villani, V. (1998). Difficulties in the passage from secondary to tertiary education. In G. Fischer & U. Rehmann (Hrsg.), *Proceedings of the ICM. Documenta Mathematica Extra Volume III* (pp. 747–762). Rosenheim: Geronimo.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 237–254.

Heublein, U., & Barthelmes T. (2010). Woran Studierende scheitern - Die Studienstrukturreform führt zu einer Verschiebung bei den Ursachen für einen Studienabbruch. *HIS Magazin*, (2), 5–7.

Himmelbauer, M. (2009). *Das neue Prüfungssystem im Medizincurriculum Wien: Promotor oder Hindernis für bedeutungsorientiertes Lernen?* (Dissertation). Universität Wien.

Hoppenbrock, A., Biehler, R., Hochmuth, R., & Rück, H.-G. (Hrsg.). (2016). *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase: Herausforderungen und Lösungsansätze*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Liston, M., & O'Donoghue, J. (2009). Factors influencing the transition to university service mathematics: part 1, a quantitative study. *Teaching Mathematics and its Applications*, *28*(2), 77–87.

Rach, S. (2014). Charakteristika von Lehr-Lern-Prozessen im Mathematikstudium: Bedingungsfaktoren für den Studienerfolg im ersten Semester (Dissertation). Christian-Albrechts-Universität, Kiel.

Tall, D. O. (2004). Building theories: The three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *24*(1), 29–33.

Trautwein, U., Lüdtke, O., Schnyder, I., & Niggli, A. (2006). Predicting homework effort: Support for a domain-specific, multilevel homework model. *Journal of Educational Psychology*, *21*(1), 11–27.

Wild, K.-P., & Schiefele, U. (1994). Lernstrategien im Studium. Ergebnisse zur Faktorenstruktur und Reliabilität eines neuen Fragebogens. *Zeitschrift für Differentielle und Diagnostische Psychologie*, *15*, 185–200.

Martin GUGGISBERG, Basel

Mathematisches Experimentieren mit „Jupyter notebook“ - Forschendes Lernen in der Sek II

Ausgehend vom arithmetisch-musikalischem Gruppenspiel Ping-Pong wird in diesem Beitrag aufgezeigt, wie Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 2 mit Hilfe des Werkzeugs „Jupyter notebook“ einzelne Spielsituationen simulieren können. Die Arbeitsweise der Schülerinnen und Schüler entspricht damit einem aktuellen Trend in der Forschung mit elektronischen Laborjournalen zu arbeiten.

1. Elektronische Laborjournale

In aktuellen Hochschulstudiengängen aus den Bereichen der „Compu-tational Sciences“ wie z.B. „Computational Biology“ werden elektronische Laborjournale sowohl in Lehre wie auch der Forschung durchgängig eingesetzt.

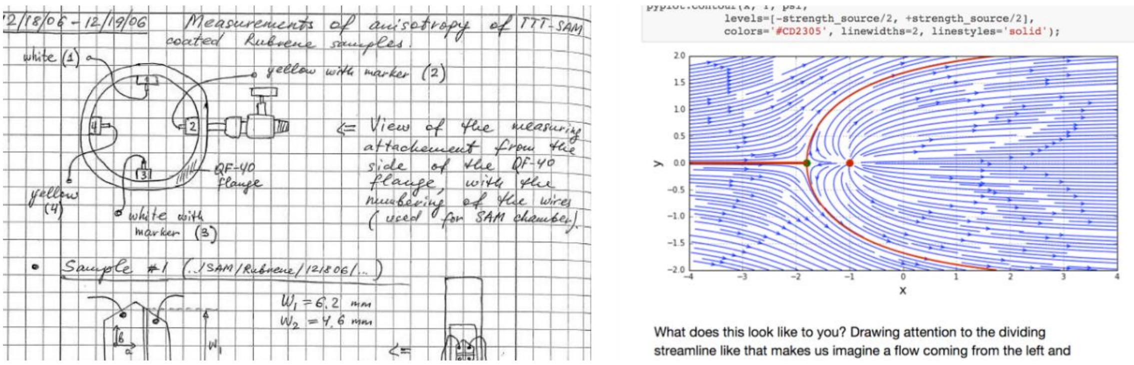


Abbildung 1: herkömmliches Laborjournal (links) mit Skizze und Angaben zu Dimensionen und experimentellen Parametern. Rechts: Ausschnitt aus einem elektronischen Laborjournal zur Hochschulveranstaltung Aerodynamics-Hydrodynamics an der George Washington Universität

Elektronische Laborjournale ermöglichen ein automatisiertes Erfassen von Daten, Messwerten und persönlichen Notizen. Numerische Experimente oder Simulationen können dabei direkt in einem Browser ausgeführt werden. Neben kommerziellen Produkten hat sich eine starke open-source Gemeinschaft im Bereich des wissenschaftlichen Rechnens gebildet. Wissenschaftler aus unterschiedlichen Forschungsfelder entwickeln frei zugängliche Werkzeuge für diverse Anwendungsfelder. Laufend werden weitere Softwarebibliotheken wie auch neue Programmiersprachen hinzugefügt (JuPyter, 2015). Elektronische Laborjournale können lokal auf dem eigenen Computer oder in frei zugänglichen Cloud-Portalen genutzt werden. Zahlreiche Beispiele dazu finden sich in wissenschaftlichen Publikationen oder direkt im Internet (Shen, H., 2014, Notebook Gallery 2015).

Im Weiteren wird ein möglicher Einsatz von elektronischen Laborjournalen anhand eines Gruppenspiels exemplarisch vorgestellt. Alle im folgenden gezeigten Verfahren, Simulationen oder Visualisierungen wurden selbst mit

Hilfe eines elektronischen Laborjournals erstellt, sie können direkt mit einem Browser betrachtet oder genutzt werden (Guggisberg, M., 2016).

2. Mathematisches Experimentieren am Beispiel eines arithmetisch-musikalischen Gruppenspiels

Das Ping-Pong Spiel (Cslovjecsek, M., 2011) behandelt eine koordinative, kooperative, rhythmische AufgabensteIlung, welche mit Gruppen von 4 bis 26 Schülerinnen und Schülern (SuS) durchgeführt werden kann.

Die SuS sitzen im Kreis und zählen der Reihe nach. Zusätzlich müssen sie drei Regeln befolgen:

1. Alle Dreier-Zahlen werden durch das Wort „Ping“ ersetzt.
2. Alle Vierer-Zahlen werden durch das Wort „Pong“ ersetzt.
3. Bei „Ping“ oder „Pong“ erfolgt jeweils ein Richtungswechsel, jedoch nicht, wenn eine Zahl sowohl durch 3 und 4 teilbar ist. In diesem Fall wird „Ping-Pong“ gesagt.

Trotz dieser einfachen Regeln sind viele Mitspieler einem hohen Gruppendruck ausgesetzt. Es gilt im richtigen Moment das Richtige zu sagen. Antworten auf Fragen wie: „Was muss ich sagen, wenn ich an die Reihe komme?“ oder: „Welche Zähl-Zahlen treten an meiner Spielposition auf ?“ können dabei helfen.

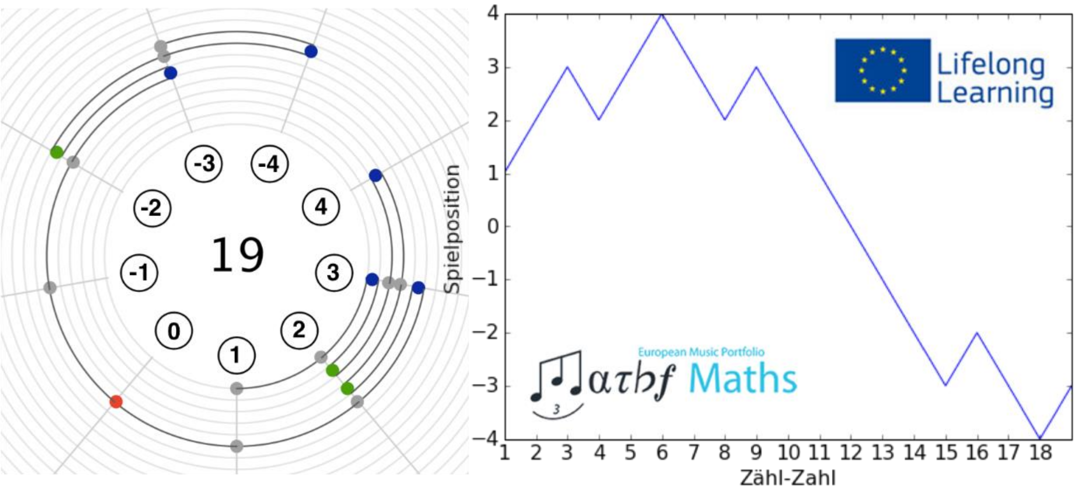


Abbildung 2: Ping-Pong Spielverlauf bis zur Zähl-Zahl 19, links: Ortsdarstellung, rechts: Spielposition vs. Zähl-Zahl Diagramm

Bei der Suche nach einer Vorhersage des Spielverlaufs bietet sich den SuS die Möglichkeit verschiedene Visualisierungstechniken zu entwickeln. Abbildung 2 zeigt zwei Darstellungen für den Fall mit ping=3 und pong=4. Die Visualisierung auf der rechten Seite lässt vermuten, dass sich der Spielverlauf mit Hilfe einer mathematischen Funktion beschreiben lässt, dies ist jedoch nicht auf einfache Weise möglich. Es kann jedoch basierend auf den

Spielregeln ein Algorithmus gefunden werden, welcher zu jeder Zähl-Zahl die entsprechende Spielposition ermittelt (Cslovjecsek, M., 2011).

Eine Verallgemeinerung des Ping-Pong Spielprinzips auf beliebigen Ping- und Pong-Zahlen führt zu einer Vielzahl verschiedenen Spielverläufen. Diese lassen sich direkt in einem elektronischen Laborjournal untersuchen. Z. B. weisen die Fälle mit den Ping-, Pong-Zahlen (3,5), (3,7), (3,9) und (3,11) ein divergentes Verhalten auf (Abbildung 3).

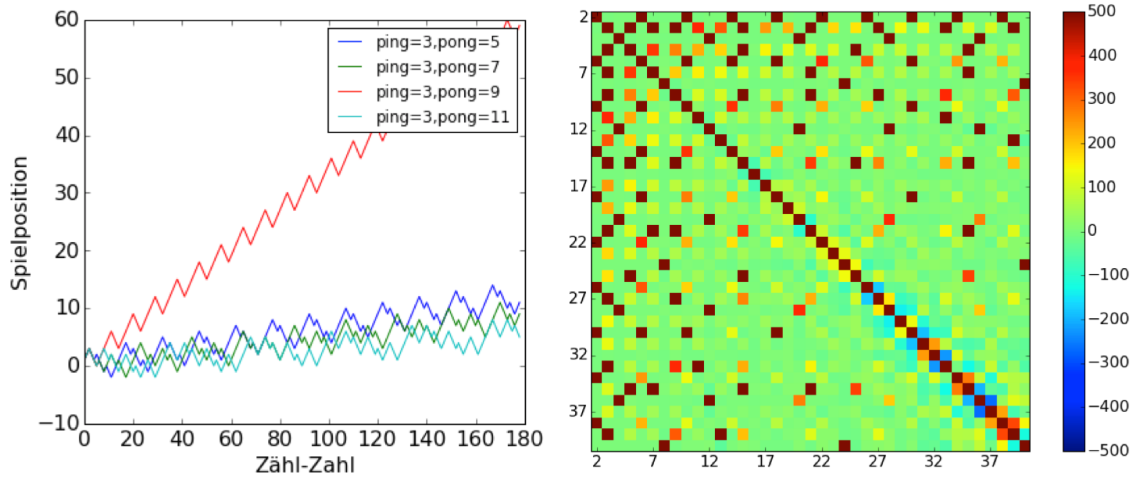


Abbildung 3 Links: Divergierende Verläufe des Spiels zu den Ping-,Pong-Zahlen (3,5), (3,7), (3,9), (3,11). Rechts: Matrixdarstellung der ersten 38^2 möglichen Ping-,Pong-Zahlen Kombinationen.

Mit Hilfe eines elektronischen Laborjournals lassen sich die Spielpositionen der ersten 1440 Kombinationen für eine bestimmte Zähl-Zahl berechnen und mit einer Farbe kodiert in einem Raster darstellen. Eine Vielzahl von Fällen erscheint grün, diese zeigen mit einer hohen Wahrscheinlichkeit kein divergentes Verhalten.

Eine Klärung liefert eine direkte Untersuchung. Im folgenden werden die Paare (35,36), (35,38), (35,40), (37,36), (37,38), (37,40), (39,36), (39,37), (39,40) dargestellt (Abbildung 4). Es zeigt sich, dass alle direkt nebeneinander liegenden Zahlenpaare (n,n+1) ein periodisches Verhalten mit unterschiedlichen Amplituden aufweisen.

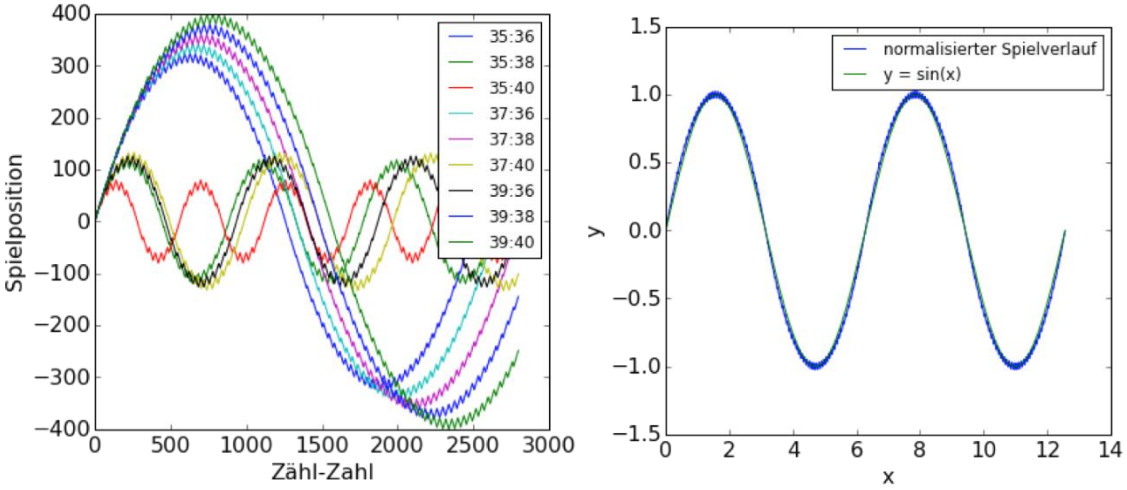


Abbildung 4 Links: Periodisches Verhalten bei ungeraden geraden Ping-, Pong-Zahlenpaaren. Rechts: Vergleich eines normierten Spielverlaufs mit y=sin(x)

Ein normalisierter Spielverlauf (Amplitude = 1.0 und Periode = 2π) hat das Potenzial als erste Näherung einer Sinusfunktion verwendet werden zu können.

In diesem Abschnitt wurde gezeigt, dass mit Hilfe von elektronischen Laborjournalen mathematische Fragestellungen experimentell untersucht werden können. Mathematiker wie z.B. Fermat, Euler oder Riemann haben viele Stunden ihres Lebens damit verbracht, Rechnungen im Kopf durchzuführen, um „mögliche Wahrheiten“ zu erkunden. Elektronische Laborjournale bieten SuS die Möglichkeit mathematische Problemstellungen mit Hilfe von Berechnungen oder Beobachtungen zu erforschen.

Diese Arbeit ist in Zusammenarbeit mit dem EMP-Maths Projekt entstanden und weiterentwickelt worden (European Music Portfolio – Maths: „Sounding Ways into Mathematics“, www.maths.emportfolio.eu). EMP-Maths wird vom Lifelong Learning Programm der Europäischen Union finanziert.

Literatur

Cslovjecsek, M., Guggisberg, M. & Linneweber-Lammerskitten H. (2011). Mathe macht Musik Ping-Pong: Ein arithmetisch-musikalisches Gruppenspiel, PM Praxis der Mathematik 42 (pp. 13 – 18).

Guggisberg, M., (2016). Mathematisches Experimentieren mit „Jupyter notebook“ Verfügbar unter: https://github.com/mgje/PIUMP/tree/master/GDM2016 [24.3.2016]

JuPyter (2015). Try JuPyter. Verfügbar unter: https://try.jupyter.org/ [24.3.2016]

Notebook Gallery (2015). Links to IPython and Jupyter Notebooks. Verfügbar unter: http://nb.bianp.net/ [24.3.2016]

Shen, H. (2014). Interactive notebooks: Sharing the code. Nature, 515(7525), 151-152.

Roland GUNESCH, Feldkirch

Wie wirken sich Vorlesungsaufzeichnungen auf die Anwesenheit der Studierenden in der Präsenzvorlesung aus?

Einleitung und Fragestellung

Zunehmend werden Vorlesungen in Hochschulen auf Video aufgezeichnet und die Aufzeichnungen den Studierenden zugänglich gemacht. Studierende sehen die Verfügbarkeit von solchen Aufzeichnungen in der Regel sehr positiv. Unter Lehrenden dagegen gibt es (zumindest derzeit noch) oft Vorbehalte gegen Vorlesungsaufzeichnungen; manche Lehrende (sowie manche Entscheidungsträger an Hochschulen) vermuten, dass das Vorhandensein von Vorlesungsaufzeichnungen dazu führt, dass Studierende weniger häufig oder gar nicht mehr an der Präsenzveranstaltung teilnehmen. Ob diese Vorbehalte begründet sind, soll hier untersucht werden.

In diesem Artikel wird auch der Nutzen von Anwesenheit diskutiert.

Untersuchungsmethode

Im Folgenden werden die Ergebnisse vorhandener Literatur vorgestellt, in der Vorlesungsaufzeichnungen und dabei auch das Thema Studierenden-Anwesenheit untersucht worden ist. Insbesondere werden die Ergebnisse der Meta-Studie von Pursel und Fang (2012) vorgestellt, die u.a. diese Frage direkt untersucht hat. Dazu haben Pursel und Fang 47 internationale Publikationen zum Thema Video-Aufzeichnung/-Übertragung ausgewertet. Davon enthalten 26 Publikationen explizit Ergebnisse zum Thema Auswirkung von Vorlesungsaufzeichnung auf Studierenden-Anwesenheit.

Die Untersuchungen stammen von Vorlesungsaufzeichnungen an verschiedenen Hochschulen, verschiedenen Studierendenpopulationen und zu verschiedenen Fächern. Das Untersuchungsinstrument (meist ein Fragebogen) wird in den meisten der Publikationen, die in der Metastudie von Pursel und Fang enthalten sind, nicht komplett wiedergegeben, sondern es werden nur ausgewählte Punkte daraus beschrieben; manche Publikationen haben das Untersuchungsinstrument gar nicht beschrieben.

Die Ergebnisse der besagten Meta-Studie werden außerdem mit einer kleineren Zahl von Beobachtungen / Untersuchungen verglichen, die der Autor in eigenen Mathematik-Lehrveranstaltungen durchgeführt hat.

In diesem Artikel geht es um Lehrveranstaltungen, in denen Anwesenheit möglich ist, wie z.B. (Loviscach, 2016) oder (Gunesch, 2010). Nicht betrachtet werden somit online verfügbare Videos ohne Präsenzveranstaltung sowie der (absichtlich ohne Anwesenheit im Hörsaal durchgeführte) Vorlesungsteil von *flipped-classroom*-Veranstaltungen (Handtke & Sperl, 2012; Fischer & Spannagel, 2012).

Haupt-Ergebnis: Anwesenheit der Studierenden nimmt allgemein nicht ab (laut Mehrheit der Publikationen)

Die meisten der in der Metastudie von Pursel und Fang untersuchten Publikationen beschreiben keine oder keine negative Auswirkung des Vorhandenseins von Vorlesungsaufzeichnungen auf Studierenden-Anwesenheit in den Präsenzvorlesungen (Pursel & Fang, 2012, S. 5). Dies ist für die hier untersuchte Fragestellung das wichtigste Ergebnis.

Dies stimmt überein mit persönlichen Beobachtungen des Autors in eigenen Vorlesungen an der Universität Hamburg, der Universität Koblenz-Landau und der Technischen Universität Darmstadt, wo eine Videoaufzeichnung der Vorlesung durchgeführt wurde (Gunesch, 2010; 2012; 2013; 2015), ohne dass ein signifikanter Anteil der Studierenden den Präsenzvorlesungen ferngeblieben ist.

Anwesenheit nimmt ab (laut Minderheit der Publikationen)

Etwa jede fünfte der von Pursel und Fang untersuchten Publikationen berichtet von Abnahme der Anwesenheit. Die Resultate dieser Studien betreffen verschiedene Aspekte und sind schwer vergleichbar. Die Ergebnisse betreffen entweder Berichte der Studierenden, dass sie bereits abwesend waren, oder die Aussage von Studierenden, dass Videoaufzeichnungen ein wichtiger Faktor für ihre Entscheidung über Anwesenheit ist, oder es wird berichtet, dass die Dozierenden eine Abnahme der Anwesenheit wahrgenommen haben.

Zusammenfassung der Ergebnisse

Die These, dass das Vorhandensein einer Vorlesungsaufzeichnung automatisch dazu führt, dass die Studierenden in nennenswertem Umfang der Präsenz-Lehrveranstaltung fernbleiben, wird in dieser Allgemeinheit definitiv nicht in der Literatur zu bestätigt. Das schließt nicht aus, das in speziellen Situationen die Anwesenheit der Studierenden trotzdem abnimmt.

Welche Vorteile haben Studierende von Anwesenheit?

Da Studierende trotz Vorhandensein von Vorlesungs-Aufzeichnung trotzdem zur Präsenzvorlesung kommen, stellt sich die Frage: Welche Gründe haben Studierende, um weiterhin die Präsenzvorlesung zu besuchen? Der Autor dieses Artikels vermutet folgende Vorteile aus Studierendensicht (gute Gründe):

- Fragen sind in der Präsenzvorlesung möglich. (Dieses Argument zählt nur bei kleinen Veranstaltungen mit wenigen Studierenden. Bei großen Vorlesungen ist die Kommunikation von Studierenden zu Dozierenden eingeschränkt, und es ist schwieriger, auf die Bedürfnisse einzelner Studierender einzugehen.)

Die Vorlesung wird „live“ miterlebt, insbesondere bevor die Aufzeichnung verfügbar ist. (Allerdings gibt es auch Aufzeichnungs-Übertragungs-Systeme, die ohne merkbare Zeitverzögerung arbeiten.)

Andere Studierende sind anwesend; in der Vorlesung und in deren Umfeld haben Studierende Gelegenheiten, sich zu treffen. (Dies mag zwar zunächst banal und in akademischer Hinsicht unbedeutend klingen, aber persönliche Kontakte können signifikante Vorteile für Studierende um Studium bieten, z.B. durch Bildung von Lerngruppen.)

Manche Studierende sind im Hörsaal der Hochschule weniger abgelenkt als zuhause. (Die Konsequenz ist: der Hörsaal muss das auch bieten, darf also nicht überfüllt oder laut oder sehr unbequem sein.)

Manche Studierende empfinden die gesamte akademische Umgebung als lernförderlich und inspirierend. (Hochschulen sollten demnach darauf hinwirken, dass dies auch wirklich der Fall ist.)

Ist Anwesenheit für alle Studierenden sinnvoll?

Manche Studierende sind berufstätig. Dies führt zu Einschränkungen der zeitlichen Verfügbarkeit. Bei manchen dieser Studierenden überschneidet sich der akademische Stundenplan mit der Erwerbsarbeit. Für solche Studierende sind Vorlesungsaufzeichnungen der relevante Teil der Vorlesung, im Gegensatz zur (unbesuchbaren) Präsenzvorlesung.

Ist Anwesenheit für jede Veranstaltungsform sinnvoll?

Das *flipped-classroom*-Konzept verzichtet auf Anwesenheit in der Vorlesung. Dagegen wird mit dem aktiven Plenum eine neue Präsenzveranstaltung geschaffen. An diesen Beispielen und am Lernerfolg beim *flipped classroom* wird deutlich, dass traditionelle Lehrformen an Hochschulen auch bezüglich Anwesenheit möglicherweise verbesserbar sein können.

Ist Anwesenheit für die Hochschule notwendig?

Abgesehen von Lehrenden haben auch die Leitung der Hochschule, die Leitung des Fachbereichs usw. ein Interesse, die Studierendenanzahl in den Lehrveranstaltungen zu kennen. Diese Anzahl kann z.B. in finanzieller Hinsicht wichtig sein oder entscheiden, ob eine Lehrveranstaltung durchgeführt werden kann. Allerdings ist das Ziel „Maximierung der Zahl von Studierenden in der Lehrveranstaltung“ nicht notwendigerweise dasselbe wie das Ziel, möglichst viele Studierenden möglichst gut auszubilden.

Die Frage, wie sich das Vorhandensein von Vorlesungsaufzeichnungen auswirkt (nicht nur auf Anwesenheit der Studierenden, sondern auch auf Klausurerfolg und andere Variablen), ist bislang möglicherweise eher aus Sicht von Lehrenden und akademischen Institutionen untersucht worden als aus Studierendensicht. Zwar sind Studierende bei diesen Untersuchungen stets zentraler Teil der Untersuchungen (sowohl in Meinungsumfragen als auch in Auswertung quantitativer Erfolgsgrößen wie Noten), jedoch scheinen die Untersuchungen manchmal daraufhin optimiert zu sein, den Interessen der akademischen Institutionen zu entsprechen. Der Autor dieses Beitrags empfiehlt, den Fokus primär auf die Interessen der Studierenden zu legen, insbesondere deren Lernerfolge. Z.B. könnte die Feststellung, dass eine bestimmte Lehrveranstaltung bei Vorhandensein von Vorlesungsaufzeichnungen kaum noch besucht wird (das könnte in einzelnen Fällen durchaus vorkommen) als Anlass genommen werden, zu überlegen, welche Veranstaltungsform den Studierenden besser gerecht würde.

Literatur

Fischer, M., & Spannagel, C. (2012). Lernen mit Vorlesungsvideos in der umgedrehten Mathematikvorlesung. In J. Desel, J. M. Haake & C. Spannagel (Hrsg.), *DeLFI 2012 – die 10. e-Learning Fachtagung Informatik der Gesellschaft für Informatik e.V.* (S. 225-236). Bonn: Köllen.

Gunesch, R. (2010). Einführung in dynamische Systeme (Vorlesung). Abgerufen am 04.04.2016 von http://lecture2go.uni-hamburg.de/veranstaltungen/-/v/10763

Gunesch, R. (2012). Differentialgeometrie (Vorlesung). Abgerufen am 04.04.2016 von https://openlearnware.hrz.tu-darmstadt.de/sammlung/60

Gunesch, R. (2013). Improving university courses in mathematics with new lecturing technology: practical studies of classroom video recording and dissemination on the web. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 392–395). Münster: WTM-Verlag.

Gunesch, R. (2015). Video recordings of mathematics lectures by students: some data on usage patterns. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Handtke, J. & Sperl, A. (2012). Das Inverted Classroom Model. München: Oldenbourg.

Loviscach, J. (2016). Videos (Linksammlung). Abgerufen am 03.04.2016 von http://www.j3l7h.de/videos.html

Pursel, B. & Fang, H.-N. (2012). Lecture capture: current research and future directions. State College: The Schreyer Institute for Teaching Excellence. Abgerufen am 12.09.2013 von http://www.psu.edu/dept/site/pursel_lecture_capture_2012v1.pdf

Roland GUNESCH, Feldkirch

Forschendes Lernen als Zugang zu mathematisch anspruchsvollen Stellen in der Studierendenausbildung

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird beschrieben, wie Studierende mittels einem speziellem Ansatz des Forschenden Lernens mathematisch anspruchsvolle bzw. schwierige Stellen besser (oder überhaupt) verstehen können. Solche Stellen können insbesondere sein: mathematische Beweise (bzw. deren Kernidee) sowie entscheidende (aber leicht zu übersehende) Voraussetzungen von mathematischen Aussagen. Studierenden soll vermittelt werden, dass Beweise interessant und spannend sein können, und sie erlangen spielerischen Zugang zu präzisem mathematischen Argumentieren.

Es wird überlegt, wie diese Methode Lehramtsstudierenden ermöglichen kann, später im eigenen Schulunterricht ähnliche Methoden einzusetzen, um SuS zu selbständigem mathematischen Handeln anzuleiten.

Mathematische Beweise aus Studierendensicht

Studierende (insbesondere im Lehramt Mathematik, speziell in der Studieneingangsphase) finden Beweise oft problematisch. Viele Studierende finden Beweise zu schwer, zu abstrakt, zu technisch, zu theoretisch; statisch, fertige Produkte; nur mit Mühe nachvollziehbar; langweilig, frustrierend; ohne Bezug zur Schule, keine brauchbare Lehrmethode; historisch, erstellt von Genies, aber nicht von Studierenden (z.B. sich selbst).

Standard in Vorlesungen ist es, jeden Beweis als fertigen Text zu präsentieren (was ein Beweis aus Dozierenden-Sicht auch ist). D.h.: Voraussetzungen, Schlussfolgerungen werden sorgfältig aufgeschrieben in „minimal geschriebener" Form, d.h. ohne Überflüssiges. Wichtige Zwischenergebnisse des Beweises werden aufgeschrieben, kleinere Umformungen dagegen oft nur mündlich gesagt (vielleicht in der Annahme, dass Studierende solche mündliche Information zuverlässig aufnehmen, verstehen und behalten).

Die vorgeschlagene Lehrmethode im Detail

Folgende Unterrichtsmethode könnte für die Studierenden interessanter sein und bessere Lernerfolge zu erreichen. Die Studierenden erhalten diverse mathematische Aussagen ohne vorgegebene Reihenfolge. Dies geschieht z.B. auf Papier-Kärtchen oder anklickbar innerhalb einer passenden Software. Diese Aussagen sollen von den Studierenden in die richtige Reihenfolge gebracht werden. Gesucht bzw. zu überlegen sind somit die Implikations-Pfeile bzw. Schritte. Anschließend kann zur Ergebnissicherung eine Phase des Aufschreibens folgen.

Der Beweis wird als gerichteter Graph verstanden. Die Knoten (Ecken) des Graphen sind mathematische Aussagen („Es gilt *A*“), die Kanten (im Folgenden „Pfeile“ genannt) des Graphen sind Implikationen („Aus *A* folgt *B*“), Deduktionen und Umformungen. Hier sind die Knoten des Graphen vorgegeben (der Fokus ist also auf den Aussagen), und die Studierenden sollen die Pfeile (und Reihenfolge) finden.

Optional können auch Aussagen dabei sein, die bei diesem Beweis nicht helfen (Distraktoren). Optional ist es auch möglich, Aussagen in Mitte wegzulassen und dadurch den Schwierigkeitsgrad zu erhöhen.

Für ein solches E-Proof-System (sowie Analyse von E-Proof-Systemen generell) siehe (Platz & Niehaus, 2015; Platz et al., 2015; Platz, Niehaus et al., 2014; Niehaus & Faas, 2013). Zu Distraktoren siehe Winter (2011).

Eine zweite Art, Beweise zu verstehen, besteht darin, den Fokus auf mathematisches Handeln statt auf Aussagen zu legen. D.h. es geht primär weniger darum, welche korrekten Aussagen in einem Beweis vorhanden sind, sondern vielmehr darum, wie von einer zur nächsten korrekten Aussage geschlossen werden kann. Dies entspricht auch dem, was Dozierende in der Vorlesung oft sagen und nicht aufschreiben, was aber wichtig ist („Wir machen jetzt … “, „Wir setzen hier ein … “, „Wir wenden jetzt … an… “). Der Beweis wird also wieder als Graph verstanden, aber diesmal ist der Fokus auf den Pfeilen; diese sind vorgegeben und von den Studierenden mit passenden Knoten (Aussagen) zu einem Beweis zusammenzufügen.

Eine Unterrichtsmethode zu dieser zweiten Denkart ist, die Argumente der Implikations-Pfeile (mathematischen Schritte) auf Kärtchen oder anklickbar den Studierenden zu präsentieren. Die Aussagen am Ende eines Pfeils und Anfang des nächsten Pfeils müssen zugeordnet („gematcht“) werden. Das ist nicht trivial wegen anderen Schreibweisen und Implikationen: z.B. passen die Aussagen „Für alle reellen x gilt $A(x)$“ und „Wenn y reell ist, dann gilt $A(|y|)$“ nur in einer Richtung zusammen.

Optional lassen sich wieder Distraktoren (Irrwege) einsetzen. Optional wären auch fehlende Pfeile (um die Aufgabe zu erschweren). Es gibt auch viele Möglichkeiten für kleine ad-hoc-Übungsaufgaben.

Um nicht zu viele eingehende Pfeile einbeziehen zu müssen, besteht eine Vereinfachung darin, einen mitwachsenden „Pool“ von Aussagen dazu zu denken (z.B. können die schon bewiesenen Aussagen in eine Liste geschrieben werden, und Vorheriges wird als bekannt angenommen, ohne einen Pfeil zu platzieren).

Einordnung in Forschendes Lernen und in experimentelle Mathematik

Aus Studierendensicht handelt es sich bei dieser Art, Beweise zu finden, um eine Art Kombinationsspiel. Insbesondere können sie sich aktiv einbringen, und die Beschäftigung kann vergnüglich sein. Diverse Verbindungen zu vorhandenem Wissen lassen sich nutzen. Aussagen lassen sich auf Plausibilität prüfen (z.B. durch Einsetzen von Zahlen). Vermutungen lassen sich anstellen und testen. Falsche Aussagen (Distraktoren) sind zu erkennen; dies trainiert Urteilsfähigkeit und Sorgfalt.

Graphen auf die beschriebene Weise selbst zusammenzubauen ist für die Studierenden sicherlich „Forschen", und den Beweis anschließend aufzuschreiben ist „Lernen". Es handelt sich insgesamt um eine Form von Forschendem Lernen (Lutz-Westphal, 2014; Roth & Weigand 2014a, 2014b; Ulm, 2009). Das Vorgehen passt auch zu experimenteller Mathematik.

Möglicher Einsatz im Mathematikunterricht in der Schule

In der Schule bietet sich eine solche Methode an, um Umformungsketten (statt Beweise) zu finden. Die in der Schule verwendeten Umformungsketten lassen sich ebenfalls als Graph interpretieren: Die Knoten des Graphen sind die Terme (z.B. Terme, die vereinfacht werden sollen), und die Kanten/Pfeile des Graphen sind Rechenregeln und verwendete Formeln. Es bieten sich dieselben Möglichkeiten wie zuvor:

1. Terme sind vorgegeben; SuS sollen sie in die richtige Reihenfolge bringen und die nötigen Umformungsschritte finden.
2. Regeln/Formeln sind angeben; SuS überlegen, welche Terme mit diesen Regeln jeweils erzeugt werden.

Distraktoren sind wieder hilfreich und sinnvoll (ansonsten lässt sich die richtige Reihenfolge von Termen manchmal ohne mathematisches Nachdenken „sehen", indem die Terme der Länge nach geordnet werden).

Der Einsatz dieser Methode in der Schule könnte bewirken, dass die SuS über folgende Punkte nachdenken: „Was, wenn die Voraussetzung … nicht gilt?", „Ist es wichtig, dass …?" (richtige/falsche Verallgemeinerungen), „Was ändert sich, wenn …?", „Wofür brauche ich …?"

Diese Vorgehensweise führt idealerweise dazu, dass SuS den Mathematikunterricht und mathematisches Arbeiten interessanter finden.

Vielleicht wäre es mit dieser Methode sogar möglich, SuS manche Beweise zu schmackhaft zu machen; dies müsste separat diskutiert werden.

Die vorgestellte Methode ermöglicht auch eine deutliche Abkehr vom fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch; dies ist eine zentrale Forderung z.B. in (Ulm, 2005). Statt ganz kleiner von der Lehrperson vorgegebener Schritte sollten SuS größere aktive Zeitphasen zum Überlegen und eigenständigen mathematischen Handeln bekommen. Ein möglicher Unterrichtsverlauf zum Aufgabenlösen könnte so aussehen:

1. Die Aufgabenstellung wird gemeinsam geklärt.

2. Die SuS arbeiten selbstständig alleine oder in Kleingruppen (dies ist die wichtigste Phase). Hier kann die o.g. Methode eingesetzt werden.
3. Die Kleingruppen stellen ihre Ergebnisse der Klasse vor.

Die Methode der Arbeit mit Umformungsketten würde vermutlich besonders gut unterrichtet von Lehrpersonen, die als Lehramtsstudierende die entsprechende Methode mit Beweisen persönlich kennen gelernt haben.

Literatur

Platz, M., & Niehaus, E. (2015). To “E” or not to “E”? That is the Question. Chancen & Grenzen eines E-Proof-Systems zur Förderung von Beweiskompetenzen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2015. Münster: WTM-Verlag.

Platz, M., Krieger, M., Winter, K., Niehaus, & E., Dahn, I. (2015). Beweisen lernen durch Beweisen lehren? - Chancen und Grenzen dieses Konzeptes. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2015. Münster: WTM-Verlag.

Platz, M., Niehaus, E., Dahn, I., & Dreyer, U. (2014). IMathAS & automated Assessment of mathematical Proof. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 915–919). Münster: WTM-Verlag.

Niehaus, E., & Faas, D. (2013). Mathematische Beweise in elektronischen Klausuren in der Lehramtsausbildung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Münster: WTM-Verlag.

Winter, K. (2011): Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential zur individuellen Defizit- und Fehleranalyse – Didaktische Überlegungen, empirische Untersuchungen und konzeptionelle Entwicklung für ein internetbasiertes Mathematik-Self-Assessment. Münster, WTM-Verlag.

Lutz-Westphal, B. (2014). Was macht forschendes Lernen im Mathematikunterricht aus? In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 779–782). Münster: WTM-Verlag.

Roth, J., & Weigand, H.-G. (2014a). Forschendes Lernen – Eine Annäherung an wissenschaftliches Arbeiten. *Mathematik lehren 184,* S. 2-10.

Roth, J. & Weigand, H.-G. (2014b). Forschendes Lernen im Mathematikunterricht. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 999–1002). Münster: WTM-Verlag.

Ulm, V. (2005). Mathematikunterricht für individuelle Lernwege öffnen. 2. Auflage. Seelze: Kallmeyer.

Ulm, V. (2009). Eine natürliche Beziehung – Forschendes Lernen in der Mathematik. In R. Messner (Hrsg.), *Schule forscht. Ansätze und Methoden zum forschenden Lernen* (S. 89–105). Hamburg: edition Körber-Stiftung.

Kristina HÄHN, Essen

Individuelle Lern- und Kooperationsprozesse in einer geometrischen Lernumgebung im inklusiven Mathematikunterricht der Grundschule

1 Lernen in gemeinsamen (inklusiven) Lernsituationen

In rund einem Drittel aller deutschen Grundschulklassen lernt mittlerweile mindestens ein Kind mit sonderpädagogischem Förderbedarf (Autorengruppe Bildungsberichterstattung 2014). Dabei sind konkrete unterrichtliche Umsetzungen von bildungspolitisch geforderten gemeinsamen Lernsituationen bisher wenig erforscht (Rottmann & Peter-Koop 2015).

Bei kollektiven Lernprozessen (Miller 1986) handelt es sich aus interaktionistisch-konstruktivistischer Perspektive (Sutter 1994) um individuelle Wissenskonstruktionen innerhalb sozialer Wissenskonstruktionsprozesse. Für ein integratives Setting fordert Feuser (1998) einen Unterricht mit gemeinsamer Tätigkeit am gemeinsamen Gegenstand in Kooperation behinderter und nicht-behinderter Menschen in einem logisch zusammenhängenden Themenkomplex. Um das Spannungsverhältnis von individuellem und gemeinsamem Lernen innerhalb eines solchen Settings zu verdeutlichen, skizziert Wocken (1998) typische bzw. prägnante Muster gemeinsamer Lernsituationen: koexistente, kommunikative, subsidiäre (unterstützende und soziale) sowie kooperative (komplementäre und solidarische).

Die Forderung Feusers lässt sich aus mathematikdidaktischer Sicht durch das Konzept der natürlichen Differenzierung (Krauthausen & Scherer 2014) z. B. beim Einsatz substanzieller Lernumgebungen (Wittmann 1995) realisieren. Werden Lernumgebungen entsprechend konzipiert, wird der gesamten Lerngruppe das gleiche, inhaltlich ganzheitliche und hinreichend komplexe Lernangebot eröffnet. Es ist mathematisch substanziell, indem es zentrale Ziele, Inhalte und Prinzipien des Mathematikunterrichts repräsentiert. Den Lernenden werden niedrige Eingangsschwellen und reichhaltige Möglichkeiten für mathematische Aktivitäten geboten. Der Diskussionsbedarf wird gesteigert und das soziale Von- und Miteinanderlernen soll gefördert werden (vgl. Krauthausen & Scherer 2014; Wittmann 1995).

2 Konzipierung einer geometrischen Lernumgebung „Kreis“

Innerhalb des Forschungsprojekts wurde eine solche, kooperatives Arbeiten intendierende Lernumgebung zum Thema Kreis konzipiert. Im Projekt „Mathe-Spürnasen“ der Universität Duisburg-Essen (vgl. Baltes et al. 2014) wurde die Lernumgebung im Sinne von design research erprobt, analysiert und weiterentwickelt. Sie besteht aus vier Einheiten: Kreiseigenschaften und -konstruktion, Kombination von Kreisbruchteilen, Längenverhältnisse im

Kreis sowie Konstruktion eines Dreischneuß. In der ersten Einheit betrachten Lernende ebene Figuren und deren Eigenschaften. Die Beschreibung der Anzahl, Lage und Länge der Symmetrieachsenabschnitte im Kreis führt zu den zentralen Begriffen Mittelpunkt, Radius und Durchmesser. In einem zentralen Forscherauftrag soll ein Bleistift mit Materialien kombiniert werden, sodass mit ihm ein Kreis konstruiert werden kann. Die Entdeckungen werden schriftlich festgehalten und reflektiert. Im Sinne eines konstruktiven Begriffserwerbs handeln die Lernenden auf verschiedene Weise mit dem Objekt Kreis. Sie produzieren Repräsentanten und entdecken Zusammenhänge, die sie auf vorhandenes Wissen beziehen (vgl. Franke & Reinhold 2016).

3 Analyse gemeinsamer Lernsituationen

Innerhalb der Lernumgebung „Kreis“ werden Lern- und Kooperationsprozesse von Schülerinnen und Schülern mit dem Förderschwerpunkt „Lernen“ (FSP Le) im inklusiven Kleingruppenunterricht untersucht. Die Teilhabe dieser Lernenden an gemeinsamen Lernsituationen soll erfasst und in Zusammenhang mit den rekonstruierten allgemeinen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen (KMK 2005) analysiert werden. Dadurch soll erschlossen werden, inwieweit diese Lernenden vom Einsatz einer solchen Lernumgebung profitieren und welche Bedingungen ihnen einsichtsvolle mathematische Lernprozesse ermöglichen.

Die Interaktions- und Rezeptionsanalyse (Krummheuer 2007) erfasst unterrichtliche Interaktionsprozesse aller Beteiligten differenziert. Neben der thematisch, argumentativen Interaktionsentwicklung können verschiedene Produzenten (Kreator, Traduzierer, Paraphrasierer, Imitierer) und Rezipienten (Gesprächspartner, Zuhörer, Mithörer, Lauscher) von Argumentationen im Interaktionsverlauf unterschieden werden (ebd.). Durch die Identifizierung individueller Partizipationsweisen von Lernenden, könnten Kooperationsprozesse in inklusiven Settings beschrieben und die Theorie gemeinsamer Lernsituationen (Wocken 1998) empirisch ausdifferenziert werden. Ggf. ist es möglich, durch Partizipationsprofile einzelner Lernender und Partizipationsstrukturen in Interaktionsverläufen (Brandt 2004), Aussagen zu (lernförderlichen) Bedingungen in inklusiven Settings zu treffen.

4 Heda und Ari entwickeln ein Zeichengerät – Skizze einer gemeinsamen Lernsituation

Heda (mit FSP Le) und Ari arbeiten zusammen am zentralen Forscherauftrag der ersten Einheit der Lernumgebung „Kreis“. Sie erhalten gemeinsam einen Bleistift sowie ein Arbeitsblatt, auf dem sie ihre Vorgehensweisen notieren sollen. Der Arbeitsauftrag der Lehrerin lautet: *„Ihr sollt ein Hilfsmittel erfinden, mit dem ihr einen Kreis zeichnen könnt. Ihr sollt aber jetzt keine Te-*

safilmrolle nehmen und einfach einen Kreis abzeichnen.“ Während Heda zunächst einen Kreis knetet, später ein Styroporstück kreisförmig zuschneidet und somit Repräsentanten im Sinne ihres Alltagsverständnisses produziert, knotet Ari eine Schnur an den Bleistift und ist bemüht, die Schnurlänge an die Größe eines DIN A4-Papiers anzupassen. Die Lernsituation ist längere Zeit *koexistent*, beide arbeiten als *Kreatoren*. Die Bedeutungsaushandlung des Arbeitsauftrags nimmt im Interaktionsprozess der beiden viel Raum ein. Der Arbeitsprozess des anderen wird mehrfach *subsidiär* kommentiert mit: *„Aber das dürfen wir nicht.“*, was der *Paraphrasierung* des gedeuteten Arbeitsauftrages der Lehrperson entspricht. Es existiert keine gemeinsam geteilt geltende Bedeutung, vor allem des Begriffs „abzeichnen“. Die Arbeit des anderen wird zwar registriert, nimmt aber keinen sichtbaren Einfluss auf das eigene Tun. Heda beobachtet schließlich, wie Ari den Mittelpunkt eines DIN A3-Papiers faltet und erneut versucht, die Schnurlänge anzupassen. Sie sagt: *„Ich hab eine gute Idee.“*, sticht einen Schaschlikspieß in ihr Styroporstück (*Kreator*) und erklärt, Aris Gesten nachahmend, wie sie mit der Verbindung aus Stift, Faden und Spieß den Kreis zeichnen möchte (*Traduzierer*). Nach der Bestätigung durch die Lehrerin, dass diese Vorgehensweise „erlaubt“ ist, stellt Heda den Styropor-Spieß auf den Mittelpunkt von Aris Papier und die beiden entwickeln gemeinsam das Zeichenwerkzeug weiter. Innerhalb der *kooperativen, solidarischen* Lernsituation zeigen sich nun wechselnde Verantwortlichkeiten für die Produktion von Argumenten.

5 Fazit

Anhand dieser verkürzten Darstellung lassen sich zwei Aspekte einer gemeinsamen Lernsituation festhalten: Zum einen bietet sich eine Lernchance für Heda, indem sie eine Lösungsmöglichkeit zur Überwindung von Aris Hürde entdeckt. Auf diese Weise findet sie Zugang zu einem Teil von Aris Idee, kann sich von alltagsgebundenen Vorstellungen zum Kreis lösen und nutzt fortan die Kreiseigenschaften als Grundlage zur Entwicklung des Zeichengeräts. Ein zweiter Aspekt ist die Begrenzung des offenen Arbeitsauftrags durch das „Nicht-Abzeichnen“, wodurch sich die Rahmenbedingung des Lernangebotes einschränkt. Die Lehrperson dominiert zudem die Deutungsaushandlung und stellt den Arbeitskonsens her.

Aus der Pilotierung ergeben sich Aspekte, die Einfluss auf Lernprozesse sowie auf die Partizipationsbeschreibung von Kindern mit FSP Le in gemeinsamen Lernsituationen haben. In der Asymmetrie von Situationsdeutungen muss das Partizipationsprofil eines Helfers differenziert betrachtet werden. Ebenso ist die mit der Rolle der Lehrperson verbundene Gewissheits- bzw. Ungewissheitsorientierung der Lernenden und deren Auswirkungen auf den Lernprozess bedeutsam. Darüber hinaus werden verbale Argumentationen häufig durch non-verbale Aktivitäten ergänzt oder im Sinne eines Darstellungswechsels aufgegriffen.

Literatur

Autorengruppe Bildungsberichterstattung (2014). Bildung in Deutschland 2014. Ein indikatorengestützer Bericht mit einer Analyse zur Bildung von Menschen mit Behinderungen. Bielefeld: Bertelsmann.

Baltes, U., Rütten, C., Scherer, P., & Weskamp, S. (2014). Mathe-Spürnasen – Grundschulklassen experimentieren an der Universität. In J. Roth & J. Ames (Hg.), Beiträge zum Mathematikunterricht. Münster: WTM-Verlag, 121-124.

Brandt, B. (2004). Kinder als Lernende. Parizipationsspielräume und -profile im Klassenzimmer. Frankfurt a. M.: Peter Lang.

Feuser, G. (1998). Gemeinsames Lernen am gemeinsamen Gegenstand. Didaktisches Fundamentum einer Allgemeinen (integrativen) Pädagogik. In A. Hildeschmidt & I. Schnell (Hg.), Integrationspädagogik. Auf dem Weg zu einer Schule für alle. Weinheim, München: Beltz Juventa, 19-35.

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). Didaktik der Geometrie. In der Grundschule (3. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer.

KMK (Hg., 2005). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. München: Wolters Kluwer.

Krauthausen, G., & Scherer, P. (2014). Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. Konzepte und Praxisbeispiele aus der Grundschule. Seelze: Klett Kallmeyer.

Krummheuer, G. (2007). Kooperatives Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule. In K. Rabenstein & S. Reh (Hg.), Kooperatives und selbstständiges Arbeiten von Schülern. Zur Qualitätsentwicklung von Unterricht. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften, 61-84.

Miller, M. (1986). Kollektive Lernprozesse. Studien zur Grundlegung einer soziologischen Lerntheorie. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Rottmann, T., & Peter-Koop, A. (2015). Gemeinsames Lernen am gemeinsamen Gegenstand als Ziel inklusiven Mathematikunterrichts. In A. Peter-Koop, T. Rottmann, & M. Lüken (Hg.), Inklusiver Mathematikunterricht in der Grund-schule. Offenburg: Mildenberger, 5-9.

Sutter, T. (1994). Entwicklung durch Handeln in Sinnstrukturen. Die sozial-kognitive Entwicklung aus der Perspektive eines interaktionalen Konstruktivismus. In T. Sutter & M. Charlton (Hg.), Soziale Kognition und Sinnstruktur. Oldenburg: BIS, 23-112.

Wittmann, E. C. (1995). Unterrichtsdesign und empirische Forschung. In K. P. Müller (Hg.), Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 528-531.

Wocken, H. (1998). Gemeinsame Lernsituationen. Eine Skizze zur Theorie des gemeinsamen Unterrichts. In A. Hildeschmidt & I. Schnell (Hg.), Integrationspädagogik. Auf dem Weg zu einer Schule für alle. Weinheim, München: Beltz Juventa, 37-52.

Thomas HAHN, Andreas EICHLER, Kassel

Einfluss der Reflexion von Schülerdokumenten in Lehrerfortbildungen auf fachdidaktische Aspekte der Motivation

Die Anforderungen an Lehrkräfte sind hoch. Daher müssen sie entsprechend durch die Ausbildung vorbereitet werden. Die ersten beiden Ausbildungsphasen reichen jedoch nicht aus, um Lehrkräfte vollständig auf die Anforderungen im Beruf vorzubereiten (Mayr & Neuweg, 2009). Daher ist ein Lernen im Beruf durch die Fortbildung notwendig. Diese Studie untersucht unter anderem anhand eines quasiexperimentellen Designs die Auswirkungen der Reflexion von Schülerdokumenten auf die Motivation von Lehrkräften.

Theoretischer Rahmen

Lehrerfortbildungen sind international bereits stark beforscht worden. Dies zeigen viele Studien und Reviews. Dabei sind Merkmale effektiver Lehrerfortbildungen identifiziert worden. Unter anderem sind diese Langfristigkeit, Fokussierung auf fachspezifische Inhalte, Möglichkeiten für aktives Lernen, Follow-up und Reflexion von Schülerdokumenten. In Deutschland fehlen dagegen entsprechende Studien weitgehend (Lipowsky & Rzejak, 2012). Bei dem Einsatz von Schülerdokumenten finden sich bisher nur qualitative Hinweise statt empirischer Belege. Wenn sie untersucht worden sind, dann als eine von vielen Variablen. Beispielsweise sind Schülerdokumente im Rahmen der GCI eingesetzt worden (Franke, Carpenter, Fennema, Ansell & Behrend, 1998).

Als fachdidaktischer Hintergrund wird die Unterteilung des fachdidaktischen Wissens (PCK) von Hill, Ball und Schilling (2008) in die Komponenten „knowledge of content and students" (KCS) und „knowledge of content and teaching" (KCT) verwendet. Diese beinhalten zum einen das Wissen über Schülerkonzepte sowie Fehlkonzepte von Schülern. Zum anderen umfasst das PCK das Wissen über Repräsentationsformen und Abwägungen bezüglich des Unterrichtsdesigns.

Als zentrales Konstrukt wird in diesem Teil der Studie die Motivation betrachtet. Sie wird unter anderen zur Erklärung menschlichen Handelns verwendet. Dabei bestimmt die Motivation die Zielrichtung, die Ausdauer und die Intensität von Verhalten. Sie führt im Sinne der Aktivierung zur Initiierung von Handlungen (Schiefele & Schaffner, 2015). Die Leistungsmotivation und das Interesse sind zwei Dimensionen der aktuellen Motivation (Rheinberg, Vollmeyer und Burns, 2001). Bei ersterer ist der Vergleich mit einem Gütemaßstab zentral, der sich auf eine individuelle, soziale, sachliche oder fremdgesetzte Norm bezieht. Die Leistungsmotivation lässt sich in „Erfolg aufsuchen“ und „Misserfolg vermeiden“ unterteilen. Eine Herausforderung bezüglich einer Leistung ist dann gegeben, wenn wie Aufgaben eine mittlere Schwierigkeit besitzen (Atkinson, 1964).

Das Interesse lässt sich nach der Person-Gegenstandstheorie in eine emotionale (Freude am Gegenstand) und eine wertbezogene (persönliche Bedeutung) Komponente unterteilen. Zudem haben Schiefele, Streblow und Retelsdorf (2013) bei Lehrern herausgefunden, dass das Interesse ähnlich wie das professionelle Wissen in die Dimensionen Fachinteresse, didaktisches Interesse und allgemein pädagogisches Interesse unterteilt werden kann.

Forschungsfragen

In dieser Teilstudie sollen folgende Forschungsfragen beantwortet werden: (1) Welche Auswirkungen hat die Reflexion von Schülerdokumenten in Fortbildungen auf die Leistungsmotivation bezogen auf KCS und KCT der Lehrer?

(2) Welche Auswirkungen hat die Reflexion von Schülerdokumenten in Fortbildungen auf das Interesse der Lehrer bezogen auf KCS und KCT?

Methode

Die Studie folgt einem quasiexperimentellen Design. Es sind drei Gruppen von Lehrern gebildet worden. Eine Treatmentgruppe mit 21 Lehrern erhält die Fortbildung mit der Reflexion von Schülerdokumenten. Eine zweite Treatmentgruppe mit 12 Lehrern erhält die Fortbildung ohne Schülerdokumente. Die Kontrollgruppe erhält keine Fortbildung. Alle drei Gruppen füllen einen Pre- und einen Posttest zur Messung der fachdidaktischen und der pädagogischen Motivation aus, welche zu beiden Messzeitpunkten gleich ist.

Der Test zur Motivationsmessung ist eine Adaption der Messung der aktuellen Motivation nach Rheinberg et al. (2001). Hierbei sind die Dimensionen Interesse (I), Herausforderung (H) und Misserfolgsbefürchtung (M) ausgewählt worden. In fünf Situationen, in die sich die Lehrer hineinversetzten müssen, sind sie zur Motivation befragt worden. Dazu sind zwei Situationen zum KCS (Schülerschwierigkeiten, Eingangsdiagnose), zwei zum KCT (Grundvorstellungen, Repräsentationen) und eine zum allgemein pädagogischen Bereich erstellt worden. Zu den Situationen haben die Teilnehmer die Items auf einer siebenstufigen Likert-Skala eingeschätzt. Beispiele zur Situation „Eingangsdiagnose“ sind: „Ich mag es, an den Aufgaben für Eingangsdiagnosen zu knobeln (I)“, „Ich fürchte mich ein wenig davor, bei der Erstellung von Eingangsdiagnosen zu scheitern (M)“ und „Das Erstellen von Eingangsdiagnosen ist für mich eine schöne Herausforderung (H)“.

Ergebnisse

Es werden die Ergebnisse des Pretests der Schülerdokumentengruppe dargestellt. Die Ausprägungen in der Gruppe ohne Schülerdokumente sind ähnlich. Die folgende Tabelle zeigt die Mittelwerte und die Standardabweichungen der unterschiedlichen Motivationsdimensionen:

	KCS			KCT			Allg. pädagogisch		
	I	M	H	I	M	H	I	M	H
μ	4,03	2,39	4,69	4,67	2,47	4,89	4,45	2,82	4,99
σ	1,01	0,80	0,98	1,09	1,19	1,00	1,25	1,37	0,99

Tabelle 1: Mittelwerte und Standardabweichungen der Einschätzungen der Lehrer zur Motivation

Die Mittelwerte zwischen den entsprechenden Unterkategorien der drei Dimensionen weichen speziell beim Interesse zu KCS und KCT signifikant voneinander ab. Analysen der Korrelationen ergaben, dass trotz der Abweichung eine Korrelation von 0,91 (signifikant bei $p < 0{,}01$) besteht. Der Zusammenhang zu dem pädagogischen Interesse ist mit 0,628 (KCS) bzw. 0,529 (KCT) geringer, aber auch signifikant ($p < 0{,}01$ bzw. $p < 0{,}05$).

Diskussion

Die Ergebnisse haben gezeigt, dass die Ausprägungen der Motivation in beiden Fortbildungsgruppen etwa gleich stark sind. Die Mittelwerte machen deutlich, dass die Lehrer die Aufgaben im Bereich des fachdidaktischen Wissens eher als Herausforderung einschätzen. Eine Tendenz zu leistungsmotiviertem Handeln wird daher sichtbar und durch die Einschätzung der Misserfolgsbefürchtung bestätigt. Das Interesse ist dabei mittelstark ausgeprägt, wobei die Lehrer das stärkste Interesse zum KCT zeigen.

Zudem können die Korrelationen zwischen der Herausforderung bzw. Misserfolgsbefürchtung und dem Interesse anhand des erweiterten Erwartungs-Wert-Modells von Eccles & Wigfield (2002) erklärt werden, welches eine Wechselwirkung zwischen Erfolgserwartung und Interesse als subjektiven Aufgabenwert beschreibt.

Die Beziehungen zwischen den verschiedenen Dimensionen sind sehr hoch. Daher ist es fraglich, ob die Dimensionen zu trennen sind. Speziell die Korrelation zwischen dem Interesse zu KCS und KCT wirft diese Frage auf.

Ausblick

Ausgehend von bisherigen Daten soll die Entwicklung der Komponenten der Motivation in den Blick genommen werden. Dabei soll untersucht werden, ob es abhängig von der Lehrergruppe unterschiedliche Entwicklungen in den

Dimensionen der Motivation gibt. Daher stellt sich die Frage, ob die Motivation (speziell das Interesse) im Bereich des KCS in der Lehrerfortbildung mit der Reflexion von Schülerdokumenten steigt. Im Gegensatz dazu sollte die Motivation zu KCT durch die reine Lehrerfortbildung ohne Schülerdokumente steigen. Da in keiner Fortbildung pädagogische Aspekte zentral thematisiert werden, sollte kein Anstieg dieser Motivationsform erfolgen.

Speziell stellt sich die Frage, ob die Motivation zu KCS und KCT in den unterschiedlichen Gruppen tatsächlich trennbar ist oder bei in einer Dimension „fachdidaktische Motivation“ zusammenfallen. Dies sollen zum einen die Entwicklungen klären und zum anderen Analysen, die auf der Basis von umfangreicheren Daten erstellt werden.

Literatur

Atkinson, J. W. (1964). *An introduction to motivation* (University series in psychology): Van Nostrand.

Eccles, J. S. & Wigfield, A. (2002). Motivational beliefs, values, and goals. *Annual review of psychology, 53,* 109-132.

Franke, M. L., Carpenter, T. P., Fennema, E., Ansell, E. & Behrend, J. (1998). Understanding Teachers' self-sustaining, generative change in the context of Professional Development. *Teaching and Teacher Education, 14* (1), 67-80.

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *journal for Research in Mathematics Education, 39* (4), 372-400.

Lipowsky, F. & Rzejak, D. (2012). Lehrerinnen und Lehrer als Lerner - Wann gelingt der Rollentausch? - Merkmale und Wirkungen wirksamer Lehrerfortbildungen. In D. Bosse, L. Criblez & T. Hascher (Hrsg.), *Reform der Lehrerbildung in Deutschland, Österreich und der Schweiz* (Theorie und Praxis der Schulpädagogik, Bd. 4, 1., neue Ausg, S. 235-253). Immenhausen: Prolog-Verl.

Mayr, J. & Neuweg, G. H. (2009). Lehrer/innen als zentrale Ressource im Bildungssystem: Rekrutierung und Qualifizierung. In W. Specht (Hrsg.), *Nationaler Bildungsbericht Österreich 2009* (Bd. 2, S. 99-120). Graz: Leykam.

Rheinberg, F., Vollmeyer, R. & Burns, B. D. (2001). *FAM: Ein Fragebogen zur Erfassung aktueller Motivation in Lern- und Leistungssituationen (Langversion).* Zugriff am 01.07.2015. Verfügbar unter http://www.psych.uni-potsdam.de/people/rheinberg/messverfahren/famlangfassung.pdf

Schiefele, U. & Schaffner, E. (2015a). Motivation. In E. Wild & J. Möller (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (Springer-Lehrbuch, 2. vollständig überarbeitete und aktualisierte Auflage., S. 153-175). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Schiefele, U., Streblow, L. & Retelsdorf, J. (2013). Dimensions of teacher interest and their relations to occupational well-being and instructional practices. *Journal for Educational Research Online / Journal für Bildungsforschung Online, 5* (1), 7-37. Zugriff am 15.02.2016. Verfügbar unter www.j-e-r-o.com/index.php/jero/article/download/337/166

Tanja HAMANN, Hildesheim

Zur sogenannten Mengenlehre in der Grundschule – Einordnung einer Reform

Die z. T. extremen Reaktionen und späteren Bewertungen, die die vor allem unter der Bezeichnung „Mengenlehre“ bekannte Reform (international: Neue oder Moderne Mathematik) des mathematischen Elementarunterrichts in den 1970er Jahren in der BRD hervorgerufen hat (vgl. z. B. Der Spiegel, 1974), lassen vermuten, dass es sich hierbei um ein gewissermaßen besonderes, singuläres Ereignis gehandelt habe, das in der Rückschau viele Fragen aufwirft, etwa die nach den Gründen für die Rücknahme oder danach, inwiefern die Reform als gescheitert (zuletzt Vohns, 2016, 38) gelten muss. Die Bearbeitung solcher Fragen erweist sich bei näherer Beschäftigung mit dem Thema als außerordentlich komplex, was zunächst eine Beschreibung der wesentlichen Gegenstände der Reform notwendig macht. Welche Ideen und Ziele lagen der Reform zugrunde und wie wurden sie umgesetzt, und zwar wie auf curricularer Ebene, wie in didaktischen Konzepten und wie in der unterrichtlichen Praxis? An dieser Stelle soll der Schwerpunkt auf den didaktischen Konzepten liegen, wie sie in Lehrwerken für das 1. Schuljahr konkretisiert wurden.

Ein Vergleich der Lehrgänge *alef* von H. Bauersfeld et. al. (1970), *Wir lernen Mathematik* von W. Neunzig & P. Sorger (1968) sowie *Mathematik in der Grundschule* von A. Fricke & H. Besuden (1972) nach formulierten Zielen, behandelten Inhalten und zugrunde gelegten methodisch-didaktischen Prinzipien ergibt naturgemäß Gemeinsamkeiten, die als wesentliche Elemente der Reform auf dieser Ebene gesehen werden müssen. Diese liegen vor allem im methodischen Bereich. Allen Kursen liegt lerntheoretisch ein subjektiv-konstruktivistisches Begriffsverständnis zugrunde, aus dem eine Unterrichtsorganisation folgt, die genetisches, entdeckendes Lernen ermöglicht, indem die Kinder vorwiegend Regelspiele mit strukturiertem Material spielen. Bevorzugte Sozialform ist hierbei die Gruppenarbeit. Allen gemeinsam ist zudem ein pränumerischer Teil, in dem der Zahlbegriff durch allgemeine mathematische Begriffe – darunter in jedem Fall der der Menge – grundgelegt wird; die Zahlen werden dementsprechend kardinal eingeführt. Es zeigen sich aber auch wesentliche Unterschiede zwischen den Lehrwerken, z. B. bei den behandelten Inhalten. Während in *alef* die Geometrie, und zwar auch in Form grundlegender topologischer Begriffe, einen großen Anteil einnimmt, außerdem Relationen und Abbildungen präfiguriert werden, besteht der vornumerische Teil bei Neunzig & Sorger nur aus Mengen und ihren Operationen. Mit dieser unterschiedlichen inhaltlichen Schwerpunktsetzung gehen auch unterschiedliche Zeitpunkte der Zahleinführung sowie eine andere Rolle der Mengenbehandlung einher. Die Inhalte werden zum Teil unterschiedlich legitimiert (besonders *alef* argumentiert hier vorrangig mit sozialen und sprachlichen Zielen) und sind in unterschiedlichem Maße an Vorbilder angelehnt (Neunzig & Sorger beziehen sich primär auf Z. P. Dienes, Fricke & Besuden auf J. Piaget und das operative Prinzip). Insgesamt lässt sich feststellen, dass den Lehrgängen kein einheitliches Gesamtkonzept zugrunde liegt.

Deutlicher wird dieses Bild beim Vergleich mit den ursprünglichen Reformideen, wie sie etwa von Seiten der Vertreter des OEEC-Seminars in Royaumont (vgl. OEEC, 1961) formuliert wurden. Es werden an den verschiedenen Stellen fundamental unterschiedliche Konzepte sichtbar. So lag ein zentrales Ziel der Reform darin, die Trennung zwischen Rechen- und Mathematikunterricht zu überwinden und stattdessen von Klasse 1 bis zur Universität ein einheitliches Fach Mathematik zu unterrichten. Die Unterrichtsinhalte sollten dabei spiralcurricular um grundlegende mathematische Leitideen angeordnet werden; der Begriff der Menge ist in einer solchen Konzeption ein zwar fundamentaler, aber dennoch nur ein Strukturbegriff neben anderen, wie dem der Relation, der Abbildung oder der Gruppe. Die Arithmetik bleibt selbstredend ein wichtiger Inhalt, daneben müssen aber andere Inhalte wie die Geometrie treten. In dieser Form wurden die Vorschläge nicht in der Breite umgesetzt. Mit Ausnahme von *alef* wurde der Mengenbegriff den anderen Strukturbegriffen gegenüber deutlich hervorgehoben. Er erscheint außerdem weniger als allgemeiner mathematischer Begriff, sondern vorrangig als Mittel, um die Zahlen und das Rechnen vorzubereiten. Der Übergang vom Rechen- zu einem elementaren Mathematikunterricht wurde somit nur unvollständig vollzogen, die Mathematik auf ein durch Mengenlehre fundiertes Rechnen verkürzt.

Dieser Befund wirft neue Fragen auf. Zum einen die nach möglichen Einflussfaktoren auf und Bedingungen für eine solche Umsetzung. Eine weitere Frage ergibt sich angesichts einiger zeitgenössischer wie späterer Urteile, die die Reform als einen völligen Bruch mit der Tradition werten (Radatz & Schipper, 1983, 27) sprechen von einer „Revolution“; Padberg, 1996, 23, immerhin von „gewaltigen Veränderungen“), obgleich der obige Befund dafür spricht, dass der Bruch nicht so groß war, wie er bei einem konsequenten Übergang zu einem faktisch neuen Grundschulfach „Mathematik“ gewesen wäre und auch Griesel (1970, 132) die Reform als eine „Weiterentwicklung der traditionellen Rechendidaktik“ bezeichnet. Es stellt sich daher die Frage, was den mutmaßliche Bruch mit der Tradition in der Hauptsache ausgemacht hat oder – anders formuliert – worin die entscheidenden Neuerungen bestanden haben, eine Frage, die eine historische Einordnung und einen Vergleich, insbesondere mit der Ausgangssituation der Reform, also mit Konzepten des Rechenunterrichts, notwendig macht. Ellrott & Schindler (1975, 43) legen nahe, dass es sich bei der Reform vorwiegend um eine methodische gehandelt habe, eine Interpretation, die zu den Beschreibungen des Rechenunterrichts, wie er sich in *alef* findet, passt.

Ein Vergleich mit den nach dem 2. Weltkrieg gebräuchlichsten Methodiken des Rechenunterrichts (v. a. J. Kühnel, 1919, und J. Wittmann, 1958) führt hingegen auf zahlreiche Gemeinsamkeiten methodischer Art. Unter Verweis auf psychologische Erkenntnisse werden auch hier mathematische Begriffe als individuelle Konstrukte angesehen, die durch Handlungen aufgebaut und schrittweise, unter Beachtung eines stetigen Wechsels der Repräsentationsform, abstrahiert werden. Handlungsorientierte Herangehensweisen mit Material, Differenzierung und Gruppenarbeit sind Elemente, die sich hier bereits finden. Die Zahlen werden kardinal eingeführt, bei Wittmann sogar nach einem pränumerischen Teil, in dem zunächst ikonisch dargestellte Mengen gegliedert werden. In dieser Hinsicht bestätigen die Quellen keinen allzu großen Bruch, zumindest was die Theorie betrifft. Die o. g. Beschreibungen und Wertungen lassen hingegen darauf schließen, dass die unterrichtsorganisatorischen Vorschläge aus den Rechenmethodiken nicht umfänglich in die Praxis umgesetzt wurden. Der in der Praxis wahrgenommene Bruch wird unter diesen Voraussetzungen umso größer gewesen sein.

Die entscheidenden Unterschiede liegen vielmehr in den Inhalten, Zielen und letztlich dem Gesamtkonzept „Mathematik", auch wenn dieses nur unvollständig Eingang in den Unterricht gefunden hat. Mengen und Mengenoperationen als Inhalt an sich, Relationen, auch die Geometrie waren neue Themen in der Grundschule, eine gewisse Reduzierung der Arithmetik zu einem Inhalt neben anderen war damit integraler Bestandteil der Reform. Die Ablösung des Rechenunterrichts durch einen propädeutischen Mathematikunterricht beinhaltete als ein Ziel, die Möglichkeit einer besseren sozialen Durchlässigkeit und ist somit einzuordnen in allgemeine Demokratisierungsbestrebungen, die im Rechenunterricht der Volksschule keine Rolle spielten. Neben die Mittel zur rein quantitativen Beschreibung der – vor allem häuslichen – Umwelt traten nun Mittel zu einer qualitativen Beschreibung; der Erwerb allgemeiner kognitiver Fähigkeiten über das Rechnen und seine Anwendung hinaus wurde explizit als Ziel formuliert. In dieser Hinsicht findet sich also ein erheblicher Bruch mit der Tradition, der bei der Einführung eines faktisch neuen Schulfachs auch unvermeidbar war und bei konsequenter Einführung der Mathematik sogar noch größer hätte sein können bzw. müssen.

Aus der Perspektive eines Rechenunterrichts, der vorwiegend auf Sachrechnen in Kontexten aus dem häuslichen Alltag ausgerichtet war, wird darüber hinaus klar, dass weite Teile der Bevölkerung nie mit Mathematik in Berührung gekommen waren, folglich über keine angemessene Vorstellung dieses Fachgebiets verfügen konnten. Eltern und auch Lehrern, die keine fachmathematische Ausbildung hatten, waren Wert und Nutzen abstrakter Strukturbegriffe kaum vermittelbar. Was dagegen im Einklang mit der tief im kollektiven Gedächtnis verwurzelten Unterrichtstradition vermittelt werden konnte, war, dass Mengenlehre ein Mittel darstellt, um den Zahlbegriff besser zu fundieren und das Rechnen vorzubereiten. Es muss hierin ein wesentlicher Einflussfaktor auf die weitgehende Beschränkung der Neuen Mathematik auf pränumerische Mengenlehre gesehen werden.

Literatur

Bauersfeld, H., Gnirk, H., Görner, U., Homann, G., Lubeseder, U., Radatz, H. & Rickmeyer, K. (1970). *alef 1: Wege zur Mathematik; Handbuch zum Lehrgang*. Hannover: Schroedel.

Ellrott, D. & Schindler, M. (1975): *Die Reform des Mathematikunterrichts: Grundlagen mit Beispielen aus dem Unterricht der Primarstufe*. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt.

Fricke, A. & Besuden, H. (1972). *Mathematik in der Grundschule 1: Ausgabe B ; Lehrerband*. Stuttgart: Klett.

Griesel, H. (1970): *Die sogenannte Moderne Mathematik an Grund- und Hauptschule als Weiterentwicklung der traditionellen Rechendidaktik (und nicht als Irrweg)*. BzMU 1970 (S. 55-62). Hannover: Schroedel.

Kühnel, J. (1919): *Neubau des Rechenunterrichts: ein Handbuch für alle, die sich mit Rechenunterricht zu befassen haben*. Leipzig: Klinkhardt. Bd I und II.

Neunzig, W. & Sorger, P. (1968): *Wir lernen Mathematik I : Erstes Schuljahr ; Lehreranleitung*. Freiburg [u. a.]: Herder.

OEEC (Ed.) (1961). *New Thinking in School Mathematics*. Paris: OEEC.

Radatz, H. & Schipper, W. (1983). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel.

Padberg, F. (1996). *Didaktik der Arithmetik*. Heidelberg [u. a.]: Spektrum Akad. Verl.

Der Spiegel (1974), 28, 13.

Vohns, A. (2016). Welche Fachlichkeit braucht allgemeine Bildung? Überlegungen am Beispiel des Mathematikunterrichts. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 100*, 35-42.

Wittmann, J. (1958): *Einführung in die Praxis des ganzheitlichen Gesamtunterrichts insbesondere des ganzheitlichen Rechenunterrichts im ersten Schuljahr*. Dortmund: Crüwell.

Sabine HAMMER, Stefan UFER, München

Professionelle Kompetenz von Mathematiklehrkräften im Umgang mit Aufgaben in der Unterrichtsplanung

1. Forschungsstand und Ziel

Professionelles Wissen von Lehrkräften ist zentral für den Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler. Auch um Professionalisierungsmaßnahmen zu gestalten, ist es zentral, die Wirkungskette zwischen dem professionellen Wissen einer Lehrkraft und dem Lernprozess zu verstehen. Der Umgang mit Aufgaben - insbesondere in der Unterrichtsplanung - wird dabei als bedeutende Anforderung an Lehrkräfte gesehen. Insbesondere die didaktische Qualität der im Unterricht eingesetzten Aufgaben ist ein Prädiktor für wirksame Lernprozesse (z.B. Baumert et al., 2010). Blickt man in die Unterrichtspraxis wird aber deutlich, dass der Umgang mit Aufgaben eine Herausforderung für Lehrkräfte darstellt: Das Anforderungspotenzial der gewählten Aufgaben ist im Allgemeinen niedrig (Jordan et al., 2008) und Aufgaben werden oft nicht so effektiv eingesetzt wie es möglich wäre (Stein & Lane, 1996). Damit gewinnt die Frage nach der professionellen Kompetenz von Lehrkräften, Aufgaben für ihren Unterricht auszuwählen und zu implementieren an Bedeutung. Einige Studien zeigen, dass die Aufgabenauswahl vom fachdidaktischen Wissen abhängt (Baumert et al., 2010), in anderen Studien wurde dieser Zusammenhang nicht gefunden (Stein & Kaufmann, 2010; Wilhelm, 2014). Es scheint, als greife das Konstrukt des professionellen Wissens an dieser Stelle als alleinige Erklärung zu kurz. Neben dem professionellen Wissen werden in dieser Arbeit auch die individuellen Planungsprozesse berücksichtigt, um ein umfassenderes Bild zur professionellen Kompetenz von Lehrkräften, Aufgaben für ihren Unterricht auszuwählen, zu erhalten (vgl. Blömeke et al., 2015). Wir gehen davon aus, dass die bewusste Wahl einer aus fachdidaktisch-normativer Sicht geeigneten Aufgabe damit zusammenhängt, inwieweit sich eine Lehrkraft mit der Aufgabe in der Unterrichtsplanung auseinandersetzt und sie später professionell zur Gestaltung unterrichtlicher Lerngelegenheiten nutzt.

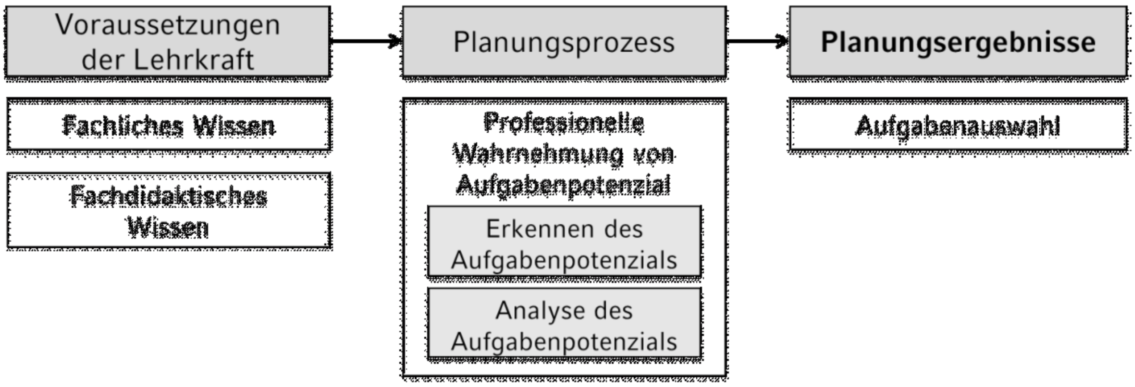
2. Konzeptualisierung

Unter dem Begriff des *Aufgabenpotenzials* verstehen wir eine in der Aufgabe angelegte, aber noch nicht realisierte Nutzungsmöglichkeit für verständnisvolle Lernprozesse. Dabei unterscheiden wir zwischen dem *generellen Aufgabenpotenzial* zur kognitiven Aktivierung und bezüglich allgemeiner didaktischer Merkmale sowie dem *lernzielspezifischen Aufgabenpotenzial* in Bezug auf spezifische inhaltliche Einsichten, die im Unterricht erreicht werden können. Das theoretische Konzept der professionellen Wahrnehmung (Goodwin, 1994; Sherin, 2002) dient uns als Basis zur Konzeptualisierung der professionellen Wahrnehmung von Aufgabenpotenzial. Wir unterscheiden damit das Erkennen und die Analyse lernwirksamer Aufgabenmerkmale, wobei für letzteres drei qualitativ unterschiedliche Niveaustufen differenziert werden (nach van Es & Sherin, 2008): (1) Das Beschreiben der für den Lernprozess relevanten Aufgabenmerkmale, (2) auf Basis des eigenen Wissens die Aufgabenmerkmale erklären und deren (3) Wirkungen auf weitere Lehr-Lern-Prozesse vorhersagen.

3. Umsetzung in einer Fragebogenstudie

Auf Basis einer qualitativen, explorativen Vorstudie (Weideneder&Ufer, 2013) wurden offene und geschlossene Items für einen Fragebogen entwickelt, der von N=95 aktiven und zukünftigen Mathematiklehrkräften der Sek I bearbeitet wurde. In diesem Beitrag wird auf folgende Fragen eingegangen:

1. Inwiefern besteht ein Zusammenhang zwischen der professionellen Wahrnehmung von Aufgabenpotenzial und der Wahl einer aus fachdidaktisch-normativer Sicht geeigneten Aufgabe?
2. Bleiben etwaige Zusammenhänge unter Kontrolle des professionellen Wissens erhalten?



In den Items, die zur Beantwortung der Fragen herangezogen wurden, sollten Lehrkräfte Aufgaben auswählen und sie hinsichtlich ihres Potenzials einschätzen (*Erkennen des Aufgabenpotenzials*) sowie die Auswahl und Einschätzung begründen (*Analyse des Aufgabenpotenzials*). Die Begründungen wurden anschließend einzeln bezüglich ihres Niveaus - orientiert an den drei Ebenen der professionellen Wahrnehmung - von zwei unabhängigen Raterinnen codiert. Außerdem wurde jeweils erfasst, wie viele der in den Begründungen genannten Merkmale sich konkret auf den Lernprozess bezogen. Für die Beurteilung inwieweit das Aufgabenpotenzial erkannt und eine aus fachdidaktischer Sicht geeignete Aufgabe gewählt wurde, wurden theoriebasierte Bewertungskriterien erstellt und anhand einer Befragung von zehn externen Experten überprüft. Die Items zur Erfassung des professionellen Wissens entstammen dem COACTIV-Test.

4. Ergebnisse

In Tabelle 1 sind die Ergebnisse einer linearen Regression zur Vorhersage der Qualität der Aufgabenauswahl auf Basis des fachdidaktischen Wissens und der Facetten der professionellen Wahrnehmung von Aufgabenpotenzial dargestellt. Als erster Schritt wurde das fachdidaktische Wissen eingegeben (Modell 1). Das fachdidaktische Wissen hängt mit der Qualität der Aufgabenauswahl signifikant zusammen ($r = .28$; es zeigte sich kein Zusammenhang mit dem fachlichen Wissen). In einem zweiten Block wurden schrittweise die Facetten der professionellen Wahrnehmung von Aufgabenpotenzial aufgenommen (Modell 2). So konnte untersucht werden, welche Merkmale des Auswahlprozesses, also der professionellen Wahrnehmung von Aufgabenpotenzial, über das fachdidaktische Wissen der Lehrkräfte hinaus Unterschiede in der Qualität der Aufgabenauswahl erklären können. Unter Kontrolle des fachdidaktischen Wissens zeigt sich ein bedeutsamer Zusammenhang der Qualität der Aufgabenauswahl mit dem Erkennen von lernzielspezifischem Aufgabenpotenzial sowie mit der Anzahl der zur Begründung herangezogenen lernprozessbezogenen Merkmale. Das fachdidaktische Wissen leistet unter Kontrolle der Prozessmerkmale keinen signifikanten Beitrag mehr.

AV: Aufgabenauswahl				
	Modell 1		Modell 2	
	ß	p	ß	p
Fachdidaktisches Wissen	.28	.007	.11	.30
Erkennen lernzielspez. Aufgabenpotenzial			.36	.000
Anzahl lernprozessbezogener Merkmale			.22	.02
R^2 (korrigiert)	.07		.20	

Tabelle 1: Ergebnisse der linearen Regression zur Vorhersage der Aufgabenauswahl auf der Basis von fachdidaktischem Wissen (1. Block, Einschluss, Modell 1) und den Facetten der professionellen Wahrnehmung von Aufgabenpotenzial (2. Block, schrittweise, Modell 2)

5. Diskussion

Baumert et al. (2010) konnten zeigen, dass die Aufgabenauswahl vom fachdidaktischen Wissen abhängt, was auch die Ergebnisse der vorliegenden Studie zeigen. Darüber hinaus scheint dieser Zusammenhang wesentlich durch das Erkennen des Aufgabenpotenzials vermittelt zu werden: adäquat einzuschätzen, inwieweit eine Aufgabe für bestimmte Lernziele geeignet ist, hat nach den Ergebnissen dieser Studie einen größeren Einfluss auf die Auswahl einer geeigneten Aufgabe für ein gegebenes Lernziel als die Anzahl der zur Begründung herangezogenen lernprozessbezogenen Merkmale.

Die Ergebnisse der Hauptstudie deuten darauf hin, dass die professionelle Wahrnehmung von Aufgabenpotenzial eine notwendige Voraussetzung für die Auswahl einer aus fachdidaktischer Sicht geeigneten Aufgabe ist. Es bestätigt sich damit die Vermutung, dass Lehrkräfte Kompetenzen in der Einschätzung und Wahrnehmung von Aufgabenpotenzial entwickeln müssen, um adäquat in der Unterrichtsplanung handeln zu können.

Literatur

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A. et al. (2010). Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Educational Research Journal, 47* (1), 133–180.

Blömeke, S., Gustafsson, J.-E. & Shavelson, R. (2015). Beyond dichotomies. *Zeitschrift für Psychologie, 223* (1), 3-13.

Goodwin, C. (1994). Professional vision. *American anthropologist, 96* (3), 606–633.

Jordan, A., Krauss, S., Löwen, K., Blum, W., Neubrand, M., Brunner, M. et al. (2008). Aufgaben im COACTIV-Projekt. *Journal für Mathematik-Didaktik, 29* (2), 83–107.

Sherin, M. G. (2002). When teaching becomes learning. *Cognition and instruction, 20* (2), 119–150.

Stein, M. K. & Lane, S. (1996). Instructional Tasks and the Development of Student Capacity to Think and Reason: An Analysis of the Relationship between Teaching and Learning in a Reform Mathematics Project. *Educational Research and Evaluation, 2* (1), 50-80.

Stein, M. & Kaufman, J. (2010). Selecting and supporting the use of mathematics curricula at scale. *American Educational Research Journal, 47* (3), 663-693.

van Es, E. A. & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers' "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education, 24* (2), 244–276.

Weideneder, S., Ufer, S. (2013). Which Kinds of Tasks do Mathematics Teachers Select for Instruction, and why? In: A. Lindmeier, A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Volume 4, pp. 385-392. Kiel, Germany: *PME.*

Wilhelm, A. G. (2014). Mathematics Teachers' Enactment of Cognitively Demanding Tasks: Investigating Links to Teachers' Knowledge and Conceptions. *Journal for Research in Mathematics Education, 45* (5), 636-674.

Uta HAESEL-WEIDE, Siegen

»Mathematik inklusive«: Lernchancen im inklusiven Anfangsunterricht

Mathematikunterricht in der Grundschule findet zunehmend in inklusiven Settings statt. In der Primarstufe werden bereits 49,9 % der Kinder mit sonderpädagogischem Unterstützungsbedarf inklusiv beschult (Klemm, 2015), wobei sich diese Zahlen ausschließlich auf die Kinder beziehen, bei denen der sonderpädagogische Unterstützungsbedarf diagnostiziert wurde. Das Gemeinsame Lernen scheint positive Auswirkungen auf die Leistungsentwicklung aller Kinder zu haben (Ruijs & Peetsma, 2009), was auf ein höheres Anspruchsniveau und kognitive Anregungen zurückgeführt wird.

Viele Lehrkräfte sehen in der inklusiven Beschulung eine besondere Herausforderung, die sowohl in den Rahmenbedingungen, der Kooperation aber auch in der Gestaltung des Unterrichts unter Berücksichtigung aller Bedürfnisse gesehen wird (Pool Maag & Moser Opitz, 2014). Das Spannungsfeld von individueller Förderung und gemeinsamem Tun im inklusiven Mathematikunterricht zu gestalten, wird als anspruchsvoll wahrgenommen.

Mathematiklernen am Gemeinsamen Gegenstand

Um dieses Spannungsfeld von Individualisierung und Gemeinschaft genauer zu fassen, ist es hilfreich folgende drei Lernsituationen des inklusiven Unterrichts idealtypisch zu unterscheiden (Jennessen & Wagner, 2012):

- Zieldifferentes Lernen in exklusiven Einzel- oder Kleingruppensituationen
- Zieldifferentes Lernen an verschiedenen Gegenständen in heterogenen und/oder homogenen Gruppen
- Zieldifferentes Lernen durch differenzierende, reichhaltige Lernangebote am gemeinsamen Gegenstand in heterogenen Gruppen

Während bei den ersten beiden Aspekten die Individualisierung des Unterrichts in Formen der inneren und äußeren Differenzierung im Vordergrund steht, zielt die dritte Lernsituation auf gemeinsames, kooperatives Arbeiten. Diese Art des gemeinsamen Lernens scheint besonderes Potential für kognitive Anregungen und anspruchsvolle mathematische Tätigkeiten zu bergen, da die Zusammenarbeit es Kindern mit geringeren Kompetenzen ermöglicht, sich an den Fähigkeiten der anderen zu orientieren und davon zu profitieren. Gleichzeitig erhalten Kinder mit höheren Kompetenzen die Möglichkeit durch die Rückschau auf Gelerntes Zusammenhänge und Verbindungen herzustellen. Diese Idee des Lernens „auf verschiedenen Stufen am gemeinsamen Gegenstand“ formulierte Freudenthal bereits 1974 für den Mathematikunterricht in heterogenen Klassen der Sekundarstufe. Eine ganz ähnliche Formulierung wählt auch Feuser (1989) in seinem Entwurf der allgemeinen Pädagogik. Beiden ist gemeinsam, dass sie aus unterschiedlicher Perspektive im kooperativen Lernen eine Chance für den Erwerb fachlicher Kompetenzen sehen und einen sogenannten »gemeinsamen Gegenstand« ins Zentrum der Aktivitäten stellen. Im Mathematikunterricht kann der gemeinsame Gegenstand gut an der fundamentalen Idee angelehnt und in Form ausgewählter und aufbereiteter substantieller Aufgaben umgesetzt werden.

Kooperationsprojekt »Mathematik inklusive«

Die konkrete Gestaltung des inklusiven Mathematikunterrichts steht im Zentrum des Kooperationsprojekts »Mathematik inklusive« sowie des Anschlussprojekts »LUIS-M – Lernumgebungen im inklusiven Mathematikunterricht«. Gemeinsam mit Lehrkräften werden Lernumgebungen für die Schuleingangsphase (Klasse 1 & 2) entwickelt und erprobt.

Verfolgt werden mit dem Kooperationsprojekt folgende Ziele: (1) Für die von Lehrkräften als besonders anspruchsvoll empfundenen Situationen des zieldifferenten gemeinsamen Lernens am gemeinsamen Gegenstand werden Lernumgebungen entwickelt und somit ein Beitrag zur Lösung eines Praxisproblems geleistet. (2) Die Analyse der videographierten kooperativen Lernsituationen ermöglicht die Entwicklung lokaler Theorien zum Level der Bearbeitung und Produktivität der Kooperation. (3) Die gemeinsame Reflexion und Vorbesprechung der Lernumgebungen auf den regelmäßigen Kooperationstreffen erhöht die Kompetenz der Lehrkräfte, weitere Lernumgebungen selbst zu entwickeln und führt zu einer produktiven Sicht auf inklusiven Unterricht.

An dem insgesamt zweijährigen Kooperationsprojekt, das im zweiten Jahr als »regionale Partnerschaft« gefördert wurde, nahmen sechs Schulkassen aus drei Siegener Grundschulen teil. In jedem Schuljahr wurden auf sechs Kooperationstreffen Lernumgebungen diskutiert und reflektiert und zwischen den Treffen in den inklusiven Klassen erprobt. Pro Lernumgebung und Klasse wurde eine Unterrichtsstunde videographiert. Die Interaktionsprozesse der Kinder in den Lernsituationen am Gemeinsamen Gegenstand wurden daraufhin analysiert, inwiefern (1) die Lernumgebungen es den Kindern ermöglichen auf unterschiedlichen Stufen zu arbeiten und (2) das kooperative Arbeiten produktiv wirkt. Zudem wurden zu Beginn und zum Ende des zweiten Schuljahres die Kompetenzen aller Kinder mit einem standardisierten Test sowie von ausgewählten Kindern in einer Interviewsituation erhoben.

Erste Ergebnisse zur unterschiedlichen Bearbeitung des gemeinsamen Gegenstands am Beispiel der Lernumgebung »Einfache Subtraktion«

Die zentrale Idee der Lernumgebung ist die Operationsvorstellung der Subtraktion zu stärken und Strukturen zwischen Subtraktionsaufgaben zu erkennen. Dazu werden Aufgaben am Material dargestellt, bearbeitet und miteinander in Beziehungen gesetzt. Konkret erhalten die Kinder ein Zwanzigerfeld, Zehner- und Fünferstreifen und Einerplättchen sowie Handlungskarten »1 weg«, »5 weg« und »10 weg«. Sie sollen jeder für sich oder zu zweit Anzahlen legen, gemäß einer Handlungskarte verändern und die Aufgaben notieren. Die Fokussierung auf »einfache« Subtrahenden regt die Kinder an, die Veränderungen in einem Zug auszuführen und sich zunehmend vorzustellen. Anschließend werden alle notierten Aufgaben von beiden Kindern gemeinsam sortiert. Ziel ist es, dass die Kinder beim Sortieren (unterschiedliche) Beziehungen zwischen Aufgaben erkennen und beschreiben (Häsel-Weide, 2016).

In den Analysen konnten unterschiedliche Bearbeitungen der Aufgabenstellung rekonstruiert werden. Verschiedene Level der Bearbeitung konkretisieren sich in der Verwendung des Materials, das einige Kinder als Mittel zum Ausführen der Operation und andere zur Argumentation nutzen. Die Anzahlen (Minuend, Subtrahend und Differenz) werden von einigen Kindern einzeln abzählend, teilweise einzeln abzählend oder quasi-simultan erfasst. Beim Sortieren zeigt sich eine verschieden tiefe Erkenntnis der mathematischen Struktur. Einige Kinder bilden Aufgabenpaare, sehen also Beziehungen zwischen zwei Aufgaben und orientieren sich dabei z. B. am gleichen Zahlzeichen. Andere Kinder sortieren alle gefundenen Aufgabenkarten nach einem durchgehenden Merkmal und ordnen auch innerhalb der gebildeten Gruppen.

Die skizzierten Niveaus sind eng an die möglichen Aktivitäten der Lern-umgebungen geknüpft und haben den Charakter lokaler Theorien. Durch vergleichende Analysen und abduktive Schlüsse können über die einzelnen Lernumgebungen und das einzelne Kinderpaar hinausgehende Aspekte von Stufen charakterisiert werden (Häsel-Weide & Kray, eingereicht).

Erste Erkenntnisse zu Anlässen für einen produktiven Austausch über den Gegenstand

Ziel der entwickelten Lernumgebungen ist die Kinder in der Zusammenarbeit zu einem Austausch über Mathematik anzuregen. Die Analysen machen deutlich, dass ein inhaltlicher Austausch unterschiedlicher Einsichten durch die Aufgabenstellung initiiert werden konnte, doch dies nicht in jedem Fall erfolgte. Mit anderen Worten: Auch wenn die Aufgabenstellung unterschiedliche Vorgehensweisen oder Deutungen initiiert, bedeutet dies nicht zwangsläufig, dass die Kinder unterschiedliche Deutungen vornehmen und diese auch verbalisieren oder zeigen. Eine diskursive Aufgabenstellung scheint somit eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für einen produktiven Austausch zu sein. Weitere Analysen werden deshalb die konkreten Anlässe und die Aspekte der interpersonalen Beziehung für inhaltliche Interaktionen fokussieren (Häsel-Weide & Kray, eingereicht).

Zusammenfassung und Ausblick

Die Erfahrungen und erste Analysen aus den Projekten »Mathematik inklusive« und »LUIS-M« weisen darauf hin, dass es bereits im Anfangsunterricht möglich ist, kooperative gemeinsame Lernsituationen zu gestalten, in denen Schülerinnen und Schüler mit unterschiedlichen Kompetenzen am gemeinsamen Gegenstand lernen können. Dabei wirkt nicht jede Lernumgebung für jedes Kinderpaar gleich produktiv. In weiteren Analysen werden deshalb vor allem die Anlässe und Bedingungen einer produktiven Interaktion untersucht.

Literatur

Feuser, G. (1989). Allgemeine integrative Pädagogik und entwicklungslogische Didaktik. *Behindertenpädagogik*(28), 4-48.

Freudenthal, H. (1974). Die Stufen im Lernprozeß und die heterogene Lerngruppe im Hinblick auf die Middenschool. *Neue Sammlung, 14*, 161-172.

Häsel-Weide, U. (2016). Gemeinsam ordnen – gemeinsam lernen. Mathematische Strukturen sichtbar machen. *Grundschulunterricht Mathematik, 1*, 30-33.

Häsel-Weide, U. & Kray, C. (eingereicht). Das produktive Mehr beim gemeinsamen Mathematiklernen. Lernchancen im inklusiven Mathematikunterricht.

Jennessen, S. & Wagner, M. (2012). Alles so schön bunt hier!? Grundlegendes und Spezifisches zur Inklusion aus sonderpädagogischer Perspektive. *Zeitschrift für Heilpädagogik, 8*, 335-344.

Klemm, K. (2015). Inklusion in Deutschland. Daten und Fakten. https://www.unesco.de/fileadmin/medien/Dokumente/Bildung/139-2015_BST_Studie_Klemm_Inklusion_2015.pdf

Pool Maag, S. & Moser Opitz, E. (2014). Inklusiver Unterricht - grundsätzliche Fragen und Ergebnisse einer explorativen Studie. *Empirische Sonderpädagogik, 2*, 133-149.

Ruijs, N. M. & Peetsma, T. T. D. (2009). Effects of inclusion on students with and without special educational needs reviewed. *Educational Research Review 4*, 67-79.

Mathias HATTERMANN, Paderborn, Alexander SALLE, Osnabrück,
Stefanie SCHUMACHER, Osnabrück

Erste Ergebnisse aus dem Projekt mamdim – mathematik lernen mit digitalen medien

Das Projekt mamdim

mamdim (mathematik lernen mit digitalen medien) ist ein vom Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) gefördertes Projekt, das sich der Untersuchung des Lernens von Studierenden mit digitalen Medien in der Hochschuleingangsphase widmet. Es handelt sich um ein Kooperationsprojekt der Universitäten Osnabrück und Paderborn. Innerhalb dieses Projektes werden die Konzepte der vier Partnerhochschulen (Universität Bielefeld, Brandenburgisch-Technische Universität Cottbus-Senftenberg, Hochschule Offenburg, Hochschule Pforzheim) untersucht.

Motivation und Ziele

Der Übergang zur Hochschule stellt sich insbesondere in mathematikhaltigen Studiengängen als problematisch dar (Hoyles et al. 2001). So identifizieren Dieter und Törner (2012) für die letzten Diplomstudiengänge in der Mathematik eine Abbrecherquote von 34 % bei männlichen Studierenden und 45 % bei weiblichen Studierenden innerhalb des ersten Studienjahres. Einerseits gibt es eine gewisse Erwartungshaltung der Hochschulen, die von einem soliden Kenntnisstand ihrer Erstsemesterstudierenden ausgehen, andererseits wurden in der Folge des verkürzten Bildungsganges (G8) und der Kompetenzorientierung, um nur zwei Gründe zu nennen, immer mehr fachliche Inhalte aus den Lehrplänen gestrichen, so dass dieser Anspruch häufig nicht von der abgebenden Institution Schule bedient werden kann. Seit Jahrzehnten existieren bereits sogenannte „Brückenkurse" vor Stu- dienbeginn, die den Übergang zur Hochschule erleichtern sollen. Neuere Entwicklungen zeigen, dass dem Potenzial von digitalen Medien eine hohe Bedeutung in der Konzeption von aktuellen „Brückenkursen" sowie uni- versitärer Veranstaltungen zugemessen wird (Bausch et al. 2014), wobei ein Forschungsdefizit hinsichtlich des Vergleichs und der Wirkung digita- ler Medien auf den Lernzuwachs der Studierenden zu verzeichnen ist (Biehler et al. 2014). Am gemeinsamen Inhalt der deskriptiven Statistik (Lagemaße und Streumaße) sollen auf Materialebene die inhaltliche Gestal- tung, die Einbettung in die bestehenden Konzepte der Hochschulen und die Prinzipien des Instruktionsdesigns untersucht werden, wobei auf der Ebene der Lernenden das Nutzerverhalten und der Einfluss der Anzahl der Ler- nenden bzw. deren Motivation, Interaktion und Kommunikation auf den Lernerfolg im Fokus des Interesses stehen. Im Folgenden beziehen wir uns auf das Design der Vorstudie, welche im Herbst 2015 an den Universitäten Bielefeld und Offenburg stattfand.

Forschungsfragen und Design

Innerhalb des Projektes mamdim stehen die folgenden Forschungsfragen im Mittelpunkt:

- Inwiefern wirken sich die Benutzung unterschiedlicher digitaler Medien bei vergleichbaren Ausgangskompetenzen auf den Lernerfolg aus und wie hängt dieser Lernerfolg von der Bearbeitungsform (alleine oder zu zweit bzw. mit/ohne fokussierte Fragen) ab?
- Wie wirkt sich das Lernen mit digitalen Medien auf die Motivation und Selbsteinschätzung der Studierenden aus?
- Wie können Kommunikationsprozesse bei der Bearbeitung angeregt werden und wie wirken sich diese auf den Lernerfolg aus?
- Welches Nutzerverhalten ist zu beobachten und inwiefern weicht die- ses vom intendierten Gebrauch ab?

Abbildung 1: Untersuchungsdesign der Vorstudie in Bielefeld und Offenburg

Ergänzende und speziell auf die Vorstudie bezogene Fragen betreffen die Anpassung von Instrumenten (Fragebögen, Aufgaben, einzelne Items, ...) und allgemeine Anpassungen des Untersuchungsdesigns. Die Vorstudie wurde mit 68 Probanden durchgeführt, wobei zunächst alle Studierenden einen Vortest zur deskriptiven Statistik und einen Fragebogen bezüglich ihrer Motivation, Selbsteinschätzung und Einstellung zur Mathematik be- arbeiteten. Anschließend erfolgte die Lernphase der Probanden (alleine oder zu zweit) mit dem jeweiligen Medium (kommentierte Screencasts in Bielefeld, Lernvideos in Offenburg), wobei sowohl ihr Kommunikations- verhalten als auch der Umgang mit der Software mit einer Webcam bzw. einer Screen-Recording-Software aufgezeichnet wurden. Nach der Inter- ventionsphase standen wiederum ein fachlicher Test sowie Fragen zum Umgang mit dem digitalen Medium und der Motivation im Fokus (Abb. 1).

Ergebnisse der Vorstudie in Bielefeld und Offenburg

Die Streuung der Lösungshäufigkeiten lag im Vortest zwischen 0 % und 70 %, während sie im Nachtest zwischen ca. 5 % und knapp 90 % rangierte. Dieses Ergebnis führte zur Änderung von zwei als zu schwierig für den Vortest angesehenen Items für die Hauptstudie. Hinsichtlich des Umgangs mit den digitalen Medien war die Einschätzung der Studierenden sehr positiv. Exemplarisch ist die Auswertung der Einschätzungen auf einer 5- Punkt-Likert-Skala zu zwei Aussagen hinsichtlich des Gebrauchs der Lehr- videos in Offenburg angeführt (Abb. 2). Als negative Aspekte wurden le- diglich die Länge des Videos und die Lautstärke der Hintergrundmusik ge- nannt.

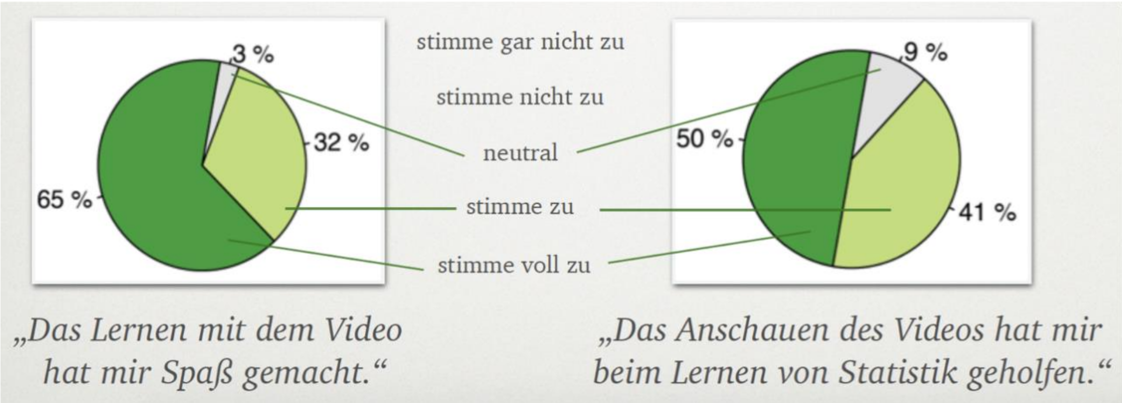


Abbildung 2: Auswertung der Studierendenantworten zum Gebrauch des Lernvideos in Offenburg

Auch hinsichtlich der Selbsteinschätzung vor der Internvention schätzten sich die Probanden nach der Lernphase wesentlich besser ein. Als Bei- spielitem sei aufgeführt: „...zu begründen, wie man fünf Zahlen zwischen 0,1 und 9,9 bestimmen muss, dass deren arithmetisches Mittel genau 6,3 beträgt.“ Die Einschätzung erfolgte wiederum anhand einer 5-Punkt-Likert-Skala, wobei in die Auswertung der Abbildung 3 noch vier weitere Items einbezogen sind.

Bezüglich des Kommunikationsverhaltens innerhalb der Dyadeninteraktion konnte das Ping-Pong-Muster identifiziert werden (vgl. Salle et al. 2016)

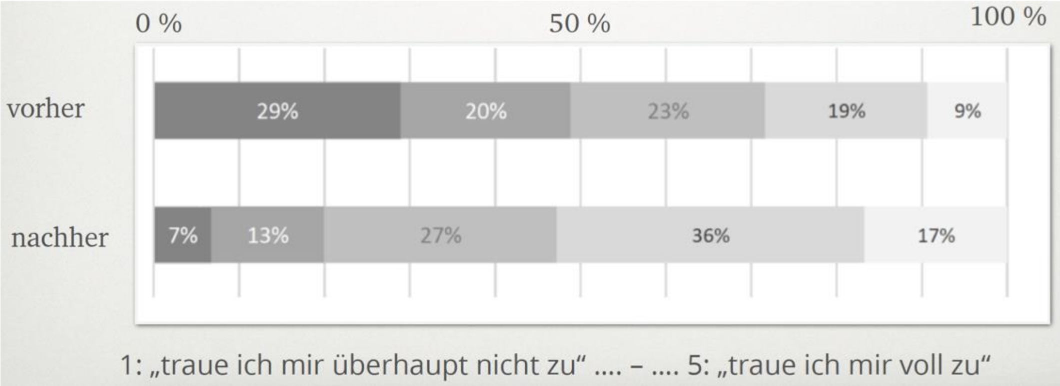


Abbildung 3: Auswertung von fünf Items zur Selbsteinschätzung, wobei die dunkelste Farbe mit „traue ich mir voll zu“ kodiert ist.

Ausblick

Die Hauptstudie wird im Sommer und Herbst 2016 mit insgesamt ca. 300 Probanden an den verschiedenen Standorten mit unterschiedlichen Instruktionsmedien stattfinden. Dabei handelt es sich um unkommentierte und kommentierte Screencasts, multimediale Instruktionstexte, kommentierte Präsentationen und Lernvideos. Ziel der Hautstudie ist die Beantwortung aller Forschungsfragen sowie die Verifikation bzw. Falsifikation der in der Vorstudie aufgestellten Hypothesen.

Literatur

Bausch, I., Biehler, R., Bruder, R., Fischer, P. R., Hochmuth, R., Koepf, W., Wassong, T. (Hrsg.) (2014). Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven. Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik. Wiesbaden: Imprint: Springer Spektrum.

Biehler, R.; Bruder, R.; Hochmuth, R.; Koepf, W.; Bausch, I.; Fischer, P.; Wassong, T. (2014). VEMINT- Interaktives Lernmaterial für mathematische Vor- und Brückenkurse. In: Bausch, I., Biehler, R., Bruder, R., Fischer, P. R., Hochmuth, R., Koepf, W., Wassong, T. (Hrsg.) (2014). Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven. Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik, 231-242. Wiesbaden: Imprint: Springer Spektrum.

Dieter, M., & Törner, G. (2012). Vier von fünf geben auf: Studienabbruch und Fachwechsel in der Mathematik. Forschung & Lehre, 12(10), 826–827.

Hoyles, C., Newman, K., Noss, R. (2001). Changing patterns of transition from school to university mathematics. International Journal of Mathematical Education in Sci- ence and Technology, 32(6), 829-845. doi: 10.1080/00207390110067635.

Salle, A., Schumacher, S., Hattermann, M. (2016). The Ping-Pong-Pattern - Usage of Notes by Dyads During Learning with Annotated Scripts (eingereicht). In: Ambrus, G. (Hrsg.) Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Szeged, Hungary.

Reinhold HAUG, Freiburg

Lernbegleitung in individualisierten und gemeinsamen Lernphasen

Lernbegleitung, die sich am Denken und Lernen der Kinder orientiert, gelingt mit einem Drei-Phasen-Modell des Beobachtens, Ordnens und Handelns. Diese theoretische Konzeption bietet Lehrenden einen Leitfaden, wie man von einer ersten Diagnose einer Lern- und Unterrichtssituation über eine Entscheidungsfindung auf kognitiver, meta-kognitiver und motivationaler Ebene zu aktivierenden Lernimpulsen oder Leitfragen kommen kann.

Situationsanalyse: Ein Mathematikunterricht, der das aktiv-entdeckende Lernen ins Zentrum stellt, ist offen für vielfältige Lehr- und Lernformen. In einem ausgewogenen Unterricht wechseln sich deshalb Phasen der Instruktion mit Phasen der Konstruktion ab. Solche Unterrichtsphasen, in denen Schülerinnen und Schüler neues Wissen eigenständig „konstruieren" und dabei neue Lerninhalte analysieren, strukturieren und in ihr Wissensnetz integrieren, benötigen demzufolge eine besondere Lernbegleitung durch die Lehrkraft. Diese Lernbegleitung ist jedoch weder nur ein Lerncoach oder ein Moderator, der die Lernenden in organisatorischen-methodischen Aspekten berät oder ihnen die mathematischen Sachverhalte erklärt. Vielmehr sollte sich die Lernbegleitung am Denken der Kinder orientieren und verstärkt auch die fachlich-inhaltliche Perspektive in den Blick nehmen, anstatt den Lernenden „fertige" Lösungsansätze überzustülpen. Doch in eigenständigen Lernphasen von Schülerinnen und Schülern sieht es meistens ganz anders aus. In vielen Fällen ist eine Lehr-Lern-Situation oft von klaren Erwartungen und eingespielten (konditionierten) Rollenmustern geprägt. Konkret bedeutet dies, dass Lehrende Schülerinnen und Schüler oft aus ihren Arbeits- und Denkprozessen herausreißen, um ihnen zu erklären, wie es „richtig" gemacht werden sollte. Die Konsequenz eines solchen Handelns bzw. Erklärens ist, dass die Lernenden ihre eigenen Lösungsideen bzw. Lösungsgedanken aufgeben und denen der Lehrperson folgen. Aus lerntheoretischer Sicht wandelt sich in solch einem Moment der Lernprozess des Kindes in ein „bewusstloses Lernen" durch Erklären (Belehren). Um dies zu durchbrechen, muss deshalb neu überlegt und analysiert werden, wie ein „verstehendes Lernen" in offenen Lernsituationen ermöglicht werden kann.

Bausteine einer Lernbegleitung: Eine Mathematikdidaktik, die sich an konstruktivistischen Erkenntnistheorien orientiert, geht davon aus, dass Wissen nicht passiv aufgenommen, sondern von denkenden Subjekten in einem Ko-Konstruktionsprozess aktiv entwickelt wird. Meist benötigen Schülerinnen und Schüler deshalb ein Gegenüber, das ihnen in ihrem Aushandlungsprozess unterstützt (Mitschüler) oder steuernde Impulse gibt (Lehrkraft).

Eine Lehrkraft, die sich einer solchen Sicht verpflichtet, bittet z.B. den Lernenden, seine Lösungsidee bei einer Rechenaufgabe mit Hilfe von Muggelsteinen zu legen. Sie erhält dadurch Einblicke in seinen Rechenweg und kann diesen auf der fachlich-inhaltlichen Ebene analysieren. Der Lernende wiederum erhält die Aufforderung, seinen Lösungsansatz von der symbolischen oder ikonischen Ebene auf die enaktive zu übersetzen und wird dadurch angehalten, sein Vorgehen, seine Intention sowie seinen Lösungsansatz noch einmal zu überdenken. Für den Lernenden bedeutet dies im optimalen Fall neue Einsichten in mathematische Strukturen und Zusammenhänge. Die Lehrkraft erhält durch ihr diagnostisches Vorgehen neue Erkenntnisse, die anschließend Ausgangspunkt neuer Impulsfragen oder nächster Interaktionsschritte sein können. Eine professionelle Lernbegleitung stützt sich daher auf folgende Aspekte:

- Lernbegleitung orientiert sich am individuellen Denken und Arbeiten der Schülerinnen und Schüler.
- Lernbegleitung steuert entsprechend ihrer Zielsetzung durch Aktivitäten und Handlungsanweisungen die Lernprozesse der Lernenden.
- Lernbegleitung umfasst Aktivitäten, die sowohl im Klassenunterricht als auch in Schülerarbeitsphasen eingesetzt werden können.

Das Drei-Phasen-Modell: Ausgehend von der Annahme, dass Unterrichtssituationen von Lehrkräften meist als ein sehr komplexes Gebilde wahrgenommen werden, stützt sich das Drei-Phasen-Modell (vgl. Tab. 1) auf die zentralen Aufgabenfelder von Lehrenden. Hierbei bildet die Diagnose und Analyse der Lernprozesse als Voraussetzung für zielführendes Lehrerhandeln die Basis dieses Modells (vgl. Knapp, 2012). Aufbauend darauf muss sich die Lehrkraft entscheiden, auf welcher Ebene sowie in welcher Unterrichtsphase sie in den Lernprozess der Schülerinnen und Schüler eingreifen möchte. Im letzten und entscheidenden Schritt legt die Lehrkraft fest, welche Art von Intervention (Lernimpuls, Leitfrage, Tippkarte, etc.) zum Einsatz kommt. Prinzipiell können die Lernimpulse oder Impulsfragen auf der kognitiven, metakognitiven und motivational-emotionalen Ebene (vgl. Schnebel, 2014) erfolgen und sollen dabei immer auch kognitiv aktivierend, strukturierend und adaptiv sein, um einen bestmöglichen Lernerfolg zu erreichen.

Die Schlüsselstelle für gute Impulse bildet dabei die Phase des „Beobachtens“. Diese Phase muss von einer kontrollierten Zurückhaltung der Lehrkraft gekennzeichnet sein. Es geht zentral darum, sofern möglich, den Lern- und Arbeitsprozess der Schülerinnen und Schüler zu beobachten und die Dokumente und Produkte in den Blick zu nehmen bzw. zu analysieren. Für die weitergehende Diagnose können Fragen an die Schülerinnen und Schüler adressiert werden, die den Lernprozess fördern, begleiten und helfen, den nächsten Erkenntnisschritt im Lernprozess erfolgreich zu absolvieren. Das gezielte Nachfragen nach schon erfolgten Arbeitsschritten, das konsequente Einfordern von Begründungen und Erklärungen für „fertige“ Lösungen, das Ausweiten des Horizontes auf Beispiele, Gegenbeispiele und Spezialfälle oder Verallgemeinerungen fordert und fördert den Lernprozess.

Tabelle 1: Das Drei-Phasen-Modell

1. Beobachten (Diagnose)	Schnell-Diagnose / Hypothesenbildung: - Was hat die Schülerin / der Schüler gemacht? - Wie kann ich ihren / seinen aktuellen Wissensstand erfragen? - Welches Problem beschäftigt sie / ihn gerade? - Lerntypen und Lernphasen (Erkundung / Erarbeitung / Übung)
2. Ordnen (Strukturieren)	Entscheidungsfindung: - Informationen für eine Intervention ordnen und strukturieren - Lernphase der Intervention festlegen (Erkunden / Erarbeiten / Übung) - Ebene der Intervention wählen: • kognitiv (Besteht eine Wissenslücke?) • meta-kognitiv (Fehlt eine Strategie?) • motivational (Gibt es Motivationsprobleme?)
3. Handeln (Intervention)	Art des Lernimpulses / der Impulsfrage: - kognitiv aktivierende Impulse - strukturierende Impulse - adaptive Impulse Eventuell auch als Impulskarte oder Forschertipp einsetzbar?

Die „Kunst“ einer erfolgreichen Intervention im Anschluss an solch eine sensible Phase der Analyse und Diagnose besteht darin, die zum Lern- und Arbeitsstand passende Impulsfrage zu finden und dem „Erklärungsdrang“ vieler Lehrkräfte nicht sofort nachzugeben. Ob Schülerinnen und Schüler sich auf eine eigene Entdeckungsreise begeben oder nur den „Erklärungen“ der Lehrkraft gedanklich hinterherlaufen, hängt im Wesentlichen von den Verhaltensmustern der Lehrkraft ab. Diese bestimmen in der Interaktion mit den Lernenden, ob diese mit Hilfe einer inhaltlichen Frage, einem strukturierenden Tipp oder einer motivationalen Intervention einen (eigenen) nächsten Schritt bewerkstelligen können. Dabei profitieren die Lernenden von der sozialen Intervention am meisten, wenn die Divergenz zwischen dem Lehrerimpuls und ihrem aktuellen Wissenstand nicht zu groß ist. Lehrkräfte, die sich in solch einer Situation auch noch der Experten-Novizen-Problematik (vgl. Ericsson & Smith, 1994; Gruber, 1994; Gallin & Ruf, 1990) bewusst sind, besitzen die größten Chancen, auch sprachlich die richtigen Formulierungen (Begrifflichkeiten) zu finden. Diese Art der begleitenden Impulsintervention wird nicht immer direkt und in einer strengen Abfolge gelingen, wie z.B. im Phasenplan von Polya über die Leitfragen (vgl. Polya, 1949) vorgeschlagen, sondern erst im Prozess des mehrmaligen Rückfragens, Diagnostizierens und Strukturierens. Hier können Hierarchien der Rückmeldung wie beim Prinzip der minimalen Hilfe (Aebli, 1961; Zech, 1977; Görtz, 2009) hilfreich sein, da sie auf alternative Einstiege (vgl. Tab. 2) zur direkten fachlichen Hilfe auf der kognitiven Ebene verweisen (strategische, strukturelle oder motivationale Hilfen).

Tabelle 2: Übersichtstabelle möglicher Interventionen

Impulsart	Ebene	Intention
kognitiv aktivierend	kognitiv / meta-kognitiv	*kognitiv:* regen zum Hinterfragen und Begründen an / zielen auf ein vertieftes Verständnis *meta-kognitiv:* steuern Lernprozesse und Reflexionsprozesse
strukturierend	kognitiv	Strukturieren Inhalte oder Arbeitsprozesse / reduzieren Inhalte / heben Wichtiges hervor / weisen auf Zusammenhänge oder Abgrenzungen hin / ermöglichen Rückbezüge oder eine Vorschau
adaptiv	kognitiv / meta-kognitiv / motivational	1. Greift die aktuellen Schwierigkeiten auf (nach einem diagnost. Akt) 2. Geht nur so weit wie erforderlich (minimale Hilfe) 3. Bietet eine Brücke für den nächsten Entwicklungsschritt an

Literatur:

Sie finden die vollständige Literatur in einer längeren Fassung des Beitrags unter www.mathelino.com.

Petra HAUER-TYPPELT, Wien

Problemlösen mit den Mathe-Fans

In diesem Beitrag wird nach einer Vorstellung des Kurses „MFU – Mathe-Fans an die Uni“ über eine gemeinsam mit Studierenden durchgeführte Studie zum Themenbereich Problemlösen im Rahmen des Kurses berichtet.

MFU – Eckdaten und Schwerpunkte des Kurses

„MFU - Mathe-Fans an die Uni“ ist ein Angebot, das sich an mathematisch interessierte Schülerinnen und Schüler der gymnasialen Unterstufe richtet. Erstmals 2008 durchgeführt, findet der Kurs seither regelmäßig an der Fakultät für Mathematik der Universität Wien statt. Pro Semester finden je zwei Kurse für zwei unterschiedliche Schulstufen statt. In zweiwöchigem Rhythmus gibt es für die Teilnehmer Gelegenheit sich mit mathematischen Aufgaben und Themen zu beschäftigen.

Inhaltsschwerpunkte bilden dabei einerseits Problemlöseaufgaben aus unterschiedlichen Themengebieten andererseits attraktive Themen, die im regulären Schulunterricht keinen Platz finden, z. B. das Thema Geheimschriften im Kurs für die 5. Schulstufe. Im Sinne der Altersadäquatheit handelt es sich bei den Problemlöseaufgaben in den Kursen für die 5. und 6. Schulstufe, die in diesem Beitrag im Fokus stehen, in der Regel um Problemlöseaufgaben mit klarer Zielstellung, deren Bearbeitung bzw. Lösung aber auf unterschiedliche Weise erfolgen kann. Um sowohl der Kreativität des Problemlösens als auch den unterschiedlichen Voraussetzungen der Teilnehmer gerecht zu werden, wird mit vergleichsweise anspruchsvollen Aufgaben gearbeitet, bei denen man aber auch mit Teillösungen erfolgreich sein kann. Begründen und Argumentieren spielen – altersgemäß immer im Zusammenhang mit eigenen Ergebnissen bzw. zumindest Teilergebnissen – eine zentrale Rolle.

Aufgabenbeispiele und Kursziele

Um einen konkreteren Einblick in die Kursinhalte zu geben, folgen drei, hier nicht zuletzt wegen ihrer Kürze ausgewählte Aufgabenbeispiele, die bevorzugt im Kurs für die 6. Schulstufe verwendet werden.

Aufgabe Diagonalen im Vieleck: Rechts siehst du ein regelmäßiges Achteck, in dem alle Diagonalen eingezeichnet sind. *(Anm.: Die Abbildung entfällt hier aus Platzgründen.)* a) Wie kann man die Anzahl der Diagonalen im regelmäßigen Achteck berechnen? b) Versuche nun eine Formel zu entwickeln, mit der man die Anzahl der Diagonalen in einem regelmäßigen n-Eck berechnen kann!

Schokoladeaufgabe – Die Schokolade wird mir dein Alter verraten: Wie oft in der Woche möchtest du Schokolade essen? Wähle eine Zahl zwischen 0 und 10. Multipliziere die Zahl mit 2. Addiere 5. Multipliziere das Resultat mit 50. Wenn du im Jahr 2016 schon Geburtstag hattest, dann addiere 1766. Wenn nicht, dann addiere 1765. Jetzt zieh dein Geburtsjahr ab. Du erhältst eine dreistellige Zahl: Die erste Ziffer zeigt, wie oft du Schokolade essen möchtest. Und die verbleibende Zahl ist dein Alter! Warum funktioniert dieser „Trick" immer?

Aufgabe Teilbarkeit: Es gibt Zahlen, die beim Dividieren durch 2, 3, 4, 5 und 6 den Rest 1 ergeben, aber durch 7 teilbar sind. Finde eine solche Zahl! Gibt es mehrere solcher Zahlen? (Quelle: Käpnick, 2014, S. 110)

Was MFU den Teilnehmern also bieten möchte, ist eine Schulung des mathematischen Denkens, insbesondere durch eine Auseinandersetzung mit Strategien und Methoden zum mathematischen Problemlösen, die wiederum im Sinne der Metakognition Wissen über mathematisches Denken mit sich bringt. Diese Punkte sind es auch, die in der fachdidaktischen Literatur als wesentliche Einflussfaktoren auf die Qualität des Problemlösens genannt werden, siehe z. B. Heinrich et al. (2015, S. 289). Dort werden als weitere Einflussfaktoren fachliches Bereichswissen und Einstellungen bzw. Grundhaltungen genannt. In diesen beiden Bereichen bringen die Kursteilnehmer in der Regel hervorragende Voraussetzungen mit, was zum einen ihre weitere Förderung im Sinne einer positiven Aufwärtsspirale im Vergleich zum Regelunterricht leicht macht, zum anderen MFU als „Forschungslabor" zum Themenbereich Problemlösen für angehende Mathematiklehrerinnen und – lehrer prädestiniert.

Beobachten und Analysieren von Problemlöseprozessen – Motivation für eine Studie gemeinsam mit Studierenden

Als Lehrerbildnerin ist es mir ein zentrales Anliegen Studierende für einen Mathematikunterricht auszubilden, in dem Problemlösen tatsächlich seinen Platz bekommt. Das theoretische Wissen der Studierenden um die Bedeutung der Vermittlung von Problemlösekompetenz scheint in vielen Fällen gut gesichert, dennoch findet dieser wichtige Bereich des Lernens den Weg in die Klasse oft nicht (mehr), wenn es an den realen Schulalltag geht. Um Studierenden Gelegenheit zu geben, lehr- und lerntheoretische Überlegungen zum Problemlösen praktisch umzusetzen, wurden mit zwei Seminargruppen in zwei aufeinanderfolgenden Jahren Problemlöseprozesse im MFU-Kurs beobachtet und im Seminar analysiert. Neben den beabsichtigten positiven Einflüssen insbesondere auf die Haltung der angehenden Lehrerinnen und Lehrer brachten die zahlreichen Beobachtungsprotokolle Teilerkenntnisse und Vermutungen, die zu einer strukturierteren Studie motivierten.

Einsatz von strukturverwandten Aufgaben

Zum Zweck eines konkreten Beobachtungskonzeptes wurde in dieser Studie, aus der auch eine Bachelorarbeit hervorging, mit so genannten strukturverwandten Aufgaben gearbeitet: Problemlöseaufgaben, die sich mit derselben Problemlösestrategie sehr gut bearbeiten bzw. lösen lassen, werden als strukturverwandte Aufgaben bezeichnet. Die Strukturverwandtheit bezieht sich also nicht auf Aufbau oder Kontext der Aufgaben. Strukturverwandte Aufgaben können auf den ersten Blick unterschiedlich wirken, erst wenn – in der Diktion der klassischen Arbeitsphasen nach Pólya – Phase 1 (Verstehen der Aufgabe) bewerkstelligt ist, kann die Strukturverwandtheit in der Phase 2 des Problemlöseprozesses erkannt und in weiterer Folge genutzt werden.

Studiendesign und Ergebnisse

Insgesamt kamen zu den drei Problemlösestrategien „Rückwärtsarbeiten“, „Systematisches Probieren“ und dem „Invarianzprinzip“ (siehe Bruder & Collet, 2011, S. 68 ff. oder Posamentier & Krulik, 1998) acht verschiedene Aufgaben zum Einsatz. Jeder der drei Strategien wurde jeweils ein Kurstermin der 6. Schulstufe gewidmet, in dem die strukturverwandten Aufgaben im Wechselspiel mit völlig anderen Aufgaben bearbeitet wurden.

Im Fokus der Beobachtungen standen „Verwendete Problemlösestile“ und „Transferleistungen bezüglich Problemlösestrategien“ der Kinder. Die Problemlösestile wurden literaturbasiert, in Anlehnung an Käpnick (2014, S. 119 ff.) typisiert: hartnäckiges Probieren – abwechselndes Probieren und Überlegen – intuitives Erahnen bzw. Herantasten an eine Lösung – systemhaftes, überlegtes Vorgehen – Mischtyp

Die oben erwähnten, vorangegangenen Analysen zeigten die gute Passung der Typen und machten daher eine grundsätzlich immer zu überlegende empirisch basierte Änderung oder Erweiterung der Typen nicht notwendig. Bezüglich der Transferleistungen wurde eine Einteilung in drei Stufen vorgenommen: Stufe 1: keine Transferleistung erkennbar; Stufe 2: Erkennen der Strukturverwandtheit, aber kein erfolgreicher Transfer der Problemlösestrategie; Stufe 3: Erfolgreicher Einsatz bereits bekannter Problemlösestrategien

Selbstverständlich ist mit der Stufen- bzw. Typenzuteilung eines Lösungsweges nicht zwingend eine Wertung verbunden. Beispielsweise kann eine Vorgehensweise, die naheliegende, nachweislich bekannte Problemlösestrategien nicht nutzt und daher der Stufe 1 zuzuordnen ist, sehr hochwertig hinsichtlich Kreativität sein.

Insgesamt wurden in der Studie 138 Lösungswege analysiert, die alle in schriftlicher Form vorlagen, teilweise ergänzt durch mündlich erfragte Informationen. In der Kategorie Problemlösestile zeigte sich in dieser Gruppe erwartungsgemäß ein hoher Anteil des Typs „systemhaftes, überlegtes Vorgehen“. Der außerhalb der Studie im Kurs oft beobachtbare Problemlösestil „intuitives Erahnen“ einer Problemlösung trat selten auf. Dies ist aber dem Design geschuldet, das ja auf das Erkennen von Strukturverwandtheit setzt. Herausgegriffen seien noch vier häufig beobachtete Vorgehensweisen, die offensichtlich gute Problemlöser auszeichnen, da diese im Vergleich zu anderen Merkmalen auch im Regelunterricht einfach zu berücksichtigen bzw. zur Entwicklung zu bringen sind: Die Teilnehmer zeigten eine hohe natürliche Bereitschaft zur Validierung von Zwischenergebnissen, gingen unbekümmert und damit schnell sicher werdend mit neuen Begriffen um, widmeten sich unbeirrt eigenen, phantasiereichen Lösungswegen und ließen sich von gescheiterten Lösungsversuchen kaum demotivieren.

In der Kategorie Transferleistung erreichten 20 der 24 Teilnehmer an der Studie bei mindestens einer Aufgabe Stufe 3, bei lediglich zwei Kindern war ein Erkennen der Strukturverwandtheit von Aufgaben nie festzustellen. (vgl. Kittler, 2016, S. 79 f.) Die deutlichsten Übertragungsleistungen zeigten sich bei den strukturverwandten Aufgaben zum systematischen Probieren. Die Ergebnisse bestärken zur Arbeit mit strukturverwandten Aufgaben auch in Regelklassen, wenn es um die Entwicklung von Problemlösestrategien geht. Die Problemlösestrategie „Systematisches Probieren“ dabei als eine der ersten in den Fokus zu nehmen, trägt bei, Schüler schon zu Beginn zu Erfolgserlebnissen kommen lassen – ein zentraler Faktor zum Aufbau bzw. Erhalt der Motivation, ohne die erfolgreiches Problemlösen nicht stattfinden kann.

Literatur

Bruder, R. & Collet, C. (2011): *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Heinrich, F. et al. (2015): Problemlösen lernen. In R. Bruder et al. (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 279-301). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum

Käpnick, F. (2014): *Mathematiklernen in der Grundschule.* Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Kittler, J. (2016): *Strukturverwandte mathematische Problemstellungen und Aufgaben. Eine Potenzialanalyse hinsichtlich der Förderung mathematischer Kompetenzen.* Bachelorarbeit an der KPH Wien/Krems.

Pólya G.(2010): *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme.* Tübingen: Narr Francke Attempto. (Sonderausgabe der 4. Auflage der Originalausg. von 1949)

Posamentier, A. & Krulik, S. (1998): *Problem-solving strategies for efficient and elegant solutions.* Thousand Oaks, California: Corwin Press.

Lea HAUSMANN, Udo KAMPS, Aachen

Darstellung und Messung von Konzentration mit Lorenzkurve und Gini-Koeffizient in einem Schüleruni-Workshop

1. Hintergrund

Ungleichheit – insbesondere finanzielle und soziale Ungleichheit – ist ein dauerhaft präsentes Thema in den Medien. Aussagen wie „Ein Prozent der Weltbevölkerung besitzt fast die Hälfte des Weltvermögens" (Oxfam Deutschland e.V., 2015) oder „Zehn Prozent der Haushalte verfügten im Jahr 2013 über 51,9 Prozent des Nettovermögens" (Spiegel Online, 2016) sind verknüpft mit einem statistischen Thema, das sich mit der Messung von *Konzentration* befasst, genauer mit der Verteilung einer Merkmalsumme (Vermögen, Umsätze…) auf die einzelnen Merkmalsträger (vgl. z.B. Burkschat et al. 2012, Mosler et. al. 2009).

Es bietet aktuelle, fächerübergreifende und zugleich auch mathematisch interessante Ansatzpunkte für den Mathematikunterricht, von denen einige in dem hier vorgestellten Schüleruni-Workshop aufgegriffen werden. Grundlage bilden hierbei die zwei bekanntesten Darstellungsmöglichkeiten der Konzentration: zum einen die Lorenzkurve, zum anderen als Maßzahl der darauf basierende Gini-Koeffizient.

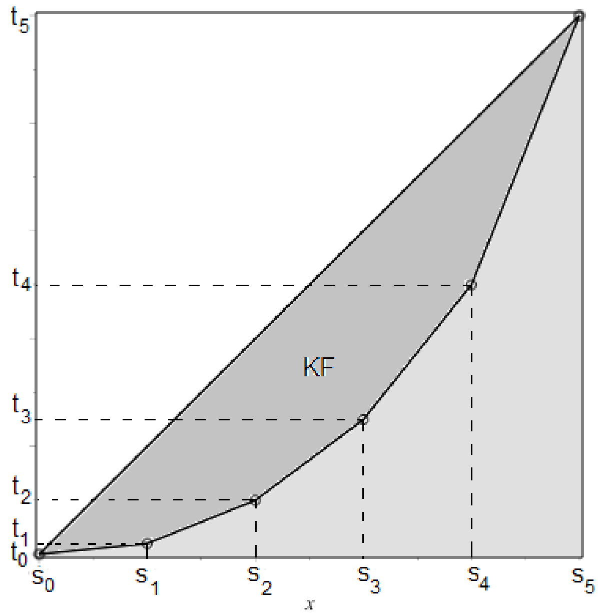


Abbildung 1: Typischer Verlauf einer Lorenzkurve. Die Konzentrationsfläche KF ist die von Lorenzkurve und Ursprungsgeraden eingeschlos-

Die *Lorenzkurve* (vgl. Lorenz 1905) zur Verteilung der Merkmalsumme $S_n = x_1 + \ldots + x_n$ der aufsteigend geordneten Merkmalsausprägungen $x_1,\ldots,x_n$ von n Merkmalsträgern wird als Streckenzug durch die Punkte $(0,0),(s_1,t_1),\ldots,(1,1)$ gezeichnet (s. Abb. 1). Hierbei bezeichnet $s_i = i/n$ den Anteil der i Merkmalsträger mit den geringsten Merkmalsausprägungen an der Gesamtzahl n, und $t_i = (x_1 + \ldots + x_i)/S_n$ den Anteil der Summe der i geringsten Merkmalsausprägungen an der Gesamtsumme. Es ergibt sich der Graph einer monoton steigenden, stückweise linearen, konvexen Funktion $L: [0,1] \rightarrow [0,1]$ mit $L(0) = 0$ und $L(1) = 1$.

Der Wert t_k auf der Ordinate gibt an, welcher Prozentsatz der Gesamtsumme aller Werte auf $100 \cdot s_k$% der „kleinsten/ärmsten“ Merkmalsträger entfällt. Offensichtlich gilt: Je größer die Konzentration ist, desto stärker „hängt die Kurve durch“; im Fall minimaler Konzentration, d.h. Gleichverteilung, entspricht die Lorenzkurve hingegen der Winkelhalbierenden.

Auf dieser Eigenschaft basiert auch die bekannteste Maßzahl zur Messung der Konzentration, der *Gini-Koeffizient*: Dieser setzt die *Konzentrationsfläche*, die von Lorenzkurve und Winkelhalbierenden eingeschlossen wird, ins Verhältnis zur Fläche unter der Winkelhalbierenden auf dem Intervall [0,1]. Je höher die Konzentration, desto größer der Gini-Koeffizient. Es bietet sich – insbesondere bei der Berechnung mit Tabellenkalkulation - an, den Gini-Koeffizienten mit Hilfe der Summe der Trapezflächen unterhalb der Lorenzkurve zu berechnen (vgl. Abb. 1):

$G = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot (s_i - s_{i-1}) \cdot (t_i + t_{i-1}) \right)$, wobei $s_0 = 0$ und $s_1 = 1$ gesetzt sind.

2. Schüleruni-Workshop

Der im Folgenden beschriebene Schüleruni-Workshop wendet sich an interessierte Schülerinnen und Schüler der gymnasialen Oberstufe. Der Aufbau orientiert sich an der Struktur einer Universitätsveranstaltung und beinhaltet zunächst 75 Minuten Vorlesung, in der Idee und Konstruktionsprinzip der Lorenzkurve sowie des Gini-Koeffizienten vorgestellt und teils im Stil eines Unterrichtsgesprächs mit den Jugendlichen zusammen erarbeitet werden. Anschließend finden, unterbrochen von Pausen, insgesamt vier Stunden Partnerarbeit zu unterschiedlichen Themengebieten statt.

Die erste Arbeitsphase (1,5 h) legt den Schwerpunkt auf die Konstruktion der Lorenzkurve und die Berechnung des Gini-Koeffizienten mit der kostenlosen, plattformunabhängigen Tabellenkalkulationssoftware OpenOffice Calc sowie auf die Interpretation der Ergebnisse. Hierbei stehen der Werkzeuggebrauch, das Ablesen an Grafiken sowie der kritische Vergleich der unterschiedlichen Darstellungsformen im Fokus.

Während die Konstruktion und Interpretation von Lorenzkurve und Gini-Koeffizient schon mit einfachen Mitteln in der Mittelstufe möglich ist, bietet sich das Thema Konzentrationsmessung auch dazu an, in der Oberstufe auf einem abstrakteren und mathematisch anspruchsvolleren Niveau wieder aufgegriffen zu werden. Neben der – in der Praxis häufig gewünschten – Konstruktion einer glatten Lorenzkurve anstatt der stückweise linearen ist auch, wie hier im Workshop genutzt, die Konstruktion einer oberen bzw. unteren Schranke für den Gini-Koeffizienten sinnvoll.

Im nächsten Arbeitsschritt erkunden die Teilnehmerinnen und Teilnehmer des Workshops daher zunächst graphisch, wie sich die Lorenzkurve bzw. die

Konzentration verändert, wenn die Daten klassiert werden, und von einer Gleichverteilung der Merkmalsumme innerhalb einer Klasse ausgegangen wird. Da eine Ungleichverteilung innerhalb der einzelnen Klassen nicht berücksichtigt wird, führt dies zu einer systematischen Unterschätzung der Konzentration.

Diese Erkenntnis wird durch eine angepasste Trapezformel für den Gini-Koeffizienten quantifiziert; es wird somit eine untere Schranke für den Gini-Koeffizienten erarbeitet.

Die dritte und letzte Arbeitsphase widmet sich der im Gegensatz zur unteren Schranke mathematisch sehr anspruchsvollen Konstruktion einer oberen Schranke für den Gini-Koeffizienten. Hierbei wird bewusst eine umfangreiche, ausführliche Modellierungs- und Optimierungsaufgabe gestellt, die deutlich über den Schulstoff hinausgeht.

Ausgangspunkt ist folgende Überlegung: Angenommen, es seien nur zwei Punkte einer Lorenzkurve, A1=(a_1,b_1) und A2 = (a_2,b_2), einer Lorenzkurve bekannt. Wie kann nun durch diese beiden Punkte eine Lorenzkurve konstruiert werden, sodass die eingeschlossene Konzentrationsfläche maximal wird, die Konvexitäts- und Monotonieeigenschaft jedoch nicht verletzt wird (vgl. hierzu auch Farris 2010)?

Nach einigen Vorüberlegungen auf Papier erkunden die Jugendlichen diese Fragestellung mit Hilfe der dynamischen Geometriesoftware GeoGebra (s. Abb. 2). Durch Variation der Steigung der beiden Geraden durch L bzw. K verändert sich die Größe der von den Geraden und der Ursprungsgeraden eingeschlossenen Fläche, sodass die Schülerinnen und Schüler diese experimentell maximieren können. Die so bestimmbare Fläche stellt eine echte obere Schranke für die Konzentrationsfläche einer beliebigen durch A1 und A2 verlaufenden Lorenzkurve dar: Jede durch diese Punkte verlaufende Lorenzkurve zeigt eine geringere Konzentration (oder verletzt die Konvexitätseigenschaft).

Mit geometrischen Überlegungen ausgehend von Abb. 2 leiten die Workshopteilnehmerinnen und –teilnehmer nun in mehreren Teilschritten eine Formel für den Inhalt der eingeschlossenen Fläche in Abhängigkeit von den beiden Geradensteigungen her. Die Maximierung dieser Funktion und somit die Bestimmung der oberen Schranke für den Gini-Koeffizienten erfolgt mit Hilfe des CAS Maple.

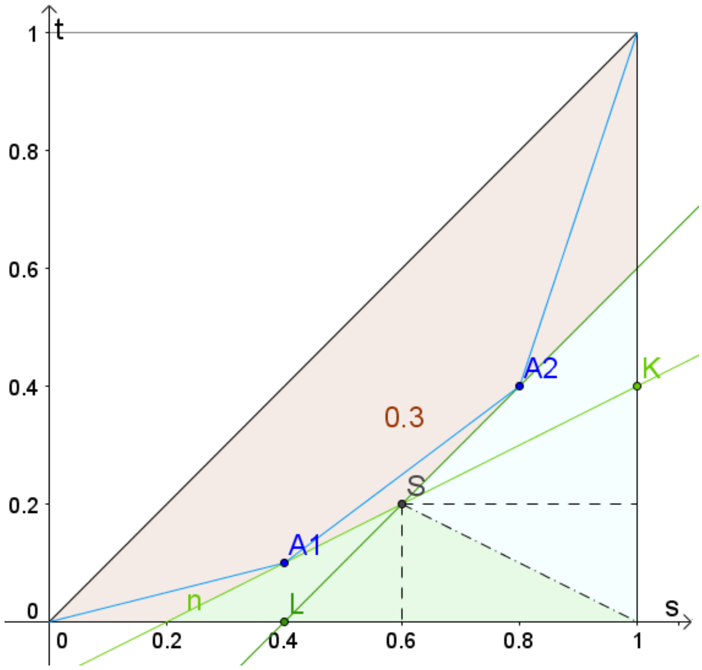


Abbildung 2: Screenshot des interaktiven GeoGebra-Applets zur Bestimmung einer oberen Schranke für den Gini-Koeffizienten

Den Abschluss bilden der Vergleich der rechnerisch gefundenen Lösung mit der zuvor in GeoGebra experimentell bestimmten maximalen Konzentrationsfläche sowie eine kritische Diskussion einschränkender Bedingungen für die Lösung (Überprüfung der Randwerte, Sonderfälle, von den Geradensteigungen zu erfüllende Eigenschaften).

Konzentrationsmessung ermöglicht, wie im beschriebenen Workshop, einen weiten Bogen von grundlegender beschreibender Statistik bis hin zu komplexen Modellierungs- und Optimierungsaufgaben. Das unterschiedliche Anspruchsniveau erfordert eine umfassende Differenzierung, bietet jedoch umfangreiche Möglichkeiten für vernetzte, abwechslungsreiche Aufgaben.

Literatur

Burkschat, M., Cramer, E., Kamps, U. (2012): *Beschreibende Statistik. Grundlegende Methoden der Datenanalyse*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. 2. Auflage.

Farris, F. A. (2010): The Gini Index and Measures of Inequality. In: American Mathematics Monthly, Vol. 117, No. 10, S. 851-864.

Lorenz, M. O. (1905): *Methods of Measuring the Concentration of Wealth.* In: Publications of the American Statistical Association, Bd. 9, Nr. 70 (Jun., 1905), S. 209-219.

Mosler, K., Schmid, F. (2009): Beschreibende Statistik und Wirtschaftsstatistik. Berlin, Heidelberg: Springer. 4. Auflage.

Oxfam Deutschland e.V. (2015): *Besser gleich! Schließt die Lücke zwischen arm und reich! Ein Aktionsplan zur Bekämpfung sozialer Ungleichheit.* Berlin. http://www.oxfam.de/sites/www.oxfam.de/files/ox_bessergleich_broschuere_rz_web.pdf.

Spiegel Online (2016): *Deutschland: Die oberen zehn Prozent besitzten 52 Prozent des Vermögens.* http://www.spiegel.de/wirtschaft/soziales/deutschland-ein-zehntel-besitzt -52-prozent-des-vermoegens-a-1073677.html.

Marleen HEID, Lüneburg

„Weil eine Badewanne doppelt so groß ist wie eine Gießkanne“ – Vorgehensweisen und Fehlvorstellungen beim Schätzen von visuell-wahrnehmbaren Größen

Verschiedene quantitative Studien aus dem internationalen Raum belegen die ungenauen Schätzungen von Grundschulkindern beim Schätzen von Größen (Jones et al. 2012; Swan/Jones 1980). In einer qualitativen Interviewstudie wurde deshalb die mentale Tätigkeit des Schätzens untersucht. Der nachfolgende Beitrag stellt zunächst den theoretischen Hintergrund dar, um daran anschließend die Schätzstrategien sowie die Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler mit dem mentalen Schätzprozess zu beschreiben.

1. Theoretischer Hintergrund

Das Schätzen von Größen wird in der mathematikdidaktischen Literatur als eine mentale Tätigkeit charakterisiert, bei der das zu schätzenden Objekt mit einer Stützpunktvorstellung verglichen wird (u.a. Franke/Ruwisch 2010; Lang 1999). Aus kognitionspsychologischer Forschung ist außerdem bekannt, dass die mentale Tätigkeit des Schätzens durch die exekutiven Funktionen ausgeführt wird. Die für den mentalen Prozess benötigten Informationen wie das Wissen um das zu schätzende Objekt, mögliche Vergleichsobjekte und die Erfahrung mit dem zu schätzenden Objekt werden durch das deklarative Langzeitgedächtnis bereitgestellt. Für das Zusammensetzen dieser Informationen durch die exekutiven Funktionen sind (Vergleichs-)strategien erforderlich (Brand et al. 2003).

Veröffentlichungen zum Strategieeinsatz beim Schätzen von Größen fokussieren bisher auf das Schätzen von Längen (u.a. Hildreth 1983; Siegel et al. 1982; Joram 2005). Die empirischen Ergebnisse zeigen, dass Grundschulkinder häufig über visuelle Wahrnehmungsaspekte begründen (Siegel et al. 1982). Darüber hinaus setzen sie unterschiedliche Schätzstrategien ein, um ein Schätzergebnis zu ermitteln. Das wiederholte Abtragen einer Einheit ist die am häufigsten genutzte Strategie beim Schätzen von Längen (Joram 2005).

2. Design der Studie

Stichprobe. In einer qualitativen Interviewstudie wurden 46 Schülerinnen und Schüler des vierten Schuljahres aus fünf verschiedenen Klassen in Niedersachsen und Schleswig-Holstein interviewt.

Durchführung. Die Schätzstrategien der Kinder wurden in klinischen Interviews mit der Methode des „Nachträglich Lauten Denkens“ erhoben. In diesen Interviews lösten die Schülerinnen und Schüler zwei analog zu einander aufgebaute Aufgabensets zum Schätzen von Längen und zum Schätzen von Fassungsvermögen.

Aufgaben. In Anlehnung an das theoretische Modell nach Bright (1976) bestand das Aufgabendesign aus vier unterschiedlichen Aufgabenblöcken (siehe Abbildung 1). Ein Aufgabenblock bestand in jedem Größenbereich aus jeweils fünf Schätzaufgaben in verschiedenen Größenspannen.

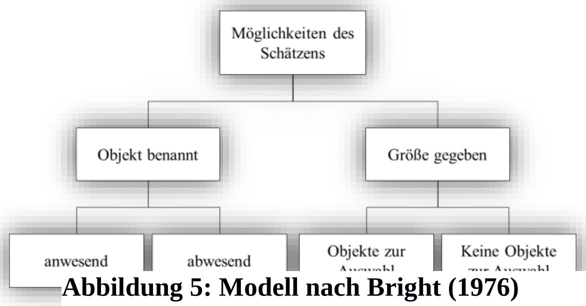


Abbildung 5: Modell nach Bright (1976)

Auswertungsverfahren. Die Auswertungskategorien zur Systematisierung von Schätzstrategien wurden sowohl deduktiv als auch induktiv entwickelt und in einem Modell zusammengefasst (siehe Abbildung 2). Diese Kategorien wurden zum Kodieren des Datenmaterials verwendet.

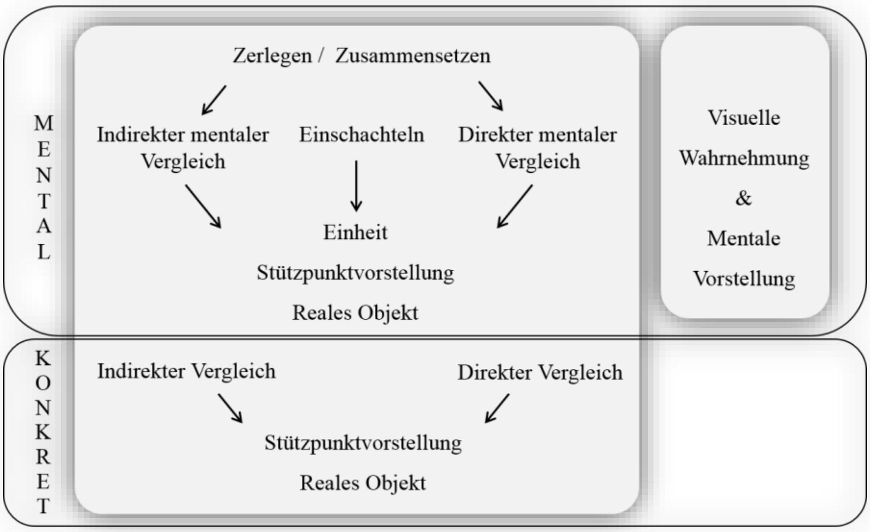


Abbildung 6: Kategorisierung von Schätzstrategien

3. Ergebnisse

Vorgehensweisen. Die Schülerinnen und Schüler lösten 61% der Aufgabe mit Hilfe einer Schätzstrategie (siehe Abbildung 2: oberer Kasten linke Seite). Darüber hinaus begründeten die Kinder über visuelle Wahrnehmungsaspekte (18%) oder setzten konkrete Messhandlungen (8%) ein, um die Größe der Objekte zu bestimmen (siehe Abbildung 2). Insgesamt verwendeten die Schülerinnen und Schüler am häufigsten die Schätzstrategie direkter mentaler Vergleich mit Stützpunktvorstellungen. Im Größenbereich Länge nutzten die Kinder vor allem körpereigene Messinstrumente, um diese in konkreten und mentalen indirekten Vergleichen an dem zu schätzenden Objekt abzutragen. Im Größenbereich Volumen stellt der direkte mentale Vergleich mit einer Stützpunktvorstellung die bevorzugte Strategie der Schülerinnen und Schüler dar. Begründungen, die ausschließlich auf die visuelle Wahrnehmung beziehen, finden sich in beiden Größenbereichen gleichermaßen.

Fehlvorstellungen. Die Schwierigkeit der Schülerinnen und Schüler mit dem mentalen Prozess des Schätzens wurde vor allem bei indirekten mentalen Vergleichen beim Schätzen des Fassungsvermögens deutlich. Insbesondere dann, wenn sehr kleine Objekte für das gedankliche Ausmessen verwendet und dementsprechend vielfach an dem zu schätzenden Objekt abgetragen wurden. Im Größenbereich Länge findet sich diese Schwierigkeit deutlich seltener.

Des Weiteren kamen die Schülerinnen und Schüler aufgrund von Fehlvorstellungen zu unangemessenen Schätzwerten. Diese Fehlvorstellungen können sich zum einen in einer falschen Zuordnung von Stützpunktvorstellungen und deren Größe, zum anderen in einer fehlerhaften mentalen Repräsentation von Einheiten im Langzeitgedächtnis zeigen. Beide Arten von Fehlvorstellungen sind in beiden Größenbereichen zu erkennen. Die falsche Zuordnung von Stützpunktvorstellung zu deren Größe findet sich insbesondere im Größenbereich Länge in Bezug auf die verwendeten Körpermaße. So wurde insbesondere die Armspanne als Stützpunktvorstellung für einen Meter bzw. die Daumenbreite für einen Zentimeter verwendet. Die fehlerhafte Repräsentation von Einheiten wurde u.a. in den Aussagen der Kinder zu der Standardeinheit Milliliter deutlich, die die Kinder beispielsweise als „*Nichts*“ oder als Tropfen beschrieben.

In nahezu der Hälfte der Interviews wurde darüber hinaus ein unzureichendes Verständnis für die dezimale Struktur des Größenbereichs Volumen deutlich. Es zeigten sich insbesondere Nullstellenfehler sowie ein unzureichendes Verständnis der Komma- sowie der Bruchschreibweise. Nullstellenfehler finden sich überwiegend bei mittelgroßen Objekten mit einer Größe zwischen 100-500 Milliliter. Der Fehler beruht auf einer fehlenden Null im Endergebnis. Die Angabe von Maßeinheiten mit der Komma- und Bruchschreibweise wurde nicht gefordert, jedoch von den Schülerinnen und Schüler gelegentlich genutzt, um eine Angabe in Millilitern zu vermeiden. Die Bedeutung dieser Maßangaben bzw. die Umrechnung von Liter in Milliliter beherrschten diese Kinder vielfach jedoch nicht.

Fazit

Die Ergebnisse der Studie zeigen, dass Schülerinnen und Schüler vielfältige Schätzstrategien einsetzen, auch wenn diese nicht im Unterricht thematisiert wurden. Die Variation von Schätzaufgaben in verschiedenen Größenbereichen und Größenspannen, wie sie in dieser Studie eingesetzt wurden, scheinen diesbezüglich einen geeigneten Rahmen zu bieten, um die mentale Tätigkeit des Schätzens im Unterricht zu fördern und Schätzstrategien zu generieren.

Die Schwierigkeiten der Kinder zeigten sich jedoch sowohl bei der Durchführung der Strategie durch die exekutiven Funktionen als auch beim Abrufen von Informationen aus dem Langzeitgedächtnis. Für einen fehlerfreien Übergang von einem konkreten zu einem mentalen Vergleich sind Handlungserfahrungen im Umgang mit Größen von besonderer Bedeutung. Hier kann und sollte der Unterricht Handlungsspielräume eröffnen. Zudem sollten die Stützpunktvorstellungen sowie die Vorstellungsbilder der Standardeinheiten regelmäßig überprüft werden.

Literatur

Brand, Matthias; Fujiwara, Esther; Kalbe, Elke; Steingass, Hans-Peter; Kessler, Josef; Markowitsch, Hans J. (2003): Cognitive Estimation and Affective Judgments in Alcoholic Korsakoff Patients. In: Journal of Clinical & Experimental Neuropsychology 25 (3), S. 324.

Bright, George W. (1976): Estimation as part of learning to measure. In: Doyal Nelson (Hg.): Measurement in school mathematics. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics, S. 87-104.

Franke, Marianne; Ruwisch, Silke (2010): Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. 2. Aufl. Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl.

Hildreth, David J. (1983): The Use of Strategies in Estimating Measurements. In: The Arithmetic Teacher 30 (5), S. 50-54.

Jones, M.Gail; Gardner, Grant E.; Taylor, Amy R.; Forrester, Jennifer H.; Andre, Thomas (2012): Students` Accuracy of Measurement Estimation: Context, Units and Logical Thinking. In: School Science and Mathematics 112 (3), S. 171–178.

Joram, Elana (2005): Children's Use of the Reference Point Strategy for Measurement Estimation. In: Journal for Research in Mathematics Education 36 (1), S. 4-23.

Lang, Frances Kuwahara (1999): What Is a "Good Guess" Anyway? Teaching Quantity and Measurement Estimation. In: Young Children 54 (4), S. 78–81.

Siegel, Alexander W.; Goldsmith, Lynn T.; Madson, Camilla R. (1982): Skill in Estimation Problems of Extent and Numerosity. In: Journal for Research in Mathematics Education 13 (3), S. 211-232.

Swan, Malcolm; Jones, Orville E. (1980): Comparison of students' percepts of distance, weight, height, area, and temperature. In: Sci. Ed. 64 (3), S. 297–307.

Sabrina HEIDERICH, Dortmund

Charakterisierungen von Situationen mit den Begriffen der linearen, proportionalen und antiproportionalen Funktionen aus inferentialistischer Perspektive

1. Problemlage

Quantitative Studien geben Hinweise auf Verstehensschwierigkeiten bei der Identifizierung linearer, proportionaler und antiproportionaler Zusammenhänge in situativen Aufgabenstellungen. Insbesondere bei der Unterscheidung linearer und antiproportionaler Abnahmeprozesse gibt es Verwechslungen (vgl. De Bock et al. 2015, Kurth 1992, Suarez 1977). Dabei stellen vermeintlich hilfreiche, jedoch insbesondere inhaltlich-verkürzte Versprachlichungen bzw. ‚Merkregeln', wie bspw. ‚je mehr-desto weniger ist antiproportional', keine tragfähigen und langfristigen Hilfestellungen dar (vgl. Heiderich & Hußmann 2013).

2. Theoretische Grundlegungen und Forschungsinteresse

Im Rahmen eines Dissertationsprojekts wird ein *qualitativer* Blick auf die Identifizierung und Differenzierung der Begriffe der linearen, proportionalen und antiproportionalen Funktionen in konkreten Situationen und über verschiedene Situationen hinweg gelegt. Zur Erfassung des individuellen Gebrauchs von (mathematischen) Begriffen und Begriffsbildungsprozessen wird der Ansatz der ‚Epistemologie der inferentiell gegliederten Wissensstrukturen' (Hußmann 2013, Hußmann et al. 2016) zugrunde gelegt, der verschiedene Bezüge aus philosophischen Ansätzen, insbesondere aus dem Ansatz des semantischen Inferentialismus des Sprachphilosophen Robert Brandom (vgl. Brandom 2000, 2001), nutzt und für eine psychologische Analyse von individuellen Begriffsbildungsprozessen erweitert. Dabei werden fachlich intendierte Konzepte mit individuellen Perspektiven im Rahmen einer spezifischen Analysesprache verglichen. Eine wichtige Basis bilden die *Festlegungen* (Aussagen mit propositionalem Gehalt) der Probanden, die in einem sozialen Diskurs explizit geäußert und individuell für wahr gehalten werden. Anhand dieser können *Fokussierungen* rekonstruiert werden, die als individuell-relevante Kategorien zur Strukturierung von Situationen herangezogen werden. *Inferentielle Relationen* werden als explizit-sprachliche Verknüpfungen von Festlegungen erfasst, um individuelle Prämissen und Konklusionen für eine begründete Entscheidung auf die hier betrachteten Begriffe beschreibbar zu machen.

Darüber hinaus wird die Situiertheit von Wissen angenommen, bei der Situationen, in denen Wissen entsteht, als Teil des Wissens aufgefasst werden (vgl. Reinmann-Rothmeier & Mandl 2001). Zur Rekonstruktion *individueller Situationen* als Ausgangspunkt des analytischen Vorgehens wird sich an das Situationsmodell des Konzepts des Modellierens angelehnt (vgl. Borromeo Ferri 2006, Blum & Leiß 2005). Dabei wird der Fokus auf den Prozess des ‚Mathematisierens' zwischen individueller Situation und mathematischen Begriff in der Differenzierung zwischen einer *situativen* und *formalen Fokussierungsebene* gelegt. Erstere umfasst alle Fokussierungen und Festlegungen, die potentiell zur Aktivierung der individuellen Situation zu Rate gezogen werden (können), letztere hinsichtlich des mathematischen Begriffs. Als Vermittler werden Grundvorstellungen als lokale Bedeutung des mathematischen Begriffs zur Strukturierung der Situation genutzt (vgl. Prediger 2010). Hinsichtlich eines situationsübergreifenden Gebrauchs von (mathematischen) Begriffen werden Festlegungen und Fokussierungen rekonstruiert, die über individuelle Klassen von Situationen angewendet werden (können). In Anlehnung an die Ideen einer ‚set of situations' (vgl. Vergnaud 1996, 1998) und ‚contextual neighboorhood' (Pratt & Noss 2002) werden *Situationsklassen* aus normativer Perspektive genutzt, die für die betrachteten funktionalen Zusammenhänge die assoziierten Situationen über ihre semantischen Strukturen miteinander verbinden. In Anknüpfung an die Konzepte der ‚operational invariants' (vgl. Vergnaud 1996, 1998) und ‚situated abstractions' (Pratt & Noss 2002) werden *Fokussierungen* und *Urteile* (als allgemeinere Konstrukte im Vergleich zu Festlegungen) rekonstruiert, die über verschiedene Situationen hinweg angewendet werden und damit in enger Verbindung zu *individuellen Situationsklassen* stehen und im Rahmen der Analyse gemeinsam Aufschluss über Potentiale und Hürden geben sollen.

3. Methodischer Rahmen

Den Ausgangspunkt bildet ein Erprobungskapitel der achten Klasse des Lehr-/Lernwerks ‚mathewerkstatt' (vgl. Barzel et al. 2012) in Verbindung mit dem Forschungsansatz der ‚Fachdidaktischen Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell', mit dem zentralen Anliegen, Forschung und Entwicklung miteinander zu verzahnen (vgl. Hußmann et al. 2013). Die Untersuchungen haben in einer ersten Sequenz als Tiefenanalyse in Form von diagnostischen Interviews zur Erhebung der Lernstände mit sieben Paaren, in einer zweiten Sequenz mit zehn weiteren (davon unabhängigen) Paaren in achten und neunten Schulstufen für eine Absicherung in der Breite stattgefunden. In einer dritten Sequenz wurden unmittelbar anknüpfende Designexperimente mit vier dieser Paare aus der ersten und zweiten Sequenz durchgeführt, um Gelingensbedingungen und Hürden spezifischer Lernprozesse zu verstehen.

4. Erste Ergebnisse

Mit Blick auf die situative Fokussierungsebene wird der in der Stichprobe häufig zu beobachtende, individuelle Gebrauch der alleinigen Fokussierung auf ‚mehr-weniger Zusammenhänge' zwischen den abhängigen Größen in individuellen Situationen und über verschiedene Situationen hinweg nicht tragfähig für eine Begründung der ‚Antiproportionalität' (bei linear fallenden Zusammenhängen aus normativer Perspektive) genutzt. Zum Teil findet sogar eine Übertragung auf linear fallende Tabellen oder Graphen der formalen Ebene statt, so dass diese konzeptuell-reduzierten, monotonen Eigenschaften der situativ voneinander abhängigen Größen auf den mathematischen Begriff scheinbar übergeneralisiert werden. Umgekehrt nutzen andere Probanden eine Darstellung der reziproken Vervielfachungseigenschaft antiproportionaler Funktionen in Tabellen auf der Grundlage selbst gewählter Wertepaare bei offenen Aufgaben, obgleich sie im Rahmen ihrer individuellen Situation einen linear fallenden Zusammenhang aus normativer Perspektive beschreiben. Schaut man genauer auf die individuellen Situationsklassen zu den hier konkurrierenden linearen und antiproportionalen Zusammenhängen und ihren Begriffen, so werden vielfältige Perspektiven sichtbar, die bestehende Hürden im Zusammenwirken der situativen und formalen Fokussierungsebene verstehbar machen. Am Beispiel der in den diagnostischen Erhebungen u. a. genutzten Aufgabe ‚100 Bonbons sollen bei einer Gruppe von Kindern fair geteilt werden' liegen die rekonstruierten, individuellen Situationsklassen ‚Sukzessives *Ver*teilen' oder ‚Gleichmäßiges *Aus*teilen' linearer und ‚Festes *Auf*teilen' oder ‚Festes *Ver*teilen' antiproportionaler Zusammenhänge sprachlich und strukturell aus individueller Perspektive zumeist unbewusst dicht beieinander. Eine mögliche Hürde ergibt sich dann in der Verknüpfung der situativen und formalen Ebene hinsichtlich einer bewussten Entscheidung, ob in den Darstellungen einer Tabelle oder eines Graphen der Anfangswert zur unabhängigen Größe ‚0' oder ‚1' Relevanz für die gewählte, individuelle Situation hat. Die qualitative Analyse individueller Begründungen gibt Anhaltspunkte auf individuelle Verstehensschwierigkeiten bei der Identifizierung und Differenzierung linearer, proportionaler und antiproportionaler Zusammenhänge in Situationen und ihren zugehörigen Begriffen, die zur Konzipierung geeigneter Lehr-/Lernformate zur Überwindung spezifischer Hürden beitragen kann.

Literatur

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2012). Nachhaltig lernen durch aktives Systematisieren und Sichern - Konzept und Umsetzung in der mathewerkstatt. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht* 2012, 93-96.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 38(2), 86-95.

Brandom, R. B. (2001). *Begründen und Begreifen. Eine Einführung in den Inferentialismus*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Brandom, R. B. (2000). *Expressive Vernunft*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

De Bock, D., Van Dooren, W. & Verschaffel, L. (2015). Students´ understanding of proportional, inverse proportional, and affine functions: two studies on the role of external representations. In: *International Journal of Science and Mathematics Education* 13(1), 47-69.

Heiderich, S. & Hußmann, S. (2013). „Linear, proportional, antiproportional … wie soll ich das denn alles auseinanderhalten“ – Funktionen verstehen mit Merksätzen?! In: H. Allmendinger, K. Lengnink, A. Vohns & G. Wickel (Hrsg.). *Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung*, 27-46. Wiesbaden: Springer.

Hußmann, S. (2013). *The theory of inferential structured (conceptual) webs of focuses, judgements and situations*. Available preprint, Technical University Dortmund, IEEM.

Hußmann, S., Thiele, J., Hinz, R., Prediger & S., Ralle, B. (2013). Gegenstandsorientierte Unterrichtsdesigns entwickeln und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In: M. Komorek & S. Prediger (Hrsg.). *Der lange Weg zum Unterrichtsdesign. Zur Begründung und Umsetzung fachdidaktischer Forschungs-und Entwicklungsprogramme*, 25-42. Münster: Waxmann.

Hußmann, S., Schacht, F. & Schindler, M. (2016). *An epistemological and inferential theory of concept formation processes – illustrated by an empirical study on decimal numbers*. A work in progress.

Kurth, W. (1992). Proportionen und Antiproportionen. Untersuchungen zum funktionalen Denken von Schülern. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 13(4), 311–343.

Pratt, D. & Noss, R. (2002). The Microevolution of Mathematical Knowledge: The Case of Randomness. In: *The Journal of the Learning Sciences* 11(4), 453-488.

Reinmann-Rothmeier, G. & Mandl, H. (2001). Unterrichten und Lernumgebungen gestalten. In: A. Krapp & B. Weidenmann (Hrsg.). *Pädagogische Psychologie. Ein Lehrbuch*, 601-646. Weinheim: Beltz.

Suarez, A. (1977). *Formales Denken und Funktionsbegriff bei Jugendlichen. Funktionale Begriffsbildung und Strukturierung des Kontinuums als Alternative zum formal-logischen Strukturalismus von Jean Piaget.* Bern: Hans Huber.

Vergnaud, G. (1998). A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. *Journal of mathematical behavior*, 17(2), 167-181.

Vergnaud, G. (1997). The Nature of Mathematical Concepts. In: T. Nunes & P. Bryant (Hrsg.). *Learning and teaching Mathematics: An international Perspective*, 5-28. Hove (UK): Psychology Press.

Cathleen HEIL, Leuphana Universität Lüneburg

Vergleich räumlicher (Orientierungs-)Fähigkeiten von Grundschulkindern im Mathematikunterricht und im Realraum

Räumliche Anforderungen begegnen Grundschulkindern sowohl in Form von schriftlichen und handlichen Aufgabenmaterial innerhalb der Schule als auch in Form von konkreten Orientierungsanforderungen im Realraum.

Raumvorstellung ist ein viel untersuchtes, mehrdimensionales Konstrukt innerhalb der Mathematikdidaktik und der Bezugsdisziplin Psychologie, über dessen Strukturmodell keine Einigkeit herrscht (vgl. Grüßing 2012). Mathematikdidaktische Forschung konzentrierte sich vor allem auf figurale Darstellungen räumlicher Objekte in schriftlichen Tests oder auf kleines dreidimensionales Aufgabenmaterial in Interviewsituationen. Räumliche Anforderungen im Realraum wurden nicht erfasst. Dabei ist offensichtlich, dass bei Orientierungsleistungen im Realraum ebenfalls räumliche Fähigkeiten, wie beispielsweise Überlegungen zur Raumorientierung und zur eigenen Perspektive erforderlich sind und sich diese nicht mit schriftlichen Tests erfassen lassen.

Eine Erweiterung des Konstruktes Raumvorstellung auf den Kontext des Realraumes scheint demnach angemessen, wirft aber auch die Frage auf, in welchem Zusammenhang räumliche Fähigkeiten im Mathematikunterricht und im Realraum stehen.

Theoretischer Hintergrund

Ein Blick auf die Bezugsdisziplin Psychologie zeigt, dass sich räumliche Anforderungen im Mathematikunterricht und im Realraum durch die von Montello (1993) zusammengefassten *Scales of Space* begrifflich fassen lassen. Demnach werden räumliche Fähigkeiten, die sich auf die Verarbeitung gegebener räumliche Information beziehen, welche in ihrer projektiven Größe kleiner als der Betrachter sind als *Small Scale* Fähigkeiten bezeichnet. Alle gegebenen räumlichen Informationen lassen sich von einem Standpunkt aus erfassen. Small Scale Fähigkeiten werden zumeist in Form von psychometrischen Tests operationalisiert (Eliot 1983).

Räumliche Fähigkeiten im Realraum werden hingegen als *Large Scale* Fähigkeiten bezeichnet. Die gegebenen räumlichen Informationen in diesem Kontext sind projektiv größer als der Betrachter. Zur Erfassung aller relevanten Informationen muss sich zwischen verschiedenen Standpunkten bewegt werden. Large Scale Fähigkeiten werden in einer Facette verschiedenster Tests operationalisiert, die von Zeigeaufgaben bis hin zum Wiedergeben erfasster Realräume über Skizzen reichen (Hegarty 2006; Liben 1981).

Zusammenhänge in der kognitive Verarbeitung räumlicher Information aus Small und Large Scale könnten sich aus den erforderlichen mentalen Transformationen herleiten lassen. Neurowissenschaftliche Befunde zu Small Scale Fähigkeiten deuten auf zwei Klassen von kognitiven Prozessen hin, die unterschiedlich gut von Probanden bewältigt werden und demnach als zwei Subfacetten des Konstruktes Small Scale aufgefasst werden können: objektbasierte Transformationen und Transformationen der egozentrischen Perspektive (Kozhevnikov & Hegarty 2001; Zacks et al. 2000). *Objektbasierte Transformationen (OB)* sind vorgestellte Rotationen oder Translationen von Objekten im Bezugssystem des umgebenden Raumes, während *Transformationen der egozentrischen Perspektive (EGO)* eine vorgestellte Rotationen oder Translationen des eigenen Standpunktes erfordern. Interessant ist, dass Untersuchungen, die Zusammenhänge zwischen Small und Large Scale Fähigkeiten intendieren, Small Scale Fähigkeiten oft mit der Subfacette objektbasierte Transformationen gleichsetzen (vgl. Wang et al. 2014). Ein Grund dafür könnte in fehlendem Testmaterial liegen, was zuverlässig die Subfacette EGO testet.

Untersuchungen zu kognitiven Prozessen in Realräumen deutet zunächst nur auf eine Subfacette EGO hin. Dabei wurde diese Subfacette vor allem im Zusammenhang mit Testinstrumenten gefunden, die auf mentalen Transformationen von gelernten Layouts von Realräumen basierten (Hegarty & Waller 2004).

Der kognitionspsychologische Forschungsstand bezüglich des Zusammenhangs von Small und Large Scale Fähigkeiten zeigt bisher keine einheitlichen Resultate. Allen et al. (1999) konnten schwache Zusammenhänge beider Fähigkeiten zeigen und formulierten, dass die Fähigkeit zur Perspektivübernahme eine Mediatorfähigkeit darstellt. Hegarty et al. (2006) konnten dieses Resultat nicht reproduzieren, zeigten aber Korrelationen zwischen beiden Fähigkeiten bei Erwachsenen. Quaiser-Pohl et al. (2004) untersuchten Zusammenhänge zwischen Small Scale Fähigkeiten und mentalen Repräsentationsfähigkeiten von Large Scale Räumen bei Kindern und konnten keine signifikanten Zusammenhänge finden.

Im Rahmen der Dissertation der Autorin sollen sowohl das Konstrukt Small als auch Large Scale in zwei Subfacetten OB und EGO differenziert und anschließend für die Zielgruppe Grundschule operationalisiert werden. Von dieser theoretischen Auslegung der Konstrukte wird erwartet, dass sich signifikante Zusammenhänge beider Fähigkeiten ergeben und gegebenenfalls eine Mediatorfähig gefunden werden kann.

Forschungsprojekt

Ausgehend von dem derzeitigen Forschungsstand ergeben sich folgende Forschungsfragen für das Dissertationsprojekt:

In welchem Maße hängen räumliche Fähigkeiten von Viertklässlern im Small Scale und im Large Scale Raum zusammen?

Nimmt das Subfacette Transformationsfähigkeiten des egozentrischen Bezugssystems (EGO) eine Mediatorfähigkeit ein? Lässt sich diese über psychometrische Tests messen?

Diese Fragen sollen innerhalb über die Messung von individuellen Leistungsunterschieden in zwei räumlichen Tests beantwortet werden.

Stichprobe Geplant ist eine Studie mit 200 Viertklässlern aus über 10 Grundschulen des Landkreises Lüneburg kurz vor den Sommerferien.

Testinstrumente Räumliche Fähigkeiten im *Small Scale* werden in einem psychometrischen Test untersucht. Dieser findet als Gruppentest mit vorheriger Erklärung und der Möglichkeit zu Nachfragen im Klassenraum statt. Das Aufgabenmaterial umfasst sowohl bereits eingesetzte Aufgaben (z.B. aus Grüßing 2012) als auch eine Neuentwicklung von Aufgaben. Letztere operationalisieren vor allem die Subfacette EGO in verschiedenen Anforderungen. Die Subfacette OB wird durch 2D und 3D Aufgaben zur Mentalen Rotation sowie den Paper Folding Task abgebildet.

Orientierungsfähigkeiten im *Large Scale* werden in einem kartenbasierten Orientierungstest an der Leuphana Universität Lüneburg getestet. Die Viertklässler werden dabei in einem Einzeltestverfahren über Campus begleitet und lösen Zeigeaufgaben mit und ohne Karte, Positionieren sich selbst auf der Karte und suchen Landmarken. Aufgaben zur Erinnerung räumlicher Information und Anwendung von Transformationen zwischen Karte und Realraum halten sich dabei die Waage.

Auswertungsverfahren Die Ergebnisse sollen anschließend mittels Strukturgleichungsmodellen statistisch ausgewertet und danach innerhalb des mathematikdidaktischen Rahmens ausgedeutet werden.

Ausblick

Ein Rückblick zeigt, dass im Rahmen des Dissertationsprojektes das Konstrukt Raumvorstellung mittels theoretischen Erkenntnissen aus der Psychologie um Fähigkeiten im Realraum erweitert wurde. Operationalisierungen in Form von einem schriftlichen Test und einem Test im Realraum wurden entworfen und kurz vor der Tagung erfolgversprechend pilotiert.

Bis zur nächsten Tagung der GDM steht die Realisierung und Auswertung der Hauptstudie im Vordergrund. Leitfragen zur Reflexion der Testinstrumente werden neben einer eindeutigen Zuordnung der Aufgaben zu den unterliegenden kognitiven Prozessen auch Fragen nach weiteren möglichen Einflussfaktoren auf Leistungsunterschiede und deren Erfassung sein.

Literatur

Allen, G. L. (1999). Spatial abilities, cognitive maps, and wayfinding. *Wayfinding behavior: Cognitive mapping and other spatial processes*, 46-80.

Eliot, J., & Smith, I. M. (1983). *An international directory of spatial tests*. Cengage Learning Emea.

Grüßing, M. (2012). *Räumliche Fähigkeiten und Mathematikleistung. Eine empirische Studie mit Kindern im 4. Schuljahr: Eine empirische Studie mit Kindern im 4. Schuljahr*. Waxmann Verlag.

Hegarty, M., & Waller, D. (2004). A dissociation between mental rotation and perspective-taking spatial abilities. *Intelligence*, *32*(2), 175-191.

Hegarty, Mary, et al. (2006). Spatial Abilities at Different Scales: Individual Differences in Aptitude-Test Performance and Spatial-Layout Learning. *Intelligence*, *34* (2006), 2, 151-176.

Kozhevnikov, M., & Hegarty, M. (2001). A dissociation between object manipulation spatial ability and spatial orientation ability. *Memory & Cognition*, *29*(5), 745-756.

Liben, L. S. (1981). Spatial representation and behavior: Multiple perspectives. *Spatial representation and behavior across the life span: Theory and application*, *79*, 3-32.

Montello, D. R. (1993). Scale and multiple psychologies of space. In *Spatial information theory a theoretical basis for GIS* (pp. 312-321). Springer Berlin Heidelberg.

Quaiser-Pohl, Claudia , Eid, Michael ; Lehmann, Wolfgang (2004). The relationship between spatial abilities and representations of large-scale space in children - a structural equation modeling analysis. *Personality and Individual Differences, 36* (2004), 1, 95-107.

Wang, L., Cohen, A. S., & Carr, M. (2014). Spatial ability at two scales of representation: A meta-analysis. *Learning and Individual Differences*, *36*, 140-144.

Zacks, J. M., Mires, J., Tversky, B., & Hazeltine, E. (2000). Mental spatial transformations of objects and perspective. *Spatial Cognition and Computation*, *2*(4), 315-332.

Matthias HEINRICH, Oldenburg

Umsetzung eines Diagnose- und Förderprozesses durch angehende Mathematiklehrpersonen im Schulpraktikum

Theoretischer Hintergrund

Verstehendes Lernen hängt von persönlichen kognitiven Bedingungen, insbesondere aber vom domänenspezifischen Vorwissen ab (Baumert et al. 2004). Gerade in hierarchisch strukturierten Unterrichtsfächern wie Mathematik entstehen kumulative Lernergebnisse, bei denen einmal entstandene Lernlücken das anschließende Lernen fundamental behindern können (Schrader 2013). Deshalb ist eine Anpassung des Unterrichts auf die Lernvoraussetzungen der Lernenden notwendig. Hier wird dann von adaptivem Unterricht gesprochen (u.a. Buholzer 2014). Auch empirisch wurde bereits gezeigt, dass Lehr-Lernprozesse wirksam konzipiert werden können, wenn sie an einzelne Lernstände der Lernenden ansetzen und diese adaptiv fortentwickeln (z.B. Helmke 2014). Somit ist die Individualisierung der Lehr-Lernprozesse, die sich auch auf eine Gruppe von Lernenden beziehen kann, durchaus eine bedeutende Aufgabe von Lehrpersonen (König, Buchholz & Dohmen 2015). Um dieser Aufgabe nachkommen zu können, müssen Lehrpersonen zunächst den Lernstand ihrer Lernenden diagnostizieren (u.a. Hußmann, Leuders & Prediger 2007). Diagnose und individuelle Förderung durch adaptiven Unterricht sind also sehr eng miteinander verbunden.

Forschungsfragen und -design

Das hier vorgestellte Promotionsprojekt geht der Frage nach, wie angehende Mathematiklehrpersonen des gymnasialen Lehramts adaptiven Unterricht mit Hilfe von Diagnose in ihrem Schulpraktikum umsetzen. Der Fokus liegt hier aber nicht auf dem vorhergehenden Diagnoseprozess, sondern auf der sich daran anschließenden Gestaltung des adaptiven Unterrichts. Deshalb verfolgt das Projekt unter anderem die nachfolgenden Forschungsfragen:

- Welche Konsequenzen ziehen angehenden Lehrpersonen aus dem Lernstand ihrer Lernenden für ihre Unterrichtsplanung?
- Wie begründen sie diese Konsequenzen?
- Wie kann der Begründungsprozess von der Diagnose zur Förderung empirisch modelliert werden?

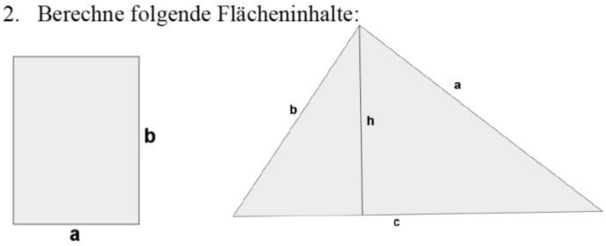
Im Zuge einer qualitativ-empirischen Studie planen fünfzehn Mathematikstudierende des gymnasialen Lehramts in ihrem zweiten Schulpraktikum eine Mathematikstunde. Dabei sollen sie unter anderem überlegen, welche fachbezogenen Voraussetzungen ihre Lernenden mitbringen sollten, um die

Lernziele der Stunde erreichen zu können. Anschließend erstellen die Studierenden einen Diagnosebogen – bestehend aus einigen mathematischen Aufgaben –, um die Lernausgangslage ihrer Lernenden zu bestimmen. Nach der Datenerhebung überarbeiten sie, sofern sie es für nötig halten, ihre Planung und führen den Unterricht dann durch. Zusätzlich wird mit jedem der Studierenden im Anschluss ein offenes, teilstandardisiertes Leitfadeninterview geführt, in dem ihre Entscheidungen für die adaptive Unterrichtsplanung sowie die damit verbundenen Begründungen detaillierter in den Fokus gerückt werden. Somit liegen der erste Unterrichtsentwurf, das Diagnoseinstrument samt Schülerantworten, der überarbeitete Unterrichtsentwurf sowie die Interviewtranskripte vor. Nachfolgend soll anhand der Studentin Christina ein beispielhafter Einblick in die Daten gegeben werden.

Analyse eines Fallbeispiels

Christina plant eine Doppelstunde, in der die Lernenden zunächst einen Beweis für den Satz des Pythagoras erarbeiten sollen, bevor sie ihn dann anwenden, um bei einigen rechtwinkligen Dreiecken fehlende Seitenlängen zu berechnen. Für den ersten Teil der Stunde müssten die Lernenden unter anderem den Flächeninhalt von Rechtecken und rechtwinkligen Dreiecken berechnen können, so Christina. Für den zweiten Teil sei beispielsweise die Kenntnis über Wurzelgesetze wichtig. Daher entscheidet Christina sich in diesen beiden Teilbereichen für die Diagnoseaufgaben 2 und 4, die in Abbildung 1 zu sehen sind.

2. Berechne folgende Flächeninhalte:



$a = 4cm, b = 6cm$ $\quad$ $a = 4cm, b = 3cm, c = 5cm, h = 2{,}4cm$

4. Richtig oder falsch?
   a) $(a+b)\cdot(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   b) $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = a + b$
   c) $\sqrt{3+5} = \sqrt{8}$

Abbildung 1: Diagnoseaufgabe 2 und 4 von Christina

Durch ihr Diagnoseaufgabe 4 stellt sie fest, dass „60% der Schüler dachten, dass $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = a + b$ korrekt und dass $\sqrt{3+5} = \sqrt{8}$ falsch wäre“. Sie interpretiert das Diagnoseergebnis wie folgt: „Das Ziehen von Wurzeln und die Wurzelgesetze scheinen noch nicht richtig verinnerlicht worden zu sein.“ Als Begründung für die daraus resultierende Konsequenz gibt Christina an, dass dies „am Ende der Stunde noch einmal aufgegriffen werden [sollte]. Denn das brauchen sie für die Anwendung immer wieder.“ Deshalb soll „vor der Anwendung des Satzes des Pythagoras […] mit einem Zahlenbeispiel die Richtigkeit von $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = a + b$ überprüft sowie $\sqrt{3+5} = \sqrt{8}$ berechnet werden“. Bei der Berechnung der Flächeninhalte des

Rechtecks und Dreiecks (vgl. Aufgabe 2) habe es „nur wenige Schwierigkeiten gegeben. Teilweise sei die Flächenformel für Dreiecke vergessen worden.“ Christian interpretiert: „Flächeninhalte können größtenteils berechnet werden.“ Daher geht sie davon aus, dass die Lernenden den allgemeinen Beweis erarbeiten können, „zumal sie die Erarbeitung in Kleingruppen vollziehen. Dort werden Lücken dann durch die Kommunikation untereinander ausgemerzt.“ Deshalb ändert Christina an dieser Stelle nichts.

Prozessmodell

Insgesamt können bei den fünfzehn Studierenden 112 Argumentationsstränge – jeweils bestehend aus der Interpretation des Ergebnisses einer Diagnoseaufgabe, der gezogenen Konsequenz für die Unterrichtsplanung

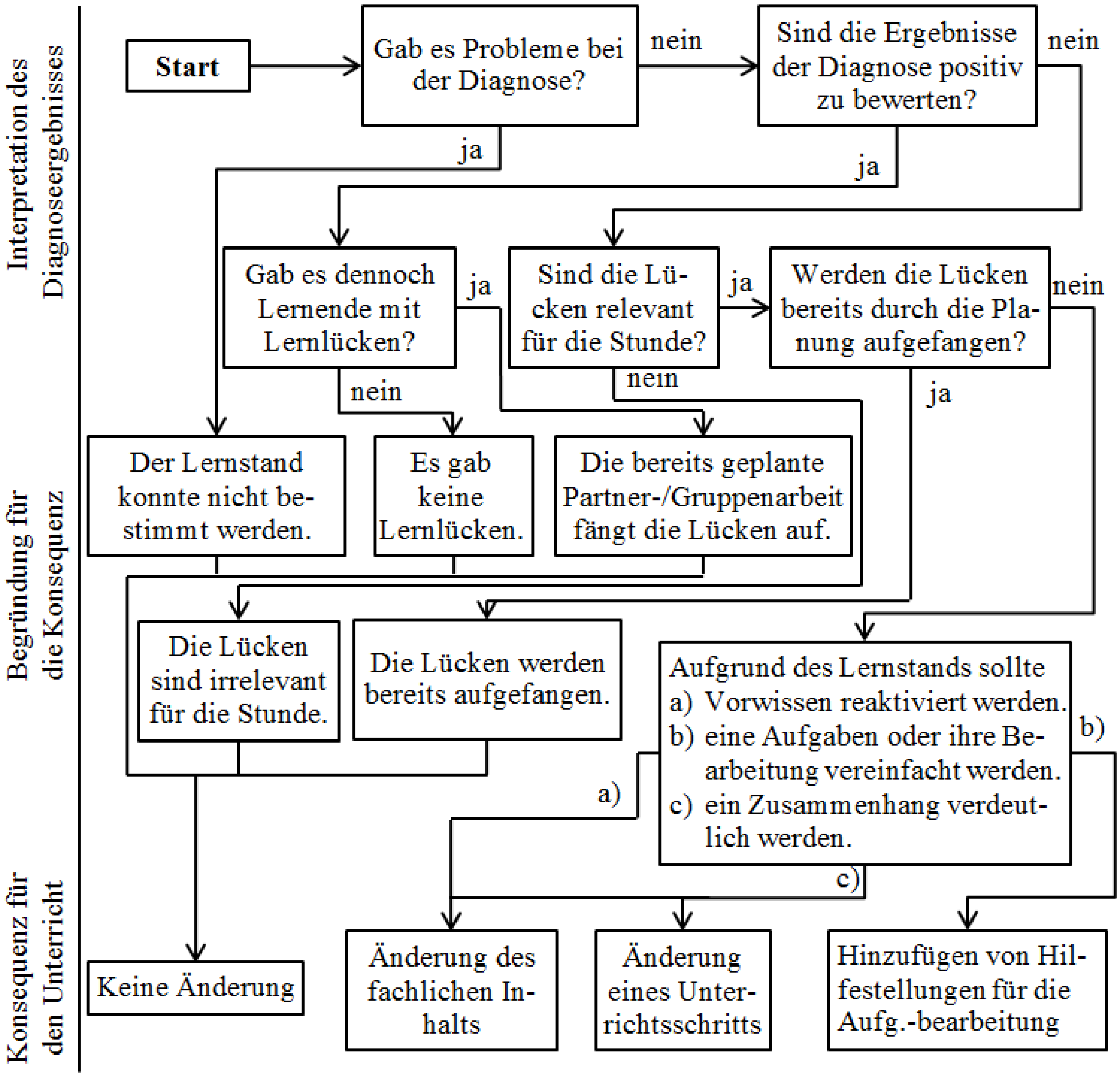


Abbildung 2: Prozessmodell

sowie den entsprechenden Begründungen – identifiziert werden, die bei mindestens zwei Studierenden auftreten. Aus einer Analyse dieser Argumentationsstränge geht ein Prozessmodell hervor (vgl. Abbildung 2), mit dem die empirisch auftretenden Wege von dem Ergebnis einer Diagnoseaufgabe zu der getroffenen Konsequenz modelliert werden können. Es weist einige bemerkenswerte Aspekte auf: Die Studierenden reflektieren ihre eigene Diagnose häufig, indem sie sich fragen, ob es tatsächlich an den Lernenden gelegen hat, dass eine Aufgabe nicht korrekt bearbeitet wurde oder ob die Diagnose selbst das Problem gewesen ist. Zudem fällt auf, dass die Studierenden, wenn es bei einer positiven Bewertung des Diagnoseergebnisses dennoch einige Lernende gibt, die benötigte fachbezogene Voraussetzungen nicht mitbringen, stets der bereits implementierte Partner- oder Gruppenarbeit vertrauen. Dabei wird jeweils ein von zwei Motiven deutlich: Entweder sie argumentieren, dass die Lernenden sich untereinander helfen und die Lernlücken so füllen würden oder aber sie machen deutlich, dass die leistungsstärkeren Lernenden die entsprechende Aufgabe schon lösen würden, sodass am Ende die Lösung an der Tafel stünde. Des Weiteren ist auffällig, wie viele Fragen „richtig" beantwortet werden müssen, damit es überhaupt zu einer Änderung kommt. Dies kann ein Indiz dafür sein, dass die Studierenden sehr gründlich überlegen, ob eine Änderung wirklich notwendig ist. Denkbar ist allerdings auch, dass sie eben nicht wissen, wie sie auf das Diagnoseergebnis reagieren können oder sollen und daher nach Begründungen suchen, die das Bestehenlassen der Planung rechtfertigen.

Literatur

Baumert, J., Kunter, M., Brunner, M., Krauss, S., Blum, W. & Neubrand, M. (2004). Mathematikunterricht aus Sicht aus Sicht der PISA-Schülerinnen und -Schüler und ihrer Lehrkräfte. In M. Prenzel et al. (Hrsg.), *PISA 2003: Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs* (S. 314-354). Münster: Waxmann.

Buholzer, A. (2014). *Von der Diagnose zur Förderung: Grundlagen für den integrativen Unterricht*. Baar: Klett.

Helmke, A. (2014): *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität: Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts* (5. Aufl.). Seelze: Klett-Kallmeyer.

Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2007). Schülerleistungen verstehen – Diagnose im Alltag. *Praxis der Mathematik, 49*(15), 1-8.

König, J., Buchholtz, C. & Dohmen, D. (2015). Analyse von schriftlichen Unterrichtsplanungen: Empirische Befunde zur didaktischen Adaptivität als Aspekt der Planungskompetenz angehender Lehrkräfte. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaften, 18*, 375-404.

Schrader, F.-W. (2013). *Diagnostische Kompetenz von Lehrpersonen. Beiträge zur Lehrerbildung, 31*(2), 154-165.

Gaby HEINTZ, Neuss, Henning KÖRNER, Oldenburg, Guido PINKERNELL, Heidelberg, Florian SCHACHT, Essen

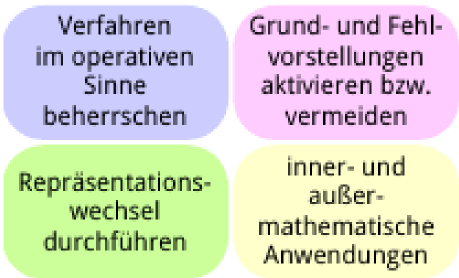
Basis- und Werkzeugkompetenzen von Klasse 5 bis 12

1. Einleitung

Unser Anliegen ist die Formulierung einer schulischen Perspektive auf zwei zentrale didaktische Aspekte: Basiskompetenzen und Werkzeugkompetenzen. Zu beiden Themen gab es von MNU initiierte Arbeitsgruppen, deren Ergebnisse im Folgenden vorgestellt werden. Beide Arbeitsgruppen beschäftigten sich mit der Fragestellung, welche Kompetenzen Schülerinnen und Schüler am Ende ihrer Schulzeit verfügen sollten und wie diese aufgebaut werden. Die Basiskompetenzen haben dabei einen umfassenderen Anspruch, um das grundlegende Wissen und Können geht es überall im Mathematikunterricht; die Werkzeugkompetenz ist eine spezielle Kompetenz, spielt aber überall eine wichtige Rolle und liegt quer zu den inhaltsbezogenen Kompetenzen.

2. Basiskompetenzen: Beherrschen und Verstehen am Ende der Sekundarstufe II

Die Ergebnisse der Arbeitsgruppe Basiskompetenzen (Pinkernell et al. 2015) verstehen sich als Beitrag zur Diskussion über mathematisches Grundwissen und -können am Übergang Schule-Hochschule. Nicht nur *was* man können muss ist zu konkretisieren, sondern auch *wie* man die in den verschiedenen Anforderungskatalogen gelisteten Inhalte verfügbar haben sollte. Das *Wie* wird aus schulischer Sicht als ein Beherrschen und Verstehen auf Basis etablierter unterrichtsdidaktischer Verstehensmodelle beschrieben:

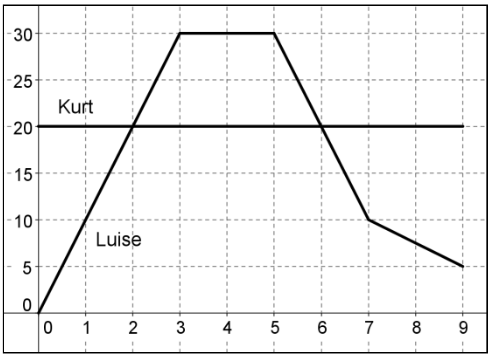


Verfahren im operativen Sinne beherrschen meint über ein prozedurhaftes Abarbeiten einzelner Schritte hinaus das produktive Anwenden des Verfahrens, etwa durch situationsangemessenes Modifizieren und Reorganisieren der Einzelschritte. *Grundvorstellungen aktivieren* heißt, über fachlich angemessene mentale Modelle zu einem Begriff oder Verfahren zu verfügen und diese in verschiedenen Problemsituationen zu nutzen. Die Forderung, *Repräsentationswechsel durchführen* zu können, trägt dem Umstand Rechnung, dass der Zugang zu einem mathematischen Objekt nur über seine Repräsentationen erfolgen kann. Verstehen heißt hier konkret, eine Darstellung durch eine andere Darstellung erklären zu können. Begriffe und Verfahren *in inner- und außermathematischen Situationen anwenden* zu können ist besonderer Ausdruck einer flexiblen Verfügbarkeit.

Diese vier Verstehensaspekte werden an einer Vielzahl an Aufgaben aus dem Bereich der Oberstufenanalysis konkretisiert. Die Auswahl der Inhalte beruht – der Schulperspektive folgend – auf den Zielformulierungen der KMK-Bildungsstandards im Fach Mathematik für die allgemeine Hochschulreife (KMK 2015).

Ein *Beispiel* (aus und weitere Beispiele in Pinkernell et al. 2015):

„Das Diagramm zeigt jeweils die „Zeit – Geschwindigkeits-Kurve“ der Lastkähne „Luise“ und „Kurt“, die von derselben Stelle aus auf dem Küstenkanal in die gleiche Richtung neun Stunden lang fahren.



Beantworten Sie begründend die Fragen. Benutzen Sie Skizzen.

a) Wer fährt in den neun Stunden länger mit höherer Geschwindigkeit?
b) Wer ist nach neun Stunden weiter gefahren?
c) Wann gibt es Überholvorgänge? Wer überholt wen?

Erwartete Lösung: Es sind beide mit dem Integralbegriff assoziierten Grundvorstellungen (Rekonstruktion und Fläche) zu aktivieren und eine Verwechslung von Weg und Geschwindigkeit zu vermeiden. Damit entdeckt man in b), dass Kurt weiter gefahren ist und in c), dass Luise nach etwas mehr als vier Stunden Kurt überholt und der dann wieder Luise nach ca. 7,5 Stunden.

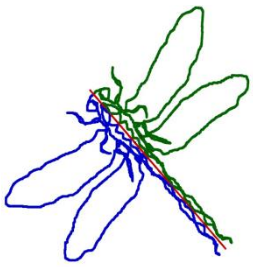
3. Werkzeugkompetenzen

Über welche Werkzeugkompetenzen sollen Lernende am Ende ihrer Schullaufbahn verfügen? Digitale Werkzeugkompetenzen sind nicht einfach irgendwelche Kompetenzen neben anderen, sondern liegen quer zu allen inhaltlichen Kompetenzen/ Leitideen und allen anderen prozessbezogenen Kompetenzen und spielen bei allen drei zitierten Grunderfahrungen nach Heinrich Winter (1996) eine wesentliche Rolle. Digitale Werkzeuge werden für alle prozessbezogenen Kompetenzen sowie für alle mathematischen Inhaltsbereiche genutzt.

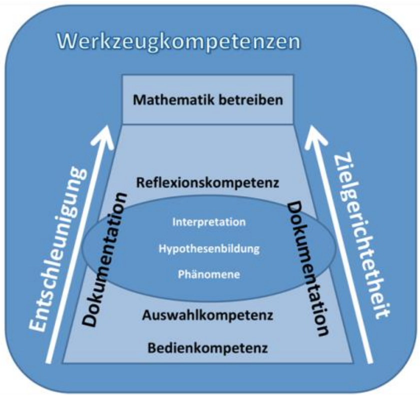
Hieraus folgt, dass für uns *Werkzeugkompetenz bedeutet, kompetent Mathematik zu betreiben* und nicht nur kompetent Geräte zu bedienen (Heintz et. al. 2014).

Wie lässt sich Werkzeugkompetenz in diesem Sinne systematisch aufbauen im Rahmen eines konsistenten Curriculums?

Ein geeignetes Beispiel ist die Erzeugung einer achsensymmetrischen Figur, ein digitales Arbeitsblatt zur Einführung der Achsensymmetrie in Jahrgangstufe 5. Dort finden die Lernenden einen beweglichen Punkt und seinen an einer versteckten Symmetrieachse gespiegelten Bildpunkt. Beide Punkte sind im Spurmodus, so dass die Bewegungen der Punkte sichtbar bleiben.



Dieses digitale Arbeitsblatt ist nicht nur gut geeignet, um konkrete Eigenschaften der Achsenspiegelung zu erkunden und zu entdecken, sondern auch für den gezielten Aufbau von digitaler Werkzeugkompetenz. So erfahren die Lernenden, dass willkürliches Ziehen des Punktes wenig hilfreich ist, während zielgerichtetes und systematisches Ziehen des Punktes (so, dass sich die Spuren der Punkte mehrmals treffen und so, dass eine klare, gut erkennbare Form oder Figur entsteht) wesentliche Phänomene offenlegt.



Die Schülerinnen und Schüler lernen hier, dass sie nicht bei den Phänomenen stehen bleiben dürfen, sondern dass die Phänomene den Ausgangspunkt bilden für die weitere mathematische Argumentation, der eigentliche Kern der Werkzeugkompetenzen (Heintz et. al. 2016).

4. Schülerdokumentationen

Bei der Vermittlung von Werkzeugkompetenzen spielt in der Praxis die Dokumentation der Bearbeitungswege und der Lösungen der Lernenden eine wichtige Rolle. Dabei ist festzustellen, dass eine curriculare Orientierung noch weitgehend fehlt, wie Schülerdokumentationen zu erstellen und zu bewerten sind. Wenn Lernende digitale Werkzeuge einsetzen, nutzen sie sowohl Fach- und Umgangssprache als auch die Sprache der Werkzeuge. Hierbei gibt es große Unsicherheiten, was als angemessen und erstrebenswert anzusehen ist. Von der Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen wurde deshalb eine Strukturierungshilfe für Schülerdokumentationen erarbeitet. Diese gliedert sich entlang unterschiedlicher Phasen der Problembearbeitung. In der unterrichtspraktischen Umsetzung kann die sprachliche Reflexion die jeweils spezifischen sprachlichen Anforderungen und Funktionen der jeweiligen Phasen initiieren. Die Lernenden beschreiben zunächst im Rahmen der ersten Dokumentationsphase (Ansatz) in qualitativer Weise, welches Erkenntnisinteresse der jeweiligen Aufgabe zugrunde liegt. In diesem Zusammenhang sind umgangssprachliche Beschreibungen denkbar, die dann im Rahmen der zweiten Dokumentationsphase (Mathematik) mathematisiert werden. Die Werkzeugsprache kann dann in der dritten Phase zu Wort kommen. Die Lernenden dokumentieren hier den Einsatz des Werkzeugs, je nach Lernstand in Verbindung mit der Dokumentation ganz konkreter Werkzeugbefehle und Bedienungshinweise. Zentrale Idee der hier vorgestellten Dokumentationsstruktur ist dabei, nicht nur die unterschiedlichen Phasen zu trennen, sondern auch die damit verbundenen sprachlichen Anforderungen. Im Rahmen der Beschreibung, Validierung und Reflexion des Lernprozesses und der Ergebnisse nutzen die Lernenden in der Regel die Fachsprache. Die Werkzeugsprache sollte im Verlauf des Lernprozesses zunehmend mit der Beherrschung des Werkzeugs in den Hintergrund treten, weil die Funktion der Dokumentation der Bedienung an Bedeutung verlieren sollte.

Literatur

Heintz, G., Elschenbroich, H.-J., Laakmann, H., Langlotz, H., Rüsing, M., Schacht, F., Schmidt, R. Tietz, C. (2016): Werkzeugkompetenzen – Kompetent mit digitalen Werkzeugen Mathematik betreiben. Erscheint in: Verlag K. Seeberger. Neuss.

Heintz, G., Elschenbroich, H.-J., Laakmann, H., Langlotz, H., Schacht, F., Schmidt, R. (2014): Digitale Werkzeugkompetenzen im Mathematikunterricht. In: MNU 67/5 S. 300–306, Verlag K. Seeberger, Neuss

Pinkernell, G., Elschenbroich, H.-J., Heintz, G., Körner, H., Langlotz, H., Pallack, A. (2015): Grundlegendes Wissen und Können am Ende der Sekundarstufe II: Zentrale Begriffe und Verfahren beherrschen und verstehen. (MNU Themenreihe Bildungsstandards: www.tinyurl.com/MNU-WuK-SekII, Abruf am 22.3.2016).

Friederike HEINZ, Gießen

Spielend diagnostizieren?

Lernhürden beim Rechnenlernen einmal anders erfassen

Dass geeignete mathematische Lernspiele vielfältige Prozesse anregen können, die im Rahmen mathematischer Bildung erwünscht sind, belegen bereits verschiedene Studien (vgl. für einen Überblick Gasteiger 2013). Bei der Sichtung vieler im Handel erhältlicher Lernspiele fällt jedoch auf, dass es fast immer nur um die Automatisierung von Lerninhalten geht (z.B. die Ergebnisse der 1x1-Reihen). Das Ziel, mathematisches Verständnis hervorzubringen und geeignete Grundvorstellungen im Themenfeld aufzubauen, gerät bei diesen Spielen oft aus dem Blick.

Ein Ziel meines Promotionsvorhabens ist daher die Entwicklung und Erprobung von kommunikationsintensiven Spielen zur Bearbeitung ausgesuchter „Lernhürden beim Rechnenlernen“. Mathematische Lernhürden sind verfestigtes zählendes Rechnen, einseitiges Zahlverständnis, Probleme mit dem Stellenwertsystem, einseitiges Operationsverständnis sowie Intermodalitätsprobleme (vgl. u.a. Schipper 2009, Meyerhöfer 2011, Gaidoschik 2012). Ein zweites Anliegen meines Dissertationsprojektes ist es, zu untersuchen, inwieweit sich diese Spiele als Instrument zur informellen Erstdiagnose eignen, im Sinne einer Alternative zu bestehenden Testverfahren der informellen und standardisierten Diagnostik (vgl. Jacobs/Petermann 2012). Übernimmt man z.B. eine dritte Grundschulklasse und möchte wissen, wo jedes Kind in Mathematik inhaltlich steht, so geben Noten und Arbeiten über bisherige Inhalte lediglich anhand der Fehlerzahl einen quantitativen Hinweis darauf, was die Kinder noch nicht können. Sie geben aber keine Antwort auf die Frage „warum“ (vgl. Kaufmann/Wessolowski 2006). Informelle Testverfahren, wie z.B. das Elementar-Mathematische BasisInterview (Peter-Koop u.a. 2013), können über „lautes Denken“ der Kinder kompetenzorientierte Hinweise geben, was ein Kind schon kann und worauf man in einer individuellen Förderung aufbauen kann. Jedoch sind Einzelinterviews zeitaufwändig und erfordern oft spezielle Fortbildungen. Spiele hingegen können von der ganzen Klasse an Gruppentischen durchgeführt werden. Die Kinder interagieren miteinander statt mit der Lehrkraft und empfinden dies nicht als Testsituation. Da die Lehrkraft somit nur noch beobachtet und nicht mehr interviewt, wurden die Spiele so konzipiert, dass sie kommunikationsintensiv sind, also zu lautem Denken auffordern. Das Spieldesign sowie erste Ergebnisse der Analyse von videographierten Spielsituationen werden im Folgenden anhand von einem der vier im Rahmen der Promotion entwickelten Spiele vorgestellt.

Die Spiele bauen inhaltlich aufeinander auf und können daher je nach Themenfeld und Diagnoseinteresse eingesetzt werden. Sie behandeln im Zahlenraum bis 100 die Bereiche „Schätzen, Zahl- und Mengenverständnis“, „Addition und Subtraktion“, „Kleines Einmaleins“ und „Kleines Einsdurcheins“. Die Idee zum Multiplikations-Spiel „Besuch im Zoo“ wurde von vier Studierenden im Rahmen meines Seminars „Rechenschwäche be-greifen“ erarbeitet und für die Studie adaptiert und neu illustriert:

Idee: C. Knobloch, G. Neugebauer, C. Stenzel, L. Stoß, A. Werner

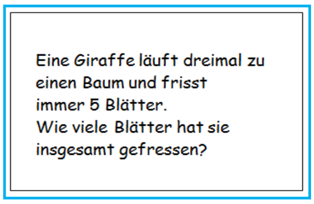
Die Kinder würfeln reihum. Entsprechend der Tatzenfarbe des Feldes, auf dem ein Kind mit seiner Spielfigur landet, wird eine passende Karte gezogen, für alle Kinder sichtbar hingelegt und ggfs. laut vorgelesen. Danach bearbeiten alle Kinder gleichzeitig den Auftrag auf der Karte hinter ihrem Sichtschutz und vergleichen daraufhin ihre Lösungen laut miteinander. Die Kinder handeln selbst aus, wer eine passende oder fast passende Lösung notiert hat und seine Figur um zwei, ein oder kein weiteres Feld vorziehen darf. Die drei Kartentypen des Spiels stehen jeweils für folgende Aufträge:

1. Rote Tatzenkarte:

„Zeichnet die Sprünge der Tiere auf dem Zahlenstrahl ein. Beginnt bei der Null. Vergleicht eure Lösungen.“

(Es gibt zwei rote Kartensorten: eine Reihe oder zwei Reihen des kleinen Einmaleins im Vergleich.

Idee: Müller/Wittmann 2012, Das Zahlenbuch 2)



2. Blaue Tatzenkarte:

„Schreibt zur Rechengeschichte passende Aufgaben auf euren Notizblock. Vergleicht eure Lösungen.“

3. Gelbe Tatzenkarte:

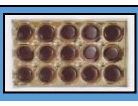
„Schreibt zum Bild passende Aufgaben auf euren Notizblock. Vergleicht eure Lösungen!“

Anzumerken ist, dass die Kinder bei den gelben und blauen Tatzenkarten vor Spielbeginn aufgefordert werden, jeweils alle passenden Aufgaben, die ihnen einfallen, zu notieren. Sie sollen auch versuchen, das Ergebnis auszurechnen, dessen Richtigkeit ist aber für das weitere Vorrücken der Spielfiguren noch nicht relevant.

Zur Einordnung der Lösungen wurden für jeden Kartentyp entsprechend der Lernhürde, die im diagnostischen Fokus liegen soll, alle möglichen Bearbeitungsstufen formuliert. Am Beispiel der gelben Tatzenkarten, dem hier abgebildeten Beispiel mit zwölf Äpfeln und bezogen auf die Lernhürde „Operationsverständnis“ sieht eine beispielhafte Einordnung der notierten Lösungen einer Spielgruppe (S1, S2 und S3) wie folgt aus:

Die Kombination aus Beobachtungen und Notizen ist dabei sehr hilfreich, denn im Video sieht man z.B. Strategien beim Ermitteln passender Aufgaben, z.B. das Abzählen der Äpfel einer „Zeile“ und „Spalte“. Insbesondere voneinander abweichende Lösungen geben Anlass zum Begründen.

Man kann sich natürlich die Bearbeitungen der gelben Tatzenkarten durch diese drei Kinder auch im Prozess ansehen:

						
Kind	Gelbe Tatzenkarten - Bearbeitungsstufen					
S1	5B	4B	4A	SOMMER FERIEN	3B	4B
S2	4B	4B	4B		3B	3B
S3	4B	4B	4A		5A	5B

Die Übersicht zeigt die Unterschiede zweier Spieldurchgänge vor bzw. nach den Ferien: S2 notiert nach den Ferien wieder Aufgaben der fortgesetzten Addition. Hier bietet sich daher eine inhaltliche Wiederholung des Malnehmens an. S3 hingegen hat sich während der Ferien sogar gesteigert und notiert nun auch die Tauschaufgaben.

Erstellt man eine solche Tabelle für diesen Kartentyp und alle Kinder der Klasse, so wird optisch gut sichtbar, welche Kinder von ihren Bearbeitungen her nach oben oder unten „herausrutschen". Dies bildet in ähnlicher Weise auch die Auswertung der beiden anderen Kartentypen ab.

Resümierend lässt sich aufgrund der bisherigen Auswertungen festhalten, dass man anhand der entwickelten Spiele und der Bearbeitungsstufen einen guten Überblick über den Lernstand der Kinder bekommen kann, bezogen auf die im Spiel bearbeiteten Inhalte und Lernhürden. Allerdings wohlbemerkt auf der „Haben-Seite" - man kann nur abbilden, was ein Kind beim Bearbeiten der Spielkarten wirklich zeigt. Zudem bekommt man sowohl Hinweise auf Kinder, die mit bestimmten Inhalten bzw. Lernhürden noch Schwierigkeiten haben, als auch auf Kinder, die diese Hürden schon gut genommen haben und bereits weiter gefordert werden können. Das heißt, mathematische Lernspiele eignen sich durchaus als alternatives Instrument zur informellen Erstdiagnose, wenn sie gezielt das Bearbeiten von Lernhürden thematisieren, zur intensiven Kommunikation anregen und zugleich durch das Spielerlebnis motivieren und Spaß machen.

Literatur

Gaidoschik, M. (2012). Rechenschwäche - Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern. Buxtehude: Persen.

Gasteiger, H. (2013). Förderung elementarer mathematischer Kompetenzen durch Würfelspiele-Ergebnisse einer Interventionsstudie. In Greefrath, G., Käpnick, F. & Stein, M. (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2013, S. 336-339.

Jacobs, C., Petermann, F. (2012). Diagnostik von Rechenstörungen. Göttingen: Hogrefe.

Kaufmann, S., Wessolowski, S. (2006). Rechenstörungen. Diagnose und Förderbausteine. Seelze: Kallmeyer und Klett.

Meyerhöfer, W. (2011). Vom Konstrukt der Rechenschwäche zum Konstrukt der nicht verstandenen stofflichen Hürden. Pädagogische Rundschau, 65 (4), S. 401-426.

Müller, G., Wittmann, E. (2012). Das Zahlenbuch 2. Stuttgart: Klett.

Padberg, F. (2011). Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung. Heidelberg: Spektrum.

Peter-Koop, A., Spindeler, B., Wollring, B., Grüßing, M. (2013). ElementarMathematisches BasisInterview. Offenburg: Mildenberger.

Schipper, W. (2009). Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Braunschweig: Schroedel.

Esther HENSCHEN, Martina TESCHNER, Ludwigsburg

Angehende KindheitspädagogInnen und die Mathematik – Dokumente aus einem Grundlagenseminar

Es ist davon auszugehen, dass es nicht allein das explizite, wissenschaftlich-theoretische Wissen ist, das sich Studierende aneignen müssen, denn „inwieweit es Fachkräften gelingen kann, ihre jeweiligen Kompetenzen produktiv in der täglichen Arbeit wirksam werden zu lassen, wird von ihren Einstellungen, Werthaltungen und der eigenen Motivation abhängen." (Gasteiger & Benz 2016, o.S.). Im gerade von Gasteiger und Benz vorgelegten Kompetenzmodell wird dargestellt, dass „Haltung, Beliefs, Motivation", „explizites Wissen" und „implizites Wissen" professionelles Handeln bedingen (ebd., 2016). Diese drei Kompetenzfacetten stellen deshalb die zentralen Lern- und Reflexionsbereiche im hier beschriebenen Grundlagenseminar dar, wie sich gut anhand von Studierendendokumenten aufzeigen lässt.

Im Folgenden wird die Seminarstruktur kurz vorgestellt und anschließend entlang der benannten Kompetenzfacetten Einblick in das Seminar gegeben.

LV[9] 1-4 und LV 13 Mathewerkstätten: Mathematik treiben und mathematisches Tun reflektieren, z.B. zu ANNA-Zahlen, Wettspielen, Bandornamenten, Vielecken. Dabei entstehen Prozessdokumentationen, Briefe an sich selbst und Beschreibungen von Mustern.

LV 5-7 Didaktische Grundlagen zu mathematischen Inhaltsbereichen und zum Konzept „GMGM" (Gleiches Material in großer Menge (Lee, 2010)). Die Studierenden dokumentieren Impulse zu Perlenspielen, Handlungsweisen bei GMGM sowie zahlbasierte Bauanleitungen.

LV 8 Seminardokumentation: Rückblickend werden die bisherigen Seminarinhalte von den Studierenden als gemeinsame Wanddokumentation dargestellt, darin enthalten sind u.a. persönliche „Aha-Momente".

LV 9 Finden eines Interessensfokus: Zu jedem von Studierenden vorgeschlagenen Thema, das im weiteren Seminarverlauf gemeinsam erarbeitet werden könnte, wird ein Mindmap erstellt.

LV 10-11 Erweitern didaktischer Grundlagen je nach gewähltem Fokus: Das Gelernte wird in Form von Briefen an die anderen Seminare dokumentiert.

LV 12 Rolle der Fachkraft: Es entsteht ein Dokument mit dem Arbeitstitel „Wer bin ich und wer möchte ich werden?"

LV 14 Rückblick und Ausblick: Die Studierenden verfassen Elfchen.

[9] LV: Lehrveranstaltung

1. Haltung, Beliefs und Motivation

Zur Erläuterung dieser Kompetenzfacette macht es Sinn, sich an Anders zu orientieren, die zwei Bereiche benennt. Zum einen haben wir es mit pädagogischen Orientierungen und Einstellungen zu tun, zum anderen mit motivationalen und emotionalen Aspekten. (vgl. ebd. 2012, S. 21).

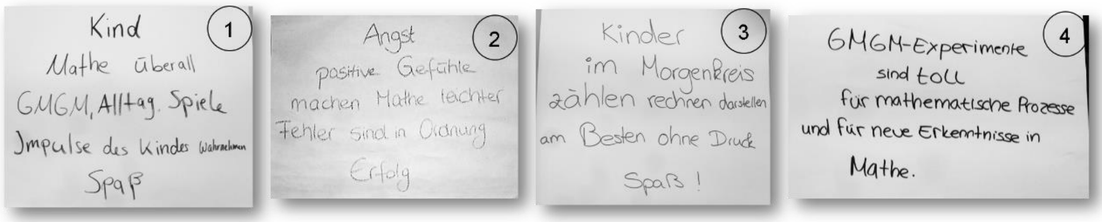


Abbildung 2: In der Abschlusssitzung entstanden Elfchen.

In dieser Zusammenschau von Dokumenten lassen sich einige der Teilaspekte, in die Anders die beiden Bereiche unterteilt, erkennen. Pädagogische Orientierungen und Einstellungen zeigen sich z.B. in der Wendung „Impulse des Kindes wahrnehmen“(1), dabei spielen „Vorstellungen über die eigene pädagogische Rolle als Erzieherin bzw. Erzieher“ (ebd., S.19) eine Rolle. „Epistemologische Einstellungen in Bezug auf den Erwerb von Kompetenzen in Mathematik“ (ebd., S. 20) werden in Elfchen 2 sichtbar. „Vorstellungen darüber, welche Kompetenzen im Kindergarten vermittelt werden sollten“ (ebd. S. 21), lassen sich im Elfchen 3 finden. Auf der Seite der motivationalen und emotionalen Aspekte fallen die Wörter Angst und Spaß auf, darin lässt sich die emotionale Haltung zu Mathematik erkennen. „Interesse und Freude an den Inhalten von Mathematik“ (ebd. S. 22) lassen sich aus Elfchen 3 und 4 herauslesen. „Enthusiasmus in Bezug auf die Gestaltung von Lerngelegenheiten“ (ebd. S. 23) zeigt sich auch in Elfchen 4, in dem eine materialbasierte Lerngelegenheit hervorgehoben wird.

Im Seminar kommt die Kompetenzfacette Haltung, Beliefs und Motivation nicht nur am Ende beim Verfassen von Elfchen zum Tragen, sondern wird über das ganze Seminar hinweg durch gezielte Reflexionsimpulse bewusst gemacht. Im Rahmen der Mathewerkstätten werden die Studierenden über die Prozessreflexion dazu angeregt, ihre Einstellungen zu Mathematik, ihre Motivation und Emotion beim Mathematiktreiben sowie das Erleben eigener mathematischer Fähigkeiten wahrzunehmen. Wenn es um die Reflexion von Rollenbildern und der eigenen Rolle geht, werden Haltung und Beliefs selbst zum Lerngegenstand.

2. Explizites Wissen

Im Kompetenzmodell von Fröhlich-Gildhoff et al. (2011) wird diese Kompetenzfacette deutlicher als „explizites, wissenschaftlich-theoretisches Wissen“ (S.18) bezeichnet. Gasteiger und Benz (2016) betonen, dass es nicht um allgemeines Schul- und Hintergrundwissen geht, sondern um Wissen, das sich auf die konkrete mathematikspezifische Arbeit in der Kindertageseinrichtung bezieht. Als Teilaspekte benennen sie: „Wissen über mathematische Konzepte/ fachliche Linien“ und „grundlegende Ideen für den frühpädagogischen Bereich“. Diese zeigen sich ansatzweise in der Auflistung „zählen rechnen darstellen“ (Elfchen 3). Kenntnisse über Materialien und deren Verwendung zur Anregung von mathematischen Bildungsprozessen sind im abgebildeten „Aha-Moment“ dokumentiert (vgl. Abb. 3). Im Mindmap lässt sich Wissen über mathematische Entwicklungsprozesse erkennen, z.B. in der Frage, ob man Dyskalkulie schon im Elementarbereich feststellen könne.

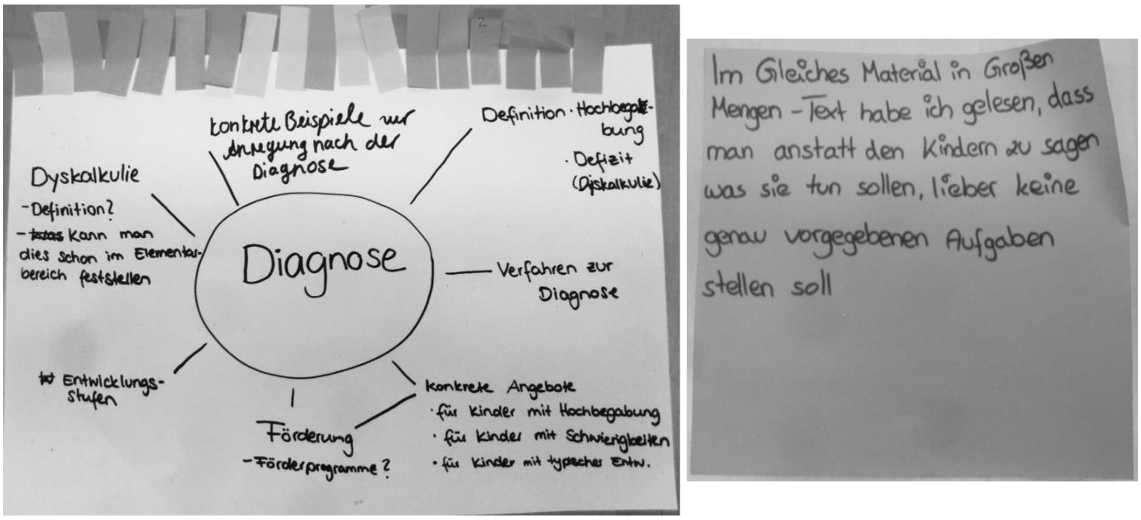


Abbildung 3: In Mindmaps und „Aha-Momenten“ wurde auf bislang Gelerntes Bezug genommen.

Weitere zentrale Wissensinhalte des Seminars sind das Verständnis von Mathematik als Prozess und die Kenntnis der fünf gängigen Inhaltsbereiche, wobei die besondere Rolle von „Muster und Strukturen“ hervorgehoben wird. Der gewählte Interessensfokus bestimmt ergänzende didaktische Inhalte. Anhand der „alltagspädagogischen Konzepte“ (Brandt, 2011) werden Beliefs auch zum Gegenstand expliziten Wissens.

3. Implizites Wissen

Fachkräfte in Kindertagesstätten setzen Impulse zur mathematischen Bildung, wobei davon auszugehen ist, dass das oft nicht auf dem Hintergrund eines expliziten, wissenschaftlich-theoretischen Wissens geschieht. Das lässt vermuten, dass es andere Wissensformen gibt, wie beispielsweise (reflektiertes) Erfahrungswissen (vgl. Gasteiger & Benz, 2016). In den Studierenden-Dokumenten wird immer wieder explizites Wissen mit implizitem Wissen erklärend verknüpft. Das zeigt sich auch im „Aha-Moment“ (Abb. 3), in dem eine Information aus einem Text mit einem bekannten Verhaltensmuster kontrastiert wird. Implizites Wissen darüber, dass sich Kinder bezüglich ihrer mathematischen Fähigkeiten homogenen Gruppen zuweisen ließen, drückt sich in der Einteilung „Kinder mit Hochbegabung, Kinder mit

Schwierigkeiten, Kinder mit typischer Entwicklung“ aus (Abbildung 3/Mindmap).

Studierende, die ihr erstes Seminar zum Bildungsbereich Mathematik besuchen, können vor allem auf implizites Wissen und Erfahrungswissen zurückgreifen. Dem trägt das Seminar Rechnung, indem erfahrungsbasiertes Lernen ermöglicht und in der Folge reflektiert wird. Fröhlich-Gildhoff et al. meinen dazu, dass implizites Erfahrungswissen „in professionellen Kontexten immer wieder auch in reflektiertes Erfahrungswissen transformiert werden sollte.“ (ebd. 2011, S. 18) Im Seminar haben die Studierenden z.B. durch die Reflexion des eigenen Mathematiktreibens, durch das Erleben und Erproben eines „GMGM-Angebotes“ mit anschließender Reflexion aber auch beim Verfassen von Briefen die Gelegenheit, sich ihr implizites Wissen bewusst zu machen.

4. Diskussion

Die Analyse der Seminardokumente macht deutlich, dass das implizite Wissen sowie die pädagogischen Orientierungen und Einstellungen den Aufbau theoretisch-wissenschaftlichen Wissens determinieren. Offen bleibt, inwiefern das als stabil angesehene Konstrukt pädagogischer Einstellungen und Orientierungen (vgl. Anders, 2012, S. 19) von den Studierenden selbst „umgebaut“ werden kann und was Seminare dazu beitragen können.

Literatur

Anders, Y. (2012). Modelle professioneller Kompetenzen für frühpädagogische Fachkräfte. Aktueller Stand und ihr Bezug zur Professionalisierung. München.

Brandt, Birgit (2011): "Ich hab' da eine kleine Aufgabe für euch". Erzieherinnen gestalten mathematische Situationen mit Kindergartenkindern. In: BzMU 2011. http://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/bzmu2011/_BzMU11_2_Einzelbeitraege/BzMU11_BRANDT_B_Alltagspaed.pdf.

Fröhlich-Gildhoff, K., Nentwig-Gesemann, I., & Pietsch, S. (2011). Kompetenzorientierung in der Qualifizierung frühpädagogischer Fachkräfte. Expertise. München.

Gasteiger, H. & Benz, C. (2016): Mathematikdidaktische Kompetenz von Fachkräften im Elementarbereich – ein theoriebasiertes Kompetenzmodell. In J Math Didakt.

Lee, Kerensa (2010): Kinder erfinden Mathematik. Gestaltendes Tätigsein mit gleichem Material in großer Menge. Weimar.

Diana HENZ, Mainz; Wolfgang I. SCHÖLLHORN, Mainz; Reinhard OLDENBURG, Augsburg

Förderung visuell-räumlicher Lösungsstrategien bei Algebra und Geometrie durch Bewegung: wie viel Bewegung ist optimal?

Wissenschaftliche Studien aus dem Bereich der Kognitions- und Neurowissenschaft zeigen Zusammenhänge von körperlichen Bewegungen und kognitiven Verarbeitungsprozessen auf. In Anlehnung an diese Erkenntnisse erfährt das Konzept der bewegten Schule seit einigen Jahren größere Aufmerksamkeit, wobei körperliche Bewegungen im Unterricht und während der Schulpausen gezielt zur Förderung der schulischen Leistungen eingesetzt werden (z. B. Högger, 2013). Für den mathematischen Bereich finden sich Hinweise auf positive Effekte von körperlicher Bewegung auf mathematische Fertigkeiten (Correa-Burrows, Burrows, Orellana & Ivanovic, 2014).

Basierend auf der These des Algebraischen Symbolraums von Lakoff und Núñez (2000), die besagt, dass abstrakte Ideen durch konzeptuelle Metaphern aus körperlichen Erfahrungen gebildet werden, hat sich eine Forschungsrichtung entwickelt, die körperliche Bewegungen, insbesondere Gesten, bei algebraischen Transformationsprozessen analysiert. In einer Studie von Wittmann, Flood und Black (2012) finden sich Hinweise, dass die mentale Bewegung der Symbole beim Arbeiten im algebraischen Kalkül analog zur Bewegung physikalischer Objekte erfolgt. Der Einsatz von Gesten im Unterricht zur Vermittlung mathematischer Lerninhalte im Bereich Algebra hat sich als förderlich erwiesen (Alibali et al., 2013).

Erklärungen für eine visuell-räumliche Verarbeitung von Algebra und Geometrie lassen sich aus dem Bereich der Kognitionswissenschaft ableiten. Das Arbeitsgedächtnismodell von Baddeley (1986) etwa postuliert verschiedene Subsysteme, die modalitätsspezifisch Informationen verarbeiten. Empirische Studien zeigen auf, dass visuell-räumliche Informationen und Bewegungsinformationen im gleichen Subsystem verarbeitet werden (Logie & Della Sala, 2005). Direkte empirische Evidenz für eine visuell-motorische Repräsentation von Algebra findet sich im Bereich der Neurowissenschaft (Fields, 2013; Leikin, Waisman, Shaul & Leikin, 2014). Zusammenfassend kann aus diesen Arbeiten abgeleitet werden, dass körperliche Bewegungen und visuell-räumliche Verarbeitung bei mathematischen Lösungsprozessen gleiche kognitive Prozesse erfordern.

In der vorliegenden Studie wurde in zwei Experimenten getestet, welche Effekte fein- und großmotorische Bewegungen auf die mathematische Lösungskompetenz und die Wahl visuell-räumlicher Verarbeitungsstrategien bei Algebra und Geometrie haben. Die Probanden führten zwei Bewegungsinterventionen (bewegtes Sitzen, Fahrradfahren) während der Bearbeitung von Algebra, Arithmetik und Geometrie unter EEG-Kontrolle aus. Die vorliegende Studie schließt inhaltlich und methodisch an Studien von Henz et al. (Henz, Oldenburg, & Schöllhorn, 2014, 2015a, 2015b) an, in denen die Wirkung von bewegtem Sitzen auf die mathematische Leistung in den Bereichen Algebra, Arithmetik und Geometrie und die korrespondierende Gehirnaktivität mittels Elektroenzephalogramm (EEG) untersucht wurde.

Studiendesign

In Experiment 1 wurden $n = 78$ gesunde Probanden im Alter von 22 bis 24 Jahren getestet. Die Probanden führten die Mathematikaufgaben während dynamischem Sitzen auf Stühlen mit beweglicher Sitzoberfläche (Firma MiShu) und statischem Sitzen auf Stühlen mit unbeweglicher Sitzoberfläche durch. In Experiment 2 wurden $n = 46$ gesunde Probanden im Alter von 21 bis 24 Jahren getestet. Die Probanden führten die Mathematikaufgaben in einem Gruppendesign nach Fahrradfahren und einer Kontrollbedingung aus. Zur Erfassung der mathematischen Leistung wurde ein Arithmetiktest (Num) eingesetzt, der ad hoc, aber theoriebasiert entwickelt wurde, sowie ein Algebratest (Alg) zur Lösung linearer Gleichungen, die auf Niveau 1 und 2 rein arithmetisch durch Rückwärtsrechnen gelöst werden konnten, während auf Niveau 3 die Unbekannte beidseitig auftritt, so dass sie mental von einer Seite der Gleichung zur anderen bewegt werden muss. Das Raumvorstellungsvermögen (Geo) wurde mit dem Bausteine-Test (Birkel, Schein & Schumann, 2002) erfasst. Die Testaufgaben wurden im Multiple-Choice-Format für die Kombinationen von Aufgabentyp und Niveau geblockt am PC bearbeitet, wobei die Blöcke randomisiert dargeboten wurden. Die elektrische Gehirnaktivität wurde mittels EEG von 19 Elektroden nach dem internationalen 10-20 System vor, während und nach der Aufgabenbearbeitung aufgezeichnet. Für die EEG-Daten wurden die Leistungsdichtespektren für das Theta- (4-7.5 Hz), Alpha- (8-13 Hz), Beta- (13-30 Hz) und Gamma-Band (30-40 Hz) ermittelt. Die Anzahl der erzielten korrekten Antworten in den mathematischen Tests sowie die Leistungsdichtespektren der EEG-Frequenzbänder wurden Varianzanalysen mit Bonferroni-korrigierten post-hoc Tests unterzogen.

Ergebnisse

In Experiment 1 belegen die Verhaltensdaten bessere mathematische Leistungen unter bewegtem Sitzen, $F(1, 77) = 5.29$, $p < .05$, insbesondere bei Algebra, $p < .05$, und Geometrie, $p < .05$. In Experiment 2 zeigen sich bessere Leistungen in der Kontrollbedingung, $F(1, 45) = 5.42$, $p < .05$, insbesondere bei Algebra, $p < .05$, und Geometrie, $p < .05$. Anhand der EEG-

Spontanaktivität lassen sich Effekte von fein- und großmotorischen Bewegungen in Abhängigkeit von der Art der Mathematikaufgabe und des Schwierigkeitsgrades auf die Zusammensetzung der Frequenzbänder beobachten. In Experiment 1 tritt bei Alg3 und Geo3 eine erhöhte Theta- und Alpha-Aktivität in den visuellen, somatosensorischen und motorischen Arealen, jeweils $p < .05$, bei Num3 eine erhöhte Aktivität im Beta-, $p < .05$, und Gamma-Band, $p < .01$, bei dynamischem Sitzen auf. In Experiment 2 tritt bei Alg2, Alg3 und Geo3 eine starke Theta- und Alpha-Aktivität in den visuellen, somatosensorischen und motorischen Arealen, jeweils $p < .01$, bei Num3 eine erhöhte Aktivität im Beta-, $p < .05$, und Gamma-Band, $p < .05$, nach Fahrradfahren auf.

Diskussion

Die Ergebnisse belegen, dass Mikrobewegungen wie etwa Bewegungen während des Sitzens für die Lösungskompetenz bei Algebra und Geometrie förderlich sind, jedoch nicht Bewegungen, die die visuell-räumliche Verarbeitungskapazität stark auslasten wie anhand des Fahrradfahrens in der vorliegenden Studie gezeigt werden konnte. Die Ergebnisse zeigen, dass körperliche Bewegungen visuell-räumliche Verarbeitungsstrategien bei Algebra und Geometrie fördern. Die Bearbeitung von Algebra und Geometrie führt dabei eine Aktivierung von Gehirnarealen herbei, die mit visuell-räumlicher Verarbeitung assoziiert sind, wobei eine leichte Stimulation des motorischen Systems durch bewegtes Sitzen eine visuell-räumliche Verarbeitung fördert, eine starke Beanspruchung des visuell-motorischen Systems durch starke Anforderungen an koordinative Fertigkeiten jedoch leistungsmindernd im Bereich visuell-räumlicher Verarbeitung bei Algebra und Geometrie, jedoch nicht bei Arithmetik, wirkt. Die leistungsförderliche Wirkung von feinmotorischen Bewegungen und die leistungsmindernde Wirkung von großmotorischen Bewegungen auf visuell-räumliche Verarbeitung kann dadurch erklärt werden, dass die Verarbeitung von visuell-räumlicher Information und körperlichen Bewegungen im gleichen Subsystem des Arbeitsgedächtnisses stattfindet (siehe Baddeley, 1986). Durch feinmotorische Bewegungen werden visuell-räumliche Verarbeitungsprozesse angeregt, großmotorische Bewegungen jedoch bewirken eine starke Auslastung des visuell-motorischen Systems, so dass für die Verarbeitung von visuell-räumlicher Information beim Bearbeiten von Algebra und Geometrie die kognitiven Ressourcen eingeschränkt sind. Die Ergebnisse regen an, im Algebra- und Geometrieunterricht Lernumgebungen einzusetzen, die Bewegungen und somit visuell-räumliche Verarbeitung fördern.

Literatur

Alibali, M.W., Young, A.G., Crook, N.M., Yeo, A., Wolfgram, M.S., Ledesma, I.M., Nathan, M.J., Church, R.B. & Knuth, E.J. (2013). Students learn more when their teacher has learned to gesture effectively. *Gesture, 13*(2), 210–233.

Baddeley, A.D. & Hitch, G.J. (1974). Working memory. In G. H. Bower (Ed.), *The psychology of learning and motivation* (pp. 47–89). New York: Academic Press.

Birkel, P., Schein, A. & Schumann, H. (2002). *Bausteine-Test*. Hogrefe. Göttingen.

Correa-Burrows, P., Burrows, R., Orellana, Y. & Ivanovic, D. (2014). Achievement in mathematics and language is linked to regular physical activity: a population study in Chilean youth. *Journal of Sports Sciences, 32*(17), 1631-1638.

Deyer, F., Henz, D. & Oldenburg, R. (2015). Wirkung bewegungsinduzierender Sitzmöbel im Unterricht auf die Lösungsfähigkeit bei Algebra und die Befindlichkeit. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Fields, C. (2013). Metaphorical motion in mathematical reasoning: further evidence for pre-motor implementation of structure mapping in abstract domains. *Cognitive Processing, 14*(3), 217–229.

Filloy, E., Puig, L. & Rojano, T. (2008). *Educational Algebra*. New York: Springer.

Henz, D., Oldenburg, R. & Schöllhorn, W.I. (2015a). Does bodily movement improve mathematical performance? Behavioral and neurophysiological evidence. *Proceedings of the 9th Conference on Research in Mathematical Education CERME 2015*.

Henz, D., Oldenburg, R. & Schöllhorn, W.I. (2015b). Förderung visuell-räumlicher Lösungsstrategien bei Algebra und Geometrie durch Bewegung. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Henz, D., Schöllhorn, W.I. & Oldenburg, R. (2014). Bessere Mathematikleistungen durch bewegtes Sitzen? Eine EEG-Studie. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 523–526). Münster: Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Högger, D. (2013). *Körper und Lernen. Wie Bewegung, Körperwahrnehmung und Raumorientierung das Lernen unterstützen*. Bern: Schulverlag.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books.

Leikin, M., Waisman, I., Shaul, S. & Leikin, R. (2014). Brain activity associated with translation from a visual to a symbolic representation in algebra and *geometry. Journal of Integrative Neuroscience, 13*(1), 35–59.

Logie, R.H. & Della Sala, S. (2005). Disorders of visuo-spatial working memory. In A. Miyake & P. Shah (Hrsg.), *The Cambridge handbook of visuospatial thinking* (pp. 81–121). New York: Cambridge University Press.

Wittmann, M.C., Flood, V.J. & Black, K.E. (2012). Algebraic manipulation as motion within a landscape. *Educational Studies in Mathematics, 82*(2), 169–181.

Diana HENZ, Mainz; Wolfgang I. SCHÖLLHORN, Mainz

Förderung mathematischer Lösungskompetenz durch Bewegung bei ADHS-Patienten im Jugendalter

Mathematikunterricht bei Patienten mit Aufmerksamkeits-Defizit/Hyperaktivitäts-Syndrom (ADHS) im Jugendalter stellt besondere Anforderungen an MathematiklehrerInnen und gestaltet sich oftmals als eine Herausforderung in der alltäglichen Unterrichtspraxis. Eines der charakteristischen Probleme ist die Kernsymptomatik der oberflächlichen Aufmerksamkeit bei ADHS-Patienten, die bei der Bearbeitung von Mathematikaufgaben zu Flüchtigkeitsfehlern, Schwierigkeiten bei der Lösung von Mathematikaufgaben mit inkonsistenter Aufgabenstellung, sowie Verständnisfehlern bei der Lösung von komplexen Textaufgaben führt. In diesem Kontext ist es wichtig, zwischen Defiziten in der mathematischen Lösungskompetenz bei ADHS-Patienten im Jugendalter, die aus fehlender fachdidaktischer Anpassung des Unterrichts an die Bedürfnisse dieser Patienten resultieren und Defizite in der kognitiven Verarbeitungskapazität, die aus einer neurobiologischen Störung resultieren, zu unterscheiden.

Aktuelle Studien aus dem Bereich der Kognitions- und Neurowissenschaft zeigen Zusammenhänge von körperlichen Bewegungen und kognitiven Verarbeitungsprozessen bei gesunden Personen. Angelehnt an diese Erkenntnisse erfährt das Konzept der bewegten Schule seit einigen Jahren größere Aufmerksamkeit, wobei körperliche Bewegungen im Unterricht und während der Schulpausen gezielt zur Förderung der schulischen Leistungen eingesetzt werden (z. B. Högger, 2013). Für den mathematischen Bereich finden sich Hinweise auf einen Zusammenhang von körperlicher Bewegung und mathematischen Fertigkeiten (Correa-Burrows, Burrows, Orellana & Ivanovic, 2014). Der Einsatz von Gesten im Unterricht zur Vermittlung mathematischer Lerninhalte im Bereich Algebra hat sich als förderlich erwiesen (Alibali et al., 2013).

Das Lösen von Mathematikaufgaben hat starke Anforderungen an die exekutive Kontrolle. Bei ADHS-Patienten zeigt sich meist ein neurobiologisches Defizit in der Verarbeitungskapazität der exekutiven Kontrolle. Das Arbeitsgedächtnismodell von Baddeley (1986) postuliert, dass das hypothetische Konstrukt der Zentralen Exekutive kognitive Ressourcen, insbesondere Aufmerksamkeit für die Verarbeitung von visuell-räumlicher und sprachlicher Information in die jeweils dafür vorgesehenen Subsysteme verteilt. Diese Ressourcen sind notwendig, um mathematische Operationen zu lösen, da Informationen im Arbeitsgedächtnis aufrechterhalten werden müssen, um diese zu verändern bzw. zu manipulieren.

In einer Studie von Maus, Henz und Schöllhorn (2013) konnte gezeigt werden, dass die kurz- und langfristige Aufmerksamkeitsfähigkeit durch bewegtes Sitzen gefördert wird. Ein objektiver neurophysiologischer Indikator in Form einer Aktivierung des Beta-2 Bandes im Elektroenzephalogramm (EEG) während der Bearbeitung von Konzentrationstests konnte aufgezeigt werden, der Aufmerksamkeitsprozesse indiziert. Die Ergebnisse legen nahe, dass eine Förderung exekutiver Funktionen und Verbesserung der Aufmerksamkeitsleistung durch Bewegung erfolgt.

Basierend auf diesen Erkenntnissen wurde in der vorliegenden Studie die Wirkung von bewegtem Sitzen bei ADHS-Patienten im Jugendalter auf die Lösungskompetenz bei mathematischen Aufgaben getestet. Die Probanden lösten Algebra-, Geometrie-, und Numerikaufgaben unter zwei Sitzbedingungen (statisch, bewegt). Die vorliegende Studie schließt inhaltlich und methodisch an Studien von Henz et al. (Henz, Oldenburg, & Schöllhorn, 2014, 2015a, 2015b) an, in denen die Wirkung von bewegtem Sitzen auf die mathematische Leistung in den Bereichen Algebra, Arithmetik und Geometrie untersucht wurde.

Studiendesign

In der vorliegenden Studie wurden n = 42 ADHS-Patienten im Jugendalter im Alter von 11.2 bis 13.7 Jahren getestet. Die Probanden führten die Mathematikaufgaben während dynamischem Sitzen auf Stühlen mit beweglicher Sitzoberfläche (LeitnerWipp) und statischem Sitzen auf Stühlen mit unbeweglicher Sitzoberfläche durch. Zur Erfassung der mathematischen Leistung wurde ein Arithmetiktest (Num) eingesetzt, der ad hoc, aber theoriebasiert (vgl. Padberg, 2007) entwickelt wurde, sowie ein Algebratest (Alg) zur Lösung linearer Gleichungen, die auf Niveau 1 und 2 rein arithmetisch durch Rückwärtsrechnen gelöst werden konnten, während auf Niveau 3 die Unbekannte beidseitig auftritt, so dass sie mental von einer Seite der Gleichung zur anderen bewegt werden muss. Das Raumvorstellungsvermögen (Geo) wurde mit dem Bausteine-Test (Birkel, Schein & Schumann, 2002) erfasst. In einem 2 (körperliche Haltungskontrolle im Sitzen: statisch und dynamisch) x 3 (mathematischer Teilbereich: Num, Alg, Geo) x 3 (Schwierigkeitsniveau: leicht, mittel, schwer) Design wurden die Testaufgaben im Multiple-Choice-Format für die Kombinationen von Aufgabentyp und Niveau geblockt am PC bearbeitet, wobei die Blöcke randomisiert dargeboten wurden. Nach jedem Aufgabenblock wurden die Lösungsstrategien über ein Kurzinterview erfasst.

Die Gesamtbearbeitungsdauer, die Anzahl der erzielten korrekten Antworten in den mathematischen Tests sowie die Anzahl der Strategien, die visuell-räumliche Verarbeitung beinhalten, wurden Varianzanalysen mit Bonferroni-korrigierten post-hoc Tests unterzogen.

Ergebnisse

Die Verhaltensdaten belegen eine längere Gesamtbearbeitungsdauer unter bewegtem Sitzen, $F(1, 41) = 7.02$, $p < .01$, bessere Leistungen in allen mathematischen Teilbereichen unter bewegtem Sitzen, $F(1, 41) = 4.78$, $p < .05$, sowie einen größeren Prozentsatz in der Verwendung von visuell-räumlichen Lösungsstrategien, $F(1, 41) = 5.16$, $p < .05$, bei der Bearbeitung von Algebra, $p < .05$, und Geometrie, $p < .05$.

Diskussion

Die Ergebnisse belegen, dass dynamisches Sitzen die mathematische Lösungskompetenz bei ADHS-Patienten im Jugendalter fördert. Verglichen mit statischem Sitzen fällt zunächst auf, dass bewegtes Sitzen eine längere Gesamtbearbeitungsdauer bei den Probanden förderte, d.h. eine größere Bereitschaft, sich mit den mathematischen Aufgaben auseinanderzusetzen. Die Probanden gaben zudem an, dass durch die Bewegungen während des Sitzens die Bearbeitung der mathematischen Aufgaben als Herausforderung empfunden wurde und die Motivation, sich mit den mathematischen Aufgaben auseinanderzusetzen größer war als bei statischem Sitzen. Ein höherer Prozentsatz an visuell-räumlichen Verarbeitungsstrategien bei Algebra und Geometrie unter bewegtem Sitzen zeigt an, dass bewegtes Sitzen visuell-räumliches Denken fördert. Die Ergebnisse legen den Einsatz von visuell-motorischen Lern- und Vermittlungsstrategien nahe, da das Gehirn eine physiologische Bereitschaft für eine visuell-räumliche Verarbeitung bei Algebra und Geometrie aufweist. Die Ergebnisse regen an, im Algebra- und Geometrieunterricht mit ADHS-Patienten Lernumgebungen einzusetzen, die Bewegungen und somit eine visuell-räumliche Verarbeitung fördern.

Literatur

Alibali, M.W., Young, A.G., Crook, N.M., Yeo, A., Wolfgram, M.S., Ledesma, I.M., Nathan, M.J., Church, R.B. & Knuth, E.J. (2013). Students learn more when their teacher has learned to gesture effectively. *Gesture, 13*(2), 210–233.

Baddeley, A.D. & Hitch, G.J. (1974). Working memory. In G. H. Bower (Ed.), *The psychology of learning and motivation* (pp. 47–89). New York: Academic Press.

Birkel, P., Schein, A. & Schumann, H. (2002). *Bausteine-Test*. Hogrefe. Göttingen.

Correa-Burrows, P., Burrows, R., Orellana, Y. & Ivanovic, D. (2014). Achievement in mathematics and language is linked to regular physical activity: a population study in Chilean youth. *Journal of Sports Sciences, 32*(17), 1631-1638.

Deyer, F., Henz, D. & Oldenburg, R. (2015). Wirkung bewegungsinduzierender Sitzmöbel im Unterricht auf die Lösungsfähigkeit bei Algebra und die Befindlichkeit. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Filloy, E., Puig, L. & Rojano, T. (2008). *Educational Algebra*. New York: Springer.

Henz, D., Oldenburg, R. & Schöllhorn, W.I. (2015a). Does bodily movement improve mathematical performance? Behavioral and neurophysiological evidence. *Proceedings of the 9th Conference on Research in Mathematical Education CERME 2015*.

Henz, D., Oldenburg, R. & Schöllhorn, W.I. (2015b). Förderung visuell-räumlicher Lösungsstrategien bei Algebra und Geometrie durch Bewegung. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Henz, D., Schöllhorn, W.I. & Oldenburg, R. (2014). Bessere Mathematikleistungen durch bewegtes Sitzen? Eine EEG-Studie. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 523–526). Münster: Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Hewitt, D. (2014). A symbolic dance: the interplay between movement, notation, and mathematics on a journey toward solving equations. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(1), 1–31.

Högger, D. (2013). *Körper und Lernen. Wie Bewegung, Körperwahrnehmung und Raumorientierung das Lernen unterstützen*. Bern: Schulverlag.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books.

Logie, R.H. & Della Sala, S. (2005). Disorders of visuo-spatial working memory. In A. Miyake & P. Shah (Hrsg.), *The Cambridge handbook of visuospatial thinking* (pp. 81–121). New York: Cambridge University Press.

Maus, J., Henz, D. & Schöllhorn, W.I. (2013). Increased EEG-beta activity in attentional tasks under dynamic postural control. In U. Ansorge, E. Kirchler, C. Lamm & H. Leder (Eds.), *TeaP 2013. Abstracts of the 55th Conference of Experimental Psychologists* (p. 396). Lengrich: Pabst Science Publishers.

Nemirovsky, R., Kelton, M.L. & Rhodehamel, B. (2013). Playing mathematical instruments; Emerging perceptuomotor integration with an interactive mathematics exhibit. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(2), 372–415.

Padberg, F. (2007). *Didaktik der Arithmetik*. München: Spektrum.

Wittmann, M.C., Flood, V.J. & Black, K.E. (2012). Algebraic manipulation as motion within a landscape. *Educational Studies in Mathematics, 82*(2), 169–181.

Raja HEROLD-BLASIUS, Essen

Das Potential von Strategieschlüsseln beim Problemlösen

1. Einleitung und Forschungsfrage

Für das Problemlösen ist die Verwendung von Problemlösestrategien (Heurismen) zentral. Nur haben SchülerInnen häufig Schwierigkeiten, Heurismen erfolgreich in ihren Problemlöseprozess zu integrieren. Damit Lernende beim Einsatz von Heurismen unterstützt werden, wurden *Strategieschlüssel* (Abb. 1) entwickelt. Sie werden wie Hilfekarten verwendet und benötigen weder ein vorheriges Training, noch eine besondere Einführung.

In diesem Beitrag wird untersucht, welche Handlungsmöglichkeiten durch die Strategieschlüssel bei Dritt- und Viertklässlern initiiert werden.

Abb. 7: Strategieschlüsselbund

2. Theoretischer Hintergrund

Um das Schülerverhalten bezogen auf die Strategieschlüssel systematisch zu analysieren, wurde ein Analyseverfahren basierend auf Gibsons Theorie der „affordances“ entwickelt.

James J. Gibson gilt als Begründer der ökologischen Wahrnehmungstheorie. In dieser beschreibt er, dass eine Umgebung einem Tier grundsätzlich etwas anbietet. Er spricht dabei von sogenannten „affordances“. „The *affordances* of the environment are what it *offers* the animal [...]. [...] I mean by it [affordance] something that refers to both the environment and the animal in a way that no existing term does. It implies the complementarity of the animal and the environment.“ (Vorh. im Orig., Gibson, 1979, S. 127)

Gibson geht davon aus, dass unsere Umwelt – also auch ein einzelner Gegenstand mit seinen Eigenschaften – Handlungsmöglichkeiten (engl.: „affordances“) anbietet. Eine Person nimmt einen Gegenstand, z.B. einen Stuhl, in seiner Umgebung wahr. Gleichzeitig erkennt die Person auch die Handlungsmöglichkeiten – also wie der Stuhl genutzt werden kann. Abhängig von der Person und der derzeitigen Situation, kann der Stuhl verschiedenartig eingesetzt werden. Eine Person kann sich darauf setzen, sich damit verteidigen oder sich, z.B. als Kleinkind, daran hochziehen.

Brown und Stillman (2014) erklären, dass „affordances“ auch in anderen Disziplinen verwendet werden können, um Einblicke in die Interaktivität zwischen einer Person und seiner Umwelt zu gewinnen.

Von Gibsons Wahrnehmungstheorie ausgehend wissen wir nun, dass verschiedene Personen unterschiedliche „affordances“ von demselben Objekt wahrnehmen (siehe das Beispiel „Stuhl“). Übertragen wir dieses Konzept auf die Forschung und den Unterricht, können wir davon ausgehen, dass gleiche Gegenstände verschiedenen SchülerInnen auch unterschiedliche Handlungsmöglichkeiten anbieten. Werden die Strategieschlüssel (Abb. 1) als Teil der Umgebung der SchülerInnen gesehen, dann können die „affordances“ der Schlüssel identifiziert werden, indem die Interaktion der SchülerInnen mit den Schlüsseln beim Problemlösen untersucht wird.

3. Methodisches Vorgehen

3.1 Datenerhebung

Im Rahmen eines Dissertationsprojekts wurden 16 Dritt- und Viertklässler (7 bis 10 Jahre) beim Bearbeiten von mathematischen Problemaufgaben videografiert und interviewt. Sie besuchten freiwillig die AG „Mathe für schlaue Füchse“ an der Universität Duisburg-Essen und beschäftigten sich gerne mit Mathematik. Ein Eingangstest zur Teilnahme an der AG fand nicht statt. Aussagen über den mathematischen Wissensstand der Kinder sind also nicht möglich. Heurismen wurden in der AG nicht explizit thematisiert. Auch die Strategieschlüssel waren den Kindern zuvor unbekannt.

Die Schlüssel wurden den Kindern erstmals zu Beginn des Interviews vorgestellt. Die Interviewerin erklärte, dass die Schlüssel helfen könnten, wenn man beim Lösen schwieriger Aufgaben „stecken bleibt“. Sie las die Schlüssel nacheinander vor und legte sie sichtbar auf den Tisch. Die Kinder wurden dann gebeten, bei der Problembearbeitung laut zu denken, um so den Denkprozess besser zu erfassen (Maher et al., 2014; van Someren et al., 1994). Insgesamt wurden 8 Strategieschlüssel angeboten: „Finde ein Beispiel.“, „Arbeite von hinten.“, „Male ein Bild.“, „Lies die Aufgabe.“, „Verwende verschiedene Farben.“, „Suche nach einer Regel.“, „Erstelle eine Tabelle.“ und „Beginne mit einer kleinen Zahl.“.

In diesem Beitrag werden die Problemlöseprozesse von insgesamt 12 Kindern (5 Jungen, 7 Mädchen) analysiert. Dabei lösten alle 12 Kinder u.a. die folgende Bauernhofaufgabe: Auf dem Bauernhof gibt es ein Freigehege für die Hühner, in dem auch Kaninchen gehalten werden. Jens steht am Zaun und zählt 20 Tiere mit insgesamt 70 Beinen. Wie viele Hühner sind es?

3.2 Datenanalyse

Gibson (1979) geht davon aus, dass die Wahrnehmung einer „affordance“ auch zu einer Handlung führt. Folglich können Schülerhandlungen genutzt werden, um auf die zuvor wahrgenommene „affordance“ zu schließen. Dabei wird von der Beobachtung ausgehend die ökonomischste und damit wahrscheinlichste Erklärung gesucht (Pierce, 1883).

Erst wurden im Videomaterial Stellen identifiziert, in denen die SchülerInnen während der Problembearbeitung mit den Schlüsseln interagierten, z.B. indem sie sie angeschaut, gelesen, angefasst oder bewegt haben. Dann wurden die Transkripte der Videos und die Aufzeichnungen der SchülerInnen während der Bearbeitung herangezogen. Mithilfe dieses Materials wurde zunächst untersucht, ob der/ die SchülerIn den erstbesten Schlüssel wählte oder ob er/ sie zielgerichtet einen Schlüssel auswählte. Das ist relevant, weil ein planvolles Vorgehen auf das Wahrnehmen einer „affordance“ hindeutet. Dann wurde analysiert, ob der/ die jeweilige SchülerIn eine „affordance“ wahrgenommen hat und wenn ja, welche.

4. Ergebnisse

Innerhalb der 12 Bearbeitungsprozesse interagierten 11 SchülerInnen insgesamt 15-mal mit den Schlüsseln. Dabei wurde nie der erstbeste Schlüssel gewählt. Die Schlüsselwahl erfolgte also nicht zufällig, sondern kann durch die Wahrnehmung einer „affordance“ erklärt werden. Innerhalb der 15 Schlüsselinteraktionen wurden fünf verschiedene „affordances“ identifiziert. Diese werden vorgestellt und teilweise mit Beispielen verdeutlicht.

1) Ausführung des Vorgeschlagenen: Nach sechs Schlüsselinteraktionen machten die Kinder mit einem Schlüssel das, was darauf beschrieben war. Als Richard z.B. „stecken blieb“, verwies die Interviewerin auf die Schlüssel. Er wählte „Erstelle eine Tabelle.“. Dabei sprach er erst davon, eine Tabelle zu zeichnen (Wahrnehmung der „affordance“) und zeichnete sie dann (Abb. 2). Ihn brachte die Tabelle zum richtigen Ergebnis.

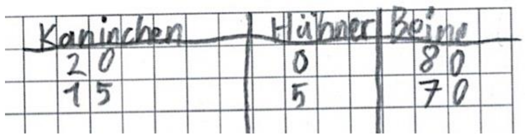


Abb. 2: Tabellen von Richard

2) Einnehmen einer anderen mathematischen Perspektive: In vier Fällen ermöglichten die Schlüssel den Kindern, eine andere mathematische Perspektive einzunehmen und so die zuvor genutzte mathematische Beziehung zu verändern. Collin blieb z.B. „stecken“, als er mit den Anzahlen von Tieren und Beinen durcheinander kam. Er wählte den Schlüssel „Arbeite von hinten.“ und veränderte seine Sicht von der Anzahl der Tiere zu den Beinen. Dadurch kam er zum richtigen Ergebnis. Mit diesem Schlüssel war ursprünglich das rückwärts Arbeiten intendiert.

3) Benennung der Lösungsstrategie: In zwei Fällen ermöglichten die Schlüssel während des Prozesses, das Benennen der verwendeten Lösungsstrategien. Dabei wurde das Schlüsselbund einmal ähnlich wie eine Checkliste eingesetzt. Der Schüler las jeden Schlüssel der Reihe nach durch und entschied jeweils, welcher Schlüssel schon verwendet wurde, welcher nicht helfen wird und welcher potentiell hilfreich sein könnte.

4) Motivation: Hannes nutzte den Schlüssel „Suche nach einer Regel.“. Seine Regel lautete: Gib nicht auf. Also ermöglichte ihm der Schlüssel, auch dann weiter zu machen und sich selbst zu motivieren, auch wenn die Aufgabe subjektiv sehr schwierig ist.

5) Gewinn von Bedenkzeit: Hannes wählte auch den Schlüssel „Male ein Bild.“ und malte Jens und den Zaun (Abb. 3). Das Bild selbst gab ihm keine weiteren mathematischen Hinweise, aber er gewann Zeit zum Denken, ohne das Gefühl zu haben, insb. vor laufender Kamera, nicht voran zu kommen.

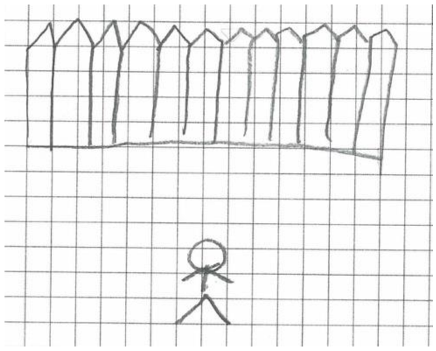


Abb. 3: Hannes Bild, um Bedenkzeit zu gewinnen

Keine „affordance“: In vier Fällen trat keine „affordance“ auf. Dabei gab es zwei Varianten: (1) Das Kind blieb nie „stecken“, d.h. es kam zu keiner Interaktion mit den Schlüsseln. (2) Das Kind nahm keine „affordance“ wahr, obwohl eine Interaktion mit den Schlüsseln erfolgte.

Zusammenfassung und Diskussion

In dieser Studie wurden fünf verschiedene „affordances“ der Strategieschlüssel identifiziert, also Handlungsmöglichkeiten, die bei Dritt- und Viertklässlern durch die Schlüssel initiiert wurden. In weiteren Studien werden diese bei anderen Problemaufgaben und Jahrgangsstufen überprüft und dann ggf. erweitert. Im Rahmen einer langfristig angelegten Studie wird auch untersucht, ob sich die „affordances“ mit der Zeit verändern.

Literatur

Brown, J. P., & Stillman, G. (2014). Affordances: Ten years on. In J. Anderson et al. (Eds.), *Proceedings of the 37th MERGA* (pp. 111-118). Sydney: MERGA.

Gibson, J. J. (1979). *The ecological approach to visual perception*. Boston: Houghton Mifflin Company.

Peirce, C. S. (1883). A theory of probable inference. In C. S. Peirce (Ed.), *Studies in Logic by Members of the Johns Hopkins University* (pp. 126-203). Boston, MA: Little, Brown and Company.

van Someren, M., Barnard, Y., & Sandberg, J. (1994). *The think aloud method. A practical guide to modelling cognitive processes*. London: Academic Press.

Maher, C., Sigley, R., & Davis, R. (2014). Task-Based Interviews in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Dordrecht: Springer, 579-582.

Corinna HERTLEIF; Gilbert GREEFRATH, Münster

Mathematisches Modellieren mit digitalen Werkzeugen – Eine Fallstudie mit Dynamischer Geometrie-Software

Digitale Werkzeuge können im Unterricht von Anwendungen und Modellierungen unterschiedlichste Aufgaben übernehmen. Sie können zum Beispiel zur Recherche von fehlenden Daten, zur Übertragung von realen Sachverhalten in ein geometrisches Modell sowie zum Experimentieren oder Simulieren genutzt werden. In den Bildungsstandards Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (KMK 2012) wird das Potenzial digitaler Mathematikwerkzeuge in vier verschiedenen Bereichen gesehen. Der erste Bereich ist das Entdecken mathematischer Zusammenhänge, insbesondere durch interaktive Erkundungen beim Modellieren und Problemlösen. Lernende können selbstständig eine Vielzahl an Beispielen als Ausgangspunkt für Begriffsbildungen, Problemlösungen oder Vermutungs- und Begründungsfindungen erzeugen. Digitale Werkzeuge ermöglichen hier neue Erkenntniswege, indem sie die die schnelle und flexible Umsetzung verschiedener Modelle ermöglichen. Der zweite Bereich ist die Verwendung vielfältiger Darstellungsmöglichkeiten zur Verständnisförderung. Dies gilt insbesondere bei Multi-Repräsentationssystemen, bei denen die Darstellungen interaktiv miteinander verknüpft sind. Der dritte Bereich ist die Reduktion schematischer Abläufe bei der Verarbeitung größerer Datenmengen. Hier können beispielsweise Realdaten viel stärker einbezogen und komplexere Modellierungen als ohne die Verwendung des Werkzeugs durchgeführt werden. Der vierte Bereich ist die Unterstützung individueller Präferenzen und Zugänge beim Bearbeiten von Aufgaben. Hierzu zählt auch die Nutzung von Kontrollmöglichkeiten, die digitale Werkzeuge bieten.

Modellieren mit digitalen Werkzeugen

Diese unterschiedlichen Potenziale digitaler Mathematikwerkzeuge kommen bei Modellierungsproblemen an unterschiedlichen Stellen im Modellierungskreislauf zum Tragen. Einige Möglichkeiten für den Einsatz digitaler Werkzeuge in einem Modellierungsprozess sind im Modellierungskreislauf in Abb. 1 dargestellt, eine Modifikation des Modellierungskreislaufes von Blum & Leiß (2007). Es wird deutlich, dass die digitalen Werkzeuge

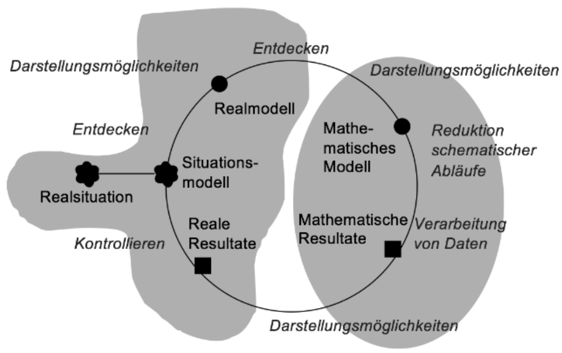


Abb. 1: Möglicher Einsatz digitaler Werkzeuge im Modellierungskreislauf (Greefrath 2011)

beim Modellieren in allen Phasen des Modellierungskreislaufs mit unterschiedlichen Funktionen sinnvoll eingesetzt werden können.

Betrachtet man den Schritt des Berechnens mit digitalen Werkzeugen genauer, so erfordert die Bearbeitung von Modellierungsaufgaben mit digitalen Werkzeugen zwei Übersetzungsprozesse. Zunächst muss die Modellierungsaufgabe verstanden, vereinfacht und in die Sprache der Mathematik übersetzt werden. Das digitale Werkzeug kann jedoch erst eingesetzt werden, wenn die mathematischen Ausdrücke in die Sprache des digitalen Werkzeugs übersetzt worden sind. Die Ergebnisse des Werkzeugs müssen dann wieder in die Sprache der Mathematik zurücktransformiert werden. Schließlich kann dann das ursprüngliche Problem gelöst werden, wenn die mathematischen Ergebnisse auf die reale Situation bezogen werden. Diese Übersetzungsprozesse können in einem erweiterten Modellierungskreislauf dargestellt werden, der neben der realen Welt und der mathematischen Welt auch die technologische Welt berücksichtigt (vgl. Greefrath 2011).

Aktuell existiert noch wenig empirisch gesichertes Wissen zu den unterrichtlichen Möglichkeiten und Grenzen digitaler Werkzeuge beim Modellieren im Mathematikunterricht. Offene Forschungsfragen findet man etwa bei Niss et al. (2007). Dazu zählen unter anderem die Fragen, wie digitale Werkzeuge in unterschiedlichen Schulstufen zur Unterstützung von Modellierungsprozessen eingesetzt werden sollten, wann digitale Werkzeuge Lerngelegenheiten beim Modellieren ermöglichen oder verhindern, oder ob das in Modellierungsproblemen notwendige Nachdenken und Reflektieren durch Technologie beeinträchtigt oder gefördert wird.

Konzeption der Fallstudie

Zur Beantwortung der Fragen, wie die Dynamische Geometrie-Software (DGS) bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben verwendet wird und welche Chancen und Risiken mit dieser Verwendung verbunden sind, wurde im Oktober 2015 eine Fallstudie mit acht Schülerinnen und Schülern Münsteraner Gymnasien im Alter von 15 bzw. 16 Jahren durchgeführt. Die Teilnehmenden bearbeiteten zunächst eine 15-minütige Einführung in die DGS GeoGebra und anschließend zwei Modellierungsaufgaben, für die sie jeweils immer ca. 20 Minuten benötigten. Während der Bearbeitung wurden sowohl die Schülerinnen und Schülern als auch der PC-Bildschirm gefilmt. Zudem wurden die Teilnehmenden nach der Bearbeitung in einem kurzen Leitfadeninterview zu den Aufgaben sowie zur Bearbeitung mit der DGS befragt. Die eingesetzten Aufgaben wurden im Rahmen des Forschungsprojekts LIMo (Lösungsinstrumente beim Modellieren) an der Universität Münster entwickelt und behandeln verschiedene geometrische Modellierungsprobleme. Die Schülerinnen und Schülern erhielten ein Arbeitsblatt mit dem Aufgabentext sowie der zur Aufgabe gehörigen Abbildung (etwa die Karte eines Parks, in dem der Standort eines neuen Spielplatzes gesucht werden sollte). Zudem erhielten die Schülerinnen und Schülern eine vorbereitete GeoGebra-Datei mit der gleichen Abbildung wie auf dem Arbeitsblatt. Sie arbeiteten jeweils in Partnerarbeit, und wurden dazu aufgefordert, während der Bearbeitung möglichst viel miteinander über die Aufgabe zu kommunizieren.

Ergebnisse der Fallstudie

Bei der Analyse der Arbeitsprozesse wurde deutlich, dass die Teilnehmenden durchgängig mit Hilfe der Software arbeiteten und das Arbeitsblatt lediglich zu Beginn zum Lesen der Aufgabenstellung sowie gegen Ende für Kontrollüberlegungen nutzten. Dabei wurden die Darstellungsmöglichkeiten sowie die Dynamik der DGS von Beginn an auch für Planungen und erste Entwürfe ausgenutzt. Dies zeigt der Kommentar einer Schülerin: „Erstmal so grob gucken und es danach genauer machen". Skizzen auf dem Papier wurden selten und nur zur Vermittlung des bereits konstruierten Modells angefertigt. Wie oben bereits erläutert, sind beim Modellieren mit digitalen Werkzeugen mehrere Übersetzungsprozesse nötig. Der Schritt vom Realmodell zum mathematischen Modell am Computer wurde von den teilnehmenden Schülerinnen und Schülern sehr unterschiedlich durchgeführt. Zum einen trat der Fall auf, dass Schülerinnen und Schülern sich zunächst ein mathematisches Modell überlegten und dieses dann in der Software darzustellen versuchten. In diesen Fällen folgte also die Übersetzung in ein digitales Modell erst nach der Mathematisierung. Dabei barg auch dieser Schritt einige Schwierigkeiten, so mussten die Schülerinnen und Schülern durchaus auch Beschränkungen durch die Software in Kauf nehmen, etwa bei dem Wunsch, einen Kreis durch vier Punkte zu zeichnen, da die Software nur den Befehl „Kreis durch 3 Punkte" anbietet. Andererseits trat aber auch der Fall auf, dass die Software ganz bewusst als Inspiration für die Suche nach weiteren Modellen genutzt wurde. Dies äußerte sich darin, dass die Werkzeugleiste am oberen Rand der Oberfläche mit dem Cursor abgefahren wurde und verschiedene Modelle ausprobiert und dann entweder verworfen oder für gut befunden wurden. In diesen Fällen wurden also erst die Modelle in der Software betrachtet und mit deren Hilfe die Realsituation dann mathematisiert. Durch dieses Vorgehen fand häufig bereits durch das Nutzen und Vergleichen verschiedener Modelle eine Kontrolle des gefundenen realen Resultats statt. Bezogen auf das mathematische Arbeiten äußerten die Teilnehmenden stets, dass sie die Software als Hilfe empfanden, obwohl sie vor der Einführung im Rahmen der Studie noch kaum Erfahrungen mit dem Programm vorweisen konnten. Als Gründe nannten sie, dass die Software umständliche Konstruktionen oder Berechnungen verkürze und viele Möglichkeiten zur Präsentation der gefundenen Lösung bieten kann. Dabei empfanden viele Schülerinnen und Schülern es als ausreichende Vermittlung ihrer Resultate, wenn sie lediglich die entsprechende Datei abspeicherten. Da die Teilnehmenden aber auf dem Arbeitsblatt zur Dokumentation ihres Lösungsweges aufgefordert wurden, entstanden in der Fallstudie auch einige Textdokumente. Deren Analyse zeigte, dass häufig ein mehrfaches Durchlaufen des Modellierungskreislaufs auch in den Antworten erkennbar war, beispielsweise weil mehrere Modelle angegeben wurden.

Fazit

Bezogen auf die Ausgangsfragen lässt sich also festhalten, dass die Bearbeitung der Aufgabe durchgängig mit Hilfe der Software stattfindet und dass die DGS auch tatsächlich in allen Teilschritten des Modellierens verwendet wird. Dabei bietet sie die Chance, dass in kurzer Zeit viele Modelle sowohl entdeckt und ausprobiert als auch hinterfragt und validiert werden können. Dieses Ausprobieren birgt aber auch Risiken, wenn nur unreflektiert mathematische Modelle gewählt werden, diese aber nicht auf ihre Sinnhaftigkeit im Anwendungskontext hinterfragt werden. Findet diese Reflexion allerdings statt, bietet die Software die Möglichkeit, die gewählten Modelle schnell und einfach zu modifizieren ohne erneut lange Konstruktionen oder Berechnungen durchführen zu müssen. Gleichzeitig ermöglicht die einfache Bedienung der Software auch das Verwenden von Modellen, die den Lernenden bisher unbekannt sind. Somit ist es als Chance der DGS anzusehen, dass die Software eine Neugierde auf weitere, bislang noch unbekannte mathematische Möglichkeiten anregen kann. Zur Klärung der Frage, ob bei dem Einsatz von DGS bei Modellierungsaufgaben die genannten Chancen oder doch die Risiken überwiegen, bedarf es weiterführender quantitativer Studien.

Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example sugarloaf and the DISUM project. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Hrsg.), Mathematical modelling (ICTMA 12): education, engineering and economics (S. 222-231). Chichester: Horwood.

Greefrath, G. (2011): Using Technologies: New Possibilities of Teaching and Learning Modelling - Overview, in: G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, G. Stillman (Eds.): Trends in teaching and learning of mathematical modelling, ICTMA 14, Springer Dordrecht Heidelberg London New York, 301-304

KMK (2012): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. URL: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschlesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf (abgerufen am: 01.03.2016)

Niss et al. (2007): Introduction, Modelling and Applications in Mathematics Education, New ICMI Study Series, Springer

Stefan HOCH, Frank REINHOLD, Kristina REISS, München

Repräsentationen von Bruchzahlen verstehen: Lernen mit dem Tablet in Jahrgangsstufe 6

Im Projekt *Lernen mit dem Tablet-PC: Eine Einführung in das Bruchrechnen für Klasse 6* untersuchen wir, inwiefern sich moderne Ansätze zum Erwerb von Bruchrechenkompetenz mit einem digitalen Lehrbuch für das iPad umsetzen lassen. Wir stellen dazu exemplarisch Teile des Kapitels *Darstellung von Brüchen* vor und erläutern Möglichkeiten, die das Tablet im Vergleich zum klassischen Buch bietet. Weiter präsentieren wir Ergebnisse aus unseren Praxistests zur graphischen Darstellung von Brüchen.

Projektvorstellung

In unserem Projekt ist es erklärtes Ziel, ein Unterrichtswerk zu schaffen, das die Möglichkeiten des Mediums Tablet nutzt und so die Bruchrechnung im wörtlichen Sinne „begreifbar" macht. Die technische Umsetzung des Lehrbuchs geschieht in iBooks Author (Apple Inc., 2014), einer frei verfügbaren Gestaltungssoftware für digitale Bücher, sogenannte iBooks. iBooks Author bietet uns die Möglichkeit, sogenannte Widgets, gekapselte Webseiten, in den Text einzubinden. Dadurch ist es uns möglich, maßgeschneiderte Interaktionen für das Projekt zu fertigen. Insbesondere können wir Dank des CindyJS-Projekts (The CindyJS Project, 2016) interaktive Inhalte aus der Geometriesoftware Cinderella verwenden.

Das Projekt ist eine Kooperation von zwei Lehrstühlen der Technischen Universität München und wird von der Heinz-Nixdorf-Stiftung unterstützt.

Möglichkeiten des Mediums

- Interaktive Diagramme und Aufgaben: Eines der Hauptanliegen des Projekts ist es, interaktive Inhalte im Buch anzubieten. Diese lassen sich in der Regel in zwei Gruppen aufteilen: interaktive *Diagramme* dienen dem explorativen Kennenlernen von neuen Themenbereichen und unterscheiden sich von den interaktiven *Aufgaben* darin, dass sie keine Eingabe einer Lösung erwarten, die anschließend ausgewertet wird.
- Adaptive Aufgabenschwierigkeit: Wir gestalten unsere Aufgaben adaptiv (im Gegensatz zu adaptierbar, vgl. Leutner (2002)). Zu diesem Zweck sind für jede Aufgabe Schwierigkeitsstufen definiert. Beim ersten Aufrufen der Aufgabe im iBook wird aus der ersten Stufe ein Aufgabenset von 3–5 Aufgaben generiert, welche die Schülerin oder der Schüler nacheinander bearbeitet. Nach der Bearbeitung eines Aufgabensets entscheidet das iBook anhand der Lösungsrate, aus welcher Stufe das nächste Aufgabenset generiert wird. Die erreichte Stufe wird für den nächsten Aufgabenaufruf im iBook gespeichert.

Feedback: In ihrer Meta-Analyse haben Hattie und Timperley (2007) zusammengefasst, wie effektives Feedback aussehen kann. Wir geben daher in unseren Aufgaben aufgabenbezogenes, sofortiges, sowie kurz und präzise formuliertes Feedback. Je nach Aufgabe handelt es sich um rein verbesserndes Feedback oder zusätzlich um Hinweise, wie man von der Eingabe zu einer richtigen Lösung gelangen kann.

Erfassung von Prozessdaten: Neben der Erhebung der eingegebenen Lösung erfassen wir, sofern es der Aufgabentyp ermöglicht, auch Prozessdaten, die den Lösungsprozess abbilden, um Einblicke in z. B. Lösungsstrategien zu erhalten.

Umsetzung auf dem iPad

Im Modell von Dienes (1967) werden Brüche als diskrete Mengen dargestellt. Gerade in der Anfangsphase des Bruchrechenunterrichts werden Modelle dieser Art gerne genutzt (vgl. Brunnermeier u. a., 2004). Ein Nachteil des Modells ist jedoch, dass die Anzahl der Elemente der dargestellten Menge stets ein Vielfaches des Nenners des darzustellenden Bruches sein muss.

Dies unterstreicht die Notwendigkeit, Schülerinnen und Schülern neben der Darstellung von Brüchen mit diskreten Mengen weitere Darstellungen zu präsentieren. Carraher (1993) stellt ein Hybridmodell vor, das zum einen auf dem Verständnis von Verhältnissen, zum anderen auf dem Zahlenstrahl basiert. Dabei werden zwei Balken übereinander dargestellt, deren Längenverhältnis als Bruch anzugeben ist. Der Referenzbalken entspricht hier dem Intervall $[0; 1]$ und der zweite Balken einem Intervall $[0; \frac{n}{m}]$. Durch die Entfernung der Skalierung, wie wir sie von Aufgaben zum Zahlenstrahl üblicherweise her kennen, wird die Darstellung ent-arithmetisiert: Eine numerische Lösung des Problems ist nicht mehr möglich.

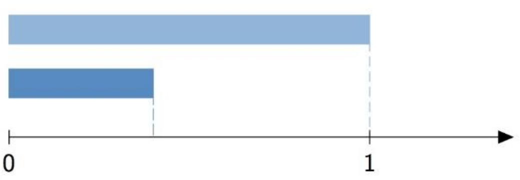


Abbildung 1 Darstellung eines Bruches im Hybridmodell (Carraher, 1993)

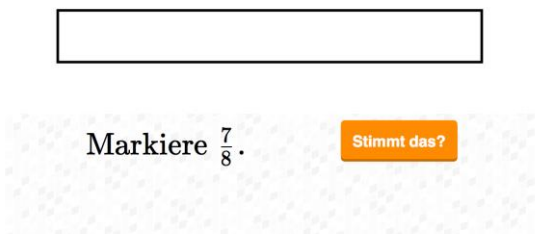


Abbildung 2 Umsetzung als Widget

Wir setzen Carrahers (1993) Hybridmodell sowohl für die Darstellung von Brüchen am Balken als auch am Kreis jeweils auf einem Intervall der Länge 1 um. Dabei entspricht der Rahmen unseres Balkens, bzw. der volle Kreis dem Referenzbalken der festen Länge 1. Die beiden Aufgaben erfolgen im

Anfangsunterricht zur Bruchrechnung ent-arithmetisiert und als Ergänzung zu Darstellungen mit diskreten Mengen.

Praxistest

Im Folgenden präsentieren wir einige Ergebnisse aus zwei Praxistests an einem Münchner Gymnasium. Die Tests dienten der Suche nach Fehlern in den Implementationen und dazu, Bedienschwierigkeiten aufzudecken. Sie fanden zu Beginn des Schuljahres 2016/17 (in fünf sechsten Klassen) und nahe des Zwischenzeugnisses (in einer sechsten Klasse) statt. Die verwendeten Daten wurden nicht systematisch erhoben, zeigen aber interessante Fragestellungen auf.

Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung der bereits vorgestellten Aufgabentypen zur Visualisierung von Brüchen am Balken bzw. Kreis und legen der Analyse folgende Heuristik zu Grunde: Eine Eingabe gilt als korrekt, wenn die Abweichung von der Eingabe zum gefragten Bruch unter $\frac{3}{100}$ liegt.

Mit dieser Sichtweise erhielten wir im ersten Test am Balken eine Lösungsrate von 43 % bei 3160 bearbeiten Aufgaben. Im Vergleich dazu wurden am Kreis 52 % der 3493 Aufgaben richtig bearbeitet. Ein ähnliches Bild zeigte sich im zweiten Praxistest: Während am Balken 49 % von 350 Brüchen korrekt markiert wurden, waren es am Kreis 58 % von 397 Brüchen.

Besonders deutlich zeigt sich dieser Unterschied an den Brüchen $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$: Im ersten Praxistest zeigten sich für die Brüche Lösungsraten von 53 % bzw. 40 % (115 bzw. 150 bearbeitete Aufgaben, Balken) und 98 % bzw. 92 % (158 bzw. 148 bearbeitete Aufgaben, Kreis).

In beiden Aufgabentypen wurde der Bruch $\frac{2}{3}$ öfter korrekt markiert als der Bruch $\frac{1}{3}$ (56 % vs. 47 %, Balken, ca. 50 bearbeitete Aufgaben; 53 % vs. 40 %, Kreis, ca. 165 bearbeitete Aufgaben).

Ausblick und Diskussion

In unseren ersten Praxistests erhalten wir über alle Datensets eine höhere Lösungsrate am Kreis als am Balken. Allerdings ergibt sich im Vergleich einzelner Brüche bisher kein eindeutiges Bild. Eine gezielte Untersuchung ausgewählter Brüche sowie das Einbeziehen von diskreten Bruchdarstellungen könnte hier die gewünschten Erkenntnisse liefern. Wegen der beobachteten Diskrepanz in den Lösungsraten sind hier insbesondere die beiden Brüche $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ für uns interessant. Es stellt sich die Frage, ob dieses Phänomen auch in einer gezielten Untersuchung zu beobachten ist. Weiter lässt die Auswertung des Praxistests vermuten, dass es Schülerinnen und Schülern im Anfangsunterricht der Bruchrechnung leichter fällt die Brüche $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ am Kreis zu markieren als am Balken. Ein Erklärungsansatz ist, dass diese „Alltagsbrüche“ den Kindern in Kreisdarstellungen bereits aus der Grundschule bekannt sind. Äußerungen der Schülerinnen und Schüler wie etwa: „Der Kreis erscheint mir schwieriger, also strenge ich mich mehr an!“ lassen auch motivationale und affektive Gründe als Erklärungsmöglichkeiten zu, die wir bisher nicht betrachtet haben.

Wir planen daher eine Studie für das Schuljahr 2016/17, in der wir einige der eben dargelegten Phänomene untersuchen werden. Darüber hinaus werden wir der Frage nachgehen, ob sich im Bereich der Bruchrechenkompetenz, der Motivation bzgl. Bruchrechnung bzw. Mathematik und der klassischen Schülerfehler (vgl. Padberg, 2009) Unterschiede zwischen Sechstklässlerinnen und Sechstklässlern, die mit dem iPad oder mit analogen Lehrmitteln unterrichtet worden sind, finden lassen.

Literatur

Apple Inc. (2014). *iBooks Author. Tolle Multi-Touch Bücher für das iPad erstellen und veröffentlichen*. Zugriff unter https://www.apple. com/de/ibooks-author/

Brunnermeier, A., Herz, A., Kammermeyer, F., Kilian, H., Kurz, K., Sauer, J., ... Zechel, J. (2004). *Fokus Mathematik. Gymnasium Bayern. 6. Jahrgangsstufe. Schülerbuch*. Berlin: Cornelsen.

Carraher, D. W. (1993). Lines of thought: A ratio and operator model of rational number. *Educational Studies in Mathematics*, *25*(4), 281–305. doi:10.1007/ BF01273903

Dienes, Z. P. (1967). *Fractions: An operational approach*. Harlow, Essex: Educational Supply Association.

Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of educational research*, 77(1), 81–112.

Leutner, Detlev. (2002). Adaptivität und Adaptierbarkeit multimedialer Lehr- und Informationssysteme. In Issing, Ludwig J. (Hrsg.), *Information und Lernen mit Multimedia und Internet. Lehrbuch für Studium und Praxis.* (S. 114–125). München.

Padberg, F. (2009). *Didaktik der Bruchrechnung* (4. Aufl.). Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

The CindyJS Project. (2016). *CindyJS: A JavaScript framework for interactive (mathematical) content*. Zugriff unter http://cindyjs.org

Natalie HOCK, Universität Kassel

Professionalisierung von angehenden und praktizierenden Mathematiklehrkräften durch die Förderung der fehlerdiagnostischen Kompetenz

Theoretischer Hintergrund

Der theoretische Hintergrund bezieht sich hauptsächlich auf die Bereiche Lehrerprofessionalisierung und fehlerdiagnostische Kompetenz. Weinert stellt sich die Frage, ob bestimmte Persönlichkeitsmerkmale entscheidend sind, um ein guter Lehrer zu sein oder ob eher wirksame Lehrtechniken eine entscheidende Rolle spielen (Weinert, 1996). Nach Bromme sind alle Lehrer Experten ihrer Profession, wobei die Lehrerexpertise ein berufsspezifisches Wissen und Können umfasst, das zur Bewältigung der beruflichen Aufgaben eines Lehrers benötigt wird (Bromme, 2008). Eine der national und international verbreitesten Darstellung von Wissen und Können als Kern von Lehrerexpertise wurde von Shulman veröffentlicht (Shulman, 1987). Er unterscheidet das Professionswissen eines Lehrers in allgemein-pädagogisches Wissen (general pedagogical knowledge), Fachwissen (content knowledge) und fachdidaktisches Wissen (pedagogical knowledge). Diese Aufteilung kann man ebenfalls in der Studie von COAKTIV wieder erkennen, wobei das Professionswissen das Organisations- und Beratungswissen noch beinhaltet. Besonders ist die Berücksichtigung der diagnostischen Fähigkeit, die sich sowohl auf das fachdidaktische Wissen als auch auf das pädagogisch-psychologische Wissen bezieht (Kunter et al., 2011). Die Beziehungen zwischen Lehrenden und Lernenden während der Diagnose spielen bei Ingenkamp und Lissmann eine entscheidende Rolle. Die „Pädagogische Diagnostik umfasst alle diagnostischen Tätigkeiten, durch die bei einzelnen Lernenden und den in einer Gruppe Lernenden Voraussetzungen und Bedingungen planmäßiger Lehr- und Lernprozesse ermittelt, Lernprozesse analysiert und Lernergebnisse festgestellt werden, um individuelles Lernen zu optimieren“ (Ingenkamp & Lissmann, 2008). Die Hauptaufgabe der Pädagogischen Diagnostik ist demnach für den Lernenden die richtigen Entscheidungen zu treffen hinsichtlich Förderung-, Platzierung- und Selektionsmaßnahmen. Weinert hingegen betrachtet noch intensiver die Fähigkeiten, die notwendig sind, „um den Kenntnisstand, die Lernfortschritte und die Leistungsprobleme der einzelnen Schüler sowie die Schwierigkeiten verschiedener Lernaufgaben im Unterricht fortlaufend beurteilen zu können, (…)“ (Weinert, 2000, S. 16). Innerhalb der Studie legen wir einen besonderen Augenmerk auf die Schülerfehler und beziehen uns daher auf die Definition von Heinrichs, wonach die fehlerdiagnostische Kompetenz diejenige Kompetenz ist, „die für Lehrkräfte notwendig ist, um basierend auf einer Prozessdiagnostik in Unterrichtssituationen mit informellen bis semiformellen Methoden zu impliziten Urteilen über Schülerfehler zu kommen (…)“ (Heinrichs, 2015, S. S. 60 f.). Die informellen Diagnosen beinhalten beiläufige Diagnosen, die während des Unterrichtsgeschehens stattfinden und sich häufig auf subjektiv bedeutsame Indikatoren als Vergleichsmaßstab beziehen (Heinrichs, 2015). Semiformellen Diagnose sind hingegen die „Gesamtheit der diagnostischen Tätigkeiten, die nicht den Kriterien der formellen Diagnose genügen, aber nicht nur zu impliziten Urteilen führen“ (Hascher, 2011, S.2).

Empirischer Forschungsstand

Durch die Schulstudie SALVE konnte bereits herausgefunden werden, dass Lehrerinnen und Lehrer die Schülerinnen und Schüler bzgl. des Verständnisses des Unterrichtsinhaltes unterschätzen (Hosenfeld et al., 2002). Chi, Siler und Jeong erkannten, dass Studierende nicht in der Lage sind alternative Schülervorstellungen zu diagnostizieren, sondern lediglich die Abweichung von der Norm erkennen (Chi, Siler & Jeong, 2004). Innerhalb der Studien von Seifried und Wuttke konnte festgestellt werden, dass Studierende als auch Referendare die Fehler nur selten identifizieren und korrigieren können. Praktizierende Lehrkräfte erzielten hingegen gute Ergebnisse (Seifried & Wuttke, 2010; Türling, Seifried & Wuttke, 2012).

Forschungsfragen

In der Mathematikdidaktik liegen bisher noch zu wenige Forschungsergebnisse bzgl. der Fehlerdiagnose vor. Des Weiteren fordert die Kultusministerkonferenz die Verbesserung der Lehrerausbildung unter anderem durch die Weiterentwicklung in methodischen und diagnostischen Kompetenzen. Aus diesem Grund habe ich mich entschlossen meine Dissertation in diesem Bereich zu verfassen und stelle mir daher folgende Forschungsfragen: Inwiefern kann durch die regelmäßige Teilnahme an einer Veranstaltung eine kontinuierliche Modifizierung der fehlerdiagnostischen Kompetenz erreicht werden? Ist es möglich mit Hilfe einer Tandembildung zwischen Mentoren und Studierenden der Universität Kassel in den Schulpraktischen Studien eine Steigerung der fehlerdiagnostischen Kompetenz zu erreichen? Welche Auswirkungen haben diagnostische Interviews auf die fehlerdiagnostische Kompetenz der Studierenden?

Design der Studie

Im WS 2015/16 fand die Pilotierung statt, in der sowohl eine Kontrollgruppe als auch eine Versuchsgruppe existierte.
Innerhalb der Versuchsgruppe gibt es zwei Untergruppen, wobei in der einen Untergruppe die Studierenden gemeinsam mit ihrem Mentor arbeiten und

die Studierenden in der anderen Untergruppe ohne Mentor an unserer Veranstaltung teilnehmen. Die Veranstaltung umfasst drei Seminarsitzungen. Während der ersten Sitzung lernen die Teilnehmer des Seminars diagnostische Grundbegriffe und Diagnosemittel, wie zum Beispiel das Diagnostische Interview kennen, um Schülerinnen und Schüler erfolgreich zu diagnostizieren. Die zweite Sitzung setzt sich mit Denk- und Fehlvorstellungen in den Bereichen Brüche, Ganze Zahlen, Lineare Gleichungen und Prozentrechnung auseinander und ermöglicht einen ersten Zugang zu den FIMS (Fehlerdiagnostischen Interviews im Mathematikunterricht der Sekundarstufen), die im Rahmen des Projektes DiMas-net entworfen wurden. Sie sind inhaltsspezifisch auf diese vier Themengebiete angepasst und ermöglichen eine individuelle Diagnose von möglichen Fehlvorstellungen. Zwischen der zweiten und dritten Seminarsitzung müssen die Studierenden allein oder gemeinsam mit ihrem Mentor das Diagnostische Interview durchführen und es ebenso reflektieren. In der dritten und letzten Veranstaltung betrachten wir die Reflektionen nochmal intensiver und stellen mögliche Fördermaßnahmen vor.

Methodologie

Die Untersuchung lässt sich als Mixed-Methods-Studie beschreiben, in der ich meine erhobenen Daten sowohl qualitativ als auch quantitativ auswerte. In der ersten und letzten Seminarsitzung beantworten die Teilnehmer des Seminars einen Fragebogen, um ihren Diagnosekompetenz selbst einzuschätzen. Dieser Fragebogen wurde von uns entwickelt und weist gute Reliabilitäten auf. Weiterhin bearbeiten sie einen Leistungstest, der Aufgaben mit fehlerhaften Schülerlösungen zu den Bereichen Brüche, Ganze Zahlen, Lineare Gleichungen und Prozentrechnung enthält. Im Pre- und Posttest sind sechs Ankeraufgaben enthalten, die wir bei der Datenauswertung miteinander vergleichen. Die Teilnehmer des Seminars müssen zunächst die Schülerfehler aufzeigen und anschließend die Denkprozesse des Schülers erläutern. Veranstaltungsbegleitend führe ich Leitfadeninterviews mit einem narrativen Aufbau durch, in dem die Interviewten zunächst aufgefordert werden über ihre diagnostischen Erfahrungen zu berichten und anschließend gezielte Nachfragen gestellt werden (Flick, 2000). Bis zum jetzigen Zeitpunkt ist nur der Leistungstest ausgewertet, wobei man in einzelnen Bereichen, wie bei den Ganzen Zahlen und der Prozentrechnung, Verbesserungen erkennen kann.

Ausblick

In der nächsten Zeit werde ich das Datenmaterial aus der Pilotierung weiterhin intensiv auswerten. Gegebenenfalls wird dann vor der Hauptuntersuchung im Sommersemester 2016 das Seminar sowie das Erhebungsmaterial nochmal überarbeitet.

Literatur

Bromme, R. (2008). Lehrerexpertise, Teacher´s skill. In W. Schneider & M. Hasselhorn (Hrsg.), *Handbuch der Pädagogischen Psychologie* (S. 159–167). Göttingen: Hogrefe

Chi, M. T. H., Siler, S. A. & Jeong, H. (2004): Can Tutors Monitor Students´ Understanding Accurately? *Cognition and Instruction* 22 (3), 363–387.

Flick, U. (2000). *Qualitative Forschung* (4. Auflage). Reinbek: Rowohlt-Taschenbuch-Verlag

Hascher, T (2011). Diagnostizieren in der Schule. In A. Bartz et al (Hrsg.), *PraxisWissen SchulLeitung* (S. 1–6). Unterschleissheim: Luchterhand und Link/DKV

Heinrichs, H. (2015). *Diagnostische Kompetenz von Mathematik-Lehramtsstudier-enden*. Wiesbaden: Springer Spektrum

Hosenfeld, I., Helmke, A. & Schrader, F.-W.(2002). Diagnostische Kompetenz: Unterrichts- und lernrelevante Schülermerkmale und deren Einschätzung durch Lehrkräfte in der Unterrichtsstudie SALVE. In: M. Prenzel & J. Doll (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule* (Bd. 45, S. 65–82); Zeitschrift für Pädagogik Beiheft, Weinheim: Beltz.

Ingenkamp, K.; Lissmann, U. (2008). *Lehrbuch der pädagogischen Diagnostik* (6. Aufl.). Weinheim und Basel: Beltz.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M. (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster: Waxmann.

Seifried, J. & Wuttke, E. (2010): Student errors. How teachers diagnose them and how respond to them. *Empirial research in vocational education and training,* 2 (2),147–162.

Shulman, L. S. (1987): Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57, 1–22.

Türling, J. M., Seifried, J. & Wuttke, E.: Teachers` Knowledge about Domain Specific Student Errors. In: J. Seifried & E. Wuttke (Hrsg.), *Learning from errors at school and at work (*Bd. 1, S. 95–110). Opladen: Budrich

Weinert, F. E. (1996). "Der gute Lehrer", "die gute Lehrerin" im Spiegel der Wissenschaft. Was macht Lehrende wirksam und was führt zu ihrer Wirksamkeit? *Beiträge zur Lehrerbildung, 14 (2),* 141–151.

Weinert, F. E. (2000): Lehren und Lernen für die Zukunft - Ansprüche an das Lernen in der Schule. *Pädagogische Nachrichten Rheinland Pfalz, 2,* 1–16.

Andrea HOFFKAMP, Sabine LÖHR, Berlin

Ein Diagnosetest zum Zahl- und Operationsverständnis in Klassen mit einem hohen Anteil förderbedürftiger Kinder zu Beginn der Sekundarstufe I

In diesem Beitrag stellen wir die Konzeption eines schriftlichen Diagnosetests vor, der im Rahmen eines Aktionsforschungsprojektes (Hoffkamp et al. 2015, Hoffkamp 2016) zur Schul- und Unterrichtsentwicklung an einer Gemeinschaftsschule in Berlin-Kreuzberg entwickelt wurde. Ziel des Projektes ist die Entwicklung und Implementierung eines Konzeptes für das Mathematiklernen in stark heterogenen Klassen. Der Diagnosetest ist eine von zahlreichen Maßnahmen innerhalb des entwickelten Gesamtkonzeptes. Eine praxisorientierte Beschreibung des Tests, seiner Konzeption und seiner Durchführung findet man in Hoffkamp & Löhr (2016).

Innerhalb des Projektes werden im Sinne einer evolutionären Innovation (Reinmann 2005) Anknüpfungspunkte gesucht, die an die Gegebenheiten des speziellen Schulkontextes anschließbar sind. Durch Diagnose wird versucht die Anschlußfähigkeit an den Entwicklungsstand der Kinder zu gewährleisten. Die Klassen der Schule sind bzgl. der Lernvoraussetzungen, des Arbeitsverhaltens und der kulturellen und sozialen Herkunft von großer Heterogenität geprägt. 90 % der Schülerinnen und Schüler sind nicht deutscher Herkunftssprache. Zusätzlich befinden sich in jeder Klasse der Sekundarstufe I vier Integrationskinder mit verschiedenen Förderschwerpunkten.

Ursprung, Lernentwicklungsmodell und Zielsetzungen des Tests

Der Ursprung des Tests stammt aus einem diagnostischen Interview, das im Rahmen des „Numeracy Development Project“ in Neuseeland (http://www.nzmaths.co.nz) entwickelt wurde. Das diagnostische Interview und das daran angebundene Förderkonzept basieren auf einem Lernentwicklungsmodell. In diesem Modell werden für die drei Bereiche Addition/Subtraktion, Multiplikation/Division, und Brüche/Anteile Lernentwicklungsstufen beschrieben, die typische kognitive Entwicklungswege beschreiben (Katzenbach et al. 2014). Dabei führt der Weg über zählendes Rechnen hin zu frühen additiven Strategien. Daran schließen sich fortgeschrittene additive und frühe multiplikative sowie letztlich fortgeschrittene multiplikative und fortgeschrittene proportionale Rechenstrategien an. Eine frühe multiplikative Strategie im Bereich Multiplikation/Division ist beispielsweise die schrittweise Multiplikation: $24 \cdot 6$ wird berechnet durch $24 \cdot 2 = 48$ und $48 + 48 + 48 = 144$. Eine mögliche fortgeschrittene Strategie nutzt hingegen operative Zusammenhänge, so dass z.B. gerechnet wird: $6 \cdot 24 = 12 \cdot 12 = 144$.

Im Zuge des Projektes haben die Autorinnen das diagnostische Interview in 7. Klassen[10] durchgeführt und daraus wichtige Konsequenzen für die Entwicklung der Konzeption und die Gestaltung des fachlichen Aufbaus im Rahmen der Unterrichtsentwicklung ziehen können. Die Durchführung der Eins-zu-Eins-Interviews ist aber mit den regulären Ressourcen der Schule in Zukunft nicht zu leisten. Deswegen wurde ein mit den vorhandenen Ressourcen vereinbarer schriftlicher Test entwickelt, in dem die Grundideen des Interviews zu bewahren versucht werden.

Der Test zielt – wie die Interviews – lediglich auf das Zahl- und Operationsverständnis, da dies für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten beim Mathematiklernen zumeist die größte stoffliche Hürde im Hinblick auf die mathematischen Inhalte der Sekundarstufe I darstellt. Durch den Test sollen die Lehrerinnen und Lehrer einen frühen Einblick in den Lernstand der Kinder zu Beginn der 7. Klasse erhalten, so dass ein adaptiver Unterricht von Anfang an möglich wird. Lehrkräfte sollen für die Heterogenität der Klassen sensibilisiert werden und diese differenziert wahrnehmen können. Dies beinhaltet ein Umdenken durch die Loslösung von Aussagen wie „die Kinder können eben keine Bruchrechnung“ und die Entwicklung hin zu einem Denken in Lernentwicklungsniveaus und der Anbahnung des nächsten Schrittes im Lernentwicklungsprozess der einzelnen Kinder. Das zugrunde liegende Lernentwicklungsmodell erlaubt den für Sekundarstufe I ausgebildeten Lehrerinnen und Lehrern dabei einen wertvollen Einblick in typische Erkenntniswege der Grundschulmathematik.

Der Aufbau des Tests und ausgewählte Aufgaben

Der Test besteht aus zwei Teilen – einem Wissensteil und einem Strategieteil. Im Wissensteil werden Grundwissen und Grundfertigkeiten zu den Bereichen Zählen, Brüche, Stellenwerte und Grundaufgaben abgefragt. Die Durchführung erfolgt anhand von PowerPoint-Folien, wobei die Kinder die Lösungen auf einem vorbereiteten Bogen notieren. Der Strategieteil dreht sich um die Frage: „*Wie rechnest Du?*“. Er bezieht sich auf die drei Bereiche: Addition/Subtraktion, Multiplikation/Division und Anteile/Brüche. Die Durchführung erfolgt anhand von Aufgabenblättern, auf denen die Kinder ihre Rechenstrategien bzw. -wege darlegen sollen. Die Auswertung nimmt die Lehrkraft mithilfe eines Bogens vor, auf dem die Lernentwicklungsstufen anhand von Beispielstrategien tabellarisch aufgeführt sind.

In der Abbildung sind drei der sechs Aufgaben des Strategieteils mit den Lösungen einer Schülerin der 7. Klasse zu sehen. Bei der ersten Aufgabe zählt das Kind die Bäume, was dem niedrigsten Niveau *fortgeschrittenes Zählen* im Lernentwicklungsmodell entspricht. In der zweiten Aufgabe nutzt

[10] In Berlin beginnt die Sekundarstufe I mit der 7. Klasse.

das Kind Standardzerlegungen zur Berechnung des Produktes, aber stellt keine operativen Beziehungen zwischen den Aufgaben $3 \cdot 20 = 60$ und $3 \cdot 18$ her. Dies entspricht einer *frühen multiplikativen Strategie* im Lernentwicklungsmodell. Die dritte Aufgabe zeigt exemplarisch, dass niedrige Strategien häufig fehleranfällig sind. In dem vorliegenden Fall benutzt das Kind eine Standardzerlegung (Distributivgesetz) und macht anschließend einen Fehler mit den Stellenwerten. Dies ist insofern symptomatisch, als dass uns die Ergebnisse zeigen, dass gerade schwache Lernende nicht dadurch unterfordert werden dürfen, dass sie im Zuge falsch verstandener Reduktion *nur eine* Rechenstrategie lernen und automatisieren, sondern in ihren Möglichkeiten gefordert werden müssen, um Flexibilität beim Rechnen zu erreichen.

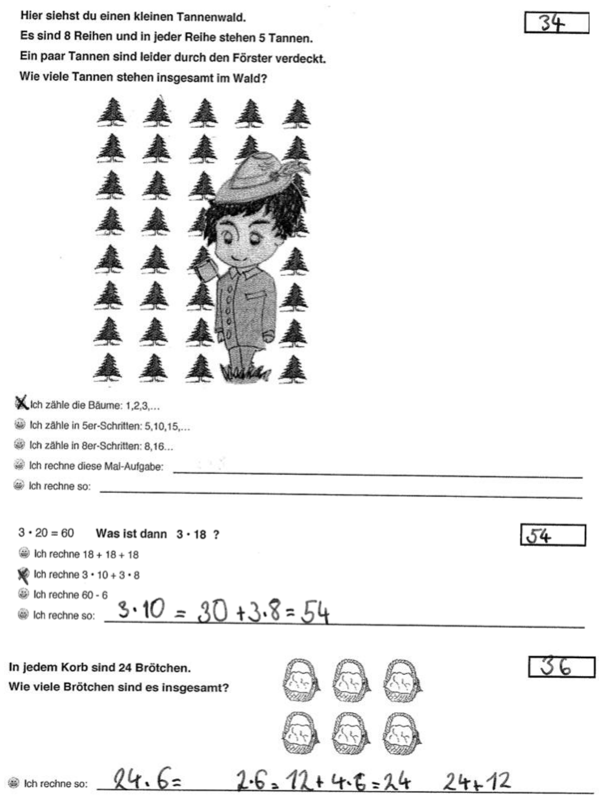


Abb.: Drei der acht Aufgaben zum Bereich Multiplikation/Division mit Schülerlösungen.

Auswirkungen auf den Unterricht und Fazit

Im Schuljahr 2015/16 haben wir sechs 7. Klassen (ca. 150 Kinder) getestet und die Ergebnisse klassenweise in Excel-Tabellen visualisiert. Dieser Überblick über die Klassen dient zunächst der Bewusstmachung der Heterogenität und erlaubt eine differenziertere Wahrnehmung der Schwierigkeiten einzelner Kinder direkt zu Beginn des Schuljahres. Daran anknüpfend ist aufgrund der frühen „Blitzdiagnose“ eine inhaltliche Zusammenarbeit der Mathematiklehrkräfte mit dem Sonderpädagogikteam von Beginn des Schuljahres an möglich. Auf Schulentwicklungsebene wurden aus dem Test wichtige Folgerungen für den Aufbau des schulinternen Curriculums gezogen. Beispielsweise zeigen die Lösungen, dass die Mehrheit der Kinder große Unsicherheiten beim Verständnis des Stellenwertsystems in den natürlichen Zahlen und dementsprechend erst recht in den gebrochen-rationalen Zahlen haben. Deswegen wurde im Curriculum eine Einheit zur Erweiterung des Stellenwertsystems „nach rechts" integriert. Im Zuge der Unterrichtsentwicklung werden darüber hinaus tägliche Übungen systematisch adaptiv genutzt, um die Kinder zu fördern. Umgekehrt dienen die täglichen Übungen als diagnostisches Feedback über die Lernentwicklung der Kinder. Zusätzlich wurde basierend auf dem Lernentwicklungsmodell eine „Fördermappe" erstellt, die v.a. zur sonderpädagogischen Arbeit genutzt wird. Der Test stellt insgesamt eine fundierte Möglichkeit dar, frühzeitig die Lernvoraussetzungen zu diagnostizieren. Dabei erhalten die Lehrkräfte einen Einblick in noch nicht genommene fachliche Hürden der Kinder, der eine Veränderung der Unterrichtskultur weg von „Richtig oder Falsch" hin zu der Frage „Wie rechnest Du?" bewirken kann. Im Gegensatz zum mündlichen Interview geht allerdings die pädagogische Idee des Beziehungsaufbaus verloren, weswegen wir bei einzelnen Kindern mit besonderen Schwierigkeiten weiterhin zur Durchführung des Interviews raten würden.

Teile dieser Arbeit sind durch das Deutsche Zentrum für Lehrerbildung Mathematik gefördert.

Literatur

Hoffkamp, A. (2016). Mathematik lehren an einer Brennpunktschule - Fach und Pädagogik im Blick. In A. Feindt et al.: *Lehren* (S. 32-33). Friedrich Jahresheft 2016, Friedrich Verlag.

Hoffkamp, A., Löhr, S. (2016). *Zahl- und Operationsverständnis diagnostizieren - Ein Test für stark heterogene Lerngruppen zu Beginn der Sekundarstufe I*. Erscheint in: Praxis der Mathematik in der Schule, 2016.

Hoffkamp, A., Löhr, S., Rösken-Winter, B. (2015). Binnendifferenzierung und pädagogisches Handeln – Entwicklungsforschung an einer Brennpunktschule. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, WTM Verlag.

Katzenbach, M., Bicker, U., Knobel, H., Krauth B. und Leufer N. (2014). „Wie hast Du das gerechnet?". Erste Erfahrungen mit einem neuseeländischen Diagnoseverfahren. Friedrich Jahresheft, S. 86-90.

Reinmann, G. (2005). Innovation ohne Forschung? Ein Plädoyer für den Design-Based Research-Ansatz in der Lehr-Lernforschung. *Unterrichtswissenschaft, 33*(1), 52-69.

Rita HOFMANN, Jürgen ROTH, Landau

Schüler/innen analysieren und erstellen Funktionsgraphen – Diagnostische Fähigkeiten von Lehramtsstudierenden mit Videovignetten fördern

Lernprozessdiagnose

Die Bedeutung der diagnostischen Kompetenz für den Lehrerberuf wird immer wieder herausgestellt. So halten etwa Baumert und Kunter (2006) diese für eine wesentliche Komponente des professionellen Wissens und Könnens von Lehrkräften. Diagnostische Kompetenzen ermöglichen es der Lehrperson, Informationen über die Schüler/innen zu gewinnen, auf deren Grundlage wichtige Entscheidungen zum weiteren Unterrichtsverlauf getroffen werden. Neben der längerfristigen Unterrichtsplanung (*Makroadaptationen*) und der Notengebung, sollen auch kurzfristige Interventionen im Unterrichtsprozess (*Mikroadaptationen*) auf einer Diagnose beruhen (Schrader, 2013). Häufig liegt der Fokus dabei allerdings auf der Einschätzung des Wissens und Könnens der Schüler/innen in Klassenarbeiten und Tests. Dabei wird außer Acht gelassen, dass das Erfassen des individuellen Lernstandes der Schüler/innen innerhalb des Lernprozesses wesentlich dafür ist, den Unterricht so zu gestalten, dass dieser auf dem Vorwissen der Lernenden aufbaut und kognitiv herausfordernd sowie konstruktiv unterstützend ist (Baumert und Kunter, 2006).

Für das Konstrukt der diagnostischen Kompetenz gibt es keine einheitliche Definition, vielmehr findet sich in der Literatur eine Vielzahl an Definitionen, die dieses Konstrukt unterschiedlich präzise und mit verschiedenen Fokussierungen beschreiben. Mit Blick auf den Lernprozess der Schüler/innen nutzen wir die Definition von Weinert (2000), welcher unter der diagnostischen Kompetenz „ein Bündel von Fähigkeiten [versteht] um den Kenntnisstand, die Lernfortschritte und die Leistungsprobleme der einzelnen Schüler sowie die Schwierigkeiten verschiedener Lernaufgaben im Unterricht fortlaufend beurteilen zu können, sodass das didaktische Handeln auf diagnostischen Einsichten aufgebaut werden kann“ (Weinert, 2000, S. 16). Diese Definition verdeutlicht auch, dass Diagnose alleine nicht ausreicht, sondern diese als Grundlage für weiteres unterrichtliches Handeln dienen sollte. Um den Lernprozess der Schüler/innen adäquat unterstützen zu können, müssen Diagnosen oft spontan aus der Situation heraus („on the fly“) erfolgen (Praetorius et al., 2012), was besonders zu Beginn des Lehrerberufs sehr anspruchsvoll sein kann. Zudem fehlt es Lehramtsstudierenden häufig an Möglichkeiten, ihre diagnostischen Fähigkeiten bereits während ihres Studiums zu schulen, weswegen diese nach dem Lehramtsstudium nur sehr gering ausgebildet sind (z.B. Ostermann et al., 2015). Um den späteren Einstieg ins

Berufsleben zu erleichtern ist es folglich sinnvoll diagnostische Kompetenzen, vor allem die Fähigkeiten zur Lernprozessdiagnose, bereits im Lehramtsstudium auszubilden und zu fördern.

Funktionales Denken

Funktionale Zusammenhänge sind wesentlicher Bestandteil der Mathematik und auch in anderen Wissenschaften und im Alltag finden sich diese immer wieder. Dementsprechend ist die Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ eine von fünf mathematischen Leitideen in den deutschen Bildungsstandards (KMK 2004) und spielt im Mathematikunterricht aller Klassenstufen eine wichtige Rolle. Folglich ist es eine zentrale Aufgabe des Mathematikunterrichts die Schüler/innen in ihrem Funktionalen Denken zu fördern und zu unterstützen.

Unter dem Funktionalen Denken nach Vollrath (1989) wird eine Denkweise verstanden, die als „typisch für den Umgang mit Funktionen“ (Vollrath, 1989, S. 6) angesehen werden kann. Explizit nennt er drei Aspekte, die das Arbeiten mit Funktionen charakterisieren:

- *Zuordnung:* Hier geht es darum, dass einer Größe eine andere (abhängige Größe) eindeutig zugeordnet wird.
- *Änderungsverhalten* (auch *Kovariation*, etwa bei Malle, 2000): Bei diesem Aspekt geht es darum, wie sich eine Änderung der unabhängigen Größe auf die abhängige Größe auswirkt.
- *Sicht als Ganzes*: Unter diesem Aspekt wird ein Zusammenhang als Ganzes betrachtet, d.h. man betrachtet nicht einzelnen Wertepaare, sondern die Menge aller Wertepaare, also die Funktion als Objekt.

Charakteristisch für das Funktionale Denken in der Mathematik ist zudem die Verwendung verschiedene Darstellungsformen, insbesondere verbale Situationsbeschreibung (Text), Funktionsterm, Tabelle und Funktionsgraph, sowie der Wechsel zwischen diesen. Vor allem bei Darstellungswechseln, die einen Situationsbezug beinhalten, treten Schwierigkeiten auf, da hier Überschneidungen mit Alltagsvorstellungen und damit verbundene Verständnisprobleme auftreten (Nitsch, 2015). Vor allem Graphen, die nicht nur in der Mathematik, sondern insbesondere auch für die Gewinnung von Informationen in anderen Wissenschaften und im Alltag eine große Rolle spielen, müssen Schüler/innen korrekt analysieren können. Jedoch finden sich in der Literatur eine Vielzahl an Schwierigkeiten der Schüler/innen beim Interpretieren und Konstruieren von Funktionsgraphen (siehe z.B. Clement, 1985; Leinhardt et al., 1990; Nitsch, 2015). Um zu verhindern, dass sich diese Fehler verfestigen und um die Lernenden bestmöglich zu unterstützen ist es notwendig, solche möglichen Fehlvorstellungen und Schwierigkeiten frühzeitig zu erkennen.

Forschungsvorhaben

Um zu erkennen, wie Schüler/innen mit Funktionsgraphen arbeiten und welche Schwierigkeiten dabei auftreten, müssen entsprechende diagnostische Kompetenzen aufgebaut werden. Um diese bereits in der Lehramtsausbildung zu entwickeln und zu fördern, wollen wir Videos einsetzen, um möglichst realitätsnahe Lernumgebungen zu schaffen (Vorteile von Videos vgl. Riegel, 2013). Im realen Unterrichtsgeschehen können die Lehrkräfte neben der Wahrnehmung der Situation aber auch auf die Schülerdokumente zugreifen, die gerade im Hinblick auf das Konstruieren von Graphen zentral sind. Aus diesem Grund ist es für uns wichtig, sowohl Videosequenzen als auch die Materialien der Schüler/innen zu Diagnosezwecken bereitzustellen. Hierzu soll die bestehende Lernumgebung ViviAn (Bartel und Roth, 2015) eingesetzt werden, die unter anderem auch für ein Selbststudium im Rahmen von Großveranstaltungen genutzt werden kann. Diese soll dahingehend erweitert werden, dass Videos zu der benannten Thematik produziert und ausgewählte Videosequenzen und die dazugehörigen Dokumente in die Lernumgebung integriert werden. Hier gilt es zunächst, Aufgaben auszuwählen bzw. zu erstellen, die ein mögliches Potential haben, Schülerfehler und Schwierigkeiten beim Umgang mit Funktionsgraphen sichtbar zu machen. Diese Aufgaben werden von Gruppen aus je vier Schüler/innen bearbeitet, die bei ihrem Arbeitsprozess gefilmt werden.

Zu den jeweiligen Sequenzen werden zudem Diagnoseaufträge konzipiert, die den Fokus der Studierenden auf bestimmte Aspekte lenken und somit der Förderung dienen sollen. Auf der Basis eines Expertenratings werden zu diesen Diagnoseitems Musterlösungen generiert, die den Studierenden direkt nach ihrer Arbeit, im direkten Vergleich zu ihren eigenen Antworten zu den Diagnoseaufträgen, als Rückmeldung angeboten werden.

In einer Studie mit Experimental- und Kontrollgruppendesign mit Pre- und Posttest (hier soll bei der Auswertung die Expertenmeinung als Bezugsnorm herangezogen werden) soll folgende Forschungsfrage beantwortet werden:

Hat der Einsatz von Videos einen Mehrwert gegenüber einer Analyse von Aufgaben (im Hinblick auf mögliche Schwierigkeiten und Fehlvorstellungen) um Lernstände sowie Schülerfehler und Schwierigkeiten beim Analysieren und Erstellen von Funktionsgraphen zu identifizieren.

Letzteres wird bisher häufig in Didaktikveranstaltungen umgesetzt. Nun gilt es zu überprüfen, ob sich ein systematischer Unterschied in der Ausbildung diagnostischer Kompetenzen zeigt, der den Aufwand, Videos zu generieren und einzusetzen, rechtfertigt und somit für die oben beschriebene Umgestaltung der Lehramtsausbildung spricht.

Literatur

Bartel, M.-E. & Roth, J. (2015). Diagnostische Kompetenz durch Videovignetten fördern. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* 2015 (S. 1033–1036). Münster: WTM.

Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort. Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft* 9 (4), 469–520.

Clement, J. (1985) Misconceptions in graphing. In L. Streefland (Hrsg.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (S. 369–375). Utrecht.

KMK. (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Beschluss vom 4.12.2003. http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf. Zugegriffen 06.10.2015.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing. Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research* 60 (1), 1–64.

Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *mathematik lehren* (103), 8–11.

Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge. Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Ostermann, A., Leuders, T. & Nückles, M. (2015). Wissen, was Schülerinnen und Schülern schwer fällt. Welche Faktoren beeinflussen die Schwierigkeitseinschätzung von Mathematikaufgaben? *Journal für Mathematik-Didaktik* 36 (1), 45–76.

Praetorius, A.-K., Lipowsky, F. & Karst, K. (2012). Diagnostische Kompetenz von Lehrkräften: Aktueller Forschungsstand, unterrichtspraktische Umsetzbarkeit und Bedeutung für den Unterricht. In R. Lazarides & A. Ittel (Hrsg.), *Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Implikationen für Theorie und Praxis* (S. 115–146). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Riegel, U. (2013). Videobasierte Kompetenzforschung in den Fachdidaktiken. Einleitung. In U. Riegel & K. Macha (Hrsg.), *Videobasierte Kompetenzforschung in den Fachdidaktiken* (Fachdidaktische Forschungen, Bd. 4, S. 9–24). Münster: Waxmann.

Schrader, F.-W. (2013). Diagnostische Kompetenz von Lehrpersonen. *Beiträge zur Lehrerbildung* 31 (2), 154–165.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik* 10 (1), 3–37.

Weinert, F. E. (2000). *Lehren und Lernen für die Zukunft - Ansprüche an das Lernen in der Schule*, Pädagogisches Institut Bad Kreuznach.

Markus HOHENWARTER, Linz

GeoGebra Groups - Zusammenarbeit für SchülerInnen und LehrerInnen

Die dynamische Mathematiksoftware GeoGebra hat in den letzten Jahren große Verbreitung im deutschsprachigen Raum und darüber hinaus gefunden. Während noch vor Kurzem vor allem die Verwendung von Desktop und Laptop Computern in Schulen im Vordergrund stand, zeichnet sich hier eine deutliche Veränderung in Richtung Tablets und teilweise auch schon Smartphones ab. Auf all diesen Plattformen steht GeoGebra inzwischen als Werkzeug zur Verfügung, sodass „Bring dein eigenes Gerät“ heute eine praktikable Möglichkeit des Technologieeinsatzes im Mathematikunterricht darstellen.

Spätestens wenn die GeoGebra Mathematik Apps nicht nur als Präsentationswerkzeug der Lehrerin Verwendung finden, sondern auch von Schülern auf ihren Touchscreens zum „Begreifen“ von Mathematik eingesetzt werden sollen, dann stellt sich die Frage, wie die engagierte Lehrerin auf einfachem Wege die Werke ihrer SchülerInnen ansehen und bei Bedarf auch kommentieren kann.

1. Lernplattformen

Dazu bieten sich sogenannte „Lernmanagement-Systeme“ (LMS) an, unter denen vor allem Moodle im deutschsprachigen Raum verbreitet ist:

„A learning management system (LMS) is a set of integrated software services that organizes and supports online learning, education, and training. These systems usually provide content uploading and distribution, class administration, and discussion facilities [...]. Some other additional functionality such as assessment tools for online quizzing and testing; homework submission tools for managing the collection, grading, and redistribution of homework assignments to students in an online class; and student profiling to track the progress and performance of individual students using the system.“ (Distefano et al., 2007)

Klassische LMS bringen insbesondere zwei Probleme mit sich: Einerseits haben sie sehr viele Funktionen, was Neulinge durchaus abschrecken kann. Andererseits müssen sie von jemandem (Schule, Ministerium, etc.) auf eigenen Servern installiert und gewartet werden, was in der Praxis teilweise dazu geführt hat, dass Zugang („Wie kann ich einen Kurs anlegen und meine Schülerinnen reinkriegen?“) und/oder Geschwindigkeit („Wenn ich mit meiner ganze Klasse ins System gehe, dann ist das LMS sehr langsam.“) Schwierigkeiten bereiten.

Aus diesem Grund geht der Trend in den letzten Jahren in Richtung „Cloud-Lernplattformen", einer speziellen Art von LMS, die einen bewusst reduzierten und vereinfachen Funktionsumfang haben und in der „Cloud", also im Internet von einer von Schule oder Schulverwaltung unabhängigen Organisation und meist weltweit, betrieben werden:

„A learning platform, then, is a Web application service that is intended to facilitate the achievement of learning goals by the user." (Distefano et al., 2007)

Beispiele für solche cloud-basierten Lernplattformen sind etwa Google Classroom, Gooru, Schoology oder Edmodo.

2. GeoGebra Gruppen

Die Problematik der teilweise schwierigen Handhabung von LMS hat sich auch im Zusammenhang mit den GeoGebra Apps gezeigt. So ist es etwa nicht trivial, als Lehrerin ein GeoGebra-Arbeitsblatt in ein LMS wie Moodle einzubetten (Plugins und iframes lassen grüßen). Umgekehrt ist ein Einsammeln von Schülerkonstruktionen in der Regel nur durch Abspeichern von ggb-Dateien aus GeoGebra heraus und darauffolgendes Hochladen in das LMS zu bewerkstelligen. Kurzum: es kam der starke Wunsch von GeoGebra NutzerInnen, diese organisatorische Seite des Umgangs mit GeoGebra Materialien zu vereinfachen.

Aus diesem Grund wurde 2014 die Arbeit an den „GeoGebra Gruppen" (www.geogebra.org/groups, siehe Abb. 1) gestartet, welche als weltweit verfügbare cloud-basierte Lernplattform ausgelegt sind. Zur Konzeption dieser Lernplattform wurden die Funktionen und Nutzeroberflächen zahlreicher existierender Plattformen verglichen und analysiert (vgl. Bogner, 2016). Daraus haben sich folgende spezielle Anforderungen für diese neue Lernplattform ergeben:

- Intuitive Bedienung, sodass keine Schulung erforderlich ist
- Gute Verwendbarkeit auf mobilen Geräten wie Tablets und Smartphones
- Benachrichtigungssystem, das Schülerinnen über neue Inhalte, Aufgaben und Rückmeldungen informiert
- Möglichkeit für SchülerInnen, selbst Fragen, Kommentare und evtl. auch Materialien in einer Gruppe zu teilen
- Möglichkeiten für LehrerInnen, schnell und einfach Aufgaben einsammeln und Rückmeldungen geben zu können
- Unterstützung verschiedener Medientypen wie Videos, Bilder, dynamische GeoGebra-Arbeitsblätter und insbesondere mathematische Zeichen und Formeln
- Einfaches Einbinden von bestehenden Materialien der GeoGebra Austauschplattform www.geogebra.org/materials

Abb. 1: Beiträge und Kommentare in einer GeoGebra Gruppe

3. Gründen einer Gruppe

Seit Dezember 2015 können Sie ihre eigenen Gruppen erstellen. Dazu besuchen Sie www.geogebra.org/groups und klicken auf „Gruppe gründen“. Sie werden nun gebeten, sich mit einem GeoGebra, Google, Twitter, Facebook oder Microsoft Konto anzumelden.

Um andere in Ihre Gruppe einzuladen, gehen Sie zum Reiter „Mitglieder“ (siehe Abb. 2). Hier können Gruppenmitglieder entweder mittels Email-Adressen hinzugefügt werden oder einfacher: Sie schreiben den Gruppen-Code an die Tafel, damit sich alle SchülerInnen selbst auf www.geogebra.org/groups für Ihre Gruppe anmelden können.

Abb. 2: Gruppen-Code auf dem Mitglieder-Reiter

Auf dem „Feedback“ Reiter können die Besitzer einer Gruppe alle von den SchülerInnen abgegebenen Aufgaben (GeoGebra Konstruktionen, Multiple-Choice Fragen, offene Fragen) sehen und private Rückmeldungen für die einzelnen SchülerInnen geben.

4. Ausblick

Aktuell sind Gruppen vor allem für das Verteilen von Materialien und das Einsammeln von Hausübungen gedacht. In Zukunft sollen auch „Live Sessions“ unterstützt werden, sodass die Lehrerin alle von ihren SchülerInnen erstellten Arbeitn sofort als kleine Vorschaubildchen bzw. bei Umfragen als Diagramm im Überblick sehen kann. Außerdem ist ein zusätzlicher „Chat“ Reiter geplant, wo im Stil eines Messengers sehr einfach in einer Gruppe diskutiert werden kann.

Literatur

Distefano, A., Redestam, K.E., and Sliverman, R.J. Encyclopedia of distributed learning, September 2007. URL http://knowledge.sagepub.com/view/distributedlearning/SAGE.xml

Bogner, S. Suggestions for a Simplified Learning Platform for Teaching Mathematics. Diplomarbeit, Johannes Kepler Universität Linz, Jänner 2016. URL http://epub.jku.at/obvulihs/content/titleinfo/996165

Edmodo. URL https://www.edmodo.com/, März 2016

GeoGebra. URL https://www.geogebra.org/, März 2016

Google classroom. URL https://classroom.google.com/, März 2016

Gooru. URL http://www.goorulearning.org/, März 2016

Moodle. URL https://moodle.org/, März 2016

Kathrin HOLTEN, Siegen

Erkenntnistheoretische Parallelen im Mathematik- und Physikunterricht? Zugänge über vergleichende Schul- und Lehrbuchanalysen

In einem fachübergreifenden Dissertationsprojekt im Rahmen des Forschungsverbunds der MINT-Didaktiken an der Universität Siegen (MINTUS) soll eine vergleichende Schulbuchanalyse mögliche Indikatoren für die Existenz erkenntnistheoretischer Parallelen im Mathematik- und Physikunterricht herausstellen.

Motivation

Ein Blick in aktuelle Mathematikschulbücher für die Einführungsphase in der Oberstufe stützt die These, dass die Schulanalysis in weiten Teilen auf reale Gegenstandsbereiche rekurriert (vgl. Witzke, 2014). So werden auf dem Zeichenblatt gegebene Funktionsgraphen grafisch abgeleitet, z.B. mithilfe von Spiegeln (vgl. Griesel, Gundlach, Postel, & Suhr, 2014, p. 98), oder Funktionsuntersuchungen werden mit dem GTR durch hineinzoomen durchgeführt (vgl. Krysmalski, Lütticken, Oselies, & Uhl, 2014, pp. 70–71). Um beispielsweise den Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate zu erklären, werden zahlreiche verschiedene Anwendungskontexte angeführt (vgl. Brandt & Reinelt, 2011, p. 49). Obwohl die Mathematik allgemein als eine deduktive Wissenschaft aufgefasst wird, werden in Mathematikschulbüchern der Oberstufe einige Sätze auch induktiv entwickelt und bewiesen (vgl. Krysmalski et al., 2014, p. 47). Zudem spielen seit längerem Experimente eine wesentliche Rolle im Mathematikunterricht (vgl. Goy & Kleine, 2015; Rieß, Wirtz, Barzel, Schulz, & Altenburger, 2012), so wie z.B. das Bierschaumexperiment zur Erkundung von Exponentialfunktionen (vgl. Freudigmann, 2011, p. 107), das auch in vielfältigen Variationen eingesetzt wird. Diese Fundstellen erinnern durch einen unmittelbaren Bezug zur Realität, eine induktive Vorgehensweise und die Nutzung des Experiments zur Wissenssicherung an das Vorgehen der Naturwissenschaften und insbesondere an den Physikunterricht. Daher liegt die Vermutung nahe, dass im Mathematik- und Physikunterricht auf erkenntnistheoretischer Ebene Parallelen existieren.

CoSiMo – Ein theoretisches Fundament

Die Verknüpfung verschiedener Theorien unterschiedlicher Bezugsrahmen (Bauersfeld, 1983; Burscheid & Struve, 2010; Gopnik & Meltzoff, 1998; Holton, 1981; Schoenfeld, 1985, 2011; Sneed, 1979; Tall, 2013; Winter, 1995) mündet in dem sog. CoSiMo (Cologne-Siegen-Model), mit dem die Arbeitsgruppen um Prof. Dr. Horst Struve (Köln) und Prof. Dr. Ingo Witzke

(Siegen) arbeiten. Dieses Theoriengeflecht bietet Erklärungsansätze und Analyseinstrumente z.B. zur Beschreibung von Erkenntnisgewinnungsprozessen von Schülerinnen und Schülern im Rahmen empirischer Theorien. Weiter ausgeführt wird dieses theoretische Fundament u.a. im Beitrag von Eduard Krause in diesem Band.

Eine erste Annäherung an erkenntnistheoretische Parallelen im Mathematik- und Physikunterricht

Ziel der Dissertation ist die Beschreibung erkenntnistheoretischer Parallelen im Mathematik- und Physikunterricht. Zunächst soll das Thema durch die folgenden Forschungsfragen, die gleichermaßen an den Mathematik- und Physikunterricht gestellt werden, konkretisiert werden.

- Was sind die Gegenstände, mit denen Schülerinnen und Schüler im Unterricht umgehen und wie werden diese begrifflich gefasst?
- Welche Rolle spielen Sätze und Beweise?
- Wie wird bewiesen und erklärt?
- Welchen Stellenwert haben Experimente?
- Wie wird experimentiert?
- Welche Stereotypen bezüglich Mathematik und Physik werden im Unterricht angesprochen?
- Kann eine Entwicklung nachgezeichnet werden?

Eine erste Annäherung an erkenntnistheoretische Parallelen erfolgt über eine systematische Schulbuchanalyse. Hier werden ausgewählte Schulbücher beider Unterrichtsfächer für die Oberstufe in NRW mit dem Inhaltsbereich Analysis (Mathematik) und dem Inhaltsbereich Kinematik (Physik) exemplarisch gegenübergestellt.

Analysis und Kinematik im Fokus der Schulbuchanalyse

Schulbücher sind leicht zugänglich und bieten daher einen ersten Einblick in das Unterrichtsgeschehen, ohne zahlreiche Unterrichtsstunden beobachtet zu haben. Die vergleichende Schulbuchanalyse soll auf Grundlage der qualitativen Inhaltsanalyse (vgl. Mayring, 2015) erfolgen und zu einer Ausschärfung der Forschungshypothese beitragen. Das zu analysierende Material wird nach exemplarischen und ökonomischen Gesichtspunkten bestimmt und enthält für den synchronen Vergleich eine Auswahl an verbreiteten Lehrwerken der Fächer Mathematik und Physik, wobei die zusätzliche Möglichkeit des diachronen Vergleichs besteht. D.h. es werden ausschließlich Schulbuchreihen betrachtet, die bereits in älteren Auflagen vorliegen und bis heute herausgegeben werden. Die Fragestellungen der Analyse beschäftigen sich deskriptiv mit der Umsetzung der Intention des Lehrwerks oder interpretativ mit der erzielten Wirkung bei den Rezipienten. Die theoriegeleitete Differenzierung der Fragestellung lautet:

Welcher Natur sind die Gegenstände des jeweiligen Unterrichts und wie wird mit ihnen umgegangen?

Lassen sich hieran erkenntnistheoretische Parallelen identifizieren?

Die Entwicklung eines Kategoriensystems zur systematischen Analyse der Schulbücher im Sinne der genannten Fragestellung ist Ziel des nächsten Arbeitsschrittes des Projekts.

Weitere Zugänge

Die Entwicklung offener Fragebogen sowie die Durchführung von Interviews können über die Schulbuchanalyse hinaus dazu beitragen, im Sinne der Fragestellung die Rezipienten von Schulbüchern in den Blick zu nehmen. Neben einer Lehrbuchanalyse bietet auch die Analyse empirischer Daten aus einem fächerverbindenden Seminar an der Universität Siegen (FäMaPdi) zur Vorbereitung auf das Praxissemester (vgl. Witzke, 2015) eine Möglichkeit der Auseinandersetzung mit erkenntnistheoretischen Parallelen im Mathematik- und Physikunterricht. Hier stehen als Datenmaterial Fragebogen und Videos zur Verfügung. Mithilfe strukturalistischer Rekonstruktionen im Rahmen von CoSiMo könnte die folgende grundsätzliche Frage beantwortet werden: „Kann die Schulanalysis als empirische Theorie rekonstruiert werden?“ (vgl. Struve, 1990; Witzke, 2014). Darüber hinaus bietet sich die Möglichkeit, im Sinne der Entwicklungsforschung Konzepte für fächerverbindenden Unterricht zu entwickeln und zu erproben.

Literatur

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld (Ed.), *Untersuchungen zum Mathematikunterricht: Vol. 6. Lernen und Lehren von Mathematik* (pp. 1–56).

Brandt, D., & Reinelt, G. (Eds.). (2011). *Lambacher-Schweizer: Mathematik für Gymnasien*. Gesamtband Oberstufe mit CAS (1st ed.). Stuttgart, Leipzig: Klett.

Burscheid, H. J., & Struve, H. (2010). *Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen: Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Freudigmann, H. (Ed.). (2011). *Lambacher Schweizer: Mathematik für Gymnasien*. Qualifikationsphase, Leistungskurs/Grundkurs (1st ed.). Stuttgart, Leipzig: Klett.

Gopnik, A., & Meltzoff, A. N. (1998). *Words, thoughts, and theories*. *A Bradford book*. Cambridge, MA: MIT Press.

Goy, A., & Kleine, M. (2015). Experimentieren: Themenheft Oktober 2015. *Praxis der Mathematik in der Schule*. (65).

Griesel, H., Gundlach, A., Postel, H., & Suhr, F. (Eds.). (2014). *EdM - Elemente der Mathematik: Einführungsphase*. Nordrhein-Westfalen. Braunschweig: Schroedel.

Holton, G. (1981). *Thematische Analyse der Wissenschaft: Die Physik Einsteins und seiner Zeit* (1st ed.). *Suhrkamp-Taschenbuch Wissenschaft: Vol. 293*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Krysmalski, M., Lütticken, R., Oselies, R., & Uhl, C. (Eds.). (2014). *Fokus Mathematik: Gymnasiale Oberstufe - Einführungsphase*. Nordrhein-Westfalen. Berlin: Cornelsen.

Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken* (12th ed.). Weinheim: Beltz.

Rieß, W., Wirtz, M., Barzel, B., Schulz, A., & Altenburger, P. (Eds.). (2012). *Experimentieren im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht: Schüler lernen wissenschaftlich denken und arbeiten*. Münster: Waxmann.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. London: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (2011). *How we think*. New York: Routledge.

Sneed, J. D. (1979). *The logical structure of mathematical physics* (2. ed., rev). *Pallas paperbacks: Vol. 14*. Dordrecht: Reidel.

Struve, H. (1990). *Grundlagen einer Geometriedidaktik*. Mannheim, Wien, Zürich: BI-Wiss.-Verl.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically*. New York: Cambridge University Press.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*. (61), 37–46.

Witzke, I. (2014). Zur Problematik der empirisch-gegenständlichen Analysis des Mathematikunterrichts. *Der Mathematikunterricht*, *60*(2), 19–31.

Witzke, I. (2015). Fachdidaktischverbindendes Lernen und Lehren im MINT-Bereich. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten, & C. Streit (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015. Vorträge auf der 49. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 09.02.2015 bis 13.02.2015 in Basel* (pp. 1008–1011). Münster: WTM.

Axel HOPPENBROCK, Paderborn

Kooperationsarten von Studenten beim Diskutieren über Votingfragen in einer Analysis I Vorlesung

Einleitung

Ein Ziel des Einsatzes von Votingfragen mit Peer Instruction[11] in Vorlesungen ist es, durch die größere Aktivität der Studenten ein besseres Lernergebnis zu erzielen. Das Erreichen dieses Ziels konnte in einer Reihe von Vergleichsstudien, in denen interaktive Vorlesungen mit traditionellen verglichen wurden, bestätigt werden (u.a. Freeman et al., 2014; Hake, 1998). Jedoch ist damit nicht geklärt, ob u.a. der Methodenwechsel, das Steigern der Aufmerksamkeit (Hoppenbrock & Biehler, 2012) oder der Austausch zwischen den Studenten entscheidend für die höhere Lernleistung ist. Smith et al. (Smith et al., 2009) konnten zeigen, dass Studenten im Rahmen der Diskussionen neues Wissen erworben hatten und dieses auf vergleichbare Probleme übertragen konnten. Aus ihren Studienergebnissen zogen sie zudem die Hypothese, dass die Ursache für den Anstieg der richtigen Antworten von der ersten hin zur zweiten Abstimmung auf eine gemeinsame Wissenskonstruktion (Co-Konstruktion) zurückzuführen ist und nicht auf einem Erklären der richtigen Antwort durch einen Kommilitonen (Transmission) (Smith et al., 2009, p. 124). Der Überprüfung dieser Hypothese widmet sich diese Studie und untersucht, wie die Studenten während des Peer Instruction zusammenarbeiten. Die Beantwortung der Frage ist auch hinsichtlich der Gestaltung von Votingfragen von Bedeutung, denn Aufgaben bzw. in diesem Fall Votingfragen zur Co-Konstruktion sollten im Gegensatz zu „Transmissionsaufgaben“ für alle Diskussionsgruppenmitglieder eine Herausforderung darstellen (Goos, Galbright, & Renshaw, 1996).

Arten gemeinsamen Lernens

Damon und Phelps (Damon & Phelps, 1989) differenzieren in Abhängigkeit vom Grad der „Gleichheit“ der Lernenden und dem Maß der gegenseitigen Unterstützung zwischen kooperativem, kollaborativem Lernen und Peer Tutoring. Von Peer Tutoring sprechen sie, wenn ein Gruppenmitglied einen Wissensvorsprung hat und dieser dann den anderen etwas erklärt. Herrscht in der Gruppe ein geringes oder gar kein Autoritätsgefälle zwischen den Beteiligten und arbeitet diese wenig eng zusammen, dann wird von Kooperation gesprochen. Als klassisches Beispiel hierfür gilt, dass bei gemeinsamer

[11] Nach dem von Mazur empfohlenen Einsatz von Votingfragen in Vorlesungen, stimmen die Studenten über ein und dieselbe Frage zwei Mal ab. Zwischen diesen Abstimmungen sollen die Studenten mit ihren Nachbar diskutieren, um die richtigen Antwort herauszufinden. Diese Diskussion wird Peer Instruction genannt.

Lösung einer Aufgabe, diese in Teilaufgaben zerlegt wird und jeder Beteiligte eine Teilaufgabe relativ selbstständig löst. Beruht die Zusammenarbeit auf großer Gleichheit und arbeiten die Lernenden sehr eng zusammen, so wird dieses als kollaboratives Lernen bezeichnet. Solch eine kollaborative Zusammenarbeit eignet sich besonders gut, um tiefes Konzeptverständnis zu vermitteln (Damon & Phelps, 1988, 1989). Da vertieftes Konzeptverständnis eines der zentralen Ziele einer jeden Mathematikanfängerveranstaltung ist, spielt die Frage nach der Art der Zusammenarbeit während des Peer Instruction auch diesbezüglich eine Rolle.

Methodik

Im Rahmen der Studie wurden 16 Fragen mit Peer Instruction aus dem Bereich der Differentialrechnung in vier Analysis I Vorlesungen implementiert. Zu jeder Votingfrage wurden 6 bis 7 Gruppendiskussionen auf freiwilliger Basis mit Hilfe eines Diktiergerätes aufgezeichnet. Die insgesamt 108 Diskussionen wurden anschließend transkribiert. Die unterschiedlichen „Kooperationsarten“ wurden in einer Kodieranleitung beschrieben. Anhand dieser Anleitung wurden jede Gruppendiskussion von drei Kodierern, dem Autor als Forscher und zwei weiteren Kodierern, einer Kategorie zugeordnet. Bei der Intercoderreliabität ergab sich der ordentlicher bis guter Krippendorfs Alpha Wert von 0,77. Im Anschluss daran wurden die unterschiedlich kategorisierten Diskussionen noch einmal gemeinsam angeschaut, besprochen und dann neu eingeordnet.

Es wurde zwischen 4 Arten der Zusammenarbeit differenziert: Von kollaborativem Lernen wurde gesprochen, wenn die Studenten, im Sinne der oberen Ausführungen gemeinsam an der Lösung arbeiteten. Ein entscheidendes Kriterium war dabei, dass mehr als ein Student seine Äußerungen begründete. Fehlten solche Begründungen gänzlich und wiederholten z. B. die Studenten nur noch einmal die verschiedenen Antwortalternativen, so wurde von einer rein inhaltlichen Auseinandersetzung ohne Begründungen gesprochen. War kein inhaltlicher Bezug zur Votingfrage zu beobachten z.B. in dem die Studenten nur darüber redeten, dass die Aufgabe zu schwer gewesen sei, so wurde die Diskussion mit „keine inhaltliche Zusammenarbeit“ klassifiziert. Als Peer Tutoring wurden solche Diskussionen eingeordnet, in denen ein Student seinen Kommilitonen seine Sicht der Dinge erklärte. Die Rolle der anderen Diskutanten waren in diesem Fall auf Zuhören, Äußerungen wie „Ja“ oder „hmm“ oder dem Stellen von Fragen beschränkt.

Forschungsergebnisse

Bei allen Fragen kam es zu einem Anstieg des Anteils an richtigen Antworten (siehe Abb. 1). Der mittlere Anstieg betrug 29,4 Prozentpunkte, bei einer Standardabweichung von 12,9. Zudem zeigte sich, dass die Studenten in 85% der Fälle kollaborativ zusammenarbeiteten. In nur jeweils 6,5% der Fälle kam es zum Peer Tutoring bzw. zu einem inhaltlichen Austausch ohne Begründungen. In weniger als 2% kam es zu gar keinem inhaltlichen Austausch. Diese Art der Zusammenarbeit macht sich auch in der Dauer der Diskussionen bemerkbar. Die mittlere Dauer der kollaborativen Diskussionen liegt mit 2:20 min (SD 1:02) signifikant (U-Test p<0,05) über der mittlere Dauer der drei anderen in einer Gruppe zusammengefassten „Kooperationsarten“ von 1:30 min (SD 0:57).

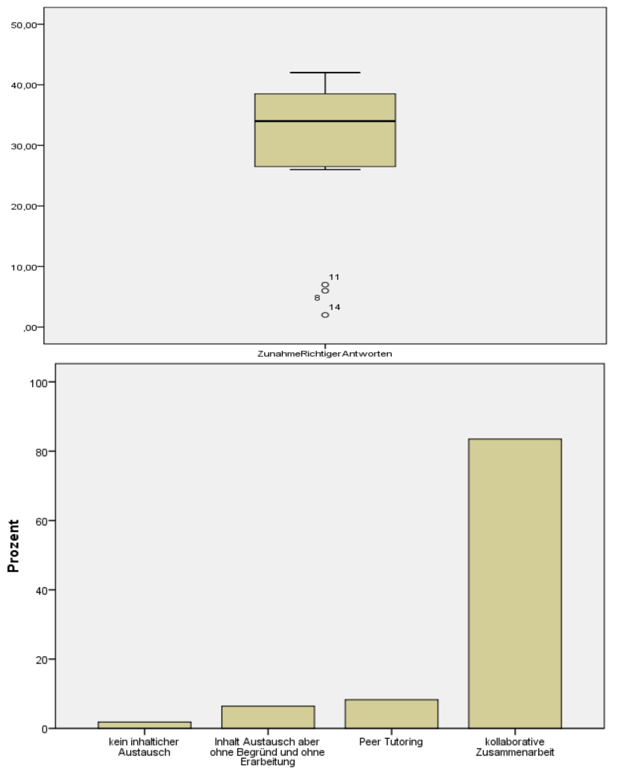


Abb. 1: Zunahme des Anteils richtiger Antworten (oben) und prozentualer Anteil der verschiedenen Arten der Zusammenarbeit (unten)

Diskussion

Insgesamt arbeiteten die Studenten überwiegend gemeinsam, sehr konstruktiv und inhaltsbezogen zusammen. Welchen Einfluss das den Studenten bewusste Aufzeichnen der Diskussionen hat oder sich nur entsprechende Studenten zur Aufnahme bereit erklärt hatten, bleibt eine offene aber methodisch kaum zu lösende Frage. Sieht man von diesem Problem ab, so kann diese Studie als Bestätigung der These von Smith et al., angesehen werden. In wie weit jedoch in den Diskussionen neues Wissen oder gar tiefes Verständnis erworben werden konnte und welche Qualität diese Wissen hat bedarf weiterer Forschung.

Die Ergebnisse entsprechen auch in etwa denen von Knight et al. (2013), die zeigten, dass in ¾ der Diskussionen eines Biologiekurses die Studenten gemeinsam an der Lösung arbeiteten. Fasst man die beiden Kategorien, kein inhaltlicher Austausch und inhaltlicher Austausch ohne Begründungen als „unproduktive Diskussionen“ zusammen, so war der Anteil mit knapp über 8% der Diskussionen sehr gering. Dieses Ergebnis steht im Gegensatz zu den

Forschungsergebnissen von James und Willoughby (2011). Diese stellten im Rahmen eines Astronomiekurses fest, dass 32,2% der Diskussionen unproduktiv waren. Die Ursachen für diese Unterschiede können vielfältig sein. Ein möglicher Grund könnte in der Art der Fragen liegen. Die Art der Fragen reichte bei James und Willoughby vom Abfragen reiner Fakten bis hin zum Konzeptverständnis, während in dieser Studie ausschließlich Konzeptverständnisfragen zum Einsatz kamen. Dieses These würde auch zu den Ergebnissen von Goos et al. (1996) passen, die zeigten, dass Lernende Lernaufgaben dann kollaborativ lösen, wenn die Aufgabe für alle eine Herausforderung darstellt und das in Bezug zur Lösung der Aufgabe notwendige Wissen bei allen Lernenden gleich ist. Weitere Forschung hinsichtlich des Zusammenhangs zwischen Art der Votingfragen, Art der Diskussion und Qualität der Wissensgenierung könnte hier mehr Aufschluss geben und einen Beitrag leisten, möglichst lernfördernde Votingfragen zu konzipieren.

Literatur

Damon, W., & Phelps, E. (1988). Strategic uses of peer learning in children’s education. In T. Berndt & G. Ladd (Eds.), *Children's peer relations*. New York: Wiley.

Damon, W., & Phelps, E. (1989). Critical distinctions among three approaches to peer education. *International journal of educational research, 13*(1), 9-19.

Freeman, S., Eddy, S. L., McDonougha, M., Smith, M. K., Okoroafor, N., Jordt, H., & Wenderoth, M. P. (2014). Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 111*(23), 8410–8415. doi:10.1073/pnas.1319030111

Goos, M., Galbright, P., & Renshaw, P. (1996). When Does Student Talk Become Collaborative Mathematical Discussion? In P. Clarkson (Ed.), *Proceedings of the 19th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Gold Case* (pp. 237-244). Melbourne: MERGA.

Hake, R. R. (1998). Interactive-engagement versus traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses. *American Journal of Physics Teachers, 66*(1), 64-74.

Hoppenbrock, A., & Biehler, R. (2012). Fachdidaktischer Einsatz eines elektronischen Votingsystems zur Aktivierung von Mathematikstudierenden in Erstsemestervorlesungen. . *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 389-392.

James, M. C., & Willoughby, S. (2011). Listening to student conversations during clicker questions: What you have not heard might surprise you! *American journal of physics, 79*(1), 123-132. Retrieved from http://scitation.aip.org/content/aapt/journal/ajp/79/1/10.1119/1.3488097

Knight, J. K., Wise, S. B., & Southard, K. M. (2013). Understanding Clicker Discussions: Student Reasoning and the Impact of Instructional Cues. *CBE-Life Sciences Education, 12*(4), 645-654. doi:10.1187/cbe.13-05-0090

Smith, M. K., Wood, W. B., Adams, W. K., Wieman, C., Knight, J. K., & Su, T. T. (2009). Why Peer Discussion Improves Student Performance on In-Class Concept Questions. *Science, 323*, 122-124. doi:10.1126/science.1165919

Martin Erik HORN, Berlin

Inverse von Rechteck-Matrizen

Dieser Beitrag baut auf dem letztjährigen GDM-Kurzvortrag „Ein physikdidaktischer Blick auf die Lineare Algebra“ (Horn 2015a) auf und will zeigen, dass linksseitige Inverse einer Rechteck-Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ aus m Zeilen und n Spalten (m > n) didaktisch leicht zugänglich als Matrix

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_n)^{-1} (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_{i-1} \wedge \sigma_j \wedge \mathbf{a}_{i+1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_n)$$

mit n Zeilen und m Spalten formuliert und diskutiert werden können. Dabei beruht dieser Zugang auf zwei wesentlichen didaktischen Setzungen:

- Während derzeit im schulischen und hochschulischen Bereich die Interpretation von Matrizen vorrangig zeilenweise erfolgt, wird hier die Matrix **A** spaltenweise gedeutet. Sie setzt sich somit aus insgesamt n Koeffizientenvektoren $\mathbf{a}_j$ zusammen.
- Vektoren werden im Sinne der Geometrischen Algebra als Linearkombinationen von verallgemeinerten Pauli-Matrizen σ_i geschrie- ben, wobei die Pauli-Matrix σ_i einen Einheitsvektor in i-Richtung repräsentiert. Der Koeffizientenvektor $\mathbf{a}_j$ schreibt sich somit als: $\mathbf{a}_j = a_{1j}\,\sigma_1 + a_{2j}\,\sigma_2 + \ldots + a_{mj}\,\sigma_m$

Dieser Zugang hat sich im fachhochschulischen Bereich bewährt und kann sowohl mit leistungsstärkeren Studierenden (Horn 2015b) wie auch mit mathematikferneren Studierenden (Horn 2016a) umgesetzt werden.

Physikdidaktisches Intermezzo

Als Teilzeitmathematiker mit Wurzeln in der Physik folge ich bei der weitern Darstellung dem babylonischen Vorgehen, das Feynman als für die Physik charakterisierend ansieht und folgendermaßen beschreibt: „Die alten Babylonier kannten keine Methode für das Aufschreiben von Formeln. Stattdessen machten Sie ein Beispiel nach dem anderen – das ist alles“ (Feynman 2006, S. 70).

Das oben Beschriebene soll also anhand von Beispielen erklärt und erörtert werden – ganz so, wie ich mich auch mit den Studierenden im fachhochschulischen Bereich mathematischen Sachverhalten nähere.

Eine Klausuraufgabe zur Linearen Algebra

In der Klausur des Moduls M22 „Mathematik und Statistik“ des MSB-Studiengangs „Medical Controlling and Management“ wurde im Sommersemester 2015 die folgende Aufgabe (Horn 2016a) gestellt:

Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit (ME) des Endproduktes E_1 werden 5 ME des Rohstoffes R_1 und 8 ME des Rohstoffes R_2 benötigt. Zur

Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_2 werden 2 ME des Rohstoffes R_1 und 4 ME des Rohstoffes R_2 benötigt. Berechnen Sie, welche Mengen der Endprodukte E_1 und E_2 hergestellt werden, wenn im Herstellungsprozess insgesamt genau 60 ME des Rohstoffes R_1 und 100 ME des Rohstoffes R_2 verbraucht werden.

Die Aufgabe führt auf eine Matrizengleichung für den Gesamtrohstoffverbrauch und den beiden Koeffizientenvektoren der quadratischen Matrix **A**:

$$\vec{\mathrm{r}} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}_1 = 5\,\sigma_1 + 8\,\sigma_2 \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_2 = 2\,\sigma_1 + 4\,\sigma_2$$

Neben einer direkten Lösung mit Hilfe der äußeren Produkte der Koeffizientenvektoren und des Ergebnisvektors (Horn 2015c & 2016b) ist auch die Lösung unter Rückgriff auf die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ möglich. Die Definitionsgleichung für Inverse liefert die beiden Ergebnisvektoren $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_1 = \sigma_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_2 = \sigma_2$$

Die hypothetische Frage „*Welche Mengen der Endprodukte E_1 und E_2 werden hergestellt, wenn im Herstellungsprozess genau 1 ME des ersten Rohstoffes R_1* (bzw. genau 1 ME von R_2) *verbraucht wird?*" umschreibt die fiktive Bedeutung der Elemente der gesuchten Inversen. Sie lassen sich mittels der eingangs aufgeführten Beziehung berechnen:

$$x_1 = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)^{-1}\,(\sigma_1 \wedge \mathbf{a}_2) = \;\; 1 \qquad x_2 = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)^{-1}\,(\sigma_2 \wedge \mathbf{a}_2) = -\,1/2$$

$$y_1 = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)^{-1}\,(\mathbf{a}_1 \wedge \sigma_1) = -\,2 \qquad y_2 = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)^{-1}\,(\mathbf{a}_1 \wedge \sigma_2) = \;\; 5/4$$

Die negativen Werte zeigen an, dass dieser hypothetische Rohstoffverbrauch in der realen Wirtschaftswelt nicht realisiert wird. Mathematisch ist ein solches Vorgehen jedoch sinnvoll und liefert das erwartete Ergebnis:

$$\vec{\mathrm{P}} = \mathbf{A}^{-1}\,\vec{\mathrm{r}} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -2 & 5/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 60 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Eine ausführlichere Darstellung dieses Lösungswegs findet sich auch in der aufgeführten Literatur.

Modifikation der Klausuraufgabe

Im realen Wirtschaftsleben ist es selten, dass die Anzahl notwendiger Rohstoffe und die Anzahl der mit ihrer Hilfe produzierten Endprodukte überein stimmt. Deshalb wird die diskutierte Aufgabe um einen dritten Rohstoff ergänzt, so dass eine realistischere Situation modelliert wird:

*Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit (ME) des Endproduktes E_1 werden 5 ME des Rohstoffes R_1, 8 ME des Rohstoffes R_2 und **1 ME des Rohstoffes R_3** benötigt. Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_2 werden 2 ME des Rohstoffes R_1, 4 ME des Rohstoffes R_2 und **6 ME des Rohstoffes R_3** benötigt. Berechnen Sie, welche Mengen der Endprodukte E_1 und E_2 hergestellt werden, wenn im Herstellungsprozess insgesamt genau 60 ME des Rohstoffes R_1, 100 ME des Rohstoffes R_2 und **40 ME des Rohstoffes R_3** verbraucht werden.*

Diese Aufgabe führt wieder auf zwei Koeffizientenvektoren, die dieses Mal jedoch mit Hilfe einer Rechteck-Matrix **B** ermittelt werden:

$$\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \\ 40 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= 5\,\sigma_1 + 8\,\sigma_2 + \sigma_3 \\ \mathbf{b}_2 &= 2\,\sigma_1 + 4\,\sigma_2 + 6\,\sigma_3 \end{aligned}$$

Dieses überdeterminierte Lineare Gleichungssystem aus drei Linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten ist lösbar, da die beiden Koeffizientenvektoren $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ und der Ergebnisvektor komplanar sind. Für solche lösbaren Linearen Gleichungssysteme macht es Sinn, analog zum vorherigen Abschnitt einen Lösungsweg mit Hilfe einer Inversen $\mathbf{B}^{-1}$ zu formulieren:

$$\mathbf{B}\,\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \sigma_1 \\ \mathbf{r}_2 &= \sigma_2 \\ \mathbf{r}_2 &= \sigma_3 \end{aligned}$$

Frei nach Rota, dass große Lehrer etwas von einem Schwindler „a bit of a con man" hätten (Rota 1997, S. 9) wird hier verschwiegen, dass Koeffizientenvektoren und Ergebnisvektoren nun nicht mehr komplanar liegen und deshalb tatsächlich gar keine rechtsseitige Inverse berechnet wird. Das Ergebnis stellt jedoch eine vorzügliche linksseitige Inverse dar.

$$x_1 = (\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2)^{-1} (\sigma_1 \wedge \mathbf{b}_2) = \frac{1}{684} (46 - 66\,\sigma_1\sigma_2 - 22\,\sigma_2\sigma_3 - 44\,\sigma_3\sigma_1)$$

$$x_2 = (\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2)^{-1} (\sigma_2 \wedge \mathbf{b}_2) = \frac{1}{684} (64 + 42\,\sigma_1\sigma_2 + 14\,\sigma_2\sigma_3 + 28\,\sigma_3\sigma_1)$$

$$x_3 = (\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2)^{-1} (\sigma_3 \wedge \mathbf{b}_2) = \frac{1}{684} (-58 - 6\,\sigma_1\sigma_2 - 2\,\sigma_2\sigma_3 - 4\,\sigma_3\sigma_1)$$

$$y_1 = (\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2)^{-1} (\mathbf{b}_1 \wedge \sigma_1) = \frac{1}{684} (-15 + 11\,\sigma_1\sigma_2 + 55\,\sigma_2\sigma_3 + 88\,\sigma_3\sigma_1)$$

$$y_2 = (\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2)^{-1} (\mathbf{b}_1 \wedge \sigma_2) = \frac{1}{684} (-6 - 7\,\sigma_1\sigma_2 - 35\,\sigma_2\sigma_3 - 56\,\sigma_3\sigma_1)$$

$$y_3 = (\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2)^{-1} (\mathbf{b}_1 \wedge \sigma_3) = \frac{1}{684} (123 + \sigma_1\sigma_2 + 5\, \sigma_2\sigma_3 + 8\, \sigma_3\sigma_1)$$

Damit ergibt sich als Resultat der modifizierten Aufgabenstellung:

$$\vec{\text{P}} = \mathbf{B}^{-1}\ \vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Inverse von Rechteck-Matrizen lassen sich in der hier gezeigten Art zur Lösung konsistenter Linearer Gleichungssysteme einsetzen. Sie ermöglichen damit einen alternativen didaktischen Zugang zu Linearen Gleichungssystemen.

Darüber hinaus ist eine wesentliche Eigenschaft der hier berechneten Inversen didaktisch interessant: Die Elemente der linksseitigen Inversen $\mathbf{B}^{-1}$ bestehen nicht aus rein reellen Zahlen (Skalaren), sondern aus Linearkombinationen von reellen Zahlen und Bivektoren und somit aus Multivektoren mit quaternionischer Struktur. Dieser Ansatz lässt sich deshalb zu einer alternativen Motivation der Quaternionen einsetzen. Und er zeigt, wie quaternionische Strukturen verallgemeinert werden können – einfach indem die Anzahl an Rohstoffen und Endprodukten sukzessive erhöht wird.

Literatur

Feynman, R. P. (2006). Physik – ‚The Lost Lectures'. München: Pearson Studium.

Horn, M. E. (2015a). Ein physikdidaktischer Blick auf die Lineare Algebra. In F. Caluori et al. (Hrsg.), BzMU 2015, Band 1, S. 408–411, Münster: WTM.

Horn, M. E. (2015b). Lineare Algebra in physikdidaktischer Ausprägung. PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Wuppertal 2015. URL: http://phydid.physik.fu-berlin.de/index.php/phydid-b/article/view/626 [17.12.2015]

Horn, M. E. (2015c). Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra Crash Course. OHP-Folien des Kurses 200691.01 – Mathematics for Business and Economics, BSEL/HWR Berlin, veröffentlicht als Anhang von Horn, M. E. (2015b).

Horn, M. E. (2016a). Die Geometrische Algebra im Schnelldurchgang. Beitrag zur DPG-Jahrestagung in Hannover. Veröffentlichung vorgesehen unter www.phydid.de.

Horn, M. E. (2016b). Moderne Lineare Algebra – Ein Überblick. OHP-Folien des Moduls M22 – Mathematik und Statistik, MSB. Anhang von Horn, M. E. (2016a).

Rota, G.-C. (1997). Indiscrete Thoughts. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser.

Martin Erik HORN, Berlin

Wie groß ist der Flächeninhalt eines Parallelogramms?

Unser mathematisches Weltverständnis wird unter anderem durch zwei Problempunkte beeinträchtigt: Zum einen suggeriert die allumfassende und scheinbar alternativlose Nutzung kartesischer Koordinatensysteme, dass die Grundstruktur unserer Welt durch senkrecht geformte Grundobjekte (z.B. Quadrate oder Rechtecke) determiniert ist. Zum anderen findet sich in unseren Weltbeschreibungen eine oft unüberwindbare dimensionale Trennung, wenn null-, ein- oder weitere höherdimensionale mathematische Objekte strikt losgelöst voneinander betrachtet werden.

Parallelogramme durchbrechen diese beiden Problempunkte: Die Seiten eines Parallelogramms stehen in der Regel nicht senkrecht zueinander. Und mathematisch können Parallelogramme als Summe aus Skalaren und Bivektoren verstanden und beschrieben werden. Es ist deshalb auch aus didaktischer Sicht wichtig, ein tieferes Verständnis für sie zu entwickeln.

Überblick über die Rahmenbedingungen der Studie

An der Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin wird die wirtschaftsmathematische Grundlagenausbildung der Anfangssemester inhaltlich identisch sowohl in englisch- wie auch deutschsprachigen Kursen angeboten. Teil dieser Kurse ist zu etwa einem Drittel die Lineare Algebra.

Da sich die englischsprachigen Kursteilnehmer in der Regel als deutlich leistungsstärker erweisen als deutschsprachige, konnte in vergangenen Semestern in den von mir durchgeführten englischen Kursen zusätzlich zu den konventionellen Kursinhalten eine Behandlung der Linearen Algebra aus geometrisch-algebraischer Perspektive (Horn 2015a,b,c & 2016a,b) erfolgen. Damit wurde eine ursprünglich physikorientierte Mathematisierung (Hestenes 2003), (Doran & Lasenby 2003), (Parra Serra 2009) in einen wirtschaftsmathematischen, also physikfremden Kontext eingebettet.

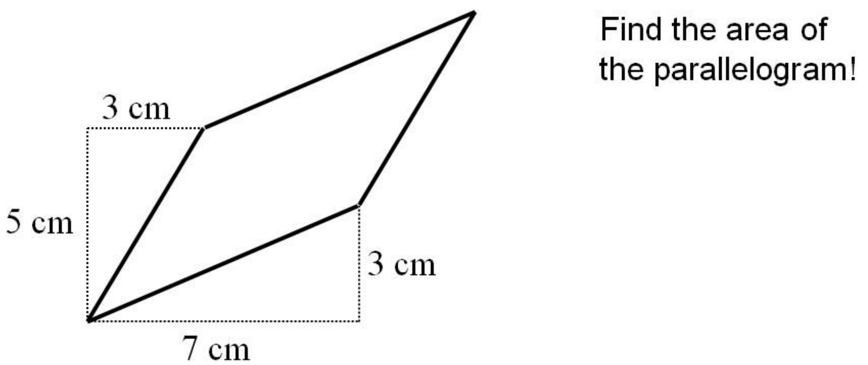


Abb. 1: Aufgabenstellung zur Flächenbestimmung am Parallelogramm.

Begleitet wurde diese Kursdurchführung im Wintersemester 2014/2015 durch eine Untersuchung, wie die Studierenden den Flächeninhalt eines vorgegebenen Parallelogramms (siehe Abb. 1) berechnen.

Konventionelle Flächeninhaltsbestimmungen

Im Vortest gelang es etwa einem Drittel der Studierenden des englischsprachigen Kurses, den Flächeninhalt mit Hilfe konventioneller Verfahren korrekt zu bestimmen. Dabei nutzen sie die drei folgenden Strategien:

- Berechnung mit Hilfe einer geometrischen Zerlegung des Parallelogramms (siehe Abb. 2),
- Berechnung mit Hilfe trigonometrischer Beziehungen,
- (und sehr selten) Berechnung mit Hilfe von Determinanten.

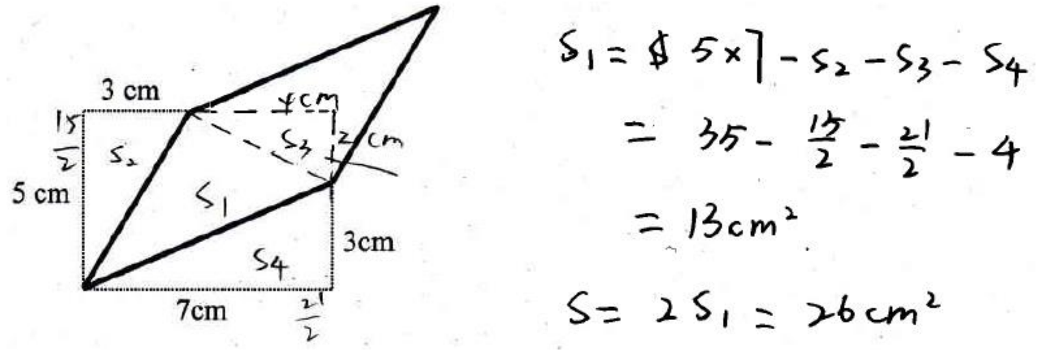


Abb. 2: Studentische Beispiellösung durch Zerlegung des Parallelogramms.

Zum Vergleich wurde der Fragebogen ebenfalls im deutschsprachigen Kurs ausgegeben mit dem deprimierenden Ergebnis, dass keinem einzigen Studierenden eine korrekte Flächeninhaltsberechnung gelang. Offenkundig bringen Studienanfänger diese Fähigkeit nicht aus der Schule mit.

Kernideen der Geometrischen Algebra

Nach dem Vortest wurde die Geometrische Algebra mit den Studierenden des englischsprachigen Kurses in seminaristischer Form (in 12 x 45 Min.) erarbeitet. Dabei stand die mathematische Behandlung nicht-kommutativer Beziehungen im Vordergrund, die sich in der Struktur der Geometrischen Algebra (siehe Abb. 3) wiederspiegeln und die zur Lösung wirtschaftsmathematisch relevanter Linearer Gleichungssysteme eingesetzt wurden.

Flächeninhaltsbestimmung mit Hilfe der Geometrischen Algebra

Nach der Erörterung der Geometrischen Algebra wurde die Aufgabenstellung mehrmals erneut ausgegeben und darüber hinaus in der Klausur abgefragt. Eine studentische Beispiellösung zeigt Abb. 4. Zuerst werden die Parallelogrammseiten vektoriell als Linearkombinationen von Pauli-Matrizen

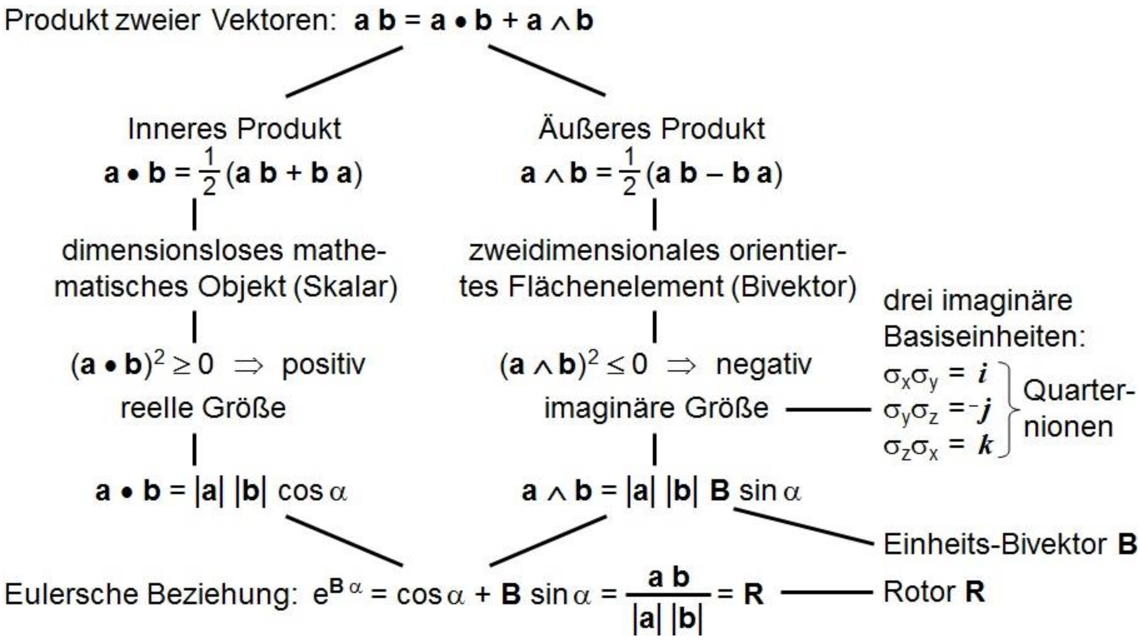


Abb. 3: Struktur der Geometrischen Algebra.

dargestellt. Die Multiplikation dieser beiden Vektoren liefert in Form des anti-symmetrischen bivektoriellen Anteils direkt den Flächeninhalt des vorgegebenen Parallelogramms. Da diese Lösungsvariante nicht nur deutlich zeitsparender, sondern auch konzeptuell sehr übersichtlich erfolgt, wurde sie von der überwiegenden Mehrzahl der Studierenden gewählt. Die Ergebnisse zeigen weiter, dass die Lösungshäufigkeit im Laufe des Semesters stetig anstieg (siehe Abb. 5) und sich bei den meisten Studierenden die Fähigkeit zur korrekten Flächeninhaltsbestimmung eines schräg liegenden Parallelogramms nach Kursende ausgebildet hatte. Ist eine solche Wissensfundierung erfolgt, stellt der Übergang zur Lösung Linearer Gleichungssys-

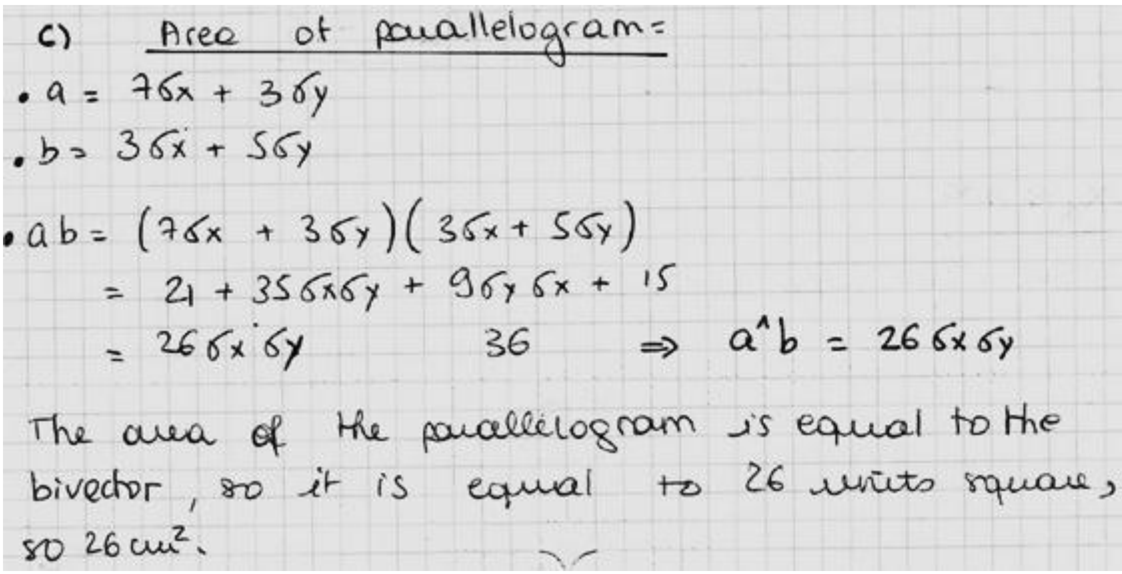


Abb. 4: Studentische Lösung der Flächeninhaltsberechnung in der Klausur.

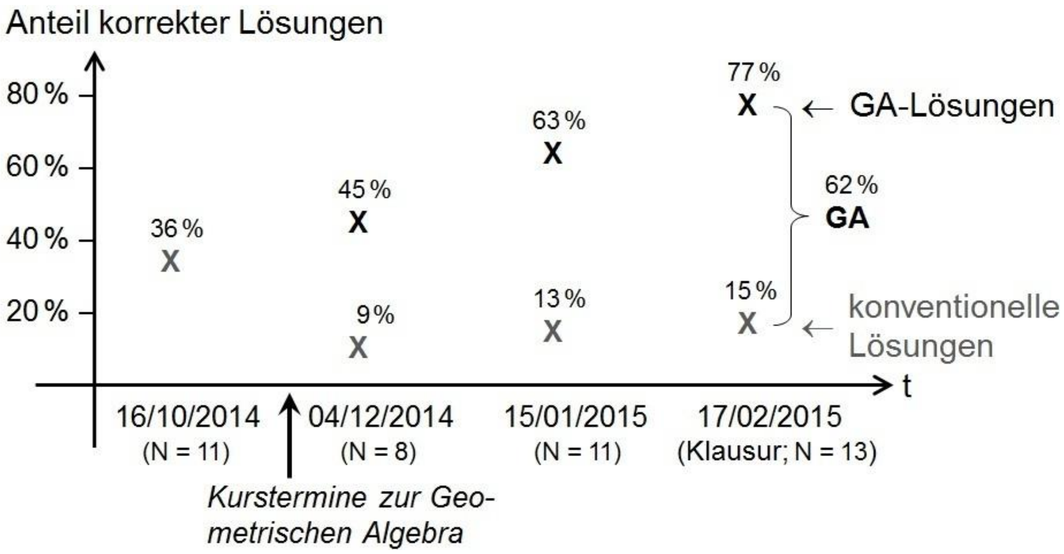


Abb. 5: Zeitliche Entwicklung korrekter Lösungen der Studierenden des englisch-sprachigen Wirtschaftsmathematik-Kurses LV-Nr. 200 691.01 im WS 2014/2015.

teme kein wesentliches konzeptuelles Problem mehr dar, da diese Lösungen im einfachsten Fall (LGS aus zwei Linearen Gleichungen) sehr anschaulich als Flächenvergleiche gedeutet und formuliert werden können.

Literatur

Doran, C. & Lasenby, A. (2003). Geometric Algebra for Physicists. Cambridge: CUP.

Hestenes, D. (2003). Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics. American Journal of Physics 71 (2), 104–121.

Horn, M. E. (2015a). Ein physikdidaktischer Blick auf die Lineare Algebra. In F. Caluori et al. (Hrsg.), BzMU 2015, Band 1, S. 408–411, Münster: WTM.

Horn, M. E. (2015b). Lineare Algebra in physikdidaktischer Ausprägung. PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Wuppertal 2015. URL: http://phydid.physik.fu-berlin.de/index.php/phydid-b/article/view/626 [17.12.2015].

Horn, M. E. (2015c). Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra Crash Course. Part I: Basics & Introduction. Part II: Solving Systems of Linear Equations. Part III: The Direct Product & Solving Higher-Dimensional Systems of Linear Equations. OHP-Folien des Kurses ‚Mathematics for Business and Economics', LV-Nr. 200 691.01, WS 2014/2015, BSEL/HWR Berlin, veröffentlicht als Anhang von Horn (2015b).

Horn, M. E. (2016a). Physikdidaktische Interpretation des Gaußschen Algorithmus. Zur Veröffentlichung vorgesehen unter PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Hannover 2016. URL: www.phydid.de [17.12.2016].

Horn, M. E. (2016b). Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra Crash Course. Part IV: Transformation of Coordinates & Gaussian Method of Solving a System of Linear Equations. OHP-Folien des Kurses ‚Mathematics for Business and Economics', LV-Nr. 200 691.01, WS 2015/2016, BSEL/HWR Berlin. Zur Veröffentlichung vorgesehen als Anhang von Horn (2016a).

Parra Serra, J. M. (2009). Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. Advances in Applied Clifford Algebras 19 (3/4), 819–834.

Karina HÖVELER, Dortmund

4 Mannschaften, jede spielt dreimal, aber es sind 6 Spiele!?- Strategien und Denkwege von Drittklässlern beim Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme

1. Theoretischer Hintergrund

Bereits im ersten Schuljahr sind Anzahlbestimmungen ein zentrales Unterrichtsthema. Dennoch zeigen Studien, dass Lernende verschiedener Altersklassen bei Anzahlbestimmungen im Kontext kombinatorischer Problemstellungen erhebliche Schwierigkeiten haben (vgl. u.a. Batanero et al., 1997; Lockwood, 2011). Angenommen wird, dass diese auf ein fehlendes Verständnis der zugrundliegenden fachlichen Strategien und Konzepte zurückzuführen sind (Hefendehl-Hebeker & Törner, 1984). Zur Verständnisförderung bedarf es im Sinne des genetischen Prinzips der Kenntnis über Lernendenstrategien und -konzeptualisierungen, mit dem Ziel diese als Ausgangspunkt für die Thematisierung fachlicher Lösungszugänge und Konzepte zu nutzen. Bislang liegen diesbezüglich jedoch keine ausreichenden Forschungsbefunde vor (Lockwood, 2011).

Aus fachlicher Sicht sind drei Zugänge zum Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme zentral: Die gesuchte Figurenmenge kann über die Auflistung und anschließende Abzählung aller Figuren, durch die Anwendung von Zählprinzipien oder den Einsatz kombinatorischer Operationen bestimmt werden (vgl. Schrage, 1996). Die beiden erstgenannten Zugänge sind bereits auf der Basis des Grundschulwissens zugänglich. Empirische Studien zu Lösungsstrategien (u.a. English, 1991; Hoffmann, 2003) liefern Informationen über Auflistungsstrategien, nicht jedoch über Zählstrategien, da diese Untersuchungen bislang in der Regel auf Aufzählprobleme ("Welche Ergebnisse sind möglich?") fokussierten. Frühe Studien von Piaget und Inhelder (1975) geben allerdings Hinweise darauf, dass Lernende Anzahlbestimmungsprobleme ("Wie viele Ergebnisse sind möglich?") im Grundschulalter u. a. bereits mit additiven und rekursiven Strategien lösen, oftmals aber andere als die gesuchten Lösungsanzahlen ermitteln. Welche Denkwege diesen Strategien zugrunde liegen und in welcher Beziehung diese zu den mathematischen Zählprinzipien stehen, ist nicht bekannt.

Um Lernende darin unterstützen zu können, ausgehend von eigenen Zählstrategien die kombinatorischen Zählprinzipien und deren zugrundeliegenden Konzepte zu verstehen, ist es zentral, erstens genauere Kenntnisse über Zählstrategien sowie die zugrundeliegenden Konzepte sowie zweitens über Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Zählstrategien der Lernenden und mathematischen Prinzipien zu erlangen.

2. Forschungsinteresse und Untersuchungsdesign

Zur Klärung der genannten Aspekte wurden im Rahmen eines Dissertationsprojektes Vorgehensweisen und Denkwege von Lernenden beim Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme erhoben und deren Beziehungen zu fachlichen Konzepten untersucht (vgl. Höveler, 2014). Dazu wurde ein zyklisches Untersuchungsdesign angelegt, in dem 63 Drittklässler in klinischen Interviews jeweils einen von drei Aufgabensätzen zu einer kombinatorischen Figur lösten. Die Aufgabenauswahl basierte auf zwei Bedingungen: Die Problemstellungen sollten mit verschiedenen Zählprinzipien gelöst werden können und die Daten auch Aufschluss über den Einfluss verschiedener Aufgabenvariablen liefern, da vorangehende Studien den Einfluss verschiedener Größen (u.a. komb. Figur, Anzahl der Elemente) auf Lösungserfolge und Vorgehensweisen zeigen (vgl. Batanero et. al., 1997). Die Aufgabensätze beinhalteten daher zwei zueinander isomorphe Probleme sowie jeweils eine Grundaufgabe mit n=4 und eine Erweiterungsaufgabe mit n=5 Elementen. Die videographierten und transkribierten Interviews wurden mittels zentraler Elemente der Grounded Theory (Glaser & Strauss, 1967) analysiert: Zunächst wurden die Vorgehensweisen der Lernenden identifiziert und klassifiziert. Anschließend wurden durch den wechselseitigen Vergleich Beziehungen zwischen ihren Strategien und den zugrunde liegenden Konzepten und mathematische Zählprinzipien identifiziert.

3. Untersuchungsergebnisse

Die Ergebnisse der Datenanalyse zeigen, dass Lernende die Mächtigkeit durch *additive und multiplikative Strategien* sowie durch *Kompensationsstrategien* bestimmen. Zudem verwenden sie bei der Erweiterung der Problemstellungen *rekursive Strategien* oder bestimmen die Anzahl indirekt *durch Rückgriff auf isomorphe Strukturen*. In der Regel werden die Zählstrategien aus einer vorherigen Auflistung abgeleitet, teilweise erfolgen sie auch direkt auf der Grundlage einer gedanklichen Strukturierung. Besonders bemerkenswert ist, dass sowohl bei Variations- als auch bei Kombinationsproblemen die Anzahl teilweise multiplikativ bestimmt wird. Dabei ist bei *jeder* multiplikativen Rechnung die ermittelte Lösungsanzahl größer als die gesuchte, ein Fehler, der in der Literatur als „Error of overcounting“ bekannt ist (vgl. u.a. Batanero et al., 1997). Die zugrundeliegende multiplikative Strategie und die Denkwege der Lernenden werden nachfolgend exemplarisch anhand der Fußballaufgabe erläutert, bevor Kompensationsstrategien in den Fokus rücken (für detaillierte Analysen & Darstellungen sowie weitere Strategien vgl. Höveler, 2014).

Bei der Fußballaufgabe sollte ausgehend von vier Mannschaften und der Bedingung, dass jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere spielt, die Anzahl aller Spiele auf dem Turnier ermittelt werden. Lernende, wie beispielsweise Ruben, ermitteln zunächst die Anzahl Figuren mit einem festen

Element *(„Schwarz spielt dreimal“*) und folgern (korrekt), dass es mit jedem anderen Element ebenso viele Objekte gibt (*„gelb, rot und grün spielen auch dreimal“*). Ausgehend von der Anzahl der Figuren mit einem festen Element schließen sie auf die gesamte Figurenmenge, indem sie die Anzahl aller Mengen mit der ermittelten Mächtigkeit multiplizieren: *„Also insgesamt 4 Mannschaften, jede spielt dreimal, dann sind es viermal 3 gleich 12 Spiele“*. Diese Grundidee, nachfolgend als *„Schluss von der Anzahl der Einzelelemente auf die Figurenmenge“* bezeichnet, wurde nicht nur bei multiplikativen, sondern auch bei additiven Strategien und Auflistungsstrategien identifiziert. Es ist daher anzunehmen, dass es sich hierbei um einen zentrales Lernendenkonzept handelt. Eine genauere Analyse legt nahe, dass die Beziehung zwischen der Anzahl der Figuren mit einem festen Element und der Mächtigkeit der gesamten Figurenmenge für Lernende grundsätzlich eine besondere Herausforderung darstellt. So führt diese Beziehung auch bei Lernenden, die die richtige Lösungsanzahl ermitteln zu einem kognitiven Konflikt, der beispielsweise von Paul wie folgt expliziert wird: *„4 Mannschaften, jede spielt dreimal, <u>aber</u> es sind 6 Spiele!?“* Die Herausforderung besteht augenscheinlich darin, dass die Schnittmenge der gebildeten Teilmengen nicht leer ist. Bedingung für additive und multiplikative Anzahlbestimmungen ist jedoch die Disjunktheit der Teilmengen.

Lernende, die den Fehler bemerkten, entwickelten *zwei unterschiedliche Typen von Kompensationsstrategien*: Die Strategie *„Doppelte wegnehmen“,* welche durch das Entfernen doppelter Objekte gekennzeichnet ist und die Strategie *„Gruppen bilden“*, bei der stattdessen Objekte, die unter den gegebenen Bedingungen als gleich betrachtet werden können, zunächst zu einer Gruppe zusammengelegt werden um zur Anzahlbestimmung anschließend die Anzahl aller Gruppen zu zählen. Der wechselseitige Vergleich zeigt, dass die Grundidee des Wegnehmens doppelter Elemente mit der Idee des Ein- und Ausschaltprinzips übereinstimmt. Ebenso stellt die Idee des Zuviel-Zählens und anschließenden Bildens von Gruppen mit gleichen Objekten die Grundidee des Prinzips der Schäfer dar (zur Darstellung Zählprinzipien vgl. Schrage, 1996; für detaillierte Gegenüberstellungen vgl. Höveler, 2014).

4. Diskussion und Ausblick

Aus den dargestellten Ergebnissen lassen sich Konsequenzen und Leitideen für den Unterricht ableiten, zugleich werden weitere zentrale Forschungsinteressen offensichtlich: So zeigen die Ergebnisse, dass Drittklässler bereits eigenständig Zählstrategien entwickeln. Unter propädeutischen Gesichtspunkten erscheint daher bereits in der Grundschule eine verstärkte Betrachtung kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme mit einem Fokus auf geschickte Anzahlbestimmungsstrategien von besonderer Bedeutung. Mit dem „Schluss von der Anzahl der Einzelelemente auf die Figurenmenge" liefern die Ergebnisse eine mögliche Ursache für Fehler des Typs „Error of overcounting". Es stellt sich die Frage, ob durch gezielte Auseinandersetzungen mit der Beziehung zwischen der Anzahl der Figuren mit einem festen Element und der Mächtigkeit der Figurenmenge sowie der Notwendigkeit der Disjunktheit von Teilmengen das Auftreten des genannten Fehlertyps verringert werden kann und diese zugleich dazu beitragen ein vertieftes konzeptuelles Verständnis zu entwickeln. Zudem wird ersichtlich, dass Lernende in der Lage sind Kompensationsstrategien zu entwickeln, die in den Kernideen mit zwei zentralen kombinatorischen Zählprinzipien übereinstimmen. Entsprechend sollten Strategien, die auf der Idee des „Schlusses von der Anzahl der Einzelelemente auf die Figurenmenge" basieren im Unterricht nicht als fehlerhaft verworfen, sondern vielmehr als Ausgangspunkte für die Entwicklung von Kompensationsstrategien und die propädeutische Thematisierung von Zählprinzipien verwendet werden.

Literatur

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics,* 32, 181-199.

English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(5), 451-474.

Glaser, B. & Strauss, A. (1967). *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research*. New York: Aldine De Gruyter.

Hefendehl-Hebeker, L. & Törner, G. (1984). Über Schwierigkeiten bei der Behandlung der Kombinatorik. *Didaktik der Mathematik, 12 (4), 245-262*.

Höveler, K. (2014). *Das Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme: Eine Untersuchung zu den Strukturierungs- und Zählstrategien von Drittklässlern.* Dortmund: TU Dortmund. Verfügbar unter: http://hdl.handle.net/2003/33604.

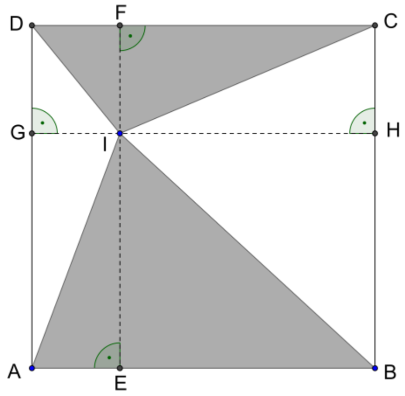
Hoffmann, A. (2003). Elementare Bausteine der kombinatorischen Problemlösefähigkeit. Hildesheim: Franzbecker.

Lockwood, E. (2011). Student connections among counting problems: An exploration using actor-oriented transfer. *Educational Studies in Mathematics, 78 (3),* 307-322.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of change in children*. London: Routledge and Kegan Paul Ltd.

Schrage, G. (1996). Analyzing Subject Matter: Fundamental Ideas of Combinatorics. In T. Cooney, S. Brown, J. Dossey, G. Schrage & E. Ch. Wittmann (Hrsg.), *Mathematics, Pedagogy and Secondary Teacher Education* (167-220). Portsmouth: Heinemann.

Hans HUMENBERGER, Wien



Auf dem Weg zum Satz von Anne – durch Variationen bei einem elementargeometrischen Problem

Bei der Verallgemeinerung eines einfachen elementargeometrischen Problems treten spannende Fragen auf, die uns – wie sich durch Recherche im Nachhinein herausgestellt hat – in den Dunstkreis des so genannten Satzes von Anne geführt haben. Dies ist ein relativ unbekannter Satz über konvexe Vierecke, der offenbar auf den französischen Mathematiker Pierre-Leon Anne (1806 – 1850) zurückgeht. Uns ist nicht bekannt, wie Anne damals seinen Satz bewiesen hat (geschweige denn, wie er darauf gekommen ist[12]). Im Folgenden wird ein rein elementargeometrischer Beweis für den Satz von Anne erarbeitet, von der Genese aber so, wie der Autor (diesen Satz noch gar nicht kennend) gemeinsam mit seinem Kollegen Dr. B. Schuppar (TU Dortmund) durch Verallgemeinerung auf die entsprechenden Phänomene gekommen ist. Die ersten Abschnitte (bis zum Drachenviereck) sind u. E. auch für den Schulunterricht geeignet. Hier können Schüler/innen auch in selbständiger Arbeit viel erkunden, indem sie mit Dynamischer Geometrie Software arbeiten (DGS als Messinstrument). Der Fall des allgemeinen Vierecks (hier kommt man dann eben zum Satz von Anne) ist Schülern/innen vermutlich nicht mehr in selbständiger Arbeit zumutbar, hier muss die Lehrkraft die Lernenden dabei unterstützen oder die zugehörige Begründung als Lehrervortrag planen. Auch in der Lehrerausbildung kann dieses (offenbar sehr wenig bekannte) Thema mit Studierenden in einer Veranstaltung zur Elementargeometrie gewinnbringend umgesetzt werden, wir müssen dazu aber selbst erst Erfahrungen sammeln.

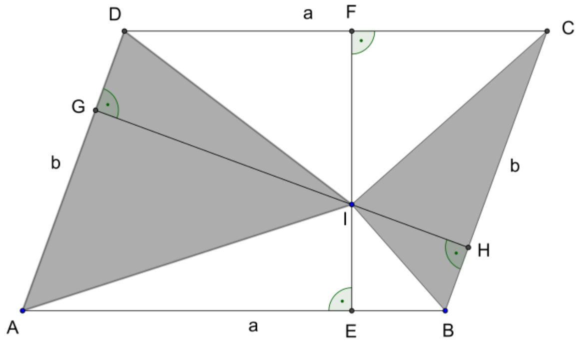
Inhaltlich spielt die Flächenformel für Dreiecke eine zentrale Rolle bei den Begründungen, bei den explorativen Phasen (Finden bzw. experimentelles Bestätigen von Vermutungen) ist DGS sehr gut und sinnvoll einsetzbar. Dadurch ist es möglich, dass Lernende selber experimentieren, Situationen explorieren und auf Vermutungen kommen, auch wenn die zugehörige Begründung vielleicht nicht in Eigenregie gelingt. Auch dann haben sie ein Stück Mathematik als Prozess (und nicht nur als Fertigprodukt) erfahren.

Das Problem und seine Verallgemeinerung

[12] Unsere Recherchen zu diesem Thema (auch persönlich bei fachkundigen Kollegen) haben zu nichts geführt. Keiner der von uns befragten Kollegen hat diesen Satz überhaupt gekannt, und auch wir bis vor kurzem nicht.

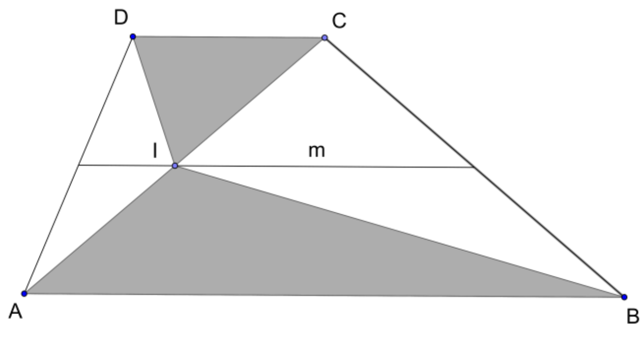
Ausgangspunkt ist das folgende Problem:
In einem Quadrat wird ein beliebiger Punkt I im Inneren mit den Ecken verbunden, die entstehenden Dreiecke werden abwechselnd grau und weiß gefärbt; dann ist die Summe der Flächeninhalte gleichfarbiger Dreiecke gleich groß. Die zugehörige Begründung sollte auch Schülern/innen nicht schwer fallen. Eine interessante Frage, die sich daraus ergibt, ist aber (wir beschränken uns dabei auf konvexe Vierecke): Gibt es noch andere Vierecke (außer dem Quadrat), für die dies auch gilt? Wenn ja, welche? Begründung?

Es ist nicht schwierig herauszufinden, dass dies auch für Rechtecke gilt (mit derselben Begründung wie bei Quadraten) und auch für Parallelogramme. Bei Parallelogrammen kann man z. B. durch die Flächenformeln für Dreiecke überlegen: Die weißen beiden Dreiecke zusammen haben einen Flächeninhalt von $a \cdot h_a / 2$, die grauen zusammen einen von $b \cdot h_b / 2$ (jeweils halbe Parallelogrammfläche); dahinter steckt die Konstanz der jeweiligen Höhensummen.



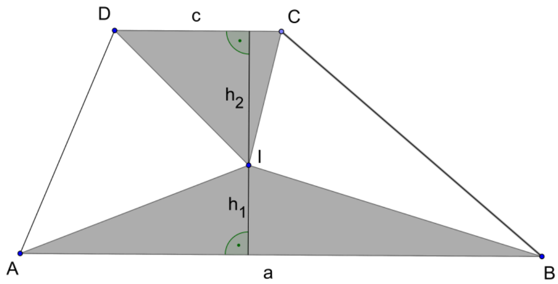
Variation des Problems, andere spezielle Vierecke

Als nächstes spezielles Viereck bietet sich das Trapez an. Hier ist es zwar nicht mehr so, dass man einen Punkt im Inneren beliebig wählen könnte für den angesprochenen Flächenausgleich zwischen Grau und Weiß, aber es gibt trotzdem solche inneren Punkte. Welche inneren Punkte sind dies beim Trapez? Genauso wie beim Parallelogramm kann man begründen, dass die Punkte auf der Mittellinie die gewünschte Eigenschaft (Flächenausgleich) haben (hier kann ein DGS als Messinstrument wieder gute Dienste leisten). Wenn man I auf der Mittellinie m bewegt, so ändert sich die Flächensumme der beiden grauen Dreiecke nicht, die Flächensumme ergibt sich leicht zu



$A_{\text{grau}} = \dfrac{a \cdot \frac{h}{2}}{2} + \dfrac{c \cdot \frac{h}{2}}{2} = \dfrac{(a+c) \cdot h}{4} = \dfrac{A_{\text{Trapez}}}{2}$. Nun kommt eine typisch mathematische Fragestellung: Gibt es bei Trapezen außer den Punkten auf der Mittellinie vielleicht noch andere Punkte mit der Flächenausgleicheigenschaft?

Denn bis jetzt wurde ja nur begründet, dass die Punkte auf der Mittellinie diese Eigenschaft haben, die Frage nach anderen solchen möglichen Punkten wurde noch nicht berührt. Um zur Aussage zu kommen „Beim Trapez ist die Menge aller Punkte mit der gewünschten Flächenausgleicheigenschaft die Mittellinie" („Ortslinie") fehlt noch der Nachweis, dass keine anderen Punkte in Frage kommen. Aber dieser Nachweis ist beim Trapez nicht schwierig, er sollte von Schülern/innen in Eigenregie erbracht werden können: Wenn das Trapez kein Parallelogramm ist, dann muss $a \neq c$ sein, o. B. d. A. $a > c$. Für $h_1 < h_2$, d. h. $h_1 = h/2 - x$ und $h_2 = h/2 + x$ gilt



$$A_{\text{grau}} = \frac{a \cdot \left(\frac{h}{2} - x\right)}{2} + \frac{c \cdot \left(\frac{h}{2} + x\right)}{2} = \underbrace{\frac{(a+c) \cdot h}{4}}_{\frac{A_{\text{Trapez}}}{2}} - \underbrace{\frac{x}{2} \cdot (a-c)}_{>0} < \frac{A_{\text{Trapez}}}{2}$$

Als nächstes käme der Drachen, es ergibt sich dabei, dass die Symmetriediagonale die Rolle der Mittellinie beim Trapez hat (man kann dies auf verschiedene Arten einsehen). Aus Platzgründen müssen wir hierfür auf Humenberger/Schuppar 2016 verweisen.

Allgemeines Viereck

Wie ist nun die Situation bei einem beliebigen konvexen Viereck $ABCD$ (wir gehen davon aus, dass es kein Parallelogramm ist)? Hier ist zunächst der Einsatz von DGS als heuristisches Werkzeug zu empfehlen: Man sucht Punkte I im Inneren des Vierecks, die die Flächenausgleicheigenschaft erfüllen. Technischer Tipp: Wenn man die Differenz der Flächeninhalte grauer und weißer Dreiecke berechnet, dann sind Punkte mit Zielwert 0 leicht zu finden. Nach ein paar Versuchen wird sich der Eindruck immer mehr verstärken, dass all diese Punkte auf einer Geraden liegen.
Man kann das Experiment weiter verfeinern: Man sucht zwei Punkte, die (wenigstens annähernd) die Bedingung erfüllen, legt eine Gerade hindurch und bindet den Punkt I der Dreiecke an diese Gerade; die Beobachtung wird

dadurch eindrucksvoll bestätigt. Welche Gerade ist es? Kann man zwei spezielle Punkte konstruieren, die die Bedingung erfüllen? Die Gerade durch diese beiden Punkte ist dann die gesuchte Ortslinie.

Möglicher Ansatz: Der Flächenvergleich grauer und weißer Dreiecke ist leicht zu kontrollieren, wenn der gemeinsame Punkt I auf einer Diagonale wandert: Die jeweils benachbarten Paare (verschiedenfarbiger!) Dreiecke, die je ein Stück dieser Diagonale als Grundseite besitzen, haben bezüglich dieser Grundseiten dieselben Höhen; zwei Dreiecke eines solchen Paares sind daher flächengleich, wenn I der Mittelpunkt der Diagonale ist. Das gilt für beide Diagonalen; somit sind zwei spezielle Punkte gefunden, die sogar sehr leicht zu konstruieren sind!

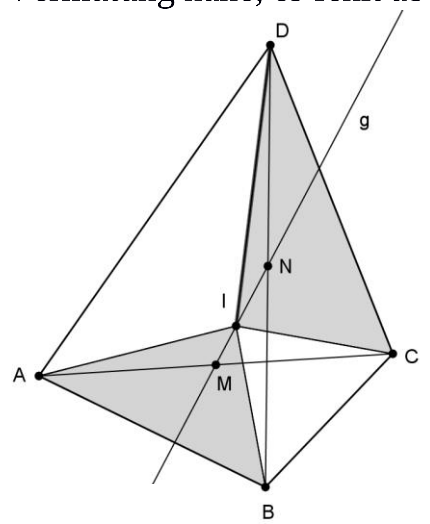
Wir bezeichnen die Mittelpunkte von AC und BD mit M und N. (An dieser Stelle heißt es in Mathematikbüchern gerne „Man sieht sofort, dass M und N die Bedingung erfüllen" – wenn man die Mittelpunkte betrachtet, ist das in der Tat leicht einzusehen, aber wie kommt man darauf, dass diese Mittelpunkte eine besondere Rolle spielen? Hierzu braucht man heuristische Strategien!)

Konstruiert man nun mit DGS die Gerade $g := MN$ und bindet den Punkt I an g, dann stellt man fest, dass die grauen und weißen Flächen tatsächlich exakt gleich groß sind; löst man I wiederum von g, dann ergibt sich: für $I \notin g$ sind die Flächensummen verschieden.

Auch der Vergleich mit den bisherigen Ergebnissen für spezielle Vierecke verläuft positiv: Bei Trapezen liegen beide Diagonalenmitten auf der Mittellinie der Parallelseiten; bei Drachen liegt eine Diagonalenmitte auf der anderen Diagonale, auch hier sind also die alten und neuen Resultate voll kompatibel. Diese Ergebnisse legen also folgende Vermutung nahe, es fehlt aber noch die Bestätigung durch einen Beweis (vgl. Humenberger/Schuppar 2016).

Satz („Satz von Anne")

Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, das kein Parallelogramm ist. Dann liegen alle Punkte I, für die Flächenausgleich bei den grauen und weißen Dreiecken herrscht, auf der Geraden $g := MN$ durch die beiden Mittelpunkte der Diagonalen.



Literatur

Humenberger, H., Schuppar, B. (2016): Flächenausgleich bei Weiß und Grau in Vierecken – der Satz von Anne und sein Umfeld. Erscheint in: Der Mathematikunterricht 62.

Ingrid HUPP, Koblenz

Historische Multiplikationsverfahren im Mathematikunterricht der Grundschule

1. Einleitung

Im Mathematikunterricht wird Mathematik oft als „Fertigprodukt“ unterrichtet. Die Schülerinnen und Schüler lernen Regeln auswendig, die oft als willkürlich und damit sinnlos empfunden werden. Es wird nicht deutlich, dass Mathematik ein historischer Prozess ist, in dem oft jahrhundertelang und erbittert um die „richtige“ Form gerungen wurde. Durch einen historischen Zugang können die Lernenden nachvollziehen, wie bestimmte Algorithmen und Regeln entstanden sind, welche Alternativen diskutiert wurden und warum die heutigen Normalverfahren in der Schule verwendet werden. Die Schülerinnen und Schüler können die Entwicklungen und Entscheidungen nachvollziehen, kritisch reflektieren und gelangen so zu einem tieferen Verständnis des Wesens der Mathematik. Die ägyptische Multiplikation, die Gittermethode und das Verdopplungs-Halbierungs-Verfahren können zur Differenzierung sehr gut eingesetzt werden, so dass hierdurch in heterogenen Lerngruppen die individuellen Bedürfnisse der Lernenden besser berücksichtigt werden können. Schwächere Schülerinnen und Schüler können bei der Verwendung von weniger komplexen Algorithmen wie der Gittermethode Erfolgserlebnisse haben, während leistungsstarke Schüler komplexe Algorithmen wie die ägyptische Multiplikation und das Verdopplungs-Halbierungs-Verfahren erlernen und deren mathematischen Hintergrund (gegensinniges Verändern, Anwendung des Distributivgesetzes, Darstellungssatz) erforschen können. Zudem wird eine Reflektion angeregt, aus welchen Gründen man sich für das heutige Normalverfahren entschieden hat.

2. Nepersche Streifen und Gittermethode

John Neper (1550 - 1617) war der Sohn eines schottischen Barons, Mathematiker, Naturgelehrter und Literat. Er schrieb 1614 ein Buch über Logarithmen, die er unabhängig von Jost Bürgi entwickelte. Seine Rechenstäbe hatten einen wichtigen Einfluss auf die Entwicklung der Rechenmaschinen. Beispielsweise basiert die erste mechanische Rechenmaschine von Schickard (1623) auf den Neperschen Rechenstäben. Nepersche Streifen können sich Schülerinnen und Schüler leicht selbst herstellen und sie dann bei Bedarf als Hilfsmittel zur Multiplikation verwenden. Verwendet man nur die tatsächlich benötigten Ausschnitte aus den Neperschen Streifen, ergibt sich die Gittermethode, die in einigen Schulbüchern (z.B. Zahlenbuch, Mathematikus, Leonardo) vor der Einführung der schriftlichen Multiplikation besprochen wird. Teilweise erfolgt auch ein Vergleich mit dem Normalverfahren.

Zur Verdeutlichung wird in Abbildung 1 die Multiplikation 164 · 27 mit der Gittermethode durchgeführt und dem Normalverfahren gegenübergestellt.

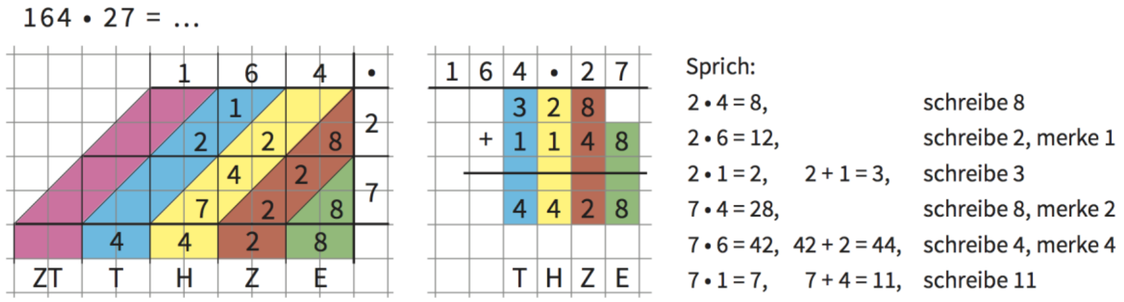


Abb. 1: Vergleich von Gittermethode und Normalverfahren,
Grafik M. Widiger, Idee: Zahlenbuch 4, S. 46

3. Verdopplungs-Halbierungs-Verfahren

Das Verdopplungs-Halbierungs-Verfahren findet man in der Literatur unter den unterschiedlichsten Bezeichnungen, beispielsweise als russische oder abessinische Bauernmultiplikation. Eine historisch exakte Erklärung der Entstehung dieses Verfahrens ist schwierig, alle bisherigen Erklärungsansätze sind umstritten. Die Grundidee: verdoppelt man in einem Produkt den einen Faktor und halbiert den anderen Faktor, so bleibt das Produkt konstant, d.h. $x \cdot y = \frac{x}{2} \cdot 2y$. Da sich im Bereich der natürlichen Zahlen nur gerade Zahlen halbieren lassen, muss bei ungeraden Zahlen mit Hilfe des Distributivgesetzes ein Zwischenschritt eingeführt werden ($x \cdot y = (x-1) \cdot y + y$). Am Beispiel 21 · 13 rechnet man also 21 E 13 = 20 E 13 + 13 = 10 E 26 + 13 = 5 E 52 + 13 = 4 E 52 + 65 = 2 E 104 + 65 = 1 E 208 + 65 = 273.

Bei den als russische oder abessinische Bauernmultiplikation bekannten Verfahren schreibt man die Rechnung verkürzt auf.

21	13
~~10~~	~~26~~
5	52
~~2~~	~~104~~
1	208
	273

4. Ägyptische Multiplikation

Die Ägypter führten die Multiplikation auf das wesentlich einfachere wiederholte Verdoppeln zurück. Da sich nach dem Darstellungssatz für das Dualsystem jede Zahl eindeutig als Summe von Zweierpotenzen schreiben lässt, reicht es aus, einen der beiden Faktoren hinreichend oft zu verdoppeln. Das Schulbuch "Nussknacker 4" stellt das Verfahren historisch korrekt dar, bereitet es aber im Vergleich zu den Originalquellen didaktisch übersichtlicher auf. Eine mögliche Umsetzung in der Schule wird in Abbildung 2 dargestellt.

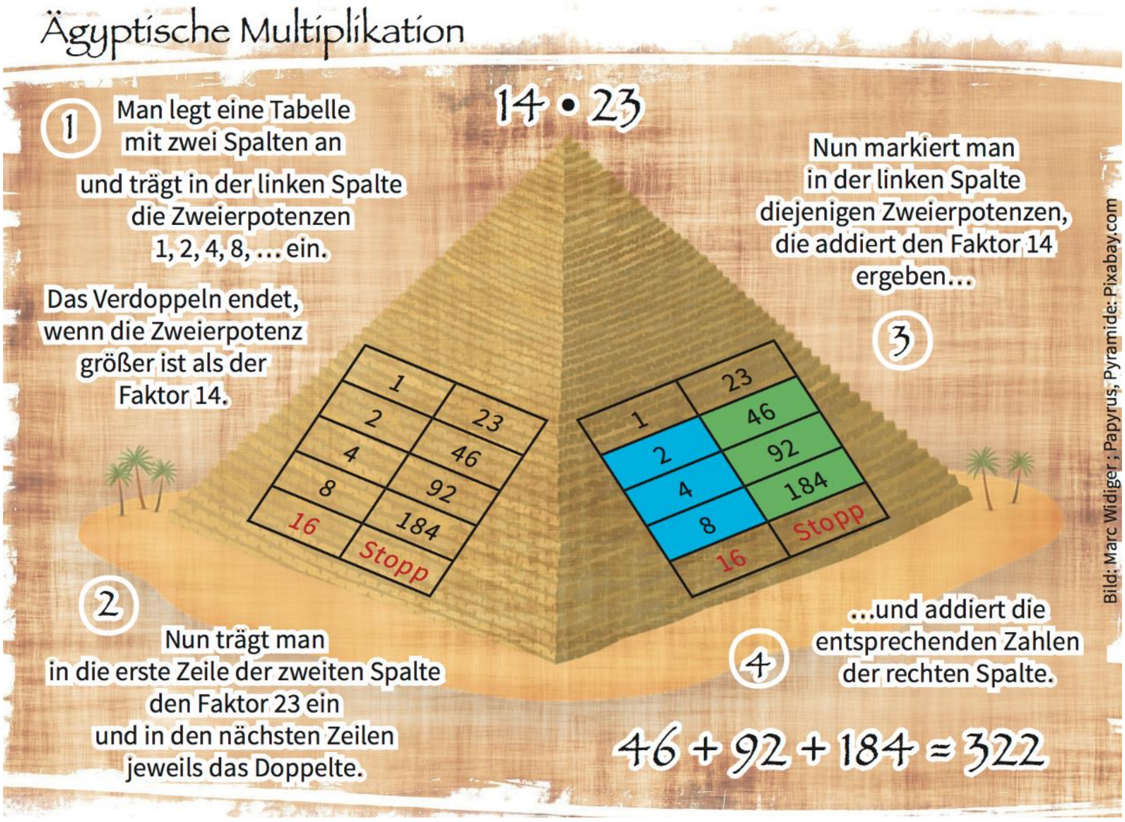


Abb. 2: Ägyptische Multiplikation,
Grafik M. Widiger, Idee: Nussknacker 4, S. 99

In diesem Beispiel verwendet man also $14 = (1110)_2 = 8 + 4 + 2$ und berechnet somit $14 \cdot 23 = (8 + 4 + 2) \cdot 23 = 8 \cdot 23 + 4 \cdot 23 + 2 \cdot 23 = 184 + 92 + 46 = 322$.

5. Einsatz bei Studierenden des Lehramts an Grundschulen

In einer Prüfungsarbeit in Arithmetik mussten 130 Studierende zwei Multiplikationsaufgaben mit zwei verschiedenen Verfahren aus der Auswahl der vier Verfahren ägyptische Multiplikation, Gittermethode, Normalverfahren und Verdopplungs-Halbierungs-Verfahren berechnen. Da das Normalverfahren bei den Studierenden im Normalfall automatisiert ist, waren die Rechnungen im Stellenwertsystem zur Basis 6 und 8 auszuführen, so dass keines der Verfahren automatisiert abgerufen werden konnte. Für jede Rechnung gab es maximal 3 Punkte.

	Anzahl	Punkte
Ägyptische Multiplikation	40	2,4
Gittermethode	83	2,7
Normalverfahren	110	2,6
Verdopplungs-Halbierungs-Verfahren	27	2,3

Bereits in Gesprächen im Rahmen von Vorlesung und Übung wurde das Gitterverfahren als das einfachste Verfahren eingeschätzt. Zu dieser Einschätzung der Studierenden passt das Prüfungsergebnis. Trotzdem wurde das vertraute Normalverfahren mit großem Abstand am häufigsten gewählt.

6. Zusammenfassung und Ausblick

Grundschullehrerinnen und –lehrer, mit denen wir zusammenarbeiten, haben uns bestätigt, dass die Gittermethode von ihren Schülerinnen und Schülern sehr gut angenommen wird, wobei im Normalfall auf die Kopiervorlagen zurückgegriffen wird, da das Zeichen der Gitter zu aufwendig ist. Über die Frage, ob das Erlernen des Gitterverfahrens sich positiv auf das Normalverfahren auswirkt, gibt es noch keine verlässlichen Daten. Die ägyptische Multiplikation und das Verdopplungs-Halbierungs-Verfahren wurden zur Förderung begabter Grundschulkinder bereits erfolgreich eingesetzt. Beide Verfahren bieten viele Möglichkeiten für weiterführende mathematische Entdeckungen und Vertiefungen.

Literatur

Padberg, F., Didaktik der Arithmetik, 2. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin Oxford 1996

Nussknacker, Mein Mathebuch, Band 4, Hrsg. P. H. Maier, Ernst Klett Grundschulverlag GmbH, Leipzig 2005

Mathematikus 4, Hrsg. J. P. Lorenz, Westermann Schulbuchverlag GmbH, Braunschweig 2002

Das Zahlenbuch, Mathematik im 4. Schuljahr, Hrsg. E. Ch. Wittmann und G. N. Müller, Ernst Klett Grundschulverlag GmbH, Leipzig 2001

Yoshinari INABA, Tetsushi KAWASAKI, Japan

A practical study of problem solving based on data by using of a paper helicopter for 5th 6th and 7th graders

1. Introduction

"Problem solving" plays an important role in the mathematics education. Additionally in elementary and junior high schools, the fostering of statistical literacy of the students by use of real world data is being requested. On the other hand, in function education in Japan's elementary and junior high school, we may point out some characteristics; the data of the teaching material is ideal and is not based on a real phenomenon, and most of the examples handle the relationship between variables through discrete values. In contrast, in a Japan's science textbook, pupils can find the law and formula through many experiments. Inductive learning is treated mainly in science education. From these points, the authors felt the need for "problem-solving" teaching materials which involve real world data and would revitalize mathematical activity. Moreover we think that in the school age of elementary school pupils, there is a need for education to eventually reach the concreteness from abstraction and that the function graphing calculator will aid the pupils' understanding and play an important role in the practice of such education.

2. Purposes and Expectations

We have set two purposes for this practical study. One was the presentation of educational materials utilizing problem-solving scenarios in which pupils, through active learning, will re-recognize the usefulness of mathematics in society. Another is for students to understand the inductive approach by experiencing the inductive perspective through use of real data.

And we have also set the following some expectations for this lesson including learning effect.

1. For improvement of the flight time of the paper copter, based on the knowledge and experience gained, the participants can logically predict the most suitable altering factors.

2. From the data, in regards to the usefulness of the technique of linear regression, the participants can understand well.

3. Using a graphing calculator (at present, hardly used in classes Japan) we can guarantee the accuracy of the graphs made in class and shorten the time required to make them, and also expect that the participants will perceive the usefulness of it as a tool and use it actively. In particular, although it is difficult for pupils to obtain a regression line, use of this tool would make it possible to handle it.

3. Materials and methods

A Paper Helicopter (paper copter) is a simple model of flight simulation and can easily be made by cutting a suitable sized T-shaped strip of paper. The individual components of the paper copter: wing length, wing width, overall size, weight of the legs, etc., affect the individual flight time of each copter. Therefore, when the learner collects and analyzes data about the flight time, it becomes an experimental subject involving many statistical factors. In the "Planning" or "Review" stage of the problem solving approach, inductive thoughts and analogical thinking is important. So, we adopted activities to improve the paper copter. But since it is mathematically difficult to obtain an approximate straight line exactly, linear regression is not addressed in primary and secondary education in Japan. Therefore, we planned to use graphing calculators for the utilization of ICT.

4. Program

One of the public lectures that targeted mainly elementary school pupils was carried out at Gifu University in August 2015. The theme of this program was “Let's think from the data and make a model from the hints the data gives us.” The participants were 24 pupils ranging from fifth grade elementary students up to first year middle school students. Participants tackled paper copter design from the perspective of linear regression based on some sample data and had to consider the two issues of the length of the fuselage in relation to flight time and try to make a copter that would have the longest flight time. The program was due to as follows.

1. Preliminary (15min: Team Organization, Overview Description, Introductions about Paper Copter)

2. Part I (100min: Create a paper copter that would achieve the target flight time by linear regression.)

3. Part II (50min: Produce a paper copter for as long a flight time as possible.)

5. Activities and results

In part I, each team set their flight time target and fixed factors to measure in the collection of data from their paper copters. Each team was free to set their own flying height when performing their experiment. As a result, five of the nine teams chose the "length of the blade" as a variable factor, and they were able to obtain an approximate straight line. But three to nine teams could not obtain the appropriate data because they chose an inappropriate factor or chose a wrong variable range. The following data is the data of the “Team F” and “Team I” as examples.

Table 1: Data of the “Team F” and “Team I,” (* Target time “160” means the time “1sec 60”)

Team	Target Time	Factor	Data1	Data2	Data3	Data4	Data5

F	160	Wing Length	60	50	45	40	30
		Flight Time	217	189	146	131	122
I	123	Leg length	20	30	40	50	N/A
		Flight Time	058	108	111	053	N/A

The “Team F” predicted that the length of the blade is 45.6 mm to achieve the target time by using the approximate straight line. But for “Team I”, there was a problem with the linearity in the data, so good predicted values could not be obtained.

The theme of the activities in Part II was a fabrication of the long-flight-time paper copter. As a strategy, most of the team noticed that there was a strong relation to the area of the wing and flight time. This would be based on the empirical knowledge derived from Part I. The following table shows data of the “Team D” as example.

Table 2: Data of “Team D”

Team	Flight Hight	Flight Time	Wing Length	Wing Width	Notes on production
D	150	295	90	20	Anyway if the wing was made slender, it fell slowly. / We made the area of the wing becomes as large as possible. / We made much account of the length than width of wing. / We were trying to increase the size of the circle visible when the paper copter is rotating. / Problem is that it falls without rotation only the beginning of 10cm fall.

6. Conclusion and Remarks

Evaluation of this lecture was essentially based on the pre and post-survey and observation of activities. The participants worked in cooperation for the sake of each team. To achieve the targets, various views were exchanged within the team. As learning activity, not only a workplace for cooperation, but also a place for discussion was provided.

The participants had been paying attention to the number of rotations of the paper copter as the reason for choosing the "length of the wing" as their factor of choice. Also, among other factors to be considered, flight observation was logically selected. In any case, it could be observed that they determined the factors to be considered logically based on facts.

As one of survey items, in order to measure the understanding of the idea of a linear regression by the data, the participants were given a data insertion problem based on the linear regression at both the beginning and the ending part of this lecture. The results of the McNemar test for the contingency table is $p = 0.041 (N=22)$. Where in the table below “Reasonable” implies that reasonable numbers is answered.

Table 3: Result for the data insertion problem in pre- and post-survey

	Post(Reasonable)	Post(Not Reasonable)
Pre(Reasonable)	4	0
Pre(Not Reasonable)	6	12

Thanks to the functional graphic calculator maker, in the post-survey, nobody answered, “They were difficult to understand how to use.” They were able to use the function graphing calculators as manipulate the video game equipment. Therefore it did not require a lot of time to the guidance of them. We believe that explanations prior to and during the experiment, made it possible for them to use the tool more freely.

On the whole, thanks to a high understanding and working ability of the participants, even though time was short, the program was able to be finished in a good atmosphere.

The final results in regard to the expectations we set at the beginning should be positively evaluated from many points. Today, learning statistical methods through problem solving provides an opportunity to use “living math.” Many opportunities for educational practices based on such problem solving and their verification and accumulation are also expected in the future.

References

Kawakami, T.(2015) Combining Models Related to Data Distribution Through Conjecturing and Validation: Paper Helicopter Experimentation with Year 5 Students. Conference abstract in ICTMA17, pp.54

Kawasaki, T & Inaba, Y & Kihira, T & Maesako T.(2013) A Practical Study of Statistical Modeling in Secondary Education, Annals of Educational Studies Osaka University Vol. 18, pp.3-19 (in Japanese with English summary)

Viktor ISAEV, Andreas EICHLER, Kassel

Auswege aus der doppelten Diskontinuität – Die Vernetzung von Fach und Fachdidaktik im Lehramtsstudium Mathematik

Abstract

Lehramtsstudierende im Bereich Mathematik erfahren eine als doppelte Diskontinuität bezeichnete Kluft zwischen Mathematik in der Wissenschaft und der Schulmathematik. In dem Beitrag wird ein Konzept vorgestellt, in Grundlagenveranstaltungen Brücken zwischen der Hochschulmathematik und der Schulmathematik zu schaffen. Weiterhin werden erste Ergebnisse von qualitativen wie quantitativen Pilotstudien bezogen auf Überzeugungen hinsichtlich der doppelten Diskontinuität diskutiert.

Doppelte Diskontinuität

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts prägte Felix Klein im Vorwort zu seinem Buch *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* den Begriff „doppelte Diskontinuität“ (Klein 1908, S. 1). Dieser Begriff charakterisiert einerseits die Wahrnehmung von Diskrepanzen zwischen der Schulmathematik und der Hochschulmathematik, die Bestandteil der universitären Ausbildung von Lehramtsstudierenden ist und andererseits die scheinbare Kluft beim Übergang von der Hochschule in den Lehrberuf. Dabei besteht die Gefahr, dass Lehramtsstudierende die Hochschulmathematik als ein von der Schule isoliertes Phänomen empfinden und diese nach Absolvieren der universitären Ausbildung „rasch und gründlich“ aus den Augen verlieren (ebd.). Auch heute noch ist das Stichwort der doppelten Diskontinuität als ein „Grundproblem der mathematischen Fachausbildung im gymnasialen Lehramtsstudium“ aktuell (Hefendehl-Hebeker 2013). Nach den Erfahrungen von Bauer & Partheil (2009) stellen sich die gewünschten Verbindungen bei den meisten Studierenden in der Regel nicht automatisch ein und auch verbale Bemerkungen der Dozierenden diesbezüglich sind nicht ausreichend, sodass vielmehr der Versuch notwendig erscheint, diese Verbindungen durch gezielte „Schnittstellenaktivitäten“ zu verdeutlichen (Bauer 2013).

In der Vergangenheit gab es in Abhängigkeit von den jeweiligen institutionellen Rahmenbedingungen bereits einige Ansätze zur Reduzierung der doppelten Diskontinuität, beispielsweise in Form von eigens konzipierten Schnittstellenmodulen (z. B. Leufer & Prediger 2006; Bauer & Partheil 2009; Beutelspacher u. a. 2011; Prenzel, Reiss & Seidel, 2011).

Projekt f-f-u

An der Universität Kassel existiert ab dem WS 2015/16 das Projekt f-f-u (Vernetzung fachwissenschaftlichen, fachdidaktischen und unterrichtspraktischen Wissens im Bereich Mathematik), das Studierende des Lehramts an Gymnasien dazu befähigen soll, insbesondere in mathematischen Grundlagenveranstaltungen Gemeinsamkeiten und Zusammenhänge zwischen Schul- und Hochschulmathematik zu erkennen. Hierzu werden die zu den Vorlesungen (wie Analysis I) parallel laufenden Übungen sowie die von den Studierenden wöchentlich abzugebenden Hausaufgaben fokussiert. Das primäre Ziel ist dabei, sogenannte „Lehramts-Aufgaben" in den Übungsbetrieb zu integrieren, die potentiell dazu geeignet sind, die gewünschten Verbindungen aufzuzeigen. Nach Bauer (2013) sind von derartigen Brückenschlägen zwei Wirkrichtungen anzunehmen, sodass einerseits die in der Schule aufgebauten Vorkenntnisse genutzt werden können, um Begriffe und Inhalte der Hochschulmathematik besser zu verstehen und andererseits die Hochschulmathematik dabei helfen kann, die Schulmathematik von einem höheren Standpunkt aus vertieft zu durchdringen. Diese erste grobe Kategorisierung von Aufgaben wird auch im Folgenden verwendet.

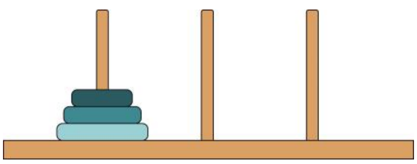
Beispiele

Im folgenden Beispiel werden ausgehend von einer Schulaufgabe Fragestellungen entwickelt, die über die schulmathematischen Betrachtungen hinausgehen und eine Beschäftigung mit Hochschulmathematik motivieren. Der Rückgriff auf Inhalte der Schulmathematik eröffnet somit die Möglichkeit, Strukturen und Prozesse in der universitären Mathematik an bekannten, elementaren Sachverhalten zu veranschaulichen und zu festigen (Ableitinger, Hefendehl-Hebeker & Herrmann 2013).

Sie finden unter dem Namen „Die Türme von Hanoi" folgende Aufgabe:

Auf einem von drei Stäben sind drei gelochte Scheiben der Größe nach aufgesteckt.

Ziel des Spiels ist es, mit möglichst wenigen Zügen diese Scheiben auf d en dritten Stab zu versetzen. Beachte dabei, dass pro Zug nur jeweils eine Scheibe bewegt und niemals eine größere Scheibe auf eine kleinere abgelegt werden darf.



1. Probiere aus, wie viele Züge du benötigst, um das Spiel zu lösen.

2. Ermittle nun die kleinste Anzahl an Zügen, die zur Lösung des Spiels mit 1, 2, 3 und 4 Scheiben notwendig sind. Erkennst du eine Regelmäßigkeit?

Scheiben	*1*	*2*	*3*	*4*	*...*
Züge					

a) Lösen Sie die oben genannten Aufgaben.

b) Formulieren Sie eine Vermutung über die kleinste Anzahl von Zügen, die zur Lösung des Spiels mit n Scheiben notwendig sind. Beweisen Sie Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion nach n.

Aufgabe „Türme von Hanoi“ für Lehramtsstudierende (vgl. Grieser 2013, S. 65)

Umgekehrt kann die hochschulmathematische Perspektive nützlich sein, die Schulmathematik besser zu durchdringen, indem vertieftes kohärentes Wissen über schulmathematische Inhalte bereitgestellt und damit auch ein Bewusstsein von Stufen der Abstraktion in Bezug auf Begriffe und Begründungen erzeugt wird (Ableitinger et al., 2013). In der folgenden Aufgabe soll hierzu die „Neunerenden-Problematik“ aus einer hochschulmathematischen Perspektive unterrichtspraktisch neu interpretiert werden.

In Ihrem Unterricht entsteht eine Diskussion darüber, ob $0,\overline{9} = 1$ ist oder nicht.

Ein Schüler meint dazu: „Alleine schon vom Aussehen her sieht $0,\overline{9}$ kleiner aus als 1“. Eine Schülerin fügt hinzu: „Ich glaube schon, dass $0,\overline{9} = 1$ ist, aber dann hat man gewissermaßen gerundet“. Jemand anderes sagt: „Man kann nicht sagen, ob es gleich ist oder nicht, weil im Unendlichen die vielen 9en hinter dem Komma nicht zu fassen sind… es gibt ja kein Ende der Schlange“.

Nehmen Sie Stellung zu diesem Sachverhalt und geben Sie

a) einen schülernahen Beweis mit Erläuterungen zu Ihrem Vorgehen

b) eine fundierte mathematische Begründung mithilfe Ihres Wissens aus der Vorlesung über Folgen und Reihen.

Aufgabe „Neunerenden-Problematik“ für Lehramtsstudierende

Forschungsfragen und Methodologie

Die dem Projekt zugrundeliegenden Forschungsfrage ist, wie die Überzeugungen angehender Lehrkräfte im Hinblick auf die doppelte Diskontinuität sind. Daraus ergibt sich auch die Fragestellung, ob und inwieweit sich diese Überzeugungen im Rahmen des f-f-u-Projektes ändern lassen. Ferner könnten Überzeugungen zur Mathematik sowie Korrelationen in der Änderung des professionsbezogenen Wissens, des Selbstkonzeptes oder der Motivation untersucht werden. Um empirische Evidenz zu erlangen, werden die Gruppen von Lehramtsstudierenden in den mathematischen Grundlagenveranstaltungen randomisiert einer Treatment- und einer Kontrollgruppe zugeordnet. Zur Erhebung im WS 2016/17 wird ein Mixed-Methods-Ansatz gewählt. Quantitativ wird dabei ein Pre-Post-Test-Design ausgeführt, das zu Beginn und zum Ende des Semesters die Überzeugungen der Studierenden mit Hilfe von Fragebögen erfassen soll. Im WS 2015/16 wurden bereits entsprechende Items mit einer 6-stufigen Likert-Skala pilotiert, wobei eine Reliabilitätsanalyse einen Wert von Cronbachs $\alpha = 0{,}831$ ergab. Das qualitative Teilprojekt besteht aus Interviews, aus denen explorativ bzw. deskriptiv die Erkenntnisse aus den Fragebögen angereichert werden. Die im pilotierten Semester geführten Interviews geben Aufschluss über das Potential und die Schwierigkeiten der eingesetzten Aufgaben und werden zur Optimierung derselben sowie zur Validierung des Fragebogens zur doppelten Diskontinuität herangezogen.

Danksagung

Das Projekt f-f-u ist Teil des Projektes PRONET (Professionalisierung durch Vernetzung), das im Rahmen der „Qualitätsoffensive Lehrerbildung“ vom Bundesministerium für Bildung und Forschung gefördert wird.

Literatur

Ableitinger, C., Hefendehl-Hebeker, L. & Herrmann, A. (2013). Aufgaben zur Vernetzung von Schul- und Hochschulmathematik. In H. Allmendinger, K. Lengnink, A. Vohns & G. Wickel (Hrsg.), *Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung* (S. 217-233). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Bauer, T. (2013). Schnittstellen bearbeiten in Schnittstellenaufgaben. In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 39-56). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Bauer, T. & Partheil, U. (2009). Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. *Mathematische Semesterberichte, 56* (1), 85-103.

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S. & Wickel, G. (2011). *Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Grieser, D. (2013). *Mathematisches Problemlösen und Beweisen. Eine Entdeckungsreise in die Mathematik*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis.* Leipzig: Teubner.

Leufer, N. & Prediger, S. (2006). “But after all, we’ll need this for school.” Making sense of mathematical requirements in teacher education – Intervention and evaluation. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Hrsg.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 1, S. 279). Prag: PME.

Prenzel, M., Reiss, K. & Seidel, T. (2011). Lehrerbildung an der TUM School of Education. *Erziehungswissenschaft, 22* (43), 47-56.

Tobias JASCHKE, Christine BESCHERER, Ludwigsburg

Konstruktion guter Einführungsaufgaben – Entwicklung einer Lehrerfortbildung zur Planungskompetenz von Mathematiklehrkräften

1. Ausgangspunkt und Ziel des Projekts

Ausgangspunkt des vom Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst Baden-Württemberg geförderten Entwicklungsprojekts ist die allgemeinpädagogische und modular ausgerichtete Weiterbildung eVOCATIOn. Grundlage von eVOCATIOn ist ein pädagogischer Begabungsbegriff (Weigand 2014), der Begabungen als domänenspezifische Potentiale konzeptualisiert, die sich im schulischen Bereich in einem Prozess der Wechselwirkung mit vorhandenen Lerngelegenheiten entfalten. Die eVOCATIOn Weiterbildung mit ihrem Schwerpunkt auf allgemeinen und fachunabhängigen Lehr-Lern-Prinzipien wird in diesem Projekt ergänzt durch ein mathematikspezifisches Modul. Diese Konkretisierung auf mathematischen Regelunterricht wird durch Erkenntnisse der empirischen Forschung zur Wirksamkeit von Lehrerweiterbildungen (Lipowsky 2010) sowie einer im Rahmen des Projekts durchgeführte Interviewstudie mit ehemaligen Teilnehmer(innen) der eVOCATIOn-Weiterbildung gestützt. Ziel des Projekts ist es, dem Konzept der fachdidaktischen Entwicklungsforschung (DBR) folgend, ein erfolgversprechendes Mathematik-Weiterbildungsmodul zu entwickeln. Dieses soll sowohl als eigenständige Mathematikfortbildung an allgemeinbildenden Schulen der Sekundarstufe, als auch als ergänzendes eVOCATIOn-Modul zum Einsatz kommen.

2. Fokussierung auf Planungskompetenz

Aufgrund von Machbarkeitsgründen und der praktischen Relevanz wurde für das Projekt entschieden, das Weiterbildungsmodul auf einen zentralen Aspekt der Unterrichtsplanung im Fach Mathematik zu beschränken. Dieser betrifft die Planungskompetenz (präaktionale Phase) von Mathematiklehrkräften im Hinblick auf die reflektierte und bewusste Auswahl, Weiterentwicklung und Konstruktion geeigneter Aufgaben zur Erarbeitung neuer mathematischer Inhalte.

3. Entwicklung des Mathematikmoduls

Das geplante Entwicklungsprojekt umfasst neben der Planung, Durchführung und Evaluation zweier Fortbildungsvarianten auch verschiedene Teiluntersuchungen und Designexperimente, die hier nicht alle dargestellt werden können. Der vorliegende Beitrag beschränkt sich inhaltlich zum einen auf die kompakte Darstellung eines theoretisch deduzierten Planungsmodells für Erarbeitungsphasen, welches Grundlage und gleichzeitig normative Zielperspektive der Lehrerfortbildung ist. Zum anderen werden die zentralen Ergebnisse einer Teilstudie zur Ist-Analyse des Planungsverhaltens von gymnasialen Mathematiklehrkräften erläutert. Beide Aspekte sind für das Design der Lehrerfortbildung von herausragender Bedeutung.

3.1 Theoretisches Planungsmodell

Nach Ladenthin (2006) erfordert begabungsorientierter Regelunterricht im Fach Mathematik keine spezielle Didaktik oder Methodik, so dass sich eine fachspezifische Konkretisierung an den Prinzipien didaktisch fundierten Mathematikunterrichts orientieren kann. Aus den verschiedenen Ansätzen „guten“ Mathematikunterrichts wurden im Rahmen des Projekts die fünf „Zentralen Perspektiven auf Mathematiklernen“ von Barzel und Hußmann (2014) ausgewählt, da sich diese für die Ableitung und Entwicklung normativer Planungsaspekte für Erarbeitungsaufgaben als recht praktikabel und zielführend erwiesen haben. Sie lauten: Verstehensorientierung, kognitive Aktivierung, Differenzierung, Sinnstiftung und das genetische Prinzip. Überträgt und konkretisiert man diese Kriterien auf die Planung mathematikunterrichtlicher Erarbeitungsaufgaben so lassen sich daraus die folgenden, zentralen Planungsaspekte ableiten:

- **Verständniskern** – Was gibt es bei diesem mathematischen Inhalt zu verstehen?
- **Kernidee** – Wozu ist der mathematische Inhalt gut?
- **Problemtyp** – Lassen sich authentische inner- oder außermathematische Kontexte für die Erarbeitung des mathematischen Inhalts finden oder handelt es sich eher um ein Strukturproblem?
- **Zugänglichkeit**: Wie können sich Schülerinnen und Schüler die Kernidee und den Verständniskern des mathematischen Inhalts auf Basis ihres Vorwissens aneignen?
- **Differenzierende Lernhilfen**: Wie können Schülerinnen und Schüler bei der möglichst eigenständigen Erarbeitung des mathematischen Inhalts differenziert unterstützt werden?

Auf Basis dieser Überlegungen und Ableitungen wird nun angenommen, dass eine „gute“ Planung von Erarbeitungsaufgaben diese fünf normativen Aspekte beinhalten sollte. Ob dies in der unterrichtlichen Praxis tatsächlich der Fall ist, wird im nächsten Abschnitt thematisiert.

3.2 Analyse des Ist-Zustands

Für das Fach Mathematik ist bekannt, dass die Planung von Unterricht zu den zentralen Aufgaben und Tätigkeiten von Lehrkräften zählt (vgl. Baumert & Kunter, 2006) und sich die Bemühungen von Mathematiklehrkräften bei der praktischen Unterrichtsvorbereitung fast ausschließlich darauf konzentrieren, geeignete Einstiegs- und Übungsaufgaben zu finden. Dazu wird in aller Regel auf das vorhandene Schulbuch zurückgegriffen. (vgl. dazu z.B. Haas, 1998; Bromme, 1981).

Unscharf bleibt in diesem Zusammenhang, ob die im Zuge der normativen Modellentwicklung (vgl. Abschnitt 3.1) identifizierten Planungsaspekte bei Lehrkräften in der Praxis tatsächlich eine Rolle spielen und welche Ziele diese bei der Planung von Erarbeitungsphasen primär verfolgen. Außerdem machen die existierenden Untersuchungen zur Unterrichtsplanung im Mathematikunterricht nur beschränkte Aussagen über den Grad der Lernqualität, die mit der realen Planung von Erarbeitungsphasen assoziiert ist.

In einer Studie zum Lauten Denken wurden zu diesem Zweck neun Mathematiklehrkräfte aufgefordert, eine Erarbeitungsphase zum exemplarischen Unterrichtsinhalt „Multiplikation von Brüchen“ zu planen und dabei alle Gedanken und Überlegungen laut auszusprechen. Als Hilfe wurde den Lehrkräften eine Auswahl gängiger Schulbücher bereitgestellt und die Möglichkeit gegeben, die Planung auch schriftlich zu fixieren. Die Äußerungen der Lehrkräfte wurden im Anschluss transkribiert und von drei geschulten Mathematiklehrkräften in fünfzehn Kategorien hoch inferent geratet. Die Urteilerübereinstimmung lag für die neun Probanden zwischen 0.68 und 1.00 (Fleiss‘ Kappa) und ist damit außerordentlich gut.

Die Beurteiler wurden aufgefordert, die Unterrichtsplanungen dahingehend zu beurteilen, ob bestimmte Planungsaspekte vorkamen oder nicht (binäre Daten). Dabei lässt sich feststellen, dass die normativ günstigen Planungsaspekte (vgl. Abschnitt 3.1) in der unterrichtlichen Praxis offenbar keine sehr große Rolle spielen. Die Lehrkräfte haben primär die fachlichen Vorkenntnisse und die Motivation bzw. das Interesse der Lernenden im Blick.

Bezüglich der subjektiven Theorien zeigt das Ergebnis der Beurteilung deutlich, dass die befragten Lehrkräfte in ihren Planungen darauf abzielen, die Schülerinnen und Schüler durch Aufgaben oder Aufgabenfolgen konvergent zur Multiplikation von Brüchen hinzuführen. Die Absicht, unterschiedliche Lösungsansätze oder -ideen bei den Lernenden zu initiieren, ist kaum zu beobachten.

Im Hinblick auf die antizipierte Unterrichtsqualität stellen die Rater übereinstimmend fest, dass die geschilderten Erarbeitungsphasen nur ansatzweise verständnisorientiertes Lernen ermöglichen. Selbstdifferenziertes, genetisches oder kognitiv aktivierendes Lernen wird nach Ansicht der Beurteiler durch die Unterrichtsplanungen der befragten Mathematiklehrkräfte größtenteils nicht ermöglichst.

4. Diskussion und Ausblick

Die Ergebnisse der theoretischen Modellentwicklung (Abschnitt 3.1) und die empirische Untersuchung zum Planungsverhalten von Mathematiklehrkräften (Abschnitt 3.2) machen deutlich, dass die normativen Vorstellungen der Mathematikdidaktik und die planerische Praxis offenkundig stark differieren. Lehrkräfte leiten häufig aus der Bearbeitung eines Beispiels direkt eine Regel oder einen Begriff ab und übersehen dabei, dass sinnstiftendes Erarbeiten beispielsweise für mathematische Verfahren auch heißt, gefundene Lösungsansätze zu schematisieren und zu begründen.

Für die Konzeption bzw. Weiterentwicklung der zu konstruierenden Lehrerfortbildung folgt daraus u.a., dass (i) Lehrkräften die verschiedenen Erarbeitungsphasen bewusst gemacht werden müssen, (ii) die subjektiven Theorien der Lehrkräfte berücksichtigt werden müssen und (iii) an die existierenden Planungsaktivitäten der Lehrkräfte angeschlossen werden sollte.

5. Literatur

Baumert, J.; Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. In: *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft* 9 (4), S. 469–520.

Barzel, B.; Hußmann, S. (2014). *Sinnstiftend Mathematik lernen. Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM). Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (KOSIMA)*. Köln, 01.02.2014. Online verfügbar unter http://www.ko-si-ma.de/upload/downloads/fachleitertagung/, zuletzt geprüft am 23.11.2015.

Bromme, R. (1981). *Das Denken von Lehrern bei der Unterrichtsvorbereitung. Eine empirische Untersuchung zu kognitiven Prozessen von Mathematiklehrern*. Weinheim, Basel: Beltz.

Haas, A. (1998). *Unterrichtsplanung im Alltag. Eine empirische Untersuchung zum Planungshandeln von Hauptschul-, Realschul- und Gymnasiallehrern.* Regensburg: Roderer.

Ladenthin, V. (2006). Brauchen Hochbegabte eine eigene Didaktik? In: Fischer, C.; Ludwig, H. (Hrsg.). *Begabtenförderung als Aufgabe und Herausforderung für die Pädagogik* (S. 46–65). Münster: Aschendorff.

Lipowski, F. (2010). Lernen im Beruf. Empirische Befunde zur Wirksamkeit von Lehrerfortbildungen. In: Müller, F. H.; Eichenberger, A.; Lüders, M.; Mayr, J. (Hrsg.). *Lehrerinnen und Lehrer lernen. Konzepte und Befunde zur Lehrerfortbildung* (S. 51–70). Münster: Waxmann.

Weigand, G.; Hackl, A.; Müller-Oppliger, V.; Schmid, G. (2014): *Personorientierte Begabungsförderung. Eine Einführung in Theorie und Praxis.* 1. Aufl. Weinheim und Basel: Beltz.

Solveig JENSEN, Osnabrück

Handlungsbasierte Begriffsbildung mithilfe einer Mathematischen Spielwelt – Analyse von Einsichten von Schulanfängern zur Zahlkonstruktion

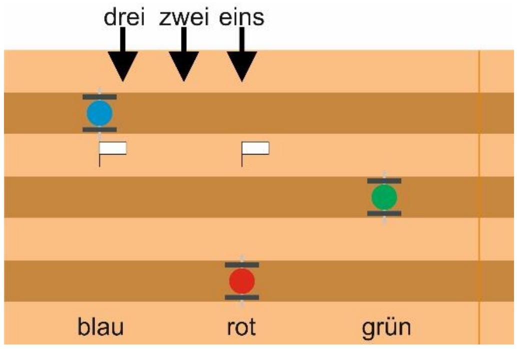
Eines der Ziele am Treffpunkt für mathematisch-informatische Frühförderung („MIF“, Leitung: Prof. Schwank) ist, Kinder bei der Bildung eines Zahlverständnisses zu unterstützen, das die Zahlkonstruktion mit einschließt (vgl. z. B. Schwank 2013). Die Grundlage dafür bietet die von Dedekind (1969 [1888]) beschriebene Konstruktion durch die Nachfolgerbildung, die hier durch „+1“ repräsentiert wird. Um einen solchen „Zahlenkonstruktionssinn“ (Schwank 2013) zu unterstützen, werden Mathematische Spielwelten eingesetzt, bei denen Konstruktionsprozesse durch Figurenbewegungen dargestellt werden. Der Ausgangspunkt für die durchgeführte Studie war das beim Einsatz verschiedener Spielwelten beobachtete Problem, dass Kinder die von Figuren besuchten Plätze statt die Bewegungen dieser Figuren fokussieren (vgl. Brückel 2013, Schwank & Schwank, 2015). Eine mögliche Ursache dafür könnte sein, dass Bewegungen nicht dauerhaft sichtbar sind, Plätze markierende Objekte hingegen schon. Ein „Lopserzwerg“ wurde entwickelt, der von sich aus eine getaktete Bewegung macht. In der Spielwelt „Lopserland“ kann so auf Objekte größtenteils verzichtet werden, um die Kinder bei der Fokussierung von Prozessen zu unterstützen (vgl. Jensen 2015). Einmal Vorwärtslopsern repräsentiert „+1“, weil die Figur eine Bewegung mehr macht und dabei ihren Abstand vom markierten Start um ein immer gleiches Streckenstück vergrößert.

Die Spielwelt wurde in videografierten Spielstunden mit Schulanfänger(inne)n eingesetzt. Die Videos wurden u. a. zum folgenden Komplex von Fragestellungen untersucht: Erkennen die Kinder das Erzeugungsprinzip „+1“ in der Bewegung der Lopserzwerge? Können sie es in diesem Fall für Argumentationen bzgl. des Aufbaus des Zahlraumes nutzen? Welche Schwierigkeiten im Einnehmen der Prozesssicht lassen sich ausmachen?

Um die Erzeugungsvorschrift „+1“ zu fokussieren, wurden verschiedene Spiele gespielt, bei denen durch Fragen der Spielleiterin die vom Start zurückgelegte Lopseranzahl thematisiert wurde. Das Verständnis des Zusammenhanges zwischen Lopseranzahl und der Länge der zurückgelegten Strecke sollte so angesprochen werden. Angestrebt wurde auch, dass die Kinder auf der Bahn vorhandene Lopserzwerge als Orientierungspunkte nutzen. Durch den Vergleich zwischen Abständen der Lopserzwerge vom Start sollten Zahlbeziehungen behandelt werden.

Die den Fragestellungen zugeordneten Szenen wurden in drei Bereiche eingeteilt, die im Folgenden anhand von Beispielszenen (längere Fassungen in Jensen 2016) vorgestellt werden.

Konflikt zwischen Objekt- und Prozesssicht



Situation: Marcel hat den blauen Lopserzwerg vom Start achtmal lopsern lassen. Er wollte sich dafür am roten Zwerg orientieren, wusste allerdings nicht, wie oft er den blauen vom roten aus noch lopsern lassen muss. Um dies herauszufinden, hat die Spielleiterin (SL) beide Standorte mit Fähnchen markiert. Marcel tippt neben dem Fähnchen am roten Zwerg, zwischen beiden Fähnchen und hinter dem blauen Zwerg auf die Bahn und sagt dabei die Zahlworte eins bis drei (siehe Pfeile in Abb. rechts).

SL	Mhm. Warum zählst denn du hier eins? *[zeigt auf das erste Fähnchen]*
Marcel	Mmh, nee, da muss eins. *[zeigt ca. eine Lopserlänge nach dem ersten Fähnchen auf die Bahn]*
SL	Mhm (warum?)
Marcel	Und da muss zwei. Zwei Schritte musste der. *[zeigt mit dem Finger direkt hinter den blauen Lopserzwerg]*
SL	Warum muss denn hier eins? *[zeigt mit dem Finger dorthin, wo Marcel eben hingezeigt hat]*
Marcel	Weil da so macht der so *[fährt dabei mit dem Finger vom ersten Fähnchen bis ca. eine Lopserlänge danach die Bahn entlang und tippt danach noch mal auf den eben gezeigten Punkt]* (1 Sek.) so macht der da. *[stellt den blauen Zwerg auf Höhe des ersten Fähnchens und lässt ihn zweimal vorwärtslopsern]* Eins, zwei.
SL	Mhm.
Marcel	Drei. *[lässt noch einmal vorwärtslopsern]* Drei Schritte muss der.

Marcel weist hier auf Nachfrage seine Objektsicht zurück und bezeichnet den Ort ca. einmal Lopsern nach dem Fähnchen mit „eins“. Diese Bezeichnung führt er auf die Konstruktion des Abstandes durch die Lopserbewegung zurück und erkennt so den Erzeugungsprozess. Durch die Figur kann sein Blick auf die Bewegung gelenkt werden, wodurch er von der Fokussierung der Orte abrücken kann.

Gelungenes Erkennen und Nutzen der Erzeugungsvorschrift

Marcel erkennt, dass erst durch die Überwindung einer immer gleich langen Strecke die nächste mögliche Position des Lopserzwerges erreicht wird. Dies ist ein wichtiger Teil der Repräsentation der Erzeugungsvorschrift „+1", durch die Orte auf der Lopserbahn sinnvoll als Zahlrepräsentation gedeutet werden können.

Annika zeigt ein weiteres Kennzeichen eines gelungenen Verständnisses. Sie hat einen Lopserzwerg vom Start aus achtmal vorwärts- und dann fünfmal rückwärtslopsern lassen und kommentiert das Ergebnis mit „Dann landet er aufer Drei". Sie erklärt diese Bezeichnung wie folgt:

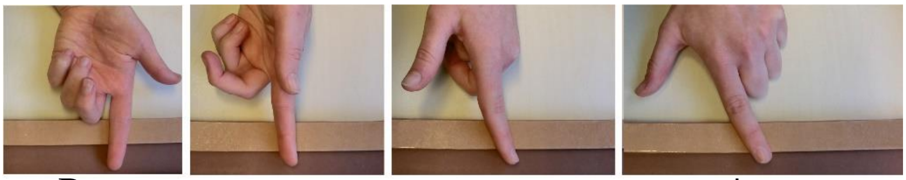
Annika	Weil das ist der dritte Schritt. *[zeigt auf die Bahn direkt an den Rädern des roten Lopserzwerges]*
SL	Okay.
Annika	Von da *[zeigt auf die Startlinie]*, und da fängt man ja auch immer an.

Annika kann die Erzeugung „der Drei" durch die Lopserzwergbewegungen angeben, ohne dass sie sie durchführen muss.

Schwierigkeiten

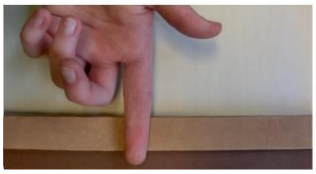
Henry möchte prüfen, ob ein Lopserzwerg wie gewünscht vom Start achtmal gelopsert ist. Er macht dafür mit dem Finger acht verschieden lange Bögen vom Start zum Zwerg. Die Spielleiterin versucht, die unterschiedliche Länge zu hinterfragen. Henry weicht zunächst aus. Dann zeigt er eine Vorstellung vom Lopsern, die vor allem die Drehung zu fokussieren

SL	Kannst du noch mal schauen? *[legt den Zeigefinger an die Startlinie]* Kann das sein, dass der so lopsert? Guck mal. Kann das sein, dass der (.)
Henry	*[legt seinen linken Zeigefinger an den Start]*
SL	... sooooo lopsert *[macht einen großen Bogen]* und dann so? *[macht einen sehr kurzen Bogen]*
Henry	So lopsert der. *[dreht seinen Zeigefinger bis auf den Fingernagel]*
SL	Mhm.
Henry	So.



Drr- rrr- rrr- rk.

SL	Aha. *[lächelt]*
Henry	Und dann wieder so

und dann drrrrrk.  *[wiederholt die Bewegungen bis zum Lopserzwerg]*

Henry weist die unterschiedlich langen Bögen nicht eindeutig zurück. Die Überwindung einer immer gleich langen Strecke wird zugunsten anderer Elemente der Bewegung (hier der Drehung) nicht als wesentlich erkannt. Andere Kinder stellen gar keine Verbindung mit der zurückgelegten Strecke her, was eine Identifikation der Strecke als Zahlrepräsentation schwierig macht.

Fazit und Ausblick

Lopserzwerge unterstützen den größeren Teil der untersuchten Kinder im Einnehmen einer Prozesssicht. Wichtige Aspekte, die für ein Verständnis der Konstruktion zu beachten sind, sind die Wahrnehmung der zurückgelegten Strecke und der dauerhaft aufrechterhaltene Bezug zur Startlinie als Ausgangspunkt der Konstruktion. Weitere Forschung sollte sich den Ursachen für einen fehlenden Zusammenhang zwischen der Länge einer zurückgelegten Strecke und der damit repräsentierten Zahl widmen, um daran anschließend Unterstützungsangebote entwickeln zu können.

Literatur

Dedekind, R. (1969 [1888]). *Was sind und was sollen die Zahlen?* Zweiter, unveränderter Nachdruck der zehnten Auflage. Braunschweig: Vieweg.

Jensen, S. (2015): Aufbau und Stärkung von Prozessvorstellungen zu Rechenprozessen bei Schulanfängern anhand einer Mathematischen Spielwelt. In: F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag (S. 428–431).

Jensen, S. (2016): *Die Unterstützung einer Prozesssicht durch die Mathematische Spielwelt Lopserland – Analyse von Spielereignissen mit Schulanfängerinnen und -anfängern zu Zahlkonstruktion sowie Addition und Subtraktion.* Eingereichte Dissertation, Universität Osnabrück.

Schwank, I. (2013): Die Schwierigkeit des Dazu-Denkens. In: M. von Aster & J. H. Lorenz (Hrsg.). *Rechenstörungen bei Kindern: Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik.* 2. überarbeitete und erweiterte Auflage (S. 93–138). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Schwank, I. & Schwank, E. (2015): Development of mathematical concepts during early childhood across cultures. In J. D. Wright (Hrsg.). *The International Encyclopedia of the Social and Behavioral Sciences*. *Second Edition* (S. 772–784). Oxford: Elsevier.

Armin JENTSCH, Lena SCHLESINGER, Hamburg

Mathematikdidaktische Unterrichtsqualität – Herausforderungen bei Konzeption und Messung eines theoretischen Konstrukts

1. Einleitung

In den letzten Jahrzenten hat der Einfluss der Effektivitätsforschung zum Lehrerberuf deutlich zugenommen (Brophy, 2000; Baumert et al., 2010). Das Interesse für die Zusammenhänge von Lehrerkompetenzen, Unterrichtsqualität und Schülerleistungen ist hier besonders groß (Hill, Rowan & Ball, 2005). Unterrichtsqualität wird somit in einem funktionalen Sinne verstanden, d.h. Hauptziel ist die Vorhersage von gewissen Zielvariablen bei Schülerinnen und Schülern (Seidel & Shavelson, 2007). Gleichzeitig wird besagte Unterrichtsqualität im Rahmen von Kompetenzmessungen oft auf die Performanz der Lehrperson reduziert (Schlesinger & Jentsch, 2016; Blömeke, Gustafsson & Shavelson, 2015). Die theoretische Grundlage dieser Forschungsdisziplin ist das sogenannte Prozess-Mediations-Produkt-Paradigma (Helmke, 2012). Dieses Modell stellt eine Beziehung zwischen dem Unterrichtsangebot, dessen Nutzung durch Schülerinnen und Schüler und deren Leistungen her. Das Konstrukt *Unterrichtsqualität* konnte in diesem Modell noch konkretisiert werden: Unterschieden werden die drei Qualitätsdimensionen *Klassenführung, konstruktive Unterstützung* bzw. *Motivationsunterstützung* und *kognitive Aktivierung* (Baumert et al., 2010; Klieme et al., 2009). In diesem Modell liegt der Fokus dann ausschließlich auf dem Unterricht, während andere Einflüsse wie das Fach oder der soziale Hintergrund der Klasse unbeachtet bleiben (Helmke, 2012). Die zuvor angenommene prognostische Validität konnte zuletzt mehrfach bestätigt werden (Hill et al., 2005; Klieme et al., 2009).

2. Generische und fachliche Aspekte von Unterrichtsqualität

Es ist offensichtlich, dass ein Modell mit dem Anspruch, allen Unterrichtsfächern gerecht zu werden, die spezifisch mathematikdidaktischen Aspekte von Unterricht eben nicht beschreiben kann (Klieme & Rakoczy, 2008, Helmke, 2012). Es gibt allerdings gute theoretische Gründe und empirische Belege für den Zusammenhang von fachlichen Aspekten von Unterrichtsqualität und Schülerleistungen (Drollinger-Vetter, 2011; Hiebert & Grouws, 2007; Klieme & Rakoczy, 2008; Seidel & Shavelson, 2007).

Trotz dieser Forderung ist die Beziehung von generischen und fachlichen Aspekten von Unterrichtsqualität in der Mathematikdidaktik bisher kaum behandelt worden. Zudem ist die Dimensionalität von Unterrichtsqualität in der Mathematikdidaktik bisher wenig untersucht worden. Dies liegt auch an der Operationalisierung der Qualitätsdimensionen (Baumert et al., 2010; Drollinger-Vetter, 2011), zum anderen an dem erst in den letzten Jahren gewachsenen Interesse. Ein dritter Grund mag sein, dass die Erforschung von Unterricht zwar vielfach theoretisch gefordert, jedoch empirisch äußerst schwierig zu bearbeiten ist (Helmke, 2012).

So stößt man beispielsweise beim Verständnis eines etablierten Begriffes wie *Klassenführung* bei den meisten Unterrichtsforschern auf Konsens, während andere Dimensionen von Unterrichtsqualität kontrovers diskutiert werden. *Klassenführung* wird nun gemeinhin als generische Dimension betrachtet, weil die Aspekte, die hierunter fallen, für alle Fächer relevant erscheinen (z.B., Regelklarheit, Allgegenwärtigkeit, Strukturiertheit). Dennoch kann man diskutieren, ob etwa Störungen nicht auch aus fachlichen Gründen hervorgerufen werden könnten (Drollinger-Vetter, 2011, S. 325). Auch wenn zur Erfassung von Unterrichtsqualität dieselben theoretischen Modelle und Beobachtungsinstrumente verwendet werden, sind deutliche Unterschiede im Verständnis dieser Dimensionen bei verschiedenen Forschern möglich. Dies führt auch zu empirischen Problemen, weil die Konzeptionalisierung maßgeblich für die Erfassung ist (Seidel & Shavelson, 2007). Zudem wird damit die Validität bisheriger Studien in Frage gestellt.

Es bleibt fraglich, inwiefern mit den drei Basisdimensionen nicht auch Fachspezifika erfasst werden. Es ist gleichsam problematisch, dass Mathematikunterricht mehr ist als das, was mit Beobachtungsinstrumenten gemessen werden kann. Doch auch eine immanente Kritik ist angebracht, wurden doch Aspekte wie Darstellungsformen, Anwendungsbezug, Fachsprache und mathematische Rigorosität bisher wenig bearbeitet. Blum et al. (2006) sprechen insofern von einer fachlich gehaltvollen Gestaltung von Mathematikunterricht neben den drei Basisdimensionen.

3. Literatursurvey

Wir zeichnen im Folgenden die Ergebnisse einer systematischen Literaturrecherche nach, die bei Schlesinger und Jentsch (2016) nachzulesen ist. Das Ziel war, fachspezifische Aspekte zur Qualität von Mathematikunterricht zu finden. Es kann dabei nur ein Ansatz sein, die Gemeinsamkeiten in den dort betrachteten Studien herauszustellen, was wir hiermit tun:

- Repräsentationsformen und Darstellungswechsel
- Mathematische Fachsprache
- Mathematische Kompetenzen (z.B. Argumentieren, Problemlösen)
- Vernetzungen und Verallgemeinerungen
- Fehler bzw. mathematische Rigorosität
- Verstehenselemente
- Inszenierungsmuster
- Einbettung von Aufgaben (“implementation of the task”)
- Schülerbeteiligung
- (Potential für) Kognitive Aktivierung
- Materialien

Bei der Analyse verschiedener Beobachtungsinstrumente ist ein entscheidendes Kriterium, ob ein spezifischer fachlicher Kontext vorliegt (wie etwa bei der Pythagoras-Studie). Andere Instrumente haben dagegen den Anspruch, sogar alle Arten von Fachunterricht reliabel und valide beurteilen zu können. Diese methodologischen Gesichtspunkte können hier zwar nicht weiter untersucht werden, sind jedoch nicht minder entscheidend für die Erfassung von Unterrichtsqualität.

4. Diskussion und Ausblick

Bei genauerer Betrachtung der bisher veröffentlichten Studien im Bereich mathematikdidaktischer Unterrichtsqualität wird deutlich, dass nach wie vor keine Einigung in der Benennung oder Konzeptionalisierung fachlicher Aspekte erzielt wurde. Darüber hinaus gibt es auch Unterschiede in der Namensgebung verschiedener empirischer Ebenen, z.T. wird zwischen Aspekten, Items, Dimensionen und Subdimensionen unterschieden. In diesem Sinne kann ein Fachspezifikum, das in einer gegebenen Studie lediglich in Form eines einzelnen Items auftaucht, in einer anderen Studie eine ganze empirische oder theoretische Dimension ausmachen.

Dies zeigt, dass die relevanten Aspekte mathematikdidaktischer Unterrichtsqualität erst noch identifiziert werden müssen, ganz zu schweigen von der Beziehung zwischen diesen. Andererseits ist deutlich geworden, dass es einen großen Konsens über solche relevanten Fachspezifika gibt.

Literatur

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., . . . Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Educational Research Journal*, 47(1), 133–180.

Blömeke, S., Gustafsson, J.-E., & Shavelson, R. J. (2015). Beyond Dichotomies. *Zeitschrift für Psychologie*, 223(1), 3–13.

Blum, W., Drücke-Noe, C., Hartung, R., & Köller, O. (2006). *Bildungsstandards Mathematik: Konkret. Sekundarstufe 1: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Brophy, J. (2000). *Teaching*. Brüssel: International Academy of Education.

Drollinger-Vetter, B. (2011). *Verstehenselemente und strukturelle Klarheit: Fachdidaktische Qualität der Anleitung von mathematischen Verstehensprozessen im Unterricht*. Münster: Waxmann.

Helmke, A. (2012). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität: Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts*. Seelze: Klett-Kallmeyer.

Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371–404). Charlotte, NC: Information Age.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371–406.

Klieme, E., & Rakoczy, K. (2008). Empirische Unterrichtsforschung und Fachdidaktik. Outcome-orientierte Messung und Prozessqualität des Unterrichts. *Zeitschrift für Pädagogik*, 54, 222–237.

Klieme, E., Pauli, C., & Reusser, K. (2009). The Pythagoras study. In T. Janik & T. Seidel (Eds.), *The Power of Video Studies in Investigating Teaching and Learning in the Classroom* (pp. 137–160). Münster, Westf: Waxmann.

Schlesinger, L. & Jentsch, A. (2016). Theoretical and methodological challenges in measuring instructional quality in mathematics education using classroom observations. *ZDM Mathematics Education*, 48(1).

Seidel, T., & Shavelson, R. J. (2007). Teaching Effectiveness Research in the Past Decade: The Role of Theory and Research Design in Disentangling Meta-Analysis Results. *Review of Educational Research*, 77(4), 454–499.

Julia JOKLITSCHKE, Essen; Benjamin ROTT, Essen & Maike SCHINDLER, Örebro

Erfassung mathematischer Kreativität – Herausforderungen valider Untersuchungsmethoden

Motivation und Projektvorstellung

Die Förderung potentiell mathematisch begabter Schülerinnen und Schüler (SuS) gewinnt im deutschen Schulsystem immer mehr an Bedeutung. Hierzu gibt es vor allem im Primarbereich und in der Sekundarstufe I bereits Erkenntnisse und Tests zur Identifikation und zur Förderung dieser Lernendengruppe (u.a. Käpnick, 1998; Kießwetter, 1985; Krutetskii, 1976).

Merkmale, die im Bereich mathematischer Begabung herausgearbeitet wurden, beziehen sich zumeist auf *außergewöhnliche Fähigkeiten* (eine zentrale Komponente aus Renzullis Drei-Ringe-Modell) wie Fähigkeiten zur Mustererkennung oder ein sogenanntes mathematisches Gedächtnis, die in ähnlicher Form auch mit vielen gängigen Intelligenztests erfasst werden. Weitere Aspekte von Begabung, wie z.B. *Aufgabenzuwendung* und *Kreativität* (Renzulli, 2002), finden dabei nur wenig Beachtung. Ausgehend von diesem Desiderat legt das Forschungsprojekt MBF_2 – mathematische Begabung im Fokus in der Sekundarstufe II – das Interesse auf SuS der Sek II und ein breites Spektrum an (potentiellen) Merkmalen mathematisch begabten Handelns wie beispielsweise Kreativität. Im Rahmen des Projektes fanden etwa 15 SuS der Sek II in zehn Treffen Gelegenheit, sich in moderne Themen der Mathematik zu vertiefen und sich kreativ mit Problemstellungen zu beschäftigen (Joklitschke et al., 2016). Das wissenschaftliche Erkenntnisinteresse dieses Beitrags liegt in der mathematischen Kreativität.

Theoretischer Hintergrund

Die Konzeptualisierung mathematischer Kreativität findet seinen Ausgang in Theorien zum divergenten Denken, welchem Guilford (1967) die vier Dimensionen *Fluency* (Fähigkeit, mehrere Ideen zu generieren), *Flexibility* (Verschiedenartigkeit von Ideen), *Originality* (Einzigartigkeit von Ideen) und *Elaboration* (Detailierungsgrad) zuschreibt. Eine präzise allgemeinakzeptierte Definition fehlt jedoch. Die oben genannten Komponenten finden auch Einzug in etablierten Tests wie den *Torrance Test of Creative Thinking* (kurz: TTCT; Torrance, 1974).

Um an bisherige Erkenntnisse anzuschließen und Kreativität in der Mathematik genauer zu untersuchen, betrachten wir *mathematisch kreatives Handeln* als solches, in dem SuS zu einem gegebenen mathematischen Problem vielfältige Lösungs*ansätze* finden. Die Kreativität der Lösungsansätze wird in Anlehnung an Guilfords Dimensionen durch deren Quantität sowie durch die Verschiedenheit und Seltenheit, die im Vergleich zur Referenzgruppe gegeben werden, operationalisiert.

In mathematikdidaktischen Studien – unter anderem von Kattou et al., (2013) und auch Leikin und Lev (2013) – gibt es bereits Adaptionen des oben erwähnten TTCT, um mathematisch kreatives Handeln zu erfassen. In beiden Arbeiten wurden sogenannte *Multiple Solution Tasks* (kurz MSTs) eingesetzt: Problemlöseaufgaben mit dem konkreten Arbeitsauftrag, möglichst viele Lösungen zu finden. Durch eine Analyse von Schülerbearbeitungen in den Dimensionen Fluency, Flexibility und Originality kann somit auf einen Gesamt-Kreativitätsscore geschlossen werden. Bisherige Bewertungsschemata betrachten bei der Ermittlung eines Kreativitätswertes jedoch nicht die Elaboration. Darüber hinaus wird eine streng dichotome Auswahl der Lösungen getroffen, das heißt, dass nur korrekte Lösungen mit in das Bewertungsschema einfließen. Falsche Lösungen werden nicht gewertet. Sowohl das Auslassen der Dimension Elaboration als auch das Aussortieren nicht korrekter Lösungsansätze legitimiert das Forschungsinteresse, bestehende Analysemethoden näher zu untersuchen.

Forschungsfragen

Um an die internationale mathematikdidaktische Kreativitätsforschung (u.a. Kattou et al., 2013; Leikin & Lev, 2013; Tagungsbeiträge der Forschungsgruppe um *Mathematical potential, creativity and talent* der CERME9) anzuschließen, fokussiert das Forschungsinteresse auf eine produktorientierte Forschung, sodass sich folgende Forschungsfragen ergeben:

1. Inwiefern erfassen bestehende Analysemethoden (insb. Tests) das Konstrukt „mathematische Kreativität“ valide?
2. Inwiefern können bestehende Analysemethoden vor diesem Hintergrund weiterentwickelt werden?

Erste Ergebnisse

Exemplarisch wird die Bearbeitung einer geometrischen Aufgabe (Abbildung 8) vorgestellt.

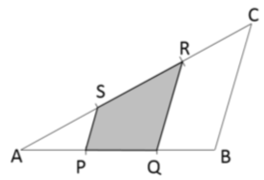


Abbildung 8. MST Dreieck. Es sei ein beliebiges Dreieck ABC gegeben. Die Punkte P, Q und R, S teilen die Seiten AB und AC in jeweils drei gleiche Teile. Wie groß ist der Flächeninhalt des grauen Vierecks im Vergleich zum Flächeninhalt des Dreiecks?

Zur Bearbeitung in Einzelarbeit hatten die SuS 20 Minuten Zeit. Die entstandenen Schriftprodukte wurden hinsichtlich der oben genannten Kategorien Fluency, Flexibility und Originality nach Leikin und Lev (2013) ausgewertet. Es zeigte sich, dass nur drei SuS auf der Basis des vorgegebenen Bewertungsschemas Punkte erreichen konnten. Die entsprechenden Lösungen waren korrekt und gut begründet. Bei Betrachtung der übrigen – mit null Punkten bewerteten – Schriftprodukte zeigte sich jedoch, dass auch diese auf durchaus kreative Leistungen hindeuten, aber aus unterschiedlichen Gründen nicht bewertet werden konnten. Hierzu zählten mangelnde Begründungen oder eine fehlende Antwort. Beispielsweise zeigte Laura (Abbildung 9 links) zwar, dass sie das Dreieck zu einem Parallelogramm ergänzte und somit darstellen konnte, dass es sich bei der gesuchten Fläche um die Hälfte des Drittels eines Parallelogramms handelte. Jedoch kam sie zu keiner vollständig korrekten Antwort, sodass ihr Lösungsansatz vor dem Hintergrund der Bewertungsvorgaben nur null Punkte bekam.

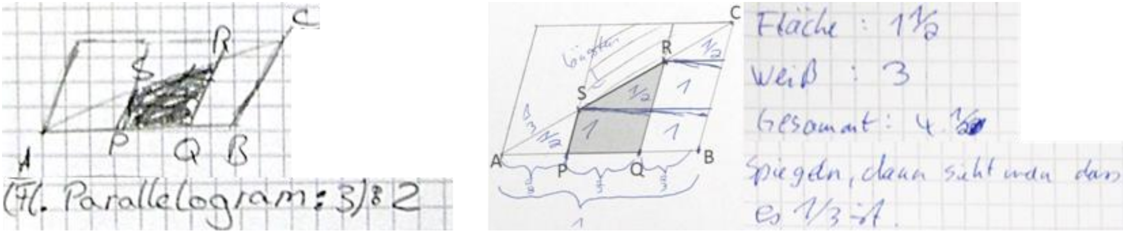


Abbildung 9. Lösungsansätze zur Dreiecksaufgabe. Links: Lauras Ansatz. Rechts: Tonys Ansatz.

Abbildung 9 (rechts) zeigt zwei Ansätze, die Tony erarbeitet hat. Im ersten unterteilte er die Fläche des Dreiecks in kongruente Parallelogramme und Dreiecke und zählte diese. Hier verpasste er es jedoch, die graue Fläche in Relation zur Gesamtfläche darzustellen und kam daher nicht zu einer vollständig korrekten Lösung. Sein zweiter Ansatz deutete, ebenso wie Lauras Ansatz, auf eine Punktspiegelung und damit eine Ergänzung zu einem Parallelogramm hin. Obwohl er eine korrekte Antwort formulierte, ist jedoch die Begründung unzureichend. Nach dem streng dichotomen Bewertungsschema von Leikin und Lev (2013) fließen die beiden Ansätze nicht mit in die Bewertung ein. Beide Lösungsansätze spiegeln jedoch trotz der Unzulänglichkeiten kreative Leistungen wider und sollten daher in eine Beurteilung des kreativen Handelns einfließen.

Insgesamt wurden im Rahmen dieser Erhebung wenige richtige und zudem gut begründete Antworten angefertigt. Jedoch gab es zahlreiche Lösungsansätze, die eine kreative Leistung erkennen lassen. Mit einer Modifikation hinsichtlich der streng dichotomen Bewertung hingehend zu einer Betrachtung aller Bearbeitungsansätze zeigt sich dann ein durchaus detaillierteres Bild in dem das kreative Handeln deutlicher herausgestellt werden konnte.

Ausblick und Diskussion

Mit der vorliegenden Arbeit konnte das bestehende Analyseinstrument zur Erfassung mathematischer Kreativität, welches in der internationalen Community Anwendung findet, näher untersucht werden. Die Ergebnisse deuten an, dass eine detailliertere Betrachtung dazu beiträgt, das Konstrukt genauer zu erfassen. Dies liegt vor allem an der streng dichotomen Bewertung, die dem vorhandenen Analyseschema zugrunde liegt. Mit Blick auf die Entwicklung eines Testinstruments sollten verschiedene Möglichkeiten einer Adaption in Erwägung gezogen werden. Beispielsweise könnte die Schwelle zur Aufnahme eines Ansatzes in das Bewertungsschema deutlich nach unten korrigiert werden, sodass auch jene Bearbeitungen gewürdigt werden, die entweder zu einer falschen Lösung kommen oder aber nicht ausführlich genug begründet wurden. In Bezug auf den zweiten Aspekt könnte auch die Aufnahme der Dimension *Elaboration* die Ansätze hinsichtlich ihrer Qualität unterscheidbar zu machen. Der Fokus der Kreativitätsmessung sollte nicht auf kreativen Lösungen beruhen, sondern vielmehr auf kreativen Ansätzen, die erarbeitet werden.

In Folgestudien ist eine Ausweitung des Forschungsvorhabens auf andere Teilgebiete (Algebra, Arithmetik) vorgesehen. Ebenso wird die Kreativität mit andern Merkmalen mathematisch begabten Handelns in Verbindung gebracht. Auch die Betrachtung aus einer ganzheitlichen, qualitativen Ebene rückt in den Fokus, nachdem gezeigt werden konnte, dass hier zugrunde gelegte Konzeptualisierung zur adäquaten Erfassung unzureichend sind.

Literatur

Guilford, J. P. (1967). *The nature of human intelligence*. New York: McGraw-Hill.

Joklitschke, J., Rott, B. & Schindler, M. (2016, akzeptiert). Revisiting the identification of mathematical creativity. Validity concerns regarding the correctness of solutions. In G. Kaiser & R. Vom Hofe (Hrsg.), *ICME13. 13th International Congress on Mathematical Education*.

Käpnick, F. (1998). *Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter*. Frankfurt am Main: P. Lang.

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D. & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM, 45* (2), 167–181.

Kießwetter, K. (1985). Die Förderung von mathematisch besonders begabten und interessierten Schülern. Ein bislang vernachlässigtes sonderpädagogisches Problem. *MNU – der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 38* (5), 300–306.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.

Leikin, R. & Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: what makes the difference? *ZDM, 45* (2), 183–197.

Renzulli, J. S. (2002). Emerging Conceptions of Giftedness. Building a Bridge to the New Century. *Exceptionality, 10* (2), 67–75.

Torrance, E. P. (1974). *Torrance Tests of Creative Thinking*. Bensenville, IL: Scholastic Testing Service.

Benjamin JORGA, Stefanie SCHNEBEL, Elisabeth RATHGEB_SCHNIE-RER, Charlotte RECHTSTEINER, Weingarten

Effekte individueller Voraussetzungen auf den Kompetenzaufbau in einer Fortbildungsreihe (PRIMA) im mathematischen Anfangsunterricht

1. Einbettung der Studie

Verschiedene Studien im Bereich Lehrerfortbildung zeigen, dass Lehrpersonen je nach Wissensstand und Überzeugungen unterschiedlich von Fortbildungsangeboten profitieren (Kunter et al. 2011, Lipowsky 2014). Zu den zentralen Merkmalen wirksamer Fortbildungen gehört es deshalb, am fachdidaktischen Wissen und an den Überzeugungen der Lehrkräfte anzuknüpfen (Besser, Leiss & Blum 2015, 288). Wie sich individuelle Voraussetzungen auf die Kompetenzentwicklung auswirken und inwiefern dadurch unterschiedliche Effekte auf der Ebene professionellen Handelns erklärt werden können, ist bislang allerdings erst teilweise erforscht.

Im Projekt „Professionalisierung im mathematischen Anfangsunterricht (PRIMA)“ wird eine Fortbildungsreihe implementiert, welche Mathematiklehrpersonen in einer ersten Klasse über ein Schuljahr hinweg begleitet (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2014; Rathgeb-Schnierer, Rechtsteiner, Schnebel & Jorga, 2015). Die Fortbildung weist auf Grundlage bestehender Erkenntnisse über wirksame Lehrerfortbildungen (Lipowsky, 2015) folgende Merkmale auf: längerfristige Anlage über ein Schuljahr hinweg, Wechsel von Input-, Elaborations-, Erprobungs- und Reflexionsphasen, Arbeit in standortbezogenen Tandems und in Kleingruppen, fachdidaktische Themen entlang der curricularen Struktur des Bildungsplans für das erste Schuljahr (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz, 2014). Als mathematikdidaktische Schwerpunkte werden thematisiert: Zahlblickschulung und die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen (Rathgeb-Schnierer, 2011, 2014; Rechtsteiner-Merz, 2013).

Ziel ist es, Erkenntnisse darüber zu gewinnen, wie sich mathematikdidaktische Kompetenzen und unterrichtliches Handeln der beteiligten Lehrpersonen verändern, und diese auf die Eingangsvoraussetzungen der Beteiligten zu beziehen.

Da die Fortbildung sowohl auf die Erweiterung fachdidaktischen Wissens, als auch auf die Umsetzung im Mathematikunterricht zielt, werden Effekte insbesondere auf Ebene der fachdidaktischen Kompetenz und des unterrichtlichen Handelns (Yoon et al., 2007) erwartet.

2. Design und methodisches Vorgehen

Die Interventionsstudie ist in einem Prä-Post-Design angelegt und wird von Juli 2015 bis Oktober 2016 durchgeführt. An der Fortbildung nehmen 28 Lehrpersonen teil, die alle im Schuljahr 2015/2016 eine erste Klasse im Fach Mathematik unterrichten. Zu zwei Messzeitpunkten (t1/t2 vor Beginn und nach Abschluss der Fortbildung) werden Daten erhoben.

Entwicklungen im unterrichtlichen Handeln werden mittels Videoanalysen (t1 und t2) erfasst. Entsprechend der Schwerpunkte der Fortbildung werden hier insbesondere die diagnostischen Fähigkeiten sowie die kognitiv anregende Gestaltung von Lernangeboten analysiert.

Die Kompetenzen der Lehrkräfte werden durch eine schriftliche Befragung erhoben. Schwerpunktmäßig werden hierbei als Dimensionen professioneller Kompetenz (Kunter & Baumert 2011) *Überzeugungen und Werthaltungen* (Skalen Enthusiasmus, Prozessorientierung, Selbstwirksamkeit und Individualisierung; adaptiert nach Sprenger, Lipowsky & Wartha 2015) abgebildet, sowie im Rahmen des Professionswissens der Kompetenzbereich des *fachdidaktisches Wissen* fokussiert (Kunter & Baumert 2011).

In Anlehnung an die von Weinsheimer (2016, 51) vorgenommene Modifikation des COACTIV-Modells (Brunner, et al. 2011, 217) werden zur Erfassung des fachdidaktischen Wissen Items zu folgenden Kompetenzfacetten eingesetzt (Weinsheimer (a.a.O.) ordnet diese dem mehrdimensionalen Konstrukt der diagnostischen Fähigkeiten zu): Wissen über mathematisches Denken von Schülern, Wissen über mathematische Aufgaben und Wissen über Lernprozesse.

Um das Wissen über mathematisches Denken von Schülern und deren Lernprozesse zu erfassen, wurden vier Items aus dem von Weinsheimer (2016) entwickelten und evaluierten Instrument übernommen. Das Wissen über mathematische Aufgaben wurde anhand von vier speziell dafür entwickelten Items erfasst. Diese umfassen fachdidaktische Aspekte und beziehen sich inhaltlich auf zentrale Elemente der Fortbildungsreihe PRIMA. Alle Items fokussieren generell das Erkennen, Nachvollziehen und Nutzen von Strukturen. Inhaltlich umfassen sie die Bereiche (1) Zahlzerlegung als Basis für den Aufbau eines Operationsverständnisses, (2) Deutungen von Zahldarstellungen, (3) Aufgabenbeziehungen als wesentlicher Aspekt der Zahlenblickschulung und (4) Transferwissen zu zentralen Inhalte von PRIMA.

Diese acht Items zum fachdidaktischen Wissen sind jeweils als offene Aufgaben formuliert. Die Antworten der Lehrkräfte werden in einem auf der Grundlage mathematikdidaktischer Qualitätsmerkmale (Klieme, Lipowsky, Rakocy & Ratzka 2006; Rechtsteiner-Merz 2013) deduktiv und induktiv entwickelten Ratingsystem hinsichtlich ihrer Ausprägungen eingeschätzt. Das Vorgehen wird im Folgenden am Beispiel eines Items erläutert.

Exemplarische Darstellung eines Items und dessen Auswertung

Das gewählte Item bezieht sich auf eine Aufgabe im Bereich Aufgabenfamilien (Rechtsteiner-Merz, 2013). Ziel ist es, zu erfassen, ob die Lehrkräfte das didaktische Potenzial des dargestellten Materials (Abb. 1) erkennen. Vor diesem Hintergrund lautet die Aufgabe im Fragebogen: „Formulieren Sie einen Arbeitsauftrag, in welchem die Lernchancen der Aufgabenkarten zum Tragen kommen. Dieser Arbeitsauftrag darf auch aus mehreren Teilschritten bestehen."

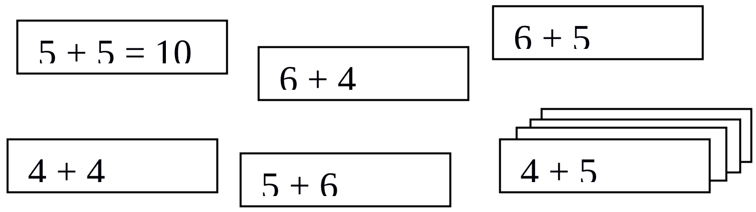


Abbildung 1: Aufgabe zur Erfassung fachdidaktischen Wissen

Es handelt sich aus mathematikdidaktischer Perspektive um eine Aufgabe aus dem Bereich Zahlblickschulung. Der Rechenzahlaspekt innerhalb des algebraischen Strangs steht im Vordergrund, der Blick wird auf Aufgabenbeziehungen gelenkt. Durch den mathematischen Austausch über diese vielfältigen Aufgabenbeziehungen werden metakognitive Kompetenzen entwickelt. (Rechtsteiner-Merz, 2013).

Das Ratingsystem zur Auswertung dieses Items wurde zunächst deduktiv auf Basis von Rechtsteiner-Merz (2013) gebildet und induktiv im Rahmen der Pilotierung ergänzt (vgl. Abbildung 2).

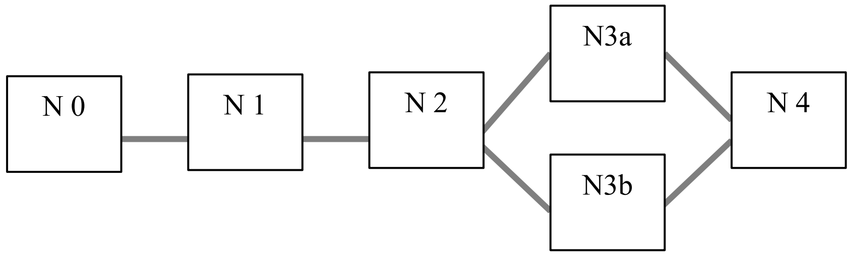


Abbildung 2: Codierschema

Auf Ebene 0 (N0) lassen die Lehrkräfte dieses Item aus oder antworten thematisch nicht passend. Auf Ebene 1 (N1) nennt die Lehrkraft die Möglichkeit, die Aufgabe auszurechnen und ggf. auch anschließend im Heft zu notieren. Auf diesem Level werden die eigentlichen Lernchancen des Materials, im Hinblick auf das Erkennen und Nutzen von Beziehungen und Strukturen, von der Lehrperson nicht wahrgenommen. Auf Ebene 2 (N2) richtet die Lehrkraft den Blick auf eben diese Elemente, indem sie einen Arbeitsauftrag zum Sortieren und strukturieren der Zahlenkarten formuliert, so dass Beziehungen zwischen den Aufgaben sichtbar werden. Auf Ebene 3 (N3) ergeben sich zwei methodische Vorgehensweisen, welche didaktisch betrachtet gleichwertig nebeneinander stehen und deshalb in N3a und N3b eingeteilt werden. Auf Niveaustufe N3a erkennt die Lehrkraft, aufbauend auf N2, das Potential, die entstehende Ordnung zum mathematischen Gespräch zu nutzen. Die unterschiedlichen Strukturen, welche beim Legen und Sortieren der Zahlensätze möglich sind, bieten Gelegenheit zum mathematischen Austausch und regen zum Nachdenken über das Vorgehen an. Auf N3b nutzt die Lehrkraft in ihrem Arbeitsauftrag die Lernchance, die im Arbeitsprozess entwickelte eigene Struktur aktiv anzuwenden und formuliert eine Aktivität, welche die Schüler anregt neue Aufgaben zur eigenen Ordnung zu erfinden. Sowohl bei N3a, als auch bei N3b überdenken die Schüler ihre bisherige Vorgehensweise und durchdringen ihre selbst entwickelte Ordnung. Es werden also auf beiden Ebenen metakognitive Kompetenzen aufgebaut. Auf Ebene 4 (N4) erkennt die Lehrkraft das volle Potential der Aufgabenkarten und inkludiert sowohl die Ebenen N3a als auch N3b in ihrem mehrstufigen Arbeitsauftrag.

4. Ausblick

Die Fortbildungsreihe PRIMA und die Datenerhebung werden im Herbst 2016 abgeschlossen. In Kürze liegen erste Ergebnisse dazu vor, mit welchem fachdidaktischen Wissen und welchen Überzeugungen die Lehrkräfte in die Fortbildung eingestiegen sind. Die Erkenntnisse aus den Prä-Post-Analysen und der Verknüpfung von Eingangsvoraussetzungen mit Veränderung von Kompetenzen und unterrichtlichem Handeln können für zukünftige Fortbildungskonzeptionen Aufschlüsse darüber geben, inwiefern es hilfreich ist, individuelle Voraussetzungen in die Planung einzubeziehen.

Literatur

Die Literaturliste kann beim Autor angefordert werden:

jorga@ph-weingarten.de

Judith JUNG, Marcus SCHÜTTE, TU Dresden

Die Bedeutung der sprachlichen Aushandlung beim inklusiven Lernen von Mathematik in der Grundschule

Das Bild vom Lernen von Mathematik

Das Bild vom Mathematiklernen hat sich in den letzten gut 30 Jahren in der internationalen und nationalen mathematikdidaktischen Forschung vehement verändert. Nach dem neuen Bild von Mathematiklernen sollen Kinder in der Schule nicht nur mathematische Fertigkeiten erlangen, sondern auch die mathematischen Konzepte dahinter entdecken und verstehen, über diese mit den Mitlernenden kommunizieren und argumentieren, um so schlussendlich selbstständig Begründungen für mathematisches Handeln hervorbringen zu können (vgl. Boyd & Bargerhuff 2009, Kroesbergen, Van Luit & Maas 2004). Diese internationale Entwicklung führte auch in Deutschland zu einem veränderten Bild von Mathematik in der (Grund)Schule. Mathematik gilt nunmehr als eine kulturell überlieferte, durch Sprache vermittelte und konstruierte Kulturtechnik (D' Ambrosio 1985). Lernende sollen diesem Bild folgend in die Lage versetzt werden, die Welt mit Hilfe der Mathematik besser zu verstehen und über das Entdecken von Zusammenhängen, Mustern und Strukturen zudem die Schönheit der Mathematik erfahren. Diese Veränderung wurde in Deutschland über die Festschreibung der Bildungsstandards im Fach Mathematik verbindlich institutionalisiert. Mit ihrer Einführung wurden auch ‚nicht-inhaltsbezogene', prozessbezogene Kompetenzen festgeschrieben, wie z.B. die des Argumentierens. Im Bereich der Sonderpädagogik der Mathematikdidaktik lassen sich ebenfalls die oben beschriebenen Veränderungen von einem Verfechten von kleinschrittig-reproduktiven Ansätzen des Mathematiklernens hin zu offeneren Unterrichtskonzepten, wie z.B. solchen des aktiv-entdeckenden Lernens erkennen (vgl. u. a. Scherer 1995). Diese Veränderungen werden hier allerdings kontrovers diskutiert. Sie stehen einer (bewährten) Unterrichtstradition, die geprägt ist durch eine Reduktion der Lerninhalte, eine Isolierung von Schwierigkeiten und ein kleinschrittiges Vorgehen mit fest vorgegeben Lösungswegen entgegen (vgl. Boyd & Bargerhuff 2009). Ergebnisse von internationalen Studien und Meta-Studien für den Unterricht von Kindern mit sonderpädagogischen Förderbedarf bestärken diese Tradition. So belegen Studien durchaus positive Effekte einer strukturierten Wissensvermittlung, die auf gezielter Anleitung und sprachlich möglichst geringen Anforderungen an die Lernenden beruht (vgl. u. a. Kroesbergen, Van Luit & Maas 2004; Gersten et al. 2009). Letztendlich rückt so die Frage nach dem Ziel des Mathematikunterrichts für Kinder mit sonderpädagogischen Förderbedarf ins Zentrum: Ist die Vermittlung von Fertigkeiten und das Beherrschen von Rechnungen, um einen reibungslosen Alltag mit ausreichend Grundfertigkeiten bestehen zu können das Ziel?

Oder ist es Ziel, ein tiefergehendes Verständnis der Mathematik zu erreichen und diese als Wissenschaft von Mustern und Strukturen zu verstehen, welche man durch die Teilhabe an kollektiven Argumentationen mit anderen aufbaut?

Die Bedeutung der Sprache im inklusiven Mathematikunterricht

Im Zuge eines gemeinsamen Mathematiklernens in inklusiven Unterrichtssettings treffen diese beiden Auffassungen von optimierten Lernbedingungen für Kinder aufeinander. Es sind erste Bemühungen aus der mathematikdidaktischen Forschung erkennbar, auch in inklusiven Lehr-Lernsettings einen Mathematikunterricht zu gestalten, der sich an dem neuen Bild von Mathematik orientiert - dies vor allem von mathematikdidaktischen Ansätzen ausgehend, die den Schwerpunkt auf die Gestaltung von Lernumgebungen legen (vgl. Häsel-Weide & Nührenbörger 2015). Der vorliegende Artikel versucht aus Sicht interaktionistischer Ansätze der Interpretativen Unterrichtsforschung Mathematiklernen unter den Bedingungen von Inklusion zu beschreiben und hierdurch Potential zur Veränderung der derzeitigen Praxis aufzuzeigen. Dies aus dem Grundverständnis heraus, dass inklusive Lernbedingungen zu einem nicht unerheblichen Teil vor allem Einfluss auf die interaktiven Wechselbeziehungen zwischen der Lehrperson und den Lernenden sowie zwischen den Lernenden selbst haben werden. Korff (2015, S. 103) stellt hierzu heraus, dass „im Zentrum eines inklusiven Mathematikunterrichts [...] Kommunikation und Kooperation stehen [müsse].“ Die Aufgabe der Lehrperson besteht demnach einerseits zunächst einmal darin vielfältige Sprachanlässe im Mathematikunterricht zu initiieren, die es den Schülern und Schülerinnen ermöglichen, mathematisch zu kommunizieren und zu argumentieren wie andererseits darin ihnen Hilfestellungen anzubieten, an der Interaktion im Unterricht entsprechend ihrer Fähigkeiten aktiv teilzunehmen und hierdurch Mathematik zu lernen. Ergebnisse von internationalen Untersuchungen zur Lehrerkommunikation in inklusiven Mathematikstunden, wie der Untersuchung von Wiebe Berry und Kim (2008) weisen allerdings darauf hin, dass die gängige Interaktion in inklusiven Unterrichtssettings vor allem durch eine enge Unterrichtsführung mit wenigen Sprach- bzw. mathematischen Argumentationsanlässen für die Schüler und Schülerinnen bestimmt ist.

Analyse von Klassengesprächen

Die zugrundeliegende Untersuchung geht folgender forschungsleitender Frage nach: Welche Möglichkeiten zur fachlichen Teilhabe ergeben sich durch die sprachliche Gestaltung der Lernprozesse durch die Lehrpersonen? Diese Frage lässt sich ausdifferenzieren: Welche Sprachanlässe werden den Kindern innerhalb des Unterrichts geboten? Wie entwickelt sich das mathematische Thema innerhalb dieser sprachlichen ‚Spielräume'? Die Untersuchung ist qualitativ orientiert und verortet sich in interaktionistischen Ansätzen der Interpretativen Unterrichtsforschung der Mathematikdidaktik (vgl. Krummheuer & Naujok 1999). Zur Analyse der sprachlichen Gestaltung des bzw. der kollektiven Aushandlungsprozesse im Unterricht wurden mit Hilfe der Interaktionsanalyse Klassengespräche aus Grundschulklassen in Nordrhein-Westfalen analysiert (vgl. Langner 2015).

Ergebnisse

In den zugrundeliegenden Analysen des vorliegenden Beitrages[13] sind Ansätze zur Umsetzung eines neueren Bildes von Mathematik durch die Lehrpersonen erkennbar. So lassen sich vielfältige Bemühungen der Lehrpersonen erkennen den Kindern Sprachanlässe im Mathematikunterricht zu ermöglichen. Hierdurch schaffen es die Lehrpersonen Kinder mit unterschiedlichen Leistungsniveaus aktiv am Klassengespräch teilhaben zu lassen. In Bezug auf ein Verständnis von Mathematiklernen als zunehmend autonomere Teilhabe an kollektiven Argumentationen dienen diese Sprachanlässe allerdings kaum. So werden längere begründende Äußerungen der Lernenden, die anscheinend nicht in das Unterrichtsskript passen, von den Lehrpersonen vielfach nicht aufgegriffen und thematisiert. Möglichkeiten zur sprachlichen Teilhabe werden so zunehmend auf kurze einfache Sprachäußerungen – meist nur das Nennen einer Zahl – reduziert, was einen reibungslosen Ablauf des Unterrichtsgeschehen mit möglichst wenig fehlerhaften Schüleräußerungen garantiert (Gersten et al. 2009). Dies liegt zum Teil an einer starken Lenkung des Unterrichts seitens der Lehrperson, welcher so nur scheinbar das Gewand eines offenen Unterrichts trägt. Es emergieren so keine optimierten Bedingungen für das Lernen von mathematischen Konzepten und/oder sprachlichen Strukturen. Dies steht mit Forschungsergebnissen von Wiebe Berry und Kim (2008) im Einklang. Mögliche Ursachen dafür liegen eventuell in dem Bewusstsein und den Bemühungen der Lehrpersonen, allen Kindern die Möglichkeit zu geben, verbal am Unterricht teilzunehmen ohne sie zu überfordern und/oder an einer mangelnden Interpretationskompetenz der Lehrenden begründete Äußerungen der Schülerinnen und Schüler im Einklang mit zu lernenden Konzepten zu bringen und untereinander zu koordinieren. Ein Schlüssel zur Verbesserung der Möglichkeiten für das gleichzeitige Lernen von sprachlichen und fachlichen Inhalten könnte über eine Ausweitung der Interpretationskompetenz der Lehrpersonen und durch bewusste Anleitung von Klassengesprächen (vgl. Chapin et al. 2009) erfolgen, so dass diese auch auf der Ebene der situativen kommunikativen Aushandlung im Unterricht im Sinne des „neuen" Bildes von Mathematik agieren können. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass Klärungsbedarf

[13] Eine umfassendere Darstellung der Analyseergebnisse findet sich in Jung & Schütte 2015.

darüber besteht, wie inklusives Lernen im Fach Mathematik in gemeinsamen Unterrichtssituationen umzusetzen ist, um allen Kindern ein tiefergehendes Verständnis und nicht nur mathematische Fertigkeiten zu vermitteln. Es bedarf weitergehender Analysen, die sich mit den Bedingungen fachlicher und sozialer Teilhabe aller Kinder in einem inklusiven Mathematikunterricht beschäftigen.

Literatur

Boyd, B., & Bargerhuff, M. E. (2009). Mathematics Education and Special Education: Searching for Commen Ground and the Implications for Teacher Education. Mathematics Teacher Education and Development. Vol 11. 54-67.

Chapin, S. H., O'Connor, C., O'Connor, M. C., & Anderson, N. C. (2009). Classroom discussions: Using math talk to help students learn, Grades K-6. Math Solutions.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its Place in the History and Pedagogy of Mathematics. For the Learning of Mathematics, 5 (1), 41–48.

Gersten, R., Chard, D. J., Jayanthai, M., Baker, S.K., Morphy, O., & Flojo, J. (2009). Mathematics instruction for students with learning disabilities: A meta-analysis of instructional components. Review of Educational Research, 79 (3), 1202-1242.

Häsel-Weide, U., & Nührenbörger, M. (2015). Aufgabenformate für einen inklusiven Arithmetikunterricht. In: A. Peter-Koop, T. Rottmann, & M. Lüken (Eds.), Inklusiver Mathematikunterricht in der Grundschule (S. 58-74) . Offenburg: Mildenberger.

Jung, J. & Schütte, M. (2015). Methodologie und methodisches Vorgehen Interpretativer Unterrichtsforschung am Beispiel inklusiven Lernens von Mathematik. Zeitschrift für Inklusion, 0 (4).

Korff, N. (2015). Inklusiver Mathematikunterricht in der Primarstufe: Erfahrungen, Perspektiven und Herausforderungen. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Kroesbergen, E. H., Van Luit, J. E. H., & Maas, C. J. M. (2004). Effectiveness of explicit and constructivist mathematics instruction for low-achieving students in the Netherlands. Elementary School Journal, 104, 233-251.

Krummheuer, G. & Naujok, N. (1999). Grundlagen und Beispiele Interpretativer Unterrichtsforschung. Opladen: Leske + Budrich.

Langner, A. (2015). Kompetent für einen inklusiven Unterricht. Wiesbaden: Springer.

Scherer, P. (1995). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung. Heidelberg: Universitätsverlag Winter.

Wiebe Berry, R. A., & Kim, N. (2008). Exploring Teacher Talk during Mathematics Instruction in an Inclusion Classroom. Journal of Educational Research; 101 (6), 363–378.

Ekaterina KAGANOVA, Potsdam

Was lehren Schulbuchlehrtexte im Fach Mathematik?

Schulbücher stellen gesellschaftlich kontrollierte Instrumente zur Steuerung und Beeinflussung des Unterrichtsgeschehens dar und spiegeln in dieser Hinsicht gesellschaftlich akzeptiertes bzw. erwünschtes Lehren und Lernen. Gleichzeitig dürften die Schulbücher aufgrund der Tatsache, dass sie naturgemäß inhaltlich wesentlich konkreter gestaltet sind als Rahmenlehrpläne und im Vergleich zu diesen unmittelbar im Unterricht eingesetzt werden, das Unterrichtsgeschehen viel stärker beeinflussen. Damit erfüllen sie eine Mediator-Funktion zwischen gesellschaftlich Gewolltem und dem konkreten Unterricht (vgl. Valverde et al. 2002, S. 9ff.). Sie transportieren also nicht nur das gesellschaftlich Akzeptierte und Gewollte, sondern spiegeln in gewisser Hinsicht auch das tatsächlich im Unterricht (typischerweise) Stattfindende und stellen insofern aufschlussreiche Untersuchungsobjekte dar.

Die Verwendung des Schulbuches – aus welcher Perspektive man es auch betrachtet – ist eng an die Überzeugung gekoppelt, dass Schüler(innen) durch seinen Einsatz etwas lernen, d.h. Wissen erwerben und vertiefen können. Die Lehrtexte in Schulbüchern verweisen dabei insbesondere auf die im Lehrprozess zentralen Phasen der Einführung neuen Lernstoffs. Viele Schulbuchautoren äußern sich auf den Einführungsseiten hinsichtlich der erwünschten Nutzungsweise des Schulbuchs im Allgemeinen und der Lehrtexte im Konkreten; so wird typischerweise beabsichtigt, dass Schüler(innen) die Lehrtexte (zuhause) lesen können, falls sie im Unterricht gefehlt oder etwas nicht verstanden haben. D.h. eine zentrale Funktion der Lehrtexte besteht darin, den selbständigen Wissenserwerb ohne Hilfe von Lehrern oder Eltern zu ermöglichen. Aus dem Gesagten lässt sich die Frage ableiten: Was und wie (gut) lehren Mathematikschulbuchlehrtexte bzw. was und wie (gut) können adressierte Schüler(innen) selbständig aus ihnen lernen?

Angesichts der eben skizzierten Bedeutung von Schulbuchlehrtexten verwundert es, dass die mathematikdidaktische Forschung bisher wenig Interesse an ihnen zeigt. Dies gilt insbesondere hinsichtlich der oben aufgeworfenen Frage nach dem mit Hilfe der Lehrtexte Lernbaren. Insgesamt lassen sich mehrere Defizitbereiche in der mathematikdidaktischen Forschung konstatieren: zunächst das empirische Defizit; wir wissen kaum etwas darüber, was und wie gut Lehrtexte lehren. Des Weiteren fehlt ein analytisches Instrumentarium, um differenziert und intersubjektiv das anhand eines Lehrtextes Lernbare zu erfassen und zu beschreiben. Und schließlich besteht ein theoretisches Defizit: Die Größe ‚Lehrpotential eines Schulbuchlehrtextes‘ ist bislang nicht einmal ansatzweise konzipiert. In meiner Dissertation (vgl. Kaganova 2016) wird der Versuch unternommen, die beschriebenen

Leerstellen zu reduzieren, indem zunächst das Konstrukt ‚Lehrpotential eines Mathematikschulbuchlehrtextes‘ als eine lernstoffunspezifische, intersubjektive, textinterne und möglichst analytisch zugängliche Größe konzipiert und anschließend systematisch erfasst wird. Hierfür wurden Erkenntnisse einer kognitiven Lerntheorie, die auf der Schematheorie basiert, aufgegriffen, mit textlinguistischen Ansätzen sinnvoll ergänzt und hinsichtlich meiner Forschungsfrage weiterentwickelt. Das Lehrpotential eines Schulbuchlehrtextes umfasst demnach die von einem verstehen wollenden Rezipienten (Modellschüler) anhand eines Lehrtextes bildbaren, möglichst intakten mentalen Modelle und die mit ihnen einhergehenden kognitiven Veränderungen.

Im Folgendem wird das Lehrpotential eines kurzen Lehrtextes – eines ‚Kastens‘ – skizzenhaft analysiert, wodurch das theoretisch-methodische Vorgehen angedeutet und eine exemplarische Antwort auf die Ausgangsfrage gegeben wird. Der in der nachfolgenden Abbildung dargestellte Lehrtext stammt aus dem Schulbuch ‚Mathematik 6‘ vom Westermann Verlag und trägt die Überschrift ‚Dezimalbrüche‘.

Einen Bruch mit dem Nenner 10, 100, 1000, … kann man als Dezimalbruch schreiben.		
$\frac{5}{10} = 0{,}5$	$\frac{56}{100} = 0{,}56$ $\frac{3}{100} = 0{,}03$	$\frac{307}{1000} = 0{,}307$ $\frac{8}{1000} = 0{,}008$
$1\frac{7}{10} = 1{,}7$ $\frac{23}{10} = 2{,}3$	$2\frac{11}{100} = 2{,}11$ $\frac{416}{100} = 4{,}16$	$2\frac{455}{1000} = 2{,}455$ $\frac{3218}{1000} = 3{,}218$

Abbildung: Kasten ‚Dezimalbrüche‘ im Schulbuch ‚Mathematik 6‘ (Liebau et al. 2004, S.42)

Die Brüche wurden im Schulbuch in vorherigen Kapiteln als Anteile eingeführt, die Dezimalbrüche tauchen in diesem Kasten erstmals auf. Dementsprechend wird auch das Vorwissen des Modellschülers angenommen: Er weiß, dass Brüche Anteile bezeichnen, hinsichtlich der Dezimalbrüche besitzt er jedoch lediglich Alltagskenntnisse, insbesondere haben abstrakte Dezimalbrüche, also jene ohne Größeneinheiten, für ihn keine Bedeutung (vgl. Padberg 2004, S. 42). Im Folgenden wird der Frage nachgegangen, inwiefern der vorliegende Lehrtext für den Modellschüler verstehbar ist und was er mit seiner Hilfe lernen kann.

Unser Modellschüler kann annehmen, dass mit dem Text erklärt wird, was Dezimalbrüche sind. Für diese Annahme sprechen insbesondere die Überschrift und der Aufbau des Schulbuchs. Im Rahmen dieses Textverständnisses wird der erste Satz wie folgt interpretiert: Ein Dezimalbruch ist ein Bruch mit dem Nenner 10, 100, 1000. Da unser Modellschüler bereits weiß, dass Brüche Anteile sind, kann er schlussfolgern, dass Brüche mit dem Nenner 10, 100, 1000 spezifische Anteile sind, nämlich jene, bei denen ein Ganzes in 10, 100, 1000 Teile eingeteilt ist. Im Rahmen dieses Textverständnisses wird also anhand des ersten Satzes die Frage ‚Was ist ein Dezimalbruch?‘ auf einer allgemeinen Ebene beantwortet. Die nachfolgenden Gleichungen konkretisieren die Bedeutung der Dezimalbrüche. Insgesamt kann das anhand des Kastens konstruierte Modell in etwa wie folgt paraphrasiert werden: „Ein Dezimalbruch bezeichnet Zehneranteile. Die Zahl vor dem Komma bezeichnet die Anzahl der Ganzen, eine Nachkommastelle bezeichnet die Anzahl der Zehntel; zwei Nachkommastellen bezeichnen die Anzahl der Hundertstel; usw." Im Zuge solch eines Textverständnisses bzw. Modells lernt unser Modellschüler, was Dezimalzahlen bedeuten. Er erlangt die globale Sicht auf die Dezimalbrüche und weiß damit, dass beispielsweise 0,56 56 Hundertstel bezeichnen.

Allerdings erfordert solch ein Textverständnis bzw. mentales Modell ein hohes Maß an kognitiver Arbeit. So muss zunächst die syntaktische Struktur des ersten Satzes verändert werden. Des Weiteren muss unser Modellschüler die Bedeutung der Dezimalbrüche größtenteils selbständig mit Hilfe seines fachlichen Vorwissens schlussfolgern. Die Textdaten unterstützen diese Leistung kaum, denn ‚Anteile' bzw. ‚Tausendstel, Hundertstel, Zehntel' werden nicht explizit erwähnt. Das Schlussfolgern der Bedeutung bzw. des Bezeichneten der Dezimalbrüche anhand vorliegender formal-mathematischer Zeichen (Gleichungen), die natursprachlich nicht erläutert werden, stellt insgesamt eine hohe kognitive Anforderung dar.

Der vorliegende Kasten ist aber auch unter der Annahme, dass der Autor mit dem vorliegendem Text mitteilen möchte, welche (Rechen-)Aufgaben im Folgenden gestellt und wie sie zu bearbeiten sind, sinnhaft lesbar.[14] Anhand des ersten Satzes ist demnach vom Rezipienten zu schlussfolgern, welche Aufgaben im Folgenden gestellt werden. Die Gleichungen beinhalten im Rahmen dieser Lesart die einzelnen Bearbeitungsschritte. Das entsprechende Modell kann verkürzt wie folgt paraphrasiert werden: „Im Folgenden werden Aufgaben gestellt, in denen Brüche mit dem Nenner 10, 100, 1000… als Dezimalbruch geschrieben werden müssen. Solche Aufgaben sind wie folgt zu bearbeiten: Schreibe den Zähler auf, zähle die Nullen im Nenner, zähle im aufgeschriebenen Zähler von rechts nach links die entsprechende Anzahl der Stellen, setze dort das Komma". Auch in diesem Fall erfordert die Modellkonstruktion mehrere selbstständige Schlussfolgerungen und ist daher kognitiv anspruchsvoll. Insbesondere ist das ‚Sehen' der Bearbeitungsschritte anhand der Gleichungen nicht leicht. Allerdings stellt sich beim Aufgaben-

[14] Der vorliegende Kasten ist außerdem als eine Mitteilung des Verfahrens ‚Schreiben der Brüche mit Nenner 10, 100, 1000 als Dezimalbrüche' und des (mathematischen) Satzes ‚Zehneranteile sind als Dezimalbrüche schreibbar' sinnhaft interpretierbar. Allerdings sind diese Interpretationen kognitiv anspruchsvoller als die vorgestellte Aufgaben-Lesart. (zur ausführlichen Analyse siehe Kaganova 2016, S. 123-137)

Modell die Frage nach der Bedeutung der Dezimalbrüche nicht; zu einer erfolgreichen Aufgabenbearbeitung genügt es zu verstehen, wie man mit mathematischen Zeichen umzugehen hat. Fachliches Vorwissen muss dabei kaum aktiviert werden, was die Modellbildung im Vergleich zum beschriebenen Begriff-Modell wesentlich vereinfacht. In diesem Fall lernt unser Modellschüler, wie Zeichen (Zehnerbrüche) in andere Zeichen (Kommazahlen) umgewandelt werden. Er lernt jedoch nicht, was Dezimalbrüche bedeuten.

Das hier skizzierte Ergebnis scheint kein unglücklicher Einzelfall zu sein, Die in meiner Untersuchung analysierten (deutlich längeren) Lehrtexte teilen im Wesentlichen mit, wie (Zeichen-)Aufgaben zu bearbeiten sind. Dabei sind explizite Handlungsanweisungen auf der Textoberfläche höchst selten. Diese erscheint vielmehr eher mathematisch, d.h. es werden Merkmale mathematischer Objekte genannt und oberflächlich erklärt und hergeleitet. Insofern ist die in der Tiefenstruktur des Textes eigentlich wirksame Aufgabenorientierung auf der Textoberfläche in ein ‚mathematisches Gewand' eingehüllt, was zur Folge hat, dass diese Lehrtexte schwer sinnhaft lesbar sind. Die adressierten Schüler(innen) dürften erhebliche Schwierigkeiten haben, mit ihrer Hilfe selbständig zu lernen. Die Schüler(innen), denen es gelingt, einem Text Sinn zu entnehmen, ihn also zu verstehen, werden eher die relativ leicht zu konstruierende Aufgabe(n)-Modell(e) bilden. Sie lernen dabei vorrangig, wie man mit mathematischen Zeichen, die für sie kaum etwas bezeichnen, umzugehen hat. Aus der eingangs erwähnten soziologischen Perspektive, bei der Schulbücher als Mediator zwischen dem erwünschten und dem (typischerweise) stattfinden Lehren betrachtet werden, ergeben sich aufgrund dieser Analyseergebnisse weitreichende Thesen (vgl. Kaganova 2016, S. 275-287).

Literatur

Kaganova, E. (2016 im Druck). *Was uns Lehrtexte lehren. Eine empirische Untersuchung von Schulbuchlehrtexten im Fach Mathematik.* Springer.

Liebau, B., Scheele, U. (Hrsg.) (2004). *Mathematik 6*. Braunschweig: Westermann.

Padberg, F. (2004). Die Einführung der Dezimalbrüche – ein Selbstläufer? *Mathematik lehren, 123*, 41–45.

Valverde, G.; Bianchi, L.; Wolfe, R.; Schmidt, W., Houang, R. (2002). *According to the book. Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers.

Belgüzar KARA, Essen

Der Einfluss sozialer Herkunft beim Umgang mit mathematischen Problemen

Seit mehr als einem Jahrzehnt diagnostizieren Schulleistungsstudien dem deutschen Bildungswesen eine Korrelation zwischen sozialer Herkunft und mathematischem Kompetenzerwerb. Bislang wurde dies vor allem mit sprachlichen Voraussetzungen in Verbindung gebracht. Im Fokus dieses Forschungsvorhabens geht es jedoch um die Frage, welche Merkmale außer der Sprache Lernende mit unterschiedlicher sozialer Herkunft beim Umgang mit mathematischen Problemen aufweisen. Als theoretische Grundlage für die Studie wird die Habitustheorie (Bourdieu, 1982) herangezogen. Methodologisch ist eine vergleichende Studie geplant, bei der das Problemlösen von Schülerinnen und Schüler unterschiedlicher sozialer Herkunft mit gleichem intellektuellem Potenzial untersucht wird.

1. Theoretischer Hintergrund

Aktuell geben Befunde aus den PISA-Studien für viele empirische Untersuchungen im Bereich der Mathematikdidaktik den Anlass, die Sprache als ein Faktor des familiären Hintergrundes zur Erklärung der starken Kopplung des Kompetenzerwerbs an Herkunftsbedingungen zu untersuchen. Zur Bestimmung weiterer Herkunftsmerkmale wird beispielsweise das kulturelle Kapital über die Bücherregalaufgabe oder der sozioökonomische Status über die Erfassung der Berufsangaben der Eltern eingesetzt. Diesen quantitativen Erhebungen folgen meist Einteilungen der Gruppen nach Kategorien wie z. B. Bildungsferne, Bildungsnähe, obere und untere Dienstklasse oder Facharbeiterkinder. Hierbei besteht jedoch die Gefahr, dass die vertikalen Einteilung der Schülerinnen und Schüler in hierarchisch geordnete Gruppen der Komplexität der Bildungspraxis nicht gerecht wird (vgl. Bremer 2014). Die Studie setzt deshalb einen weiteren Fokus auf die Situation und fragt danach, auf welch unterschiedliche Weise Lernende mit mathematischen Schwierigkeiten umgehen, welche Strategien sie anwenden und mit welchen Haltungen sie diese zu meistern suchen. Dazu wurde das Problemlösen in den Mittelpunkt gestellt, da es nicht nur wichtiges Kompetenzziel der Bildungsstandards ist, sondern in besonderer Weise ein flexibles Denken neben einem regelkonformen Arbeiten erfordert. Diese Problemlösekompetenz umfasst allgemeine Arbeitstechniken der Informationsbeschaffung und heuristische Strategien (vgl. Leuders, 2011). Neben diesem Wissen ist jedoch vor allem eine Haltung wichtig, die von Durchhaltevermögen, Frustrationstoleranz und Erkundungsfreude gekennzeichnet ist, auch wenn dies im Unterricht nicht explizit vermittelt wird. Des Weiteren spielen metakognitive Fähigkeiten eine außerordentliche Rolle beim Lösungsprozess von Problemlöseaufgaben. Gerade diese Haltungen und Fähigkeiten sind eng mit dem eigenen Habitus verbunden.

2. Eine an Bourdieu orientierte Analyse

Der Habitus beinhaltet alle dauerhaften Verhaltens-, Denk- und Handlungsmuster, die ein Individuum im Prozess der Sozialisation erwirbt und verinnerlicht. Der Habitus besitzt zwei Prinzipien: das Strukturierungsprinzip (opus operatum) und das Erzeugungsprinzip (modus operandi) (Bourdieu, 1982). Der Habitus wird nicht ausschließlich durch die erworbenen Wahrnehmungs-, Denk- und Handlungsschemata der Herkunftsbedingungen und deren Reproduktion determiniert, sondern beinhaltet auch eine aktive Dimension der Herstellung der Strukturen der Daseinsverhältnisse. Dennoch wachsen Individuen in bestehenden kulturellen und gesellschaftlichen Ordnungsgefügen (Milieus) auf, die auf deren Einstellungen, Haltungen und Sichtweisen wirken. Dazu gehören auch das Bildungsverständnis und die Haltung gegenüber dem Mathematikunterricht, die milieuspezifisch ausgelegt sind. Zur Verortung der individuellen Handlungsmuster der Schülerinnen und Schüler im sozialen Raum unter Berücksichtigung ihrer sozialen Herkunft wird das AgiS-Milieumodell nach Vester genutzt (vgl. Bauer, 2008). Dieses Modell eignet sich im besonderen Maße zur Veranschaulichung von habituellen Dispositionen im sozialen Raum, da es neben einer vertikalen Differenzierung nach unterschiedlichen Klassen bzw. Schichten auch eine horizontale Differenzierung vornimmt, die unterschiedliche Habitusmuster innerhalb einer Klasse oder Schicht beschreiben. Diese Differenzierungen werden auf das Feld der Schule bzw. des Mathematikunterrichts übertragen, um die Einflüsse der habituellen Dispositionen der Schülerinnen und Schüler mit unterschiedlicher sozialer Herkunft bei der Bearbeitung von mathematischen Problemen aufzuzeigen.

3. Aktuelle Forschungsfragen

Die interdisziplinäre Verbindung der Theorien und Methoden der Soziologie und der Mathematikdidaktik ist für das Forschungsanliegen elementar.

Welche konkreten Merkmale (Habitusmuster) weisen Schülerinnen und Schüler mit unterschiedlicher sozialer Herkunft mit gleichem intellektuellem Potenzial beim Umgang mit mathematischen Aufgaben auf, die ihr Potenzial bei der Bearbeitung von mathematischen Aufgaben beeinflussen?

Welche Möglichkeiten der Kompensation unpassender habitueller Dispositionen beim Bearbeiten mathematischer Aufgaben gibt es (mit Blick auf die schulische Praxis)?

Methodologisch ist eine vergleichende Studie geplant. Erste Interviewstudien dienten zunächst dazu, den Merkmalsraum zu erkunden und Vorgehensweise beim Problemlösen zu beschreiben und zu verstehen. Dazu wurden bislang insgesamt 19 Schülerinnen und Schüler aus den 5. und 6. Klassenstufen unterschiedlicher Schulformen bei der Bearbeitung von Problemlöseaufgaben videographiert und interviewt. Die bei den Analysen gewonnenen Erkenntnisse fließen in die Hauptstudie ein, bei der Schülerinnen und Schüler unterschiedlicher sozialer Herkunft mit gleichem intellektuellem Potenzial beim Umgang mit mathematischen Problemen untersucht werden. Zur Auswahl dieser Schülerinnen und Schüler wird in einer quantitativen Erhebung der Grundintelligenztest CFT 20-R zur Diagnose der kognitiven Fähigkeiten durchgeführt. Zur Bestimmung der mathematischen Leistungen der Schülerinnen und Schüler der 4. Klassenstufe ist der Einsatz von Aufgaben aus der TIMSS-Studie, die sich mit den Bildungsstandards als vereinbar erweisen, geplant. Nach der Auswahl einzelner Schülerinnen und Schüler nach ihrer sozialen Herkunft und ihrer kognitiven Fähigkeiten werden in der qualitativen Erhebung klinische Interviews zur Beobachtung der Bearbeitung von mathematischen Aufgaben durchgeführt. Dazu werden die Schülerinnen und Schüler nach ihren Angaben zur sozialen Herkunft im AgiS-Milieumodell nach Vester eingeordnet und nach möglichen Unterschieden bei der Bearbeitung von mathematischen Problemen analysiert.

4. Erste Ergebnisse

Von den 19 Schülerinnen und Schülern der Vorstudie wurden aufgrund der Angaben zu den Kapitalsorten und elterlichen Berufen 12 der Kategorie nicht-privilegierter Herkunft und 7 der Kategorie privilegierte Herkunft zu geordnet. Insgesamt haben 8 von 12 Schülerinnen und Schülern aus nicht-privilegierter Herkunft die Aufgaben vorzeitig abgebrochen. Außerdem konnten keine oder nur falsche Strategien zur Lösung der Aufgaben beobachtet werden. Wurde eine falsche Strategie mit der Folge eines falschen Ergebnisses eingesetzt, folgte statt einer Reflexion oder Revidierung der Strategie eher Resignation. Deutlich häufiger zeigten sich Unsicherheiten durch mehrmaliges Nachfragen („Soll ich das jetzt so machen?“, „Habe ich das so richtig verstanden?“), negative, verallgemeinernde Äußerungen („Ich kann nicht so gut knobeln“) und die Bitte um Rückmeldungen („Kann ich das so rechnen oder ist das falsch?“). Das Durchhaltvermögen gegenüber vermeintlich „neuen Herausforderungen“ schien sehr gering, was sich an den vorzeitigen Resignationen zeigt. Selbst durch positive Zusprechung oder Hilfestellung der Interviewer lassen sich einige dieser Lernenden zur Fortsetzung der Aufgabe nicht motivieren. Es erscheint eine Verdrossenheit gegenüber Mathematik. Weitere Schülerinnen und Schüler aus nicht privilegierter Herkunft, die zu einer Aufgabenlösung schaffen, zeigen ähnliche Unsicherheiten auf. Im Vergleich weisen die Schülerinnen und Schüler aus privilegierter Herkunft positivere Selbstwirksamkeitserwartungen und höheres Durchhaltevermögen bei der Bearbeitung der Aufgabe auf. An dieser Stelle ist noch zu erwähnen, dass der Vergleich der Schülerinnen und Schüler aus unterschiedlicher Herkunft im Zusammenhang der letzten Mathematiknote und der Schulform betrachtet wird.

5. Fazit

Die ersten Ergebnisse der Beobachtungen deuten auf den Einfluss habitueller Dispositionen beim Umgang mit mathematischen Problemen. Der Einbezug der horizontalen Differenzierung im Feld des Mathematikunterrichts und insbesondere der Bearbeitung von mathematischen Aufgaben wird das Bild über den Einfluss der habituellen Dispositionen auf die Mathematikleistungen nochmals schärfen. Die ersten Beobachtungen begrenzen sich vorwiegend auf die vertikale Einteilung des sozialen Raums, aus denen die Schülerinnen und Schüler mit unterschiedlichen Sozialisationsbedingungen auf dem Feld der Schule auftreten. Die Ergebnisse weisen daraufhin, dass gerade Schülerinnen und Schüler aus nicht-privilegierter Herkunft ein „sence of entitlement“ (vgl. Laureau, 2011) fehlt, welches im weiteren Verlauf der Studie zu untersuchen ist.

Literatur

Bauer, U./Vester, M. (2008): Soziale Ungleichheit und soziale Milieus als Sozialisationskontexte. In: Hurrelmann, K./Grundmann, M./Walper, S. (Hrsg.): Handbuch Sozialisationsforschung. 7. vollst. überarb. Aufl. Weinheim und Basel: Beltz.

Baumert, J./Schümer, G. (2001): Familiäre Lebensverhältnisse, Bildungsbeteiligung und Kompetenzerwerb. In: Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.), PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich.

Bourdieu, P. (1982): Die feinen Unterschiede. Kritik der gesellschaftlichen Urteilskraft. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Bremer, H./Lange-Vester, A. (2014): Die Pluralität der Habitus- und Milieuformen bei Lernenden und Lehrenden. Theoretische und methodologische Überlegungen zum Verhältnis von Habitus und sozialem Raum. In: Helsper, W./Kramer, R. (Hg.): Schülerhabitus. Wiesbaden: VS, S. 56-81.

Lareau, A. (2011): Unequal Childhoods. Class, Race, and Family Life, With an Update a Decade Later. University of California Press: London.

Leuders, T. (2011): Mathematik-Didaktik: Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. 6. Auflage. Berlin: Cornelsen.

Müller, K/Ehmke, T.: Soziale Herkunft als Bedingung der Kompetenzentwicklung. In: 2013 PISA 2012: Fortschritte und Herausforderungen in Deutschland. Prenzel, M./ Sälzer, C./ Klieme, E. & Köller, O. (Hrsg.). Münster: Waxmann, S. 245-274.

TAKASHI KATO, Tokyo University and Graduate School of Social Welfare, Japan; SEIJI MORIYA, Tamagawa University, Japan; TOSHIHIKO SHINDO, University of Yamanashi, Japan

Effects of diagrams showing relationships between variables in solutions to problems concerning relative values.

1. Introduction

"Relative values" taught in the fifth grade are said to be the most difficult among the contents of mathematics taught in Japanese elementary schools. Relative value problems can be classified into three types: (1) when the compared quantity and base quantity are known, and the relative value is required (First use), (2) when the base quantity and relative value are known, and the compared quantity is required (Second use), and (3) when the compared quantity and relative value are known, and the base quantity is required (Third use). It is known that the third type of problems are especially difficult for elementary school students.

In Japan, number lines are generally used when teaching relative values, because relationships between the actual quantity and corresponding relative value are visually indicated. On the other hand, Shindo and Shimizu (2015) examined whether number lines are useful for solving verbally presented relative value problems and obtained the following results:

(1) Solutions to verbal relative value problems are facilitated in elementary school students by using number lines.
(2) It is difficult for elementary school students to draw number lines by themselves when solving verbal problems.
(3) One reason for (2) was that they could not regard the base quantity as "once".

Furthermore, Shindo and Moriya (2015) conducted an experiment with university students that required solutions to relative value problems. The results indicated that many university students did not understand number lines, and that number lines are not effectively used in solving problems. Therefore, is necessary to develop tools for facilitating the understanding of relative values. This study presents a diagram method that clearly indicates relationships among the base quantity, compared quantity, the relative value of the base quantity (=1 (once)), and the relative value of the compared quantity. Relative values were taught to two fifth graders using such diagrams and the effects of the diagram on facilitating solutions to the problems were examined.

2. Experiment

Participants: M and N that were fifth graders participated in the experiment. They had already learned multiplication and division of decimal fractions, but had not learned relative values.

Procedures: A textbook that included the definition of relative values and three types of problems described above, which were developed by the authors, was used. One of the authors taught relative values following the textbook, and using a diagram called a "box diagram" (Figure 1).

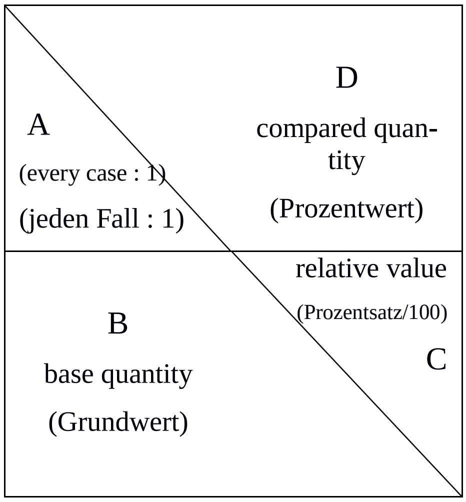


Figure 1 Box Diagram

Overview of the teaching process

Pre-tests was conducted to examine the effect of the box diagram. The problems used in the tests are shown below. These problems have been used in Shindo and Shimizu (2015). In their study, the mean percentage of correct answers among elementary school students (N=116), to whom relative values had already been taught using number lines, were 62%, 67%, and 58% respectively for the three problems (Table 1)

Problem 1. There is a 30 cm stick. If you cut 18 cm of the stick to use it for work. How many times the length of the original stick is the length of the stick that I cut? (First use)
Problem 2. A class consists of 40 students. The number of boys in the class is 0.6 times the total number of students in the class. How many boys are there in this class? (Second use)
Problem 3. A boy gave 15 marbles to his sister. The number of marbles that the boy gave to his sister was 0.6 times the marbles that he originally had. How many marbles did the boy originally have? (Third use)

Table 1 Sentence Problems imposed as Pre-test

In the pre-test, M developed a correct formula for Problem 1, whereas N responded "30-18=12, 12÷30=0.4". M also developed a correct formula for Problem 2, however N developed a wrong formula; "40÷0.6." M and N both developed a wrong formula for Problem 3; "15×0.6." This indicated that the third problem was the most difficult for both M and N. Teaching started after finishing the pre-test. First, a first use problem below was given: "at four basketball games the success rates for shoots by a player were as follows: 4/8, 4/10, 8/10, and 9/12. Compare the success rates for shoots between the four games." M calculated the difference between the number of shoots and failures, and responded that the player was most successful in the fourth game. On the other hand, N attended only to the third and fourth games and responded that although the player made 12 shoots (two more than 10) in the fourth game, he/she succeeded in 9 shoots (just one more than 8). Therefore, the success rate in the third game was higher. It can be seen from these responses that before teaching both students tended to make judgments based on the differences.

Following this, the definition of relative value (i.e. relative value =compared quantity÷base quantity) and the meaning of relative value were taught. Then, the box diagram was shown and the method of using it was explained (Table 2).

(1) Always enter "1" in the A division (see Figure1), which means "once"
(2) Enter the actual quantity corresponding to "once" in the B division
(3) Enter the actual quantity not corresponding to "once" in the D division
(4) In the C division, enter how many times larger D is than B
(5) Enter " ? " as the unknown value that is inquired in the problem

Table 2 Usage of Box Diagram

After the explanation about relative values using the box diagram, the two participants were required to solve the problem. They calculated the relative values of four games, and responded that the success rate in the fourth game was the highest.

Next, the participants were required to solve another three first use problems using the box diagram. Results indicated that they could respond correctly. At this point, percentage expressions of relative values were taught. Then, the second use problem below was shown: "There is 300 mL juice containing 30% fruit juice. How many milliliters is the fruit juice?" The two participants made box diagrams and gave the correct response. When given two other second use problems, they could also make box diagrams and give the correct response. Subsequently, the participants were required to solve the third use problem below: "The weight of a kitten is 168g, which is 160% of its birth weight. What was the birth weight of the kitten?" M and N made box diagrams by themselves and responded correctly. Because findings of previous studies have indicated that the third use problems are difficult to solve, another solution described below was was taught: using the unknown quantity X, make a formula of the second use, and converting it into the third use. That is, we taught that it would be easier to solve third use problems by first making the formula, "X×relative value=compared quantity," and then converting it into "X=compared quantity÷relative value." Two third use problems were given, which indicated that both participants could answer correctly without using an equation.

After going through the teaching process described above, identical problems to the pre-test were posed as the post-test. This indicated that M and N could make correct formulas and respond correctly to all the three problems. For examining the effects of box diagrams more objectively, three problems included in the national academic ability test that is given to all sixth graders in Japan was given to M and N, to which they responded correctly. The national average percentage of correct answers to these problems is less than 50%.

3. Discussion

The two participants did not have major problems during the teaching process. Furthermore, they could correctly answerer the problems in the post-test to problems that have a correct response percentage less than 50%. These results suggest that the introduction of box diagrams would facilitate understanding of relative values. This effect could be because the box diagrams indicates relationships among the compared quantity, base quantity, and relative value more clearly, compared to number lines. It is considered effective to enter “1 (once)” in the A division of the diagram at first, which indicates the relative value of the base quantity.

On the other hand, even when using box diagrams, it is necessary to identify the base quantity and the compared quantity in order to solve verbal problems, which is exactly the major difficulty in solving problems for many learners. In the future, it would be important to suggest a teaching method that accurately indicates the meaning of verbal problems. This study is a case study with just two participants. Further verification of the effect of box diagrams is required by increasing the number of participants.

4. References

Shindo, T. & Shimizu, M. (2015) Need of the number lines in the understanding of the ratio. *Proceeding of the 11th Annual Meeting of the Japanese Association of Teaching-Learning Psychology*, 14-15.

Shindo,T. & Moriya, S. (2015) Difficulty of instruction on the relative value. *Proceeding of the 57th Annual Meeting of the Japanese Association of Educatinal Psychology*, 605.

Acknowledgement This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 15K04510.

Leander KEMPEN, Paderborn; Miriam KRIEGER, Münster; Petra Carina TEBAARTZ, Gießen

Über die Auswirkungen von Operatoren in Beweisaufgaben

Im vorliegenden Beitrag wird ein Einblick in das Projekt „O.B.d.A“: „Operatoren in Beweisaufgaben – eine didaktische Analyse“ gegeben. Ferner wird an exemplarischen Ergebnissen dargestellt, welche Unterschiede in Beweisbearbeitungen von Erstsemesterstudierenden ausgemacht werden konnten, in denen die Aufgabenoperatoren systematisch permutiert worden waren.

Theoretischer Hintergrund

Dreyfus (1999) führt verschiedene Gründe an, warum Lernende Probleme beim Beweisen haben. Dort heißt es:

> The examples […] provide ample room for questioning what is expected by the different formulations used, including ‘explain’ [..], ‘justify’ [..], ‘prove’ [..], and ‘show that’ [..]. Does ‘show that’ mean ‘formally prove’ or ‘use an example to demonstrate that’ (or something intermediate between these two)? Does ‘explain’ mean explain to a fellow student or explain in such a way as to convince the teacher that you understand the reasoning behind the claim? (S. 103f.).

Diese Frage nach der (impliziten) Bedeutung von Operatoren in Beweisaufgaben für Lernende scheint dabei aus verschiedenen Gründen berechtigt. So werden etwa den Operatoren „beweisen“, „zeigen“, „begründen“ und „erklären“ im schulischen Kontext verschiedene Bedeutungen zugewiesen (Kultusministerkonferenz, 2012). Was Lernende allerdings unter Beweis/Begründung/Erklärung etc. verstehen, wird im unterrichtlichen Geschehen im Rahmen sogenannter sozio-mathematischer Normen herausgebildet (Yackel & Cobb, 1996). Im Rahmen dieses Aushandlungsprozesses von Normen können auch semiotische Normen entstehen, so dass Lernende mit verschiedenen Aufgaben(-stellungen) die Nutzung bestimmter semiotischer Ressourcen verbinden (Dimmel & Herbst, 2014; Kempen & Biehler, 2016). Dies könnte etwa dazu führen, dass beim Beweisen verstärkt Buchstabenvariablen verwendet werden, wohingegen Begründungen eher narrativ gehalten sind.

Forschungsanliegen und Forschungsfragen

Aus hochschuldidaktischer Perspektive ist die Frage interessant, mit welchen (impliziten) sozio-mathematischen Normen in Bezug auf das Beweisen Erstsemesterstudierenden ihr Universitätsstudium beginnen. An dieser Stelle möchten wir die folgende Forschungsfrage thematisieren: Inwiefern lassen sich bei Beachtung der verwendeten Operatoren systematische Bearbeitungsunterschiede in Beweisproduktionen von Erstsemesterstudierenden (hier: Lehramt Mathematik) ausmachen?

Durchführung und Auswertung

Im Wintersemester 2015/16 wurden an den Universitäten Gießen, Münster und Paderborn in der jeweils ersten Lehrveranstaltungssitzung zwei Beweisaufgaben an die Studierenden ausgeteilt, in denen zwischen den Aufgaben die Operatoren „Beweisen Sie…“, „Zeigen Sie…“, „Begründen Sie…“ und „Erklären Sie…“ systematisch permutiert worden waren. Die zu verifizierenden Aussagen waren hierbei: (1) *Die Summe aus einer ungeraden natürlichen Zahl und ihrem Doppelten ist immer ungerade* und (2) *Das Produkt von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer durch sechs teilbar*.

Während der Nachweis der Gültigkeit der Behauptung (1) gut mithilfe von Buchstabenvariablen vollzogen werden kann, ist der Nachweis der Behauptung (2) mit Buchstabenvariablen deutlich anspruchsvoller. An dieser Stelle würde sich eine inhaltliche narrative Begründung anbieten.

Aufgrund der zu Beginn des Fragebogens erhobenen personenbezogenen Daten konnten insgesamt Beweisbearbeitungen von 390 Erstsemesterstudierenden (Lehramt Mathematik) erhoben werden. Darunter 70 Gymnasiallehramtsstudierende, 149 Studierende für das Lehramt an Haupt-, Real- und Gesamtschule und 171 Grundschullehramtsstudierende.

Exemplarische Ergebnisse

In diesem Artikel stellen wir die Ergebnisse in Bezug auf die folgenden drei Aspekte dar: (i) Art der Bearbeitung (begründender oder prüfender Ansatz), (ii) die Verwendung von Buchstabenvariablen bei begründendem Ansatz und (iii) die Anzahl verwendeter Wörter bei begründendem Ansatz.

Alle Bearbeitungen wurden nach der **Art der Bearbeitung** in eine der folgenden Kategorien eingeordnet: (a) „prüfender Ansatz“ (die Bearbeitung besteht ausschließlich aus der Überprüfung einzelner konkreter Fälle) und (b) „begründender Ansatz“ (in der Bearbeitung wird ein Begründungsversuch vorgenommen, der über das bloße Testen von konkreten Fällen hinausgeht). In den Bearbeitungen zu beiden Beweisaufgaben enthielten die Bearbeitungen zum Operator „Zeigen Sie…“ den höchsten Anteil mit prüfendem Ansatz. In der Beweisaufgabe (1) zeigte sich ein signifikant höherer Anteil der Bearbeitungen mit prüfendem Ansatz bei dem Operator „Zeigen Sie“ (26%) im Gegensatz zum Operator „Erklären Sie“ (17%) [Chi²-Test, $p=.021$]. In der Beweisaufgabe (2) war der Unterschied zwischen dem Operator „Zeigen Sie“ (54%) und „Begründen Sie“ (40%) statistisch hoch signifikant [Chi²-Test, $p=.002$].

Bzgl. der **Verwendung von Buchstabenvariablen bei begründendem Ansatz** ließen sich bei den Bearbeitungen zu Aufgabe (1) signifikante Unterschiede feststellen. Die Anteile der Bearbeitungen mit Buchstabenvariablen waren getrennt nach den verwendeten Operatoren wie folgt: „Erklären Sie“: 26,7%, „Begründen Sie“: 26,7%, „Zeigen Sie“: 62,3% und „Beweisen Sie“: 76,1%. Der Anteil von 76,1% der Aufgabenbearbeitungen mit Buchstabenvariablen bei dem Operator „Beweisen Sie“ war statistisch signifikant höher als bei den Operatoren „Begründen Sie“ (p<.001) und „Erklären Sie“ (p<.001). Auch der Prozentsatz von 62,3% bei dem Operator „Zeigen Sie“ war signifikant höher als bei den Operatoren „Begründen Sie“ (p<.001) und „Erklären Sie“ (p<.001). Bei Aufgabe (2) lagen keine statistisch signifikanten Unterschiede vor.

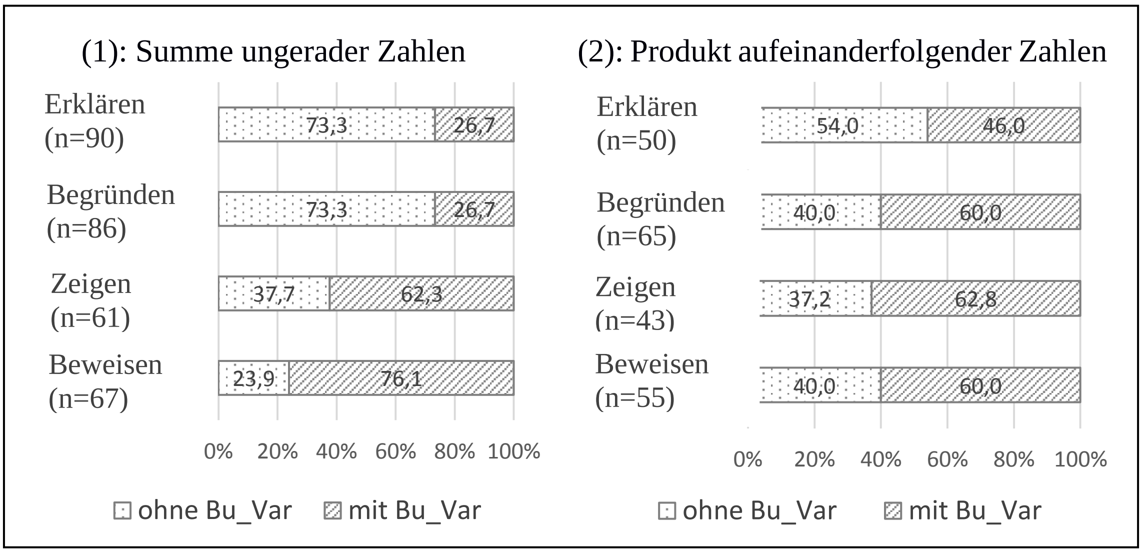


Abbildung 10: Verwendung von Buchstabenvariablen differenziert nach Operatoren

Bei Betrachtung der **Anzahl** der in den Aufgaben **bei begründendem Ansatz verwendeten Wörter** konnten ebenfalls bei den Bearbeitungen zu Aufgabe (1) statistisch signifikante Unterschiede bei Beachtung der Operatoren ausgemacht werden. Die arithmetischen Mittel der bei begründendem Ansatz in dieser Aufgabe verwendeten Wörter waren hierbei: „Beweisen Sie“: 17,91, „Zeigen Sie“: 17,11, „Begründen Sie“: 32,63 und „Erklären Sie“: 31,60. Damit wurden in den Bearbeitungen mit dem Operator „Beweisen Sie“ statistisch hoch signifikant weniger Wörter verwendet, als bei den Operatoren „Begründen Sie“ (T-Test, p<.001; cohens d=1.02) und „Erklären Sie“ (T-Test, p<.001; cohens d=.83). Dies traf auch für die Bearbeitungen zu dem Operator „Zeigen Sie“ zu (vs. „Begründen Sie“: p<.001; cohens d=1.05 und vs. „Erklären Sie“: p<.001; cohens d=.85).

Schlussbetrachtung

Im Rahmen der hier vorgestellten Untersuchung konnte gezeigt werden, dass die Wahl von Beweisoperatoren Auswirkungen auf die entsprechenden Bearbeitungen haben kann. Während der Operator „Zeigen Sie“ Aufgabenbearbeitungen mit rein empirischen Überprüfungen begünstigt, werden in Bearbeitungen zu den Operatoren „Zeigen Sie“ und „Beweisen Sie“ bei begründendem Ansatz statisch signifikant häufiger Buchstabenvariablen und weniger Wörter verwendet. Dass die meisten Unterschiede nur im Kontext der Aufgabe (1) ausgemacht werden können, ist vermutlich darauf zurückzuführen, dass die Aufgabe (2) für die hier betrachteten Studierenden als zu schwer einzustufen ist. Es liegt dabei auf der Hand, dass die Wahl von Operatoren dann kaum Einfluss auf die Bearbeitungen hat. Die erhaltenen Ergebnisse stützen dabei sowohl die Theorie sozio-mathematischer Normen als auch den Aspekt semiotischer Normen. Es kann schließlich weiter vermutet werden, dass je nach gestellter Beweisaufgabe, die hier betrachteten Auswirkungen von Operatoren auch die Qualität von Beweisbearbeitungen beeinflussen kann.

Literatur

Dimmel, J. K. & Herbst, P. G. (2014). What details do geometry teachers expect in students' proofs? A method for experimentally testing possible classroom norms. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle & D. Allan (Hrsg.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Bd. 2, S. 393-400). Vancouver, Canada: PME.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics, 38*(1), 85-109.

Kempen, L., & Biehler, R. (2016). Pre-service teachers` perceptions of generic proofs in elementary number theory. In K. Krainer & N. Vondrová (Hrsg.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 135-141). Prague: CERME.

Knipping, C., Rott, D. & Reid, D. (2016). Disparate arguments in mathematics classrooms. In K. Krainer & N. Vondrová (Hrsg.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 142-148). Prague: CERME.

Kultusministerkonferenz (2012). Operatoren für das Fach Mathematik. Verfügbar unter http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/Bildung/Auslandsschulwesen/Kerncurriculum/Operatoren_fuer_das_Fach_Mathematik_Stand_Oktober_2012_ueberarbeitet.pdf [18.03.2016].

Schupp, H. (1986). Zur didaktischen Analyse des Teilungsproblems. *Journal für Mathematik-Didaktik, 7*(2-3), 217-222.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.