Beiträge zum Mathematikunterricht 2016

VORTRÄGE AUF DER 50. TAGUNG FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK VOM 07.03.2016 BIS 11.03.2016 IN HEIDELBERG

FÜR DIE GDM HERAUSGEGEBEN VOM INSTITUT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK DER PÄDAGOGISCHEN HOCHSCHULE HEIDELBERG

BAND 2

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Inhaltsverzeichnis

<u>Band 1: Seite 1 bis 524</u>

1 Einführung und Hauptvorträge

2 Einzelbeiträge

<u>Band 3: Seite 1093 bis 1560</u>

3 Moderierte Sektionen

4 Posterbeiträge

5 Berichte der Arbeitskreise

6 Beiträge vergangener Jahrestagungen

Karin KEMPFER, Dortmund

„Gott würfelt nicht“ - Das Konstrukt „Zufall“ aus mathematik- und religionsdidaktischer Perspektive

Problemlage

Als „Zufall“ oder als „etwas Zufälliges“ wird in der Lebenswelt häufig ein Ereignis bezeichnet, welches unvorhergesehen bzw. unerwartet passiert ist, und welches häufig mit unsicheren Situationen assoziiert wird. Die Gründe für das eingetretene Ereignis erscheinen dem Betrachter nicht offensichtlich und mögliche (naive) Erklärungsansätze sind: Das war Pech oder aber auch Glück, Schicksal, Fügung, die Vorherbestimmung einer höheren Macht, Gottes Wille, etc. (vgl. für weitere Assoziationen vor allem Döhrmann, 2004). Entscheidend für den Kontext, in dem der Begriff „Zufall“ eine Rolle spielt, ist: Die Akteure bewegen sich in einer gewissen unsicheren Situation und das Eintreten des Ereignisses liegt nicht in der Macht der Akteure. Sowohl der Mathematikunterricht als auch der (kath.) Religionsunterricht besitzen das Ziel, Schülerinnen und Schülern Werkzeuge an die Hand zu geben, mit welchen sie in unsicheren Situationen eine Entscheidung treffen bzw. Ereignisse deuten können (vgl. Biehler & Engel, 2015, S. 224; vgl. Die Deutschen Bischöfe, 2005, S. 18ff.). Dabei modellieren sie das Konstrukt „Zufall“ und verwenden es in einer ihnen je eigenen Deutungsstruktur.

Mathematische Perspektive

Beispielsweise wird in der Mathematik das lebensweltliche Phänomen Zufall angegangen, indem nicht das Wesen des Zufalls an sich beschrieben wird, sondern Muster gesucht werden, um das Phänomen in den Griff zu bekommen. Charakteristisch für den Umgang mit dem Zufall in der Mathematik ist, dass sich auf lange Sicht Muster identifizieren lassen, „obwohl im Einzelfall ein Versuchsausgang nicht sicher vorhersagbar ist“ (Schnell, 2014, S. 16). Beschreibbar sind diese Muster beispielsweise durch das „empirische Gesetzes der großen Zahlen“, auf dessen Grundlage sich für lange Versuchsreihen Eintrittswahrscheinlichkeiten von Ereignissen bestimmen lassen, aber nie mit Sicherheit das Eintreten vorhergesagt werden kann. Das empirische Gesetz der großen Zahlen ist ein wichtiges mathematisches Prinzip, um eine Vorstellung vom mathematischen Verständnis von „Zufall“ zu bekommen:

> The empirical law of large numbers explains why one *can* adopt probabilistic conceptions in a successful way *although* random cannot be calculated for single outcomes. It explains the *sense* and the *preconditions,* but also the limits of probabilistic considerations. (Prediger, 2008, S. 16 Herv. im Original)

Theologische Perspektive

Anders als in der Mathematik steht in der (kath.) Theologie das Wesen des Zufalls und die Bedeutung für das Individuum bzw. den Menschen im Fokus. In verschiedenen Erklärungsansätzen wird der Frage nachgegangen, inwieweit zufällig erscheinende Ereignisse Ausdruck Gottes Handelns bzw. Vorsehung oder der Autonomie der Welt bzw. des Menschen sind. Die Beantwortung der Frage hängt stark von dem jeweiligen Gottes- und Weltbild ab. Je stärker die Vorsehung Gottes angenommen wird, desto weniger „zufällig“ erscheinen die Ereignisse. Wird die Autonomie der Welt bzw. des Menschen betont, können die Ereignisse bspw. als eigenständiges Naturphänomen oder als Informationsdefizit des Menschen über bestehende Naturregeln interpretiert werden. (vgl. Herkenrath, 1998) Im Gegensatz zu diesen deterministischen Erklärungsansätzen, die versuchen eine Ursachen-Wirkungs-Kette für zufällige Ereignisse aufzustellen, versucht der Ansatz des „Interdeterminismus“ nach Beuttler (2010) das Spannungsverhältnis zwischen Gottes Vorhersehung und der Autonomie des Menschen/ der Welt aufrecht zu halten. Es wird angenommen, dass nur das prinzipiell Mögliche durch Naturgesetze festgelegt ist, nicht aber das einzelne Ereignis an sich, „so dass die konkrete Form des Zukünftigen noch nicht vorherbestimmt ist“ (Beuttler, 2010, S. 130). Inwieweit das Eintreten des einzelnen Ereignisses als „Zufall“ oder „Fügung“ bezeichnet wird, hängt von der jeweiligen Interpretation ab. Denn die Fügung Gottes ist nicht in den Fakten selbst vorhanden, sondern muss von dem Gläubigen als solche entdeckt werden. Eine mögliche Interpretation ist:

> Gottes „Führung macht das Beste aus dem, was an Zufällen sich ereignet, er wendet das Geschehen mir zugute, aber er vernichtet weder die Freiheit der Natur noch die meines Persönlichen Lebens. [...][Denn] Gott reduziert die Möglichkeiten nicht auf eine Einzige, sondern er hat viele Weisen, um zu einem guten Ziel zu führen.“ (Beuttler, 2010, S. 132ff)

Folgen für den Unterricht

Um die Vorgehens- und Bearbeitungsweisen der Disziplinen nachvollziehen und passend anwenden zu können, sollten die Lernenden sich sowohl über ihre eigenen Vorstellungen des Zufalls bewusst sein, als auch die Deutungsstrukturen, die im Mathematik- und/oder Religionsunterricht verwendet werden, kennen. Dazu gehört nach Dressler (2007) auch, dass Lernende wissen und wahrnehmen, dass schulische Fächer und ihre wissenschaftlichen Domänen eine unterschiedliche „Lesart“ der Welt und eine spezifische Modellierungen von Wirklichkeit darstellen. Die Lernenden sollen die Fähigkeit entwickeln, bewusst zu entscheiden, wann nach Regeln der alltagsspraktischen Erfahrungen, wann nach den Regeln wissenschaftlichen Geltungsansprüchen zu kommunizieren, sinnvoll, angemessen und lebensdienlich ist.

Diese Fähigkeit nennt Dressler „Differenzenkompetenz“. Für den Erwerb der Differenzenkompetenz ist das Erlernen der domänenspezifischen inneren Sachlogik unabdingbar und durch die Auseinandersetzung mit anderen/fremden Strukturen können die Ausschärfung und die Bewusstwerdung der eigenen Deutungsstruktur gelingen.

In der Mathematikdidaktik ist beispielsweise bekannt, wie hartnäckig Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern sind, die vom Fach als nicht gültig oder tragfähig angesehen werden, und das Anwenden von fachlichen Werkzeugen und Begründungszusammenhängen verhindern. Anstatt diese Vorstellungen zu ersetzen, versucht der Ansatz des „horizontalen Conceptual Change“ die Fruchtbarkeit und Wirksamkeit der wissenschaftlichen Vorstellung herauszuarbeiten und die Lernenden von der Tragfähigkeit zu überzeugen, ohne notwendigerweise die vorhandenen Vorstellungen, die in alltäglichen Kontexten adäquat sein können, zu ersetzen. (vgl. Schnell, 2014, S. 12; Prediger, 2008). Wenn dies gelingt, sind die Lernenden in der Lage die domänenspezifischen Deutungen passend anzuwenden. Aus dieser Annahme wurde das folgende disziplinübergreifende Lernziel entwickelt: *Lernende können begründen in welchen Kontexten, welche Deutungsstruktur Gültigkeit und Wirksamkeit besitzt und dies zielführend und selbstständig anwenden.*

Forschungsinteresse

Im Zusammenhang mit dem Begriff und dem lebensweltlichen Phänomen „Zufall“ sollen Lernenden erlernen, welche Deutungsstrukturen den Fachdisziplinen zugrunde liegen und in welchen Situationen diese fruchtbar und wirksam anzuwenden sind, wann aber auch die eigene Vorstellung aus der Erfahrungswelt nützlich ist. Dazu soll eine mehrperspektivische Lernumgebung entwickelt werden, in der sowohl die innere Sachlogik der jeweiligen Disziplinen (hier kath. Theologie und Mathematik), als auch ihre Grenzen, Überschneidungen und Differenzen zueinander, thematisiert werden. Hierbei sollen insbesondere die Begriffsbildungsprozesse bei den Lernenden untersucht und die Situationen, in denen die fachspezifische Deutung selbstständig verwendet wird, herausgestellt werden. Ziel ist es zu untersuchen, wie die Differenzenkompetenz erworben werden kann und welche Chancen und Herausforderungen sich durch eine mehrperspektivische Lernumgebung im Hinblick auf Begriffsbildungsprozesse und Argumentationsweisen ergeben.

Literatur

Beuttler, U. (2010). „Gott im Undurchdringlichen“ - Die Naturgesetze und das Wirken Gottes zwischen „Kontingenz“ und „Notwendigkeit“, zwischen „Zufall“ und „Fügung“. In K. Nagorni, J. Audretsch, & Evangelische Akademie Baden (Hrsg.), *Zufall oder Fügung?: Theologie und Naturwissenschaft im Gespräch: Beiträge der Tagung „Zufall oder Fügung?“, Evangelische Akademie Baden, 5. - 7. März 2010 in Bad Herrenalb* (S. 119–134). Karlsruhe: Evangelische Akademie Baden.

Biehler, R., & Engel, J. (2015). Stochastik: Leitidee Daten und Zufall. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 221–251). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. Abgerufen von http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-35119-8_8

Die Deutschen Bischöfe. (2005). *Der Religionsunterricht vor neuen Herausforderungen*. Bonn.

Döhrmann, M. (2004). *Zufall, Aktien und Mathematik: Vorschläge für einen aktuellen und realitätsbezogenen Stochastikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.

Herkenrath, U. (1998). Gott würfelt nicht. Oder doch? Ein Mathematiker zum Phänomen des Zufalls. *Zeitschrift für das Interdisziplinäre Gespräch, 54*(1-2), 12–29.

Prediger, S. (2008). Do you want me to do it with propapility or with normal thinking? - Horizontal and vertical views on the formations of stochastic conceptions. *International Electronic Jornal of Mathematics Education, 3*(3).

Schnell, S. (2014). *Muster und Variabilität erkunden Konstruktionsprozesse kontextspezifischer Vorstellungen zum Phänomen Zufall*. Wiesbaden: Imprint: Springer Spektrum.

Marcel KLINGER, Essen

Vorstellungsorientiertes Verständnis im Bereich des funktionalen Denkens und der frühen Analysis: Entwicklung und Erprobung eines Testinstruments

Im Rahmen des DZLM-Forschungsprojektes *GTR NRW* (Thurm, Klinger & Barzel 2015; Klinger, Thurm & Barzel 2015) sind zwei mathematisches Leistungstests entstanden, welche vor allem das konzeptuelle Verständnis im Bereich des funktionalen Denkens und der frühen Differentialrechnung messen. Die sog. *FALKE-Messinstrumente* (**F**unktionales Denken und frühe **A**nalysis: **L**ernen von **K**onzepten in der **E**inführungsphase) fokussieren unterschiedliche Aspekte und wurden speziell für den Einsatz zu Beginn der Oberstufe (FALKE-T1) bzw. nach Ende des ersten Oberstufenjahres (FALKE-T2) entwickelt:

- FALKE-T1: Items zu linearen und nichtlinearen Zusammenhängen
- FALKE-T2: Items zur Ableitungsfunktion und zur Auswirkung unterschiedlicher Funktionsparameter (Skalierungen und Translationen)

1. Theoretischer Hintergrund

In der Literatur findet sich eine Vielzahl von Abhandlungen zur Klassifikation verschiedener Facetten von *Wissen* wie *deklaratives Wissen, prozedurales Wissen* oder *metakognitives Wissen* (z.B. Anderson 2013). Der Fokus der Tests liegt auf dem Wissensaspekt, der meist als *konzeptuelles Wissen* bezeichnet wird (z.B. Barzel et al. 2013). Tall & Vinners (1981) Begriff des „concept image“ als „total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes“ steht für uns im Zentrum des konzeptuellen Wissens. Sie betonen, dass sich das concept image einer Person zu einem Begriff über Jahre entwickelt und einem ständigen Wandel durch neue Stimuli unterworfen ist (vgl. Tall & Vinner 1981). Insbesondere im deutschsprachigen Raum findet zudem die *Grundvorstellungstheorie* (z.B. vom Hofe 1995) Anwendung, welche Vorstellungen besonders im Kontext ihrer Deutungsmöglichkeiten in realen Situationen betrachtet. Vom Hofe versteht *Grundvorstellungen* nicht nur in deskriptiver Weise auf der Ebene individueller Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern, sondern nutzt sie auch als normative didaktische Kategorien, welche sich aus einer stoffdidaktischen Analyse mathematischer Inhalte ergeben (vgl. vom Hofe 1995).

Im Bereich des Funktionalen Denkens hat sich so die Unterscheidung zwischen Vorstellungen etabliert, die funktionale Zusammenhänge in zuordnender, kovariater oder ganzheitlicher Weise betrachten (Vollrath 1989). Beim

Ableitungskonzept wird meist zwischen der Vorstellung als lokale Änderungsrate, als lokale Approximation bzw. als Tangentensteigung unterschieden (z.B. Hußmann & Prediger 2010).

Für eine Testentwicklung ist es wichtig zu betrachten, welche Tätigkeiten bzw. Aufgabenmerkmale eine stark fortgeschrittene Konzeptualisierung im Bereich funktionaler Zusammenhänge bzw. der frühen Analysis voraussetzen. Exemplarisch seien in diesem Zusammenhang ein flexibles Umgehen mit verschiedenen Darstellungsformen wie Graph, Term oder einer situativ-verbalen Beschreibung genannt (z.B. Duval 2006). Im Inhaltsbereich der Analysis sind außerdem das graphische Differenzieren (z.B. Ubuz 2007) sowie eine flexible Kenntnis über die Manipulation von Funktionen, z.B. durch Skalierungen und Translationen, und ihre Auswirkungen innerhalb der unterschiedlichen Darstellungsformen (z.B. auf Parameter innerhalb des Funktionsterms) relevant.

2. Entwickelte Instrumente

Im Rahmen der Testentwicklung wurden u.a. die oben beschriebenen Aufgabenmerkmale in neukonstruierten sowie adaptierten Items anderer Tests (z.B. den PISA-Studien) implementiert. Die entwickelten Instrumente wurden nach einer umfangreichen Pilotierungsphase im Rahmen von GTR NRW mit 3202 bzw. 2665 Schülerinnen und Schülern in Nordrhein-Westfalen durchgeführt.

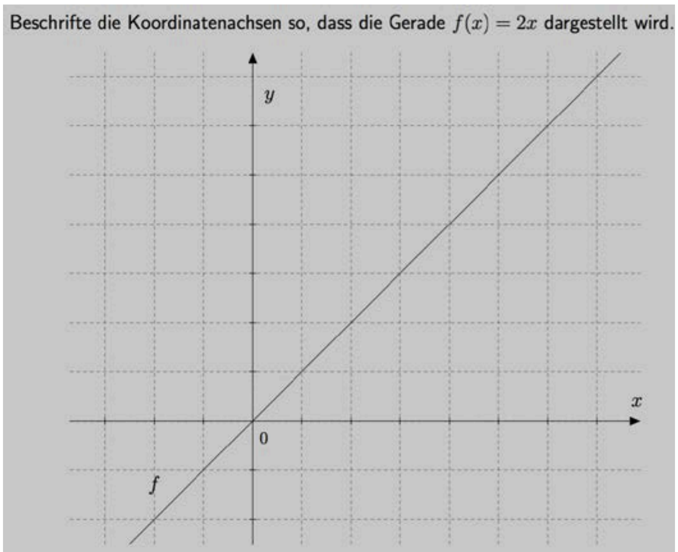


Abb. 1: Beispielitem des FALKE-T1

Beide Tests lassen eine eindimensionale Rasch-Skalierung mit guter Modellgeltung zu. Die Einzelitems weisen z.T. sehr gute MNSQ-Fit-Werte nahe des Idealwerts 1,0 auf (vgl. Wright & Linacre 1994).

Ein Beispielitem des ersten FALKE-Tests ist in Abb. 1 zu sehen. Schülerinnen und Schüler werden hier mit der Situation konfrontiert, dass Abszisse und Ordinate des Koordinatensystems unterschiedliche Maßstäbe, d.h. eine unterschiedliche Skalierung, aufweisen. Von 2954 Schülerinnen und Schülern, die dieses Item bearbeitet haben, waren nur 52 Prozent in der Lage, eine passende Skalierung anzugeben. Es besteht somit der Verdacht, dass der Begriff des Koordinatensystems und somit zumindest auch in Teilen die Darstellungsform „Graph“ bei den entsprechenden Testteilnehmern nicht hinreichend konzeptualisiert wurde. Dieses Ergebnis deckt sich mit den Forschungen von Mitchelmore & Cavanagh (2000), die bereits in qualitativen Studien gezeigt haben, dass Schülerinnen und Schüler ein meist nur unzureichendes Verständnis von Koordinatensystemen haben (vgl. Klinger & Thurm 2016). Es zeigt einen sehr guten Modellfit von 0,95 (unweighted) bzw. 0,96 (weighted).

Ein weiteres Beispielitem aus dem zweiten FALKE-Test ist in Abb. 2 dargestellt. Es zielt auf den Zusammenhang zwischen Translation der Stammfunktion in y-Richtung und der entsprechenden Beeinflussung der Ableitungsfunktion ab. Ob Schülerinnen und Schüler diese Aufgabe korrekt bearbeiten, ist davon abhängig, ob sie ihre Vorstellungen zum Verschieben des Funktionsgraphen mit jenen zur Ableitungsfunktion verbinden können. 36 Prozent der Testteilnehmer lösten das Item korrekt. Mit 54 Prozent ist Antwort (b) der stärkste Distraktor, bei dem die beschriebenen Verschiebungen unreflektiert auf den Ableitungsgraphen übertragen werden. Es weist einen sehr guten Modellfit von 1,05 (unweighted) bzw. 1,02 (weighted) auf.

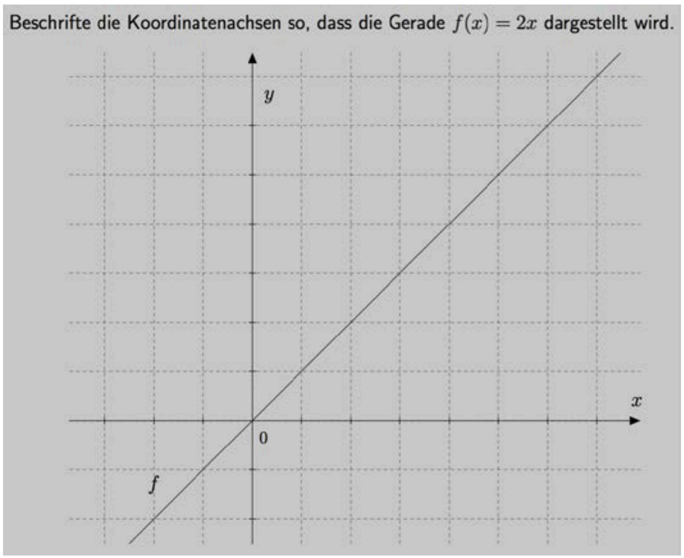


Abb. 2: Beispielitem des FALKE-T2

In ähnlicher Form setzen auch die übrigen Items der Tests besonders auf konzeptuelle Zusammenhänge und die Notwendigkeit geeigneter Schülervorstellungen zur adäquaten Bearbeitung.

3. Reflexion und Ausblick

Insgesamt sind zwei solide Testinstrumente entstanden. Die Tests wurden in über 100 Kursen durchgeführt. Trotz zentraler Vorgaben muss die Durchführungsobjektivität daher kritisch betrachtet werden. Die Tests erscheinen nach umfangreichen Expertenbefragungen insgesamt inhaltsvalide, so dass eine erfolgreiche Bearbeitung auf tragfähiges konzeptuelles Wissen in den entsprechenden Inhaltsbereichen schließen lässt. Die Testergebnisse lassen insgesamt eine gute Skalierung mit dem eindimensionalen Rasch-Modell zu.

Die Erhebungsdaten zeigen weiterhin typische als auch bisher weniger dokumentierte Schülerfehler. Aufgrund der großen Stichprobe kann auch auf ihre quantitative Verbreitung geschlossen werden. Diese Ergebnisse können Anknüpfpunkte für weitere Forschungen sein.

Literatur

Anderson, J. R. (2013). *Kognitive Psychologie* (7. Auflage). Berlin: Springer VS.

Barzel, B., Leuders, T., Prediger, S. & Hußmann, S. (2013). Designing tasks for engaging students in active knowledge organization. In C. Margolinas et al. (Hrsg.), *Task design in mathematics education: Proceedings of ICMI Study 22* (S. 283–292). Oxford.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131.

Hußmann, S. & Prediger, S. (2010). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten und zentralen Prüfungen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 52(31), 35–38.

Klinger, M., & Thurm, D., & Barzel B. (2015). Evaluation der Rahmenbedingungen und Wirksamkeit einer DZLM-Fortbildungsreihe zum GTR auf Schülerebene. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (Bd. 1, S. 460–463). Münster: WTM-Verlag.

Klinger, M. & Thurm, D. (2016, eingereicht). Zwei Graphen aber eine Funktion? – Konzeptuelles Verständnis von Koordinatensystemen mit digitalen Werkzeugen entwickeln.

Mitchelmore, M. & Cavanagh, M. (2000). Students' difficulties in operating a graphics calculator. *Mathematics Education Research Journal*, 12(3), 254–268.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169.

Thurm, D., Klinger, M. & Barzel, B. (2015). How to professionalize teachers to use technology in a meaningful way – Design research of a CPD program. In N. Amado & S. Carreira (Hrsg.), *Proceedings of the 12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (S. 335–343). Faro: University of Algarve.

Ubuz, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: stability and change in students' conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(5), 609–637.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 10(1), 3–37.

Vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum: Heidelberg.

Wright, B. D. & Linacre, J. M. (1994). Reasonable mean-square fit values. *Rasch Measurement Transactions*, 8(3), 370.

Christian KLOSTERMANN, Oldenburg

Herausforderungen angehender Lehrkräfte im Umgang mit Begründungsaufgaben

Forschungsinteresse

„Insgesamt gibt es gegenwärtig im Bereich ‚Beweisen und Argumentieren' mehr Fragen als Antworten", lautet das Resümee von Jahnke und Ufer (2015) zu ihrer Bestandsaufnahme im besagten Themenfeld. Dabei gehen sie insbesondere auf Desiderate in der Schullandschaft ein und schneiden nur kurz die Problematik für Lernende beim Übergang von der Schule zur Hochschule an, dessen Diskontinuität gerade im Bereich des mathematischen Beweisens kaum größer sein könnte. In der Praxis bieten viele Hochschulen zur Bewältigung hier für Erstsemester Vorbereitungskurse oder gar auf diese Problematik zugeschnittene Anfängervorlesungen an. Der zweite Teil der viel zitierten „Doppelten Diskontinuität" wird dabei jedoch oftmals außer Acht gelassen: Antworten auf die Frage, wie Lehrkräfte, nachdem sie ihre universitäre Ausbildung durchlaufen haben, Unterricht mit Begründungsphasen gestalten, finden sich im wissenschaftlichen Diskurs kaum. Insbesondere *angehende* Lehrkräfte und ihre erste praktischen Unterrichtserfahrungen in Schulpraktika sind dabei noch nahezu unerforscht. Hinzu kommt, dass viele der bisher gewonnenen Erkenntnisse auf Selbstauskünften seitens der Studierenden beruhen. (Walke & Offenberg, 2013)

Aus diesen Desideraten ergeben sich für das hier vorgestellte Promotionsprojekt unter anderem folgende Forschungsfragen:

- Wie gestalten angehende Mathematiklehrkräfte eigenverantwortlichen Unterricht im Praktikum, in dem mathematische Begründungsaufgaben thematisiert werden sollen?
- Welche Gesamtstrukturen weisen ihre geplanten Argumentationsdiskurse auf?
- Welche Disparitäten zwischen Planung und Durchführung lassen sich beobachten?

Design der Studie und Auswertungsmethodik

24 Studierende des gymnasialen Lehramtes nehmen im Rahmen eines zweiwöchigen Forschungs- und Entwicklungspraktikums der Universität Oldenburg an der Studie freiwillig teil. Nach einer thematischen Einführung in das schulische Beweisen auf Grundlage des Modells von Brunner (2014) werden sie mit folgenden Aufgaben in die Praxisphase entsendet:

- Konzeption einer mathematischen Lernsequenz im Rahmen einer Doppelstunde, die ihren thematischen Schwerpunkt auf Beweis- und Argumentationsprozesse legt; diese Doppelstunde soll in den gewöhnlichen Mathematikunterricht einer Klasse eingebunden werden.
- Erstellung eines Kurzrasters der Stunde und einer Sachanalyse der zentralen Begründungsaufgabe sowie die Antizipation möglicher Antworten von Lernenden hinsichtlich des Argumentationsprozesses
- Durchführung der Stunde und anschließende Anfertigung eines Reflexionsberichtes

Zur Auswertung der Argumentationsprozesse in der Unterrichtsplanung werden dabei Toulmins Schema (1975) zur Analyse herangezogen. Dieses lässt sich dabei – solange Unterrichtsrealitäten nicht berücksichtigt werden – auf die Komponenten „Datum“, „(Schluss-)Regel“ und „Konklusion“ reduzieren. Gleichzeitig kann durch diese Reduktion eine übersichtliche Darstellung der Gesamtstruktur des Argumentationsprozesses in einer Karte gewonnen werden, wie sie beispielsweise bei Knipping (2003) zu finden ist. Diese Gesamtstrukturen können dann mit den Videographien des tatsächlich durchgeführten Unterrichts wiederum in Synopse gesetzt werden. Ankerszenen aus den aufgezeichneten Stunden liefern dabei die Datengrundlage. Im Folgenden wird ein Fallbeispiel der Studie dargestellt. Im Fokus stehen dabei eine Analyse der Planung der Stunde und ein Vergleich zur Durchführung.

Darstellung eines Fallbeispiels

Der Studierende im hier vorgestellten Fall wählt im Rahmen der Themeneinheit „Vierecke“ in einer 8. Klasse eines Gymnasiums die Aufgabe zur Bestimmung des Flächeninhalts eines Trapezes. Dabei entscheidet er sich dafür die Formel nicht wie für eine Begründungsaufgabe üblich vorzugeben, sondern selbst von den Schülerinnen und Schülern entwickeln zu lassen. Trotzdem bilden Begründungen und Argumentationen seitens der Lernenden den Kern der Stunde und werden entsprechend im Unterrichtsentwurf thematisiert.

In der Planung gelingt es der angehenden Lehrkraft dabei eine Vielzahl von Ansätzen zu nennen, die mit Ausnahme von einem alle bei dem gleichen Datum, einem gegebenen beliebigen Trapez, ansetzen. Die Lösungswege zur Ermittlung der Zielkonklusion, der Flächeninhaltsformel des Trapezes, unterscheiden sich dabei im Wesentlichen in der Art und Weise wie das Trapez in bekannte Formen zerlegt oder ergänzt wird, um aus dann bekannten Flächeninhaltsformeln auf die unbekannte Formel zu schließen. Lediglich ein Ansatz geht von einem anderen Datum, dem Spezialfall des symmetrischen Trapezes aus, und führt diesen Spezialfall zur Flächeninhaltsformel.

Abbildung 1 zeigt, wie sich diese geplanten unterschiedlichen Lösungswege in einer Gesamtstruktur darstellen lassen. Die Rechtecke stehen dabei jeweils für Daten und Konklusionen, die Kreise für die zugehörigen Regeln eines jeden einzelnen Arguments. Je nachdem, ob die Elemente im Unterrichtsentwurf durch den Studierenden expliziert werden oder nicht, werden die einzelnen Bausteine ausgefüllt oder leer gelassen. Knipping (2003) findet in ihrer Untersuchung von Beweisprozessen im Unterricht ähnliche Muster und spricht vor dem Hintergrund, dass der Argumentfluss von einer Quelle aus über verschiedene Wege zum Ziel verläuft, von einer Quellenstruktur.

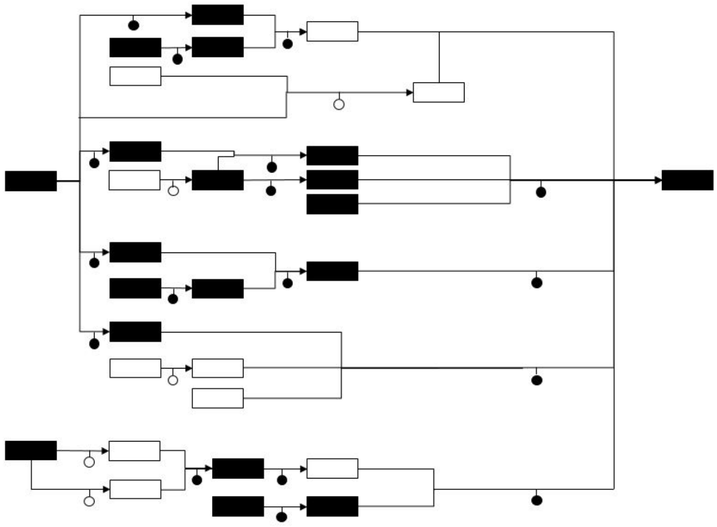


Abbildung 1: Karte der Argumentationsstruktur der antizipierten Lösungswege

Im Unterricht des Studierenden lassen sich nun unterschiedliche, bemerkenswerte Beobachtungen machen: Zunächst ist festzuhalten, dass er in seinem Entwurf den in der Struktur ganz oben schematisierten Lösungsweg, der die Zerlegung des Trapezes in zwei Dreiecke vorsieht, präferiert und durch die vorherige Thematisierung von Flächeninhalten von Dreiecken in den Fokus der Gedankenwelt der Schülerinnen und Schüler zu rücken versucht.

Als dann jedoch die Bearbeitung der zentralen Aufgabe beginnt, gibt der Proband ein symmetrisches Trapez vor, was zur Folge hat, dass viele Schülerinnen und Schüler den damit verbundenen Lösungsweg einschlagen und die Formel nur für den Sonderfall argumentativ herleiten. Während der Arbeitsphase ist zudem zu beobachten, dass Lernende die angehende Lehrkraft mit einer in der Planung nicht antizipierten Zerlegung konfrontieren. Zwar ermutigt diese die Schülerinnen und Schüler an dem Ansatz weiter zu arbeiten, sie kann weder in diesem Fall aber keine weiterführende Hilfestellungen geben und schenkt diesem Weg bei der anschließenden Besprechung der gefundenen Lösungswege Beachtung.

Bei der Ergebniszusammenführung wird einer der antizipierten, jedoch nicht der schon angesprochene präferierte Lösungsweg von einem Schüler vorgestellt. Als im Rahmen der Diskussion dieses Weges von einer Schülerin das

Stichwort „Dreieck“ fällt, nimmt die angehende Lehrkraft dies zum Anlass die Diskussion nun in Richtung des gewünschten Lösungswegs zu lenken.

Fazit und Ausblick

Die Analyse der geplanten Argumentationsstrukturen zeigt, dass die Probandinnen und Probanden ausnahmslos dazu in der Lage sind, bei einer selbst konzipierten Aufgabe, die benötigten mehrgliedrigen Argumentketten zur Begründung eines Sachverhalts zu beschreiben. Dabei gelingt es auch einem Großteil der Studierenden unterschiedliche Lösungswege – in dem Sinne, dass tatsächlich verschiedene Argumente zur Lösung des Problems genutzt werden – zu antizipieren. Wie das Fallbeispiel zeigt, ist der Anteil der nicht explizierten Elemente der einzelnen Argumentationsketten dabei nicht immer unerheblich.

Eine Detailanalyse des Unterrichts der videographierten Stunden steht noch aus. Hier sollen transkribierte Ausschnitte genutzt werden, um getroffene Entscheidungen von angehenden Lehrkräften in kritischen Situationen in Form von einzelnen Interaktionen zu beschreiben und Handlungsmotive zu gewinnen.

Literatur

Brunner, Esther (2014): *Mathematischen Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte.* Heidelberg: Springer.

Jahnke, Hans Niels & Ufer, Stefan (2015): Argumentieren und Beweisen. In: R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik.* (S. 331-355). Heidelberg: Springer.

Knipping, Christine (2003): *Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis. Vergleichende Analysen von Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich.* Hildesheim: Franzbecker.

Meyer, Michael (2007): *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument*. Hildesheim: Franzbecker.

Toulmin, S. E. (1969): *The uses of argument.* Cambridge: Cambridge University Press; dtsch. (1975): *Der Gebrauch von Argumenten.* Kronberg: Scriptor

Walke, Jutta & Offenberg, Esther (2013): *Die Reform der Praxisphasen in der Ersten Phase der Lehrerbildung. Eine qualitative Dokumentenanalyse. Positionen.* Essen: Deutscher Stifterverband.

Olaf KNAPP, Weingarten

Dynamische Raumgeometrie-Systeme für die Schule?

Dynamische Raumgeometrie-Systeme (DRGS) können als Werkzeuge eine aktive Auseinandersetzung mit raumgeometrischen Inhalten in der Schule unterstützen. Exemplarisch kann hier die Erhöhung der Selbsttätigkeit der Lernenden, Interaktivität Lernende-Medium, Unterstützung und Schulung des Raumvorstellungsvermögens, Dynamische Visualisierung raumgeometrischer Phänomene und das Lösen raumgeometrischer Aufgabenstellungen angeführt werden. Dabei sind für den Einsatz solcher Systeme in allgemeinbildenden Schulen im deutschen Sprachraum grundlegende Beschränkungen zu berücksichtigen. U.a. aufgrund der verfügbaren Ressourcen wären hier bspw. personelle, organisatorische oder technische wie adäquate Ein- und Ausgabegeräte oder eine deutsche Benutzeroberfläche etc. (Knapp 2011 und 2013 a; Schumann 2007) zu nennen.

Werden jedoch DRGS in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik diskutiert, scheint in Ermangelung einer entsprechenden Definition Unsicherheit über diesen Begriff und die Abgrenzung von DRGS zu anderen Raumgeometrieprogrammen zu bestehen. Demgegenüber grenzt Knapp 2014 a DRGS als eigene für den schulischen Einsatz konzipierte Programmgattung/-klasse gegenüber anderen in Computerumgebungen ausführbaren Raumgeometrieprogrammen ab. Er gibt *Raumszenerie-, Zugmodi-, Konstruktionsparadigma* und *Gebrauchstauglichkeit* als Minimalkriterien einer DRGS konstituierenden Begriffsbestimmung an (vgl. ebd.). „Will man DRGS nach der ISO/IEC 2382 (ISO 2014) kategorisieren, soll darunter nicht eingebettete, standardisierte Anwendungssoftware, welche den Benutzer allgemeinbildender Schulen schwerpunktmäßig beim Erlernen von synthetischer Raumgeometrie unterstützt, verstanden werden.“ (ebd., 3). Aufgrund des in allgemeinbildenden Schulen nach wie vor gebräuchlichen Graphical User Interfaces (GUI) als dominierendem Interaktionsparadigma „Mensch-Computer“ wird mit Filler 2007 auf die Bedeutung der für Anwender_innen meist nicht direkt sichtbaren Verwendung analytischer Methoden (vgl. ebd., 2) hingewiesen. Die hinter der grafischen Benutzeroberfläche steckende Softwaretechnik wird von Nutzer_innen in der Schule als gegebene und systemintern reibungslos ablaufende „Black Box“ angenommen und erwartet. In diesem Kontext sind sowohl die Grenzen zu analytischen Raumgeometrie-Systemen als auch jene zwischen Analytischer und Synthetischer Geometrie fließend.

Allerdings ist schon im Rahmen des Zugmodiparadigmas zu konstatieren, dass mindestens das Zoomen, Drehen, Wandern in und Verschieben der

Raumszenerie sowie das Verziehen geometrischer Objekte oder Objektgruppen in der Raumszenerie (vgl. Knapp 2013 b) verschiedene Modi darstellen. „Der Zugmodus“ von für die Ebene konzipierten „Dynamischen Geometrie-Systemen“/„DGS“ lässt sich demnach nicht ohne weiteres auf DRGS analogisieren. In einigen Fällen verbietet er sich gänzlich. Entsprechende Veröffentlichungen über DRGS mit Aktualitätsanspruch sollten überkommene Definitionen über „*den* Zugmodus“ korrigieren und bezüglich Zugmodi und entsprechender Unterarten (vgl. ebd.) erweitern.

Für eine konkrete und intuitive Nutzung DRGS durch Schüler_innen im Rahmen des GUI (Knapp 2011) bedarf jeder Zugmodus für sich einer schülergerechten, eindeutigen Belegung mittels entsprechender Eingabemuster. Bei der zurzeit in allgemeinbildenden Schulen gegebenen Ressourcenverfügbarkeit inklusive handelsüblicher 2D-Computermäuse schlägt Knapp (2013 b, 28 f.) nach einer vergleichenden Analyse standardisierte Belegungen via entsprechender Eingabeschemata vor und führt diese ebd. begründet aus. Die alleinige „Marktbeherrschung“ eines DRGS als Kriterium eines Schemas in den DRGS definierenden Bereichen und dadurch einen „De-Facto-Standard“ setzend sieht er kritisch. Da indes substantielle (Weiter-)Entwicklungen nachstehender DRGS außer von GeoGebra 5 und bedingt GEUP 3D in den letzten Jahren erlahmten, steht dies unter dem Gesichtspunkt einer didaktischen Mehrwertgenerierung zu befürchten.

Im Vortrag wurde anhand mehrstufiger theoretischer Analysen bezüglich Raumszenerie-, Zugmodi- und Konstruktionsparadigma herausgearbeitet, dass viele Programmdistributoren für sich in Anspruch nehmen DRGS anzubieten, jedoch nur fünf der zwölf vorgestellten Programme als DRGS im obigen Sinne bezeichnet werden können. Diese Aussage wurde durch empirische Untersuchungen mit 141 Schüler_innen der siebten und achten Jahrgangsstufe im Rahmen quasi-experimenteller Untersuchungspläne mit Kontrollvariablen mittels einer einfachen raumgeometrischen Konstruktion gestützt. Demnach können Archimedes Geo3D, Cabri 3D, GeoGebra 5, Geoplan-Geospace und GEUP 3D mit ihren raumgeometrischen Anteilen als DRGS mit deutscher Benutzeroberfläche angesehen werden (vgl. Knapp 2015).

In einer differenzierten Funktionalitätsanalyse mit in 15 Hauptkategorien subsummierten 527 Einzelkriterien unter Berücksichtigung quantitativer und qualitativer Daten wurden obige DRGS miteinander verglichen (vgl. ebd., 273 ff.). Zusammenfassend wurde festgestellt, dass kein DRGS auch nur in einer Hauptkategorie gemäß dem Kriterienkatalog von Knapp 2014 b über ein vollständig ausgestattetes Werkzeugangebot verfügt. Dennoch werden bereits jetzt die Hauptkategorien „Räumliche Grund- und Postulatkonstruktionen“ und „Mess- und Berechnungsfunktionen“ von den vor-genannten DRGS hinreichend gut für die Schulpraxis erfüllt. Die Hauptkategorien „Ortsflächen und Rotationskörper“ und „Exportfunktionen“ werden bisher von keinem DRGS in akzeptabler Weise als unmittelbar ausführbare Werkzeuge im System für Noviz_innen angeboten.

Anhand schulpraktikabler Beispiele wurde verdeutlicht, wie DRGS gegenwärtig im Rahmen aktueller Curricula und Prüfungen in der Sekundarstufe I und II eingesetzt werden könn(t)en. Wir geben hier einige ausgewählte Beispiele des Vortrages wieder: Körpernetze eines Würfels konstruieren, diese auf- und abfalten und zoomen, Pyramiden durch Ebenenlineale schneiden, dadurch Pyramidenstümpfe konstruieren und anschließend ihre Netze visualisieren und manipulieren, senkrechte quadratische Pyramiden in rechtwinklige Dreiecke zerlegen, im Raum drehen und einzelne Bestimmungsstücke „herausgreifen“ um den Satz des Pythagoras „im Raum“ zu behandeln, Messungen und Berechnungen an Pyramiden vornehmen, diese Konstruktionen variieren und nutzerdefinierte Ausgabeschemata beobachten und ablesen, interaktives Lösen zweier aktueller Abituraufgaben des Jahres 2015 aus Baden-Württemberg zum Darstellen, Bestimmen und Zeigen dreidimensionaler Problemstellungen durch raumgeometrische Konstruktionen.

Ferner wurden im Vortrag einige ausgewählte Problemkreise bei der Erforschung DRGS für die Schule aufgeworfen. Wir nennen hier bspw. Überlegungen zur Existenz eines Werkzeuges und seines konkreten schulpraktikablen Einsatzes, zur Fülle der Werkzeugangebote und dem Auffinden der „passenden“ Werkzeuge durch Lernende, zum didaktischen Mehrwert von DRGS (bspw. beim raumgeometrischen Konstruieren), bezüglich „Umwege“ als didaktische Chance (etwa durch Werkzeugkombinationen oder schlussfolgerndes Denken) oder zum (empirischen) Vergleich DRGS (u.a. raumgeometrisches Konstruieren) etc.

Fazit

Prinzipiell existieren aktuell fünf DRGS, welche für das **raumgeometrische Konstruieren** in der Schule geeignet sind. Diese bieten zahlreiche weitere Möglichkeiten im Rahmen aktueller Curricula didaktische Mehrwerte zu generieren und können zur Bereicherung des schulischen Raumgeometrieunterrichts beitragen. Sie bieten ferner mannigfaltige Potentiale, eine Erhöhung raumgeometrischer Inhalte und Anteile an mathematischen Curricula zu induzieren.

Beim momentanen Entwicklungsstand ist kein DRGS vollständig für den generellen schulpraktischen Einsatz im Geometrieunterricht geeignet. Dennoch ist bereits jetzt ein punktueller Einsatz möglich und nötig, so Schüler_innen im Mathematikunterricht im Umgang mit und durch aktuelle geometrische Werkzeuge geschult werden sollen. Hierzu sind weitere schulpraktische Erprobungen und empirische Untersuchungen erforderlich. Diese wurden vom Autor mit Schüler_innen der Sekundarstufe I durchgeführt und werden derzeit ausgewertet. In den kommenden „Beiträgen zum Computereinsatz in der Schule“ soll darüber und den weiteren Fortgang des Forschungsprojektes „Vergleichende Analysen DRGS für die Schule“ berichtet werden.

Für eine dauerhafte Integration in den schulischen Mathematikunterricht ist neben dem administrativen Willen eine Implementierung in die Aus- und Weiterbildung der Lehrkräfte unerlässlich.

Literatur

Filler, A. (2007). *Einbeziehung von Elementen der 3D-Computergrafik in den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II im Stoffgebiet Analytische Geometrie.* Habilitationsschrift. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin. (http://www.mathematik.hu-berlin.de/~filler/3D/habilita/Filler-Habilitation.pdf; 20.03.2016).

Knapp, O. (2011). Voraussetzungen für die Nutzung von DRGS im Unterricht. In Filler, A., Ludwig, M. & Oldenburg, R. (Hrsg.). *Werkzeuge im Geometrieunterricht*. Vorträge auf der 29. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 10. bis 12 September 2010 in Marktbreit. Hildesheim: Franzbecker, 53-72.

Knapp, O. (2013 a). Notwendiges und Wünschenswertes für den schulischen Einsatz von Dynamischen Raumgeometrieprogrammen, *Beiträge zum Computereinsatz in der Schule*, 27 (1), 49-56.

Knapp, O. (2013 b). Vergleich verschiedener Zugmodiarten ausgewählter Dynamischer Raumgeometrieprogramme. *Beiträge zum Computereinsatz in der Schule, 27 (1),* 1-36.

Knapp, O. (2014 a). Zum aktuellen Forschungsstand vergleichender Analysen Dynamischer Raumgeometrie-Systeme für die Schule. *Beiträge zum Computereinsatz in der Schule, 28 (1/2)*, 1-12.

Knapp, O. (2014 b). Vergleichende Analysen ausgewählter Dynamischer Raumgeometrie-Systeme hinsichtlich ihrer Funktionalität. *Beiträge zum Computereinsatz in der Schule, 28 (1/2),* 73-101.

Knapp, O. (2015). *Dynamische Raumgeometrie-Systeme für die Schule.* Dynamic 3D geometry systems for learning and instruction. Norderstedt: Books on Demand.

Schumann, H. (2007). *Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum.* Ein Lehr- und Lernbuch der interaktiven Raumgeometrie mit Cabri 3D. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Heike KNAUBER, Laura MARTIGNON, Hannes SCHRAY, Jonathan NELSON & Björn MEDER, Ludwigsburg, Berlin

Informationssuche und Kodierung: Heuristiken von Viertklässlern

1. Einleitung

Informations- und Kommunikationstechnologien sind Teil unserer Gesellschaft und prägen den Alltag von Kindern und Jugendlichen nahezu täglich. Im Oktober 2015 kündigte bspw. Baden-Württembergs Ministerpräsident Winfried Kretschmann im Rahmen des MINT-Kongress der Baden-Württemberg Stiftung und der Wissensfabrik in Stuttgart an, dass zukünftig alle Baden-Württembergischen Schüler(innen) an allgemeinbildenden Schulen eine verbindliche Informatikgrundbildung bekommen sollen (vgl. Algöwer, 2015). In Anlehnung daran verfolgt der vorliegende Beitrag ein Desiderat zur Erstellung eines Vorschlags an das Kultusministerium in Baden-Württemberg für die Einführung von Information, Kodierung und Entropie in der Primarstufe bis hin zur Sekundarstufe 2.

Das Forschungsvorhaben ist eingegliedert in das Teilprojekt „Models of Information Search: A Theoretical and Empirical Synthesis", welches vom Schwerpunktprogramm 15-16 der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert wird. Ein Ziel ist es, den bestmöglichen Weg zu finden, wie Information, Shannon-Kodewörter und die Shannon-entropie an allgemeinbildenden Schulen eingeführt werden kann, basierend auf den zwei fundamentalen didaktischen Prinzipien von Jerome Bruner:

- *E-I-S Prinzip*: Wissen lässt sich durch Handlung (Enaktiv), Bilder (Ikonisch) und Zeichen (Symbolisch) präsentieren (vgl. Bruner et al., 1971).
- *Prinzip des Spiralcurriculums*: „Das Curriculum sollte bei seinem Verlauf wiederholt auf […] Grundbegriffe zurückkommen und auf ihnen aufbauen, bis der Schüler den ganzen formalen Apparat, der mit ihnen einhergeht, begriffen hat" (Bruner, 1980, S. 26).

2. Die Schulintervention

In einer ersten Studie nahmen *N*=451 Schüler(innen) (217 Jungen, 234 Mädchen) aus sechzehn 4. und 5. Klassen von allgemeinbildenden Schulen aus Baden-Württemberg teil. Die Schüler(innen) wurden in 12 Experimentalklassen aufgeteilt, davon besuchten fünf die 5. und sieben die 4. Klassenstufe. Die Kontrollklassen bestanden aus vier Klassen der fünften und zwei Klassen der vierten Klassenstufe. Dabei waren für die Teilnahme an der Untersuchung nicht die mathematischen Fähigkeiten der Schüler(innen) ausschlaggebend, sondern die Klassenstufe, die die Schüler(innen) zum Zeitpunkt der Studie besuchten. Des Weiteren haben Kinder der 4. Klassenstufe bereits ein Gespür für die relative Nützlichkeit von Fragen in sequentiellen Suchspielen (bspw. Nelson et al., 2014). Ziel der Untersuchung war es, die Intuitionen zu Information, Informationssuche, Kodierung, Dekodierung und Bit von Kindern spielerisch zu fördern und testen. Eine Formalisierung dieser Themen sollte im Sinne eines Spiralcurriculums in den Klassen 9 bis 11 stattfinden, wenn sich Schüler(innen) mit Wahrscheinlichkeiten befassen. Dies war kein Bestandteil der vorliegenden Untersuchung.

Abbildung 1 stellt den Projektverlauf dar.

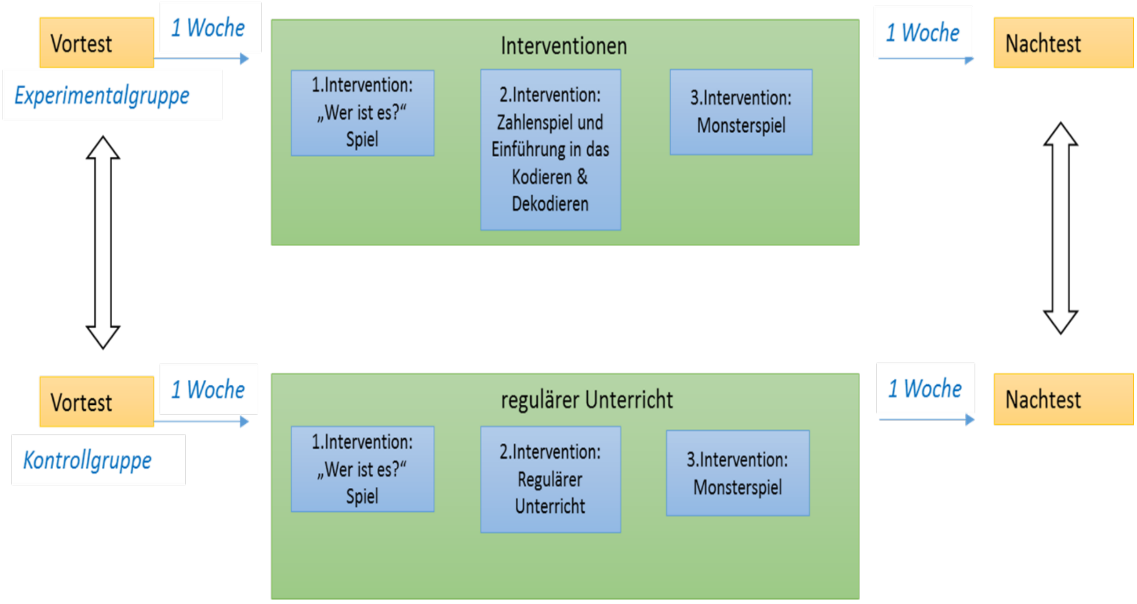


Abbildung 1: Projektverlauf

2.1 Der Vortest

Als Vortest wurde ein Wissenstest mit PISA-ähnlichen Proportionsauf-gaben eingesetzt. Die PISA-Aufgaben wurden dabei leicht verändert und durch eine zusätzliche Bild- und Textaufgabe ergänzt. Diese Aufgaben stammen aus dem Gebiet der Stochastik und zielen auf ein Verständnis des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ab. Die Schüler(innen) sollten sich vorstellen, dass sie einen Preis gewinnen, wenn sie eine weiße bzw. schwarze Kugel aus einer von zwei Urnen ziehen. Sie sollten sich nun entscheiden welche Urne eher zum Erfolg führt, wenn sie blind aus einer der beiden Urnen ziehen müssten. In der Bild- und Textaufgabe sollten sich die Schüler(innen) entscheiden, in welchen Garten im Verhältnis mehr Salatköpfe von Schnecken gefressen wurden.

2.2 Die Unterrichtseinheiten

Die Schulintervention beinhaltete drei Unterrichtseinheiten. In der ersten Unterrichtseinheit ging es um das populäre Gesellschaftsspiel „Wer ist es?“. Hier spielten sowohl die Schüler(innen) der Experimentalklassen, als auch die Schüler(innen) der Kontrollklassen, jeweils in Zweierteams gegen ein anderes Zweierteam. Aufgabe war es, mit so wenig Ja/Nein-Fragen wie möglich eine von 24, zufällig aus einem Kartenstapel gezogene, Person zu finden. Die Personen unterscheiden sich in verschiedenen Merkmalen (z.B. Brille, Haarfarbe). Das allgemeine Ziel dieser Einheit war es, zu sehen, ob die Schüler(innen) bereits bestimmte Strategien während des Spielens verfolgen.

An der zweiten Unterrichtseinheit nahmen nur die Experimentalklassen teil, die Kontrollklassen besuchten den regulären Unterricht. In dieser Einheit ging es um ein Zahlenspiel im Zahlenraum 1 bis 8. Die Schüler(innen) sollten mit so wenig Ja/Nein-Fragen wie möglich die gesuchte Zahl identifizieren. Im Verlauf der Einheit wurden die Schüler(innen) an die „obere Hälfe“-Strategie (Halbierungsheuristik) herangeführt, welche in diesem Spiel optimal ist. Außerdem lernten die Schüler(innen) das Kodieren von Ja/Nein-Antworten mit Hilfe von grünen und roten Steckwürfelchen (en-aktives Arbeiten mit Steckwürfeln). Später lernten sie dann das Dekodieren der kodierten Steckwürfeltürmchen.

Die dritte Unterrichtseinheit war einer Transferaufgabe gewidmet, dem „Monsterspiel“. Forscher am Max-Planck-Institut für Bildungsforschung in Berlin haben 14 „Monster“ entwickelt, um eine statistische Umgebung zu schaffen, in der die Halbierungsheuristik nicht optimal ist. Man kann somit sagen, dass diese Heuristik eine „eingeschränkt rationale“ (boundedly rational) Heuristik ist, die z.B. im Zahlenspiel optimal ist, aber nicht generell mit so wenig Fragen wie möglich zum Ziel führt. An der dritten Einheit nahmen wieder die Experimental- und Kontrollklassen teil. Zu Beginn der Einheit sollten die Schüler(innen) alle Merkmale, in denen sich die Monster unterscheiden, finden und dokumentieren, wie häufig ein bestimmtes Merkmal auftritt. Im Anschluss daran spielten wieder jeweils zwei Zweierteams gegeneinander. Ziel war es, das gesuchte Monster mit so wenig Ja/Nein-Fragen zu identifizieren. Als Abschlussübung sollten die Schüler(innen) die verschiedenen Fragen nach den jeweiligen Merkmalen von 1 (beste erste Frage) bis 7 (schlechteste erste Frage) ordnen. Das allgemeine Ziel dieser Einheit war es zu sehen, ob Schüler(innen) einen „Transfer“ der gelernten Strategie leisten und ob sie bereits sensibel dafür sind, was „gute“ und was „schlechte“ Fragen sind.

Eine Woche darauf bearbeiteten alle Schüler(innen) den Nachtest. Inhalt dieses Tests für die Experimentalklassen war:

- Proportionsaufgaben (ähnlich wie im Vortest)
- Kodierungs-&Dekodierungsaufgaben
- Monster: Eine Rangordnung zu 7 gegebenen Fragen bilden (siehe oben)
- Der Nachtest für die Kontrollklasse beinhaltete ausschließlich Teil 1 und 3.

3. Ergebnisse

Es war sehr erfreulich zu sehen, dass sich die anfänglichen teils unstrategischen Vorgehensweisen der Lernenden in bedachte und wohlüberlegte Strategien verwandelten. Die Schüler(innen) bekamen einen Sinn dafür, relevante von irrelevanten Informationen zu trennen und informative Fragen zu stellen. Im Bereich des Kodierens/Dekodierens lösten 40% der Experimentalgruppe (N=303) alle Kodierungsaufgaben richtig. Nur 8% konnten keine Aufgaben korrekt lösen. Beim Dekodieren gelang es 33% der Schüler(innen) der Experimentalklassen die Aufgaben richtig zu lösen. 12% hatten dagegen große Lösungsschwierigkeiten. Im Bereich der „Monster" konnte immerhin ein Teil der Lernenden die Merkmale nach ihrem Informationswert entsprechend ordnen. Es fiel dem Großteil allerdings schwer einen Transfer zwischen dem Zahlenspiel und dem Monsterspiel herzustellen.

Dieses Projekt hat eine hohe Relevanz für die Bildung, denn der spielerische Ansatz in der Grundschule, erste Elemente der Informationstheorie und des Kodierens zu vermitteln, legt einen wichtigen Grundstein für spätere Untersuchungen in der Oberstufe. Die hier erworbenen, grundlegenden Erfahrungen können spätere Untersuchungen durchaus positiv beeinflussen, wenn es um das Lernen von Wahrscheinlichkeiten geht.

Literatur

Algöwer, R. (2015): Kretschmann verspricht Informatik für alle [http://www.stuttgarter-zeitung.de/inhalt.wirtschaftskongress-in-stuttgart-kretschmann-verspricht-informatik-fuer-alle.0a7246a4-205f-474f-aead-1713d559a440.html] (24.03.2016)

Bruner, J. S., Oliver, R. S. & Greenfield, P. M. (1971). Studien zur kognitiven Entwicklung. Stuttgart: Kohlhammer.

Bruner, J. (1980). Der Prozess der Erziehung (5. Auflage). In W. Loch (Hrsg.), Sprache und Lernen, Bd. 4. Düsseldorf: Schwann.

Nelson, J. D., Divjak, B., Gudmundsdottir, G., Martignon, L. & Meder, B. (2014). Children's sequential information search is sensitive to environmental probabilities. In: Cognition 130, S.74-80

Kathrin KOEHLER, München, Hedwig GASTEIGER, Osnabrück

Strategieverwendung bei Aufgaben zum kleinen Einmaleins – Ergebnisse einer Interviewstudie

1. Unterrichtliche Erarbeitung der Einmaleinssätze

In der Mathematikdidaktik sind die zahlreichen Vorzüge einer Erarbeitung des kleinen Einmaleins über operative Beziehungen schon lange bekannt. Auch in einigen Lehr- und Bildungsplänen wird dieser Ansatz bereits seit einigen Jahren konsequent umgesetzt und als verpflichtend vorgeschrieben (vgl. z.B. Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2000). Ein exemplarischer Blick in die bayerische Unterrichtspraxis verdeutlicht allerdings, dass das kleine Einmaleins derzeit auf verschiedene Arten unterrichtet wird: Einige Lehrkräfte erarbeiten das Einmaleins auf Basis von Kernaufgaben und operativen Beziehungen, andere wiederum folgen einem eher traditionell einzuordnenden Ansatz, welcher der Strategieerarbeitung und –thematisierung eine eher untergeordnete Rolle zuteilwerden lässt (Köhler & Gasteiger, 2014). Ein Grund für diese eher traditionelle Art der Erarbeitung liegt möglicherweise in der geäußerten Skepsis von Lehrkräften, die Erarbeitung über operative Beziehungen überfordere vor allem *leistungsschwache* Schülerinnen und Schüler (Köhler & Gasteiger, 2014; Scherer & Moser Opitz, 2000).

Dieser Beitrag führt aus, welche Argumente für eine Erarbeitung des kleinen Einmaleins über operative Beziehungen sprechen und liefert Forschungserkenntnisse zum Lernen bzw. Einmaleinslernen von leistungsschwachen Kindern.

2. Erkenntnisse zur Erarbeitung des kleinen Einmaleins

Den Fokus auf operative Beziehungen und die Anwendung von Strategien bei der Erarbeitung unbekannter Einmaleinssätze zu legen, wirkt sich positiv auf die Ausführung der Rechenoperation selbst aus. Die Einsicht in vielfältige Beziehungen kann grundlegendes Verständnis sichern und unter anderem zur erfolgreichen Automatisierung der Einmaleinssätze beitragen (Baroody, 1985). Eine Erarbeitung über operative Beziehungen scheint aber auch Auswirkungen auf den Mathematikunterricht zu haben, der über die Behandlung des kleinen Einmaleins hinausgeht. Strategielernen liefert nicht nur einen Beitrag zur Förderung von Problemlöse- und Denkfähigkeit (Woodward, 2006), sondern fördert auch implizit einen informellen Umgang mit Rechengesetzen, der eine wichtige propädeutische Funktion für algebraisches bzw. zukünftiges Lernen darstellt (French, 2005).

3. Leistungsschwache Kinder – Einsicht in Zusammenhänge

Vielerorts mehren sich die Belege, dass vor allem leistungsschwache Schülerinnen und Schüler von einem Vorgehen profitieren, welches die Einsicht in größere Zusammenhänge ermöglicht. Nach Böhm et al. (1990) spricht die begrenzte Speicherfähigkeit leistungsschwacher Kinder für ein Lernen in Sinnzusammenhängen. Strategielernen stellt keine Erschwerung da, sondern scheint eher entlastend zu wirken, da keine Vielzahl an unzusammenhängenden Einzelfakten gelernt werden müssen. Eine Einsicht in größere Zusammenhänge scheint auch mit positiven motivationalen Auswirkungen einherzugehen - leistungsschwache Kinder entgehen einem rein mechanischen Abspeichern isolierter Fakten (vgl. Selter, 1994). Gerade weil extrinsische Motivation keine wünschenswerten längerfristigen Auswirkungen zu haben scheint (vgl. Böhm et al., 1990), ist die Motivation aus der Sache heraus für leistungsschwache Kinder besonders wichtig. Forschungsergebnisse verdeutlichen allerdings auch, dass der Lernerfolg leistungsschwacher Kinder beim kleinen Einmaleins von der unterrichtlichen Vorgehensweise bzw. der Qualität des Unterrichts abhängig zu sein scheint. Kroesbergen et al. (2004) konnten auf die Bedeutung einer expliziten unterrichtlichen Behandlung von Multiplikationsstrategien bei leistungsschwachen Kindern verweisen. Diese profitieren den Ergebnissen der Studie zufolge mehr von einer expliziten, durch die Lehrkraft gesteuerten Erarbeitung der Strategien als von einem konstruktivistisch-orientierten Ansatz. Nach Selter (1993) wirken sich allerdings offene Lernumgebungen zur Entdeckung von Strategien und operativen Beziehungen besonders positiv auf Kinder jeden Leistungsniveaus aus.

Ob und inwiefern das individuelle Leistungsvermögen von Kindern sowie die unterrichtliche Vorgehensweise bei der Erarbeitung die Strategieverwendung beeinflusst, sind noch weitgehend unbeantwortete Fragestellungen. Ausgewählte Ergebnisse der Studie EmuS tragen zur Klärung der Fragestellung im Hinblick auf das unterschiedliche Leistungsvermögen von Kindern bei.

4. Interviewstudie zur Strategieverwendung beim kleinen Einmaleins

Um Aufschluss über die Strategieverwendung von Kindern beim kleinen Einmaleins gewinnen zu können, wurden mit 144 Schülerinnen und Schülern aus 24 Klassen an 16 Münchner Schulen Mitte des dritten Schuljahres halbstandardisierte Einzelinterviews durchgeführt. Kinder sollten bei freier Strategiewahl sechs Aufgaben zum kleinen Einmaleins lösen. „Self-reports“ wurden dabei zur Erfassung der verwendeten Strategien genutzt. Neben den Strategien, die zur Lösung der sechs Aufgaben herangezogen wurden, wurden zur Ermittlung eines möglichst umfassenden Strategierepertoires bei zwei der sechs Aufgaben zusätzlich alternative Strategien zur vom Kind genannten Strategie eingefordert. Die Auswahl der Klassen erfolgte unter Berücksichtigung unterschiedlicher Herangehensweisen der Lehrkräfte bei der Erarbeitung des kleinen Einmaleins – eine Hälfte zeichnete sich durch die Thematisierung verschiedener Strategien aus, während die andere Vorgehensweise einem eher traditionellen Ansatz zugeordnet werden konnte. Die Einschätzung der unterrichtlichen Vorgehensweise der Lehrkräfte wurde mit einer im Vorfeld durchgeführten Fragebogenstudie ermittelt (Köhler & Gasteiger, 2014). Je Klasse wurden sechs Kinder unterschiedlichen Leistungsvermögens (leistungsstark, durchschnittlich, leistungsschwach) auf Basis des Abschneidens im Heidelberger Rechentest für das Strategieinterview zufällig gezogen. Im Folgenden werden ausgewählte Ergebnisse der Interviewstudie vorgestellt.

5. Ergebnisse

Insgesamt wiesen die Kinder eine Vielfalt an Strategien zur Lösung der Aufgaben auf. Die sukzessive Addition scheint noch eine vorherrschende Strategie Mitte des dritten Schuljahres darzustellen – diese nicht tragfähige Herangehensweise kommt vor allem bei leistungsschwachen Schülerinnen und Schülern bevorzugt bei der Aufgabenlösung zum Einsatz. Sie wurde durchschnittlich von dieser Schülergruppe bei jeder 2. Aufgabe zur Lösung herangezogen. Die beiden leistungsstärkeren Gruppen setzen im Vergleich vermehrt Strategien auf Basis operativer Beziehungen ein, die Strategie der Nachbaraufgabe wurde dabei sowohl von der leistungsstarken als auch von der durchschnittlichen Gruppe am häufigsten zur Lösung der Einmaleinsaufgaben verwendet. Signifikante Unterschiede bezüglich des Leistungsvermögens wurden auch in Hinblick auf die Korrektheit der Aufgabenlösung bei freier Strategiewahl ermittelt – die beiden leistungsstärkeren Gruppen lösten signifikant mehr Aufgaben korrekt als ihr leistungsschwaches Pendant. Auch mit Blick auf einen adaptiven Strategieeinsatz schnitten die leistungsschwachen Kinder deutlich schlechter ab als die Kinder der anderen beiden Leistungsgruppen. Eine Strategie wurde als adaptiv angesehen, wenn sie nach inhaltlichen Kriterien als sinnvolle heuristische Strategie bezüglich der Aufgabencharakteristik eingeordnet werden konnte. Im Durchschnitt gelang einem leistungsschwachen Kind nur bei zwei von sechs Aufgaben ein adaptiver Strategieeinsatz – einem leistungsstärkeren Kind dagegen bei fünf von sechs Aufgaben. Das ermittelte Repertoire an tragfähigen Strategien wies ebenfalls einen signifikanten Unterschied zwischen den Leistungsgruppen auf. Durchschnittlich verfügten leistungsschwache Kinder über eine tragfähige Strategie, durchschnittliche über zwei und leistungsstarke über drei verschiedene tragfähige Strategien.

5. Fazit

Es gibt deutliche Anzeichen, dass das individuelle Leistungsvermögen eines Kindes einen Einfluss auf die Strategieverwendung bzw. den Lernerfolg beim kleinen Einmaleins zu haben scheint. Die leistungsstärkeren Kinder sowie die mittlere Leistungsgruppe unterscheiden sich demnach deutlich von der leistungsschwachen bezüglich des Einsatzes tragfähiger Herangehensweisen, der Korrektheit der Aufgabenlösung sowie im Hinblick auf einen adaptiven Strategieeinsatz und das zur Verfügung stehende Repertoire an tragfähigen Strategien. Trotz eines vergleichsweise schlechteren Abschneidens der leistungsschwachen Schülerinnen und Schüler sind diese aber – wie die Ergebnisse der Studie zeigen – erfreulicherweise auch in der Lage, auf operative Beziehungen basierende Strategien erfolgreich zur Aufgabenlösung einzusetzen.

Weitere im Rahmen der Studie ermittelte Ergebnisse liefern erste Tendenzen, dass auch leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler von einer Erarbeitung über operative Beziehungen mehr profitieren, als von einem eher traditionellen Ansatz.

Literatur

Baroody, A. J. (1985). Mastery of basic number combinations: internalization of relationships or facts? Journal for Research in Mathematics Education, 16(2), 83-96.

Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus (2000): Lehrplan für die bayerische Grundschule. München: Maiss.

Böhm, O., Dreizehnter, E., Eberle, G. & Reiß, G. (1990). Die Übung im Unterricht bei lernschwachen Schülern. Heidelberg: Edition Schindele.

French, D. (2005). Double, double, double. Mathematics in School, 34(5) 8-9.

Köhler, K. & Gasteiger, H. (2014). Verschiedene unterrichtliche Vorgehensweisen bei der Erarbeitung des kleinen Einmaleins – Ergebnisse einer clusteranalytischen Klassifizierung von Lehrkräften. Zeitschrift für Grundschulforschung, 7(1), 100-112.

Kroesbergen, E.H., van Luit, J.E.H. & Maas, C.J.M. (2004). Effectiveness of explicit and constructivist mathematics instruction for low-achieving students in the Netherlands. The Elementary School Journal, 104(3), 233-251.

Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010): Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe. Heidelberg: Spektrum.

Selter, Ch. (1993). Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe. Wiesbaden: Deutscher Universitäts-Verlag.

Woodward, J. (2006). Developing automaticity in multiplication facts: integrating strategy instruction with timed practice drills. Learning Disability Quarterly, 29(4), 269–289.

Sebastian KOLLHOFF, Bielefeld

Analyse von Transferprozessen in kollaborativen Lernsituationen

Begriffliche Bestimmung: Transferleistung – Transferprozess

Was als Transfer gilt, wird seit langem in der Kognitions- und Lernforschung hinsichtlich des Aufbaus flexibler und adaptiver Wissensstrukturen diskutiert. Dabei wird mit einem Transfer allgemein „die erfolgreiche Anwendung angeeigneten Wissens bzw. erworbener Fähigkeiten im Rahmen einer neuen, in der Situation der Wissens- bzw. Fertigkeitsaneignung noch nicht vorgekommenen Anforderung“ (Mähler & Stern, 2010) bezeichnet. In der empirischen Praxis findet sich eine Vielzahl von Spezifizierungen des Transferbegriffs, die im Zuge der Operationalisierung und Messung des Lernerfolgs in Interventionsstudien einen Transfer als abgeschlossene Transferleistung, d.h. als Ergebnis eines Lernprozesses, beschreiben.

So definieren z.B. Chi und VanLehn (2012) Transfer als „the ability of individuals to ‚treat’ a new concept, problem, or phenomenon as similar to one(s) they have experienced before“, womit sie hervorheben, dass ein erfolgreicher Lernprozess tragfähige Wissensstrukturen generiert, auf deren Grundlage die oder der Lernende einen Zugang zu neuen und unbekannten Anwendungsanforderungen erlangen kann. Auf den Lerner als Individuum bezogen definiert Lobato (2012) Transfer als „the generalization of learning, which also can be understood as the influences of learner’s prior acitivities on her activity in novel situations“ und betont, dass einem Transfer eine Generalisierung inhärent ist, die bestehendes Handlungswissen in neuen Situationen verfügbar macht. Anhand dieser Beispiele wird bereits deutlich, dass der Transfer in der Pädagogischen Psychologie vor allem als Folge eines abgeschlossenen Lernprozesses betrachtet und in Studien als solcher operationalisiert wird.

Eine Vielzahl von Transferstudien mit mathematischem Untersuchungsgegenstand konzentriert sich vor allem auf schematische Inhalte und Problemlösesituationen, wie etwa das Umformen von algebraischen Gleichungen oder die Anwendung von Pfadregeln in der Stochastik. Die Lernerfolge der Interventionen werden über die Lösungsraten von Transferaufgaben gemessen. In diesen Studien bleibt jedoch weitestgehend offen, inwieweit die Probanden ein tiefergehendes Verständnis für die vermittelten Verfahren und Inhalte entwickelt haben oder lediglich gelernt haben, die Bedingungen zur Anwendung eines Lösungsalgorithmus zu erkennen und diesen fehlerfrei anzuwenden (vgl. z.B. Chow & Van Haneghan, 2016).

Entgegen dieser schematischen Sichtweise erfordert verständiges Mathematiklernen jedoch den Aufbau, die sukzessive Erweiterung und die Verknüpfung von Grundvorstellungen. Dazu ist es notwendig, bereits vorhandene konzeptuelle wie prozedurale Wissensstrukturen auf neue und zum Teil unbekannte Sachverhalte und Anwendungssituationen zu übertragen. Da diese Übertragungen vor allem einen prozesshaften Charakter haben, fokussiert die Studie, aus der in diesem Beitrag berichtet wird (Kollhoff, 2015), die einem Transfer zugrundeliegenden Prozesse. Ein Transferprozess wird definiert als die Übertragung einer vorhandenen Wissensstruktur auf ein neues Anwendungsgebiet, wobei die Art der übertragenen Wissensstruktur sowie der Ursprung und das Ziel der Übertragung eindeutig identifizierbar sind.

Rahmen der Untersuchung

Auf Grundlage stoffdidaktischer Überlegungen sowie empirischer Befunde wurden auf einer normativen Ebene erforderliche Transferprozesse in der Entwicklung tragfähiger Grundvorstellungen zu Bruchzahlen abgeleitet, die einerseits im Zuge der fortschreitenden Begriffsbildung und andererseits im Hinblick auf die Erweiterung von bestehenden Vorstellungen erforderlich bzw. wünschenswert sind, z.B. durch Repräsentationswechsel und Variation der kontextuellen Einbettung.

Von diesem Ausgangspunkt wurde die Studie im Rahmen einer unterrichtlichen Einführung in die Bruchzahlen in einer fünften Klasse durchgeführt, in der zunächst elementare Vorstellungen zu einfachen Brüchen aufgebaut und im weiteren Verlauf zu komplexeren Bruchzahlvorstellungen erweitert werden sollten. Die zentralen Fragen waren dabei: (1) Wie bilden sich die normativ intendierten Transferprozesse in den individuellen Lernprozessen der Schülerinnen und Schüler ab? (2) Welche Rolle nehmen Transferprozesse in der Begriffsbildung ein?

Zu ausgewählten Zeitpunkten der Unterrichtseinheit wurden die Kommunikations- und Argumentationsprozesse der Schülerinnen und Schüler in Partnerarbeiten auf Video aufgezeichnet. Diese Videoaufzeichnungen bilden zusammen mit den schriftlichen Produkten dieser Arbeitsphasen die Grundlage für die Analyse und Rekonstruktion der individuellen Lern- und Transferprozesse im Verlauf der Unterrichtseinheit.

Beispiel: Vergröbern einer Einteilung (Kürzen)

Das folgende Transkript zeigt einen kurzen Ausschnitt aus einer Arbeitsphase, in der das Vergröbern einer Einteilung als Repräsentationshandlung für das Kürzen von Brüchen eingeführt und geübt wird. Die Schüler haben vor der Bearbeitung dieser Aufgabe Einteilungen von Rechtecken und Kreisen eigenständig vergröbert und die wesentlichen Merkmale des Vergröberns, dass der Anteil am Ganzen sich nicht ändert, aber die Einteilung so verändert wird, dass größere und dafür weniger Stücke entstehen, formuliert. Nach einer Übung an Kreis- und Rechteckrepräsentationen sollte dieses Vorgehen nun auf die Repräsentation einer Strecke übertragen werden, von der 8 Zwölftel markiert sind und die neue Einteilung halb so viele Teile haben soll wie vorher:

J:	Ja, warte, das sind 1, 2, …, 12. Dann nehmen wir 1, 2, …, 6 und dann malen wir die hier alle an, dann haben wir's doch schon.
B:	Nein, von der Strecke doch, oder nicht? […]
B:	Halb so viele Teile haben wie vorher, halb so viele Teile. Das soll halb so viele Teile haben.
J:	Ja sollen wir die da wegmachen, oder was? […]
B:	So muss man das machen. *(Abb. 2)*
J:	Wieso?
B:	Warum nicht? Weil, das soll doch halb so viel. Ich zeig dir das an dem. *(Abb. 3)*
	Wir haben das doch durch 2 geteilt und dann waren nicht mehr ganz so viele Teile da, sondern weniger Stücke, aber größer.
J:	Ja.
B:	Weniger und größer. Äh, größer und weniger. *(blättert zurück zur Aufgabe)*
	Und hier müssen wir die größer, aber dafür weniger. Oder?
J:	Keine Ahnung.
B:	Hä, ich denke das jetzt so. Ich glaub, dass das jetzt so ist, oder nicht? […]
J:	Wieso? Du hast doch jetzt schon wieder die gleichen Stücke angemalt. Wir sollten doch halb so viele haben.
B:	Also, man muss das so machen: Gleich ist ja richtig, gleich so viel muss man machen. Nur, man muss das in andere Teile, in größere Stücke einteilen.
J:	*(malt ab und schaut skeptisch)*

Abb. 1: Transkript zur Bearbeitung der Aufgabe in Abb. 2

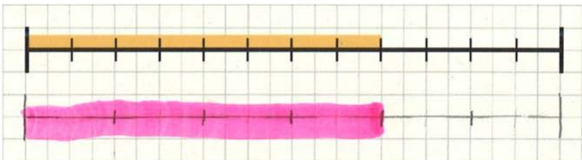


Abb. 2: Lösung von Schüler B

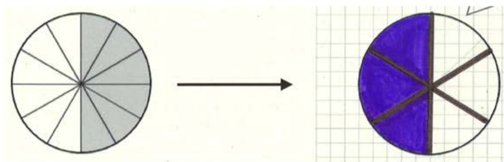


Abb. 3: Rückgriff auf Kreisrepräsentation

In diesem Ausschnitt wird deutlich, dass die Übertragung auf die Strecke für beide Schüler nicht intuitiv ist. Obgleich J zuvor formuliert hat, dass der Anteil am Ganzen sich nicht ändert, schlägt er zunächst vor, die Hälfte der ganzen Strecke, also 6 Stücke zu markieren, wobei der markierte Anteil 8 Zwölftel für ihn keine Rolle spielt. B erkennt, dass das im Widerspruch zu dem steht, was sie zuvor gemacht haben und teilt die Strecke nach einigem Überlegen dann zunächst in 6 Stücke, von denen er dann 4 markiert. Er erläutert sein Vorgehen in der Folge durch Rückgriff auf eine zuvor angefertigte Kreisrepräsentation und stellt noch einmal heraus, dass die Stücke größer werden und dafür weniger Stücke entstehen und folglich auch markiert werden. Er erwähnt in seiner Erklärung nicht, dass der Anteil am Ganzen sich nicht ändert, obgleich seine Lösung vermuten lässt, dass er verstanden hat, dass der relative Anteil sich nicht ändert. Der Schritt dieser Einsicht stellt eine Schwierigkeit für J dar, was deutlich wird, als er fragt, warum B denn wieder dieselben Stücke markiert habe, wobei es doch halb so viele werden sollten. Auch nach einer wiederholten Erläuterung durch seinen Partner scheint J die Lösung nicht zu verstehen und malt sie zunächst unkommentiert ab. Die Verständnisschwierigkeiten von J zeigen sich auch in der Bearbeitung der folgenden Aufgaben.

Merkmale von Transferprozessen

Dieser kurze Ausschnitt zeigt, wie individuell verschieden Transferprozesse verlaufen und welchen integralen Stellenwert sie in Lernprozessen und der Begriffsbildung einnehmen. Während es B nach einigem Überlegen gelingt, die zuvor herausgestellten Handlungseigenschaften und –Vorstel-lungen des Vergröberns einer Einteilung auf die neue Repräsentation zu übertragen, spielen diese für J keine Rolle mehr und sind für ihn in kurzer Zeit nicht auf diesen neuen Anwendungszusammenhang übertragbar.

Es ist zu vermuten, dass B die dieser Aufgabe vorhergehenden Transferprozesse erfolgreich durchlaufen hat, in denen zunächst die Handlungsvorstellungen anhand einer Rechteckrepräsentation herausgestellt und in der Folge auf eine Kreisrepräsentation übertragen wurden. B beruft sich dabei auf die auf diesem Weg aufgebaute Grundvorstellung des Vergröberns. An dieser Stelle wird erkennbar, dass Transferprozesse von der Ausprägung, Vernetzung und Tragfähigkeit von Grundvorstellungen abhängen und zugleich wechselseitig Einfluss auf ihre Entwicklung nehmen.

Literatur

Chi, M.T.H. & VanLehn, K.A. (2012): Seeing Deep Structure From the Interactions of Surface Features. *Educational Psychologist*, 47(3), S. 177-188.

Chow, A.F. & Van Haneghan, J.P. (2016): Transfer of solutions to conditional probability problems: Effects of example problem format, solution format and problem context. *Educational Studies in Mathematics*. DOI 10.1007/s10649-016-9691-x.

Kollhoff, S. (2015): Analyse von Transferprozessen in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs. In: F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag.

Lobato, J. (2012): The Actor-Oriented Transfer Perspective and Ist Contributions to Educational Research and Practice. *Educational Psychologist*, 47(3), S. 232-247.

Mähler, C. & Stern, E. (2010): Transfer. In: D.H. Rost (Hrsg.): *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie*. 4., überarbeitete und erweiterte Auflage. Weinheim, Basel: Beltz, S. 859-869

Nicole KOPPITZ, Gießen

Einschätzung von Studierenden zu den eigenen fachbezogenen Fähigkeiten und zur Motivation

Projekt ‚Reaktivierung mathematischer Schulkenntnisse'

Im Studiengang Lehramt an Grundschulen an der Justus-Liebig-Universität Gießen werden die Studierenden durch Vorgaben des Landes Hessen verpflichtet, Mathematik, Deutsch und ein frei wählbares Drittfach zu studieren. Eine Folge dieser Verpflichtung ist eine besonders heterogene Ausgangslage im Fach Mathematik, die sich in den mathematischen Kompetenzen, der eigenen Fähigkeitseinschätzung, in der Motivation zum Studium und in der Einstellung zum Fach widerspiegelt. So haben Eingangserhebungen gezeigt, dass in den letzten drei Jahrgängen nur etwa die Hälfte der Studierenden Mathematik als Unterrichtsfach freiwillig gewählt hätte. Allerdings gehen rund zwei Drittel der Studierenden davon aus, den Anforderungen im Studienfach Mathematik gewachsen zu sein. Um die Studierenden zu unterstützen, ein positives Bild zum Fach aufzubauen und ihre mathematischen Kompetenzen zu verbessern, wurde am Institut für Didaktik der Mathematik in den Jahren 2013 bis 2015 das Projekt ‚Reaktivierung mathematischer Schulkenntnisse'[1] durchgeführt. Im Zuge des Projektes wurden Zusatzangebote konzipiert, die unter anderem das Ziel hatten, die Fähigkeitseinschätzungen und die Motivation der Studierenden zu steigern. Für die Entwicklung der Zusatzangebote wurden die Facetten Reflexion, Beratung und Steigerung der fachlichen Kompetenzen beachtet. Um für jeden Studierenden die passende Unterstützung zur Verfügung zu stellen, wurden die Angebote modular konzipiert. Dadurch konnten zusätzliche Übungsaufgaben zur Wiederholung des Schulstoffes und auch der Lehrveranstaltung zur Verfügung gestellt werden. Durch Portfolioarbeit, die Erstellung von Audio-Podcasts (Klose, Tebaartz, Schreiber & Lengnink, 2014) oder Arbeiten mit einem Kompetenzraster wurde zur Reflexion des eigenen Lernens angeregt. Mit einem offenen Lerntreff sowie dem Bereitstellen eines anonymen Forums soll die Hürde Beratungsangebote in Anspruch zu nehmen so niedrig wie möglich gehalten werden (Koppitz & Schreiber, 2015).

Forschungsziel

Mit Abschluss des Projektes konnte eine positive Resonanz bezüglich der Zusatzangebote seitens der Studierenden gemessen werden. Trotz dieser Rückmeldungen konnte bisher nicht geklärt werden, welchen Einfluss die Zusatzangebote auf die Fähigkeitseinschätzung und die Motivation haben

---

1 Unterstützt durch Hessische Ministerium für Wissenschaft und Kunst

woraus sich mein Forschungsanliegen mit den folgenden Fragen präzisiert hat.

1. Wie schätzen die Studierenden ihre Fähigkeiten im Fach Mathematik im Verlauf der ersten Studienhälfte ein?
2. Wie verändert sich die Motivation der Studierenden zum Grundschullehramtsstudium im Fach Mathematik in der ersten Studienhälfte?
3. Inwieweit beeinflussen sich in der ersten Studienhälfte die Einschätzungen der eigenen Fähigkeit und Motivation im Fach Mathematik?
4. Inwiefern beeinflussen die studienfachspezifischen Bedingungen die Motivation und die eigenen Fähigkeitseinschätzungen? (Lehrveranstaltungen, Zusatzangebote, Klausur, Praktikum, etc.)

Forschungsdesign

Zur Bearbeitung der Forschungsfragen wurden leitfadengebundene Interviews mit 15 Studierenden geführt. Um eine Entwicklung zu erkennen, wurden die Studierenden im Längsschnitt jeweils am Ende der ersten drei Semester befragt. Des Weiteren konnten die Einflüsse, die das Studium sowie die Motivation und Fähigkeitseinschätzungen betreffen, in den Interviews mit aufgegriffen werden.

Im ersten Interview wurde grundlegend geklärt, welche Motivation die Studierenden für den Beruf des/ der Grundschullehrers/in und zum Mathematikstudium haben. Des Weiteren wurden die Studierenden nach dem Erleben von Mathematik in der Schulzeit befragt. Auch erste Einschätzungen, die die Studierenden zu ihren studienbezogenen Fähigkeiten in Mathematik haben, wurden im Interview erhoben.

Das zweite Interview, das kurz vor der Klausur am Ende des zweiten Semesters durchgeführt wurde, hatte im Besonderen die Motivation und die Fähigkeitseinschätzungen im Zusammenhang mit dem fachmathematischen Modul im Fokus. Da die Studierenden zu dem Zeitpunkt in der Phase der Klausurvorbereitung waren, war zu erwarten, dass die Zusatzangebote, die im Projekt ‚Reaktivierung mathematischer Schulkenntnisse' entstanden sind, gut genutzt würden. Daher konnten die interviewten Personen Fragen im Sinne der vierten Forschungsfrage beantworten.

Das dritte Interview wurde am Ende des dritten Semesters geführt. Zwischen dem zweiten und dritten Interview haben die Studierenden zum einen die Klausur zum fachmathematischen Modul und zum anderen das erste Schulpraktikum absolviert und mit Beginn des dritten Semesters ihre erste fachdidaktische Vorlesung für die Mathematik der Grundschule gehört. Daher wurde im dritten Interview auf die Fähigkeitseinschätzungen und Motivation im Fach Mathematik eingegangen und der Einfluss des Praktikums, der Klausur sowie der fachdidaktischen Veranstaltung besprochen.

Neben den Interviewstudien sollten die Studierenden Fragebögen ausfüllen, die die Auswertung der Interviewdaten unterstützen sollen. Im Fragebogen zu Studienbeginn wurden die grundlegende Einstellung und Motivation zum Studium sowie soziodemographische Daten erhoben. Zwei weitere Fragebögen wurden am Ende des zweiten und dritten Fachsemesters durchgeführt und sollten durch standardisierte Tests das Fähigkeitsselbstkonzept und das explizite Leistungsmotiv messen.

Theoretischer Hintergrund

Bei der Konzeption der Interviewleitfäden wurden im Wesentlichen die Theorien des Fähigkeitsselbstkonzeptes und der Motivation verwendet. Im Allgemeinen werden jegliche Vorstellungen und Einschätzungen auf verschiedene Aspekte der eigenen Person mit den Begriffen Selbstkonzept und Selbstwert zusammengefasst. Im Kontext von akademischen Leistungen wird das Selbstkonzept auf die Fähigkeiten bezogen und in dem Begriff Fähigkeitsselbstkonzept zusammengefasst. Unter dem Fähigkeitsselbstkonzept wird allgemein die Gesamtheit der kognitiven Repräsentationen eigener Fähigkeiten verstanden (Schöne, Dickhäuser, Spinath & Stiensmeier-Pelster, 2002). Damit sind alle Wahrnehmungen zusammengefasst, die sich auf die eigenen Fähigkeiten beziehen. Um das Fähigkeitsselbstkonzept einer Person beschreiben zu können, wird dieses in Merkmale Höhe, Struktur und Stabilität dargestellt. Die Höhe kann als eine persönliche Messskala umschrieben werden, auf der die Fähigkeitsrepräsentation einsortiert werden kann. Diese Einordnung findet neben allgemeinen Äußerungen in sogenannten Bezugsnormen statt, wobei man die Höheintraindividuell an vergangenen Leistungen auf der individuellen Ebene, im Vergleich mit anderen auf der sozialen und den Bezug auf objektive Maßstäbe auf der kriterialen Ebene einordnet. Mit der Stabilität wird die Beeinflussbarkeit des Fähigkeitsselbstkonzeptes charakterisiert, wohingegen die Struktur den Aufbau umschreibt. Durch die hierarchische Anordnung können Fähigkeitsrepräsentationen von globalem bis hin zu aufgabenspezifischem Charakter sein.

Aufgrund der Forschungsfragen wird neben der Fähigkeitseinschätzung die Motivation betrachtet. Allgemein kann man Motivation als eine aktivierende Ausrichtung des momentanen Lebensvollzugs auf einen positiv bewerteten Zielzustand definieren (Rheinberg, 2006). Im Studium kann im Wesentlichen zwischen Leistungs- und Lernmotivation unterschieden werden. Motiviert handeln bedeutet im Sinne der Lernmotivation Wissen in Bezug eines Lerngegenstandes zu erwerben. Dabei ist zu unterscheiden, ob eine Person auf Grund eigener Interessen am Lerngegenstand intrinsisch motiviert oder aufgrund externer Anreize wie einer Prüfung extrinsisch motiviert lernt (Schiefele, 2008). Die Facette des Lernens steht im Studium im engen Zusammenhang mit der Leistung und somit mit der Leistungsmotivation. Diese wird als Auseinandersetzung mit den Gütemaßstäben beschrieben und in Erfolgs- und Misserfolgsmotiv unterschieden. Ersteres strebt hierbei das Erbringen einer hohen Leistung an, wohingegen durch letzteres ein Misserfolg vermieden werden soll (Weiner, 1994).

Ausblick

Mit Abschluss der Datenerhebung folgt die Auswertung der Interviews in Form einer qualitativen Inhaltsanalyse. Hierfür soll ein Kategoriensystem entwickelt werden, für das zunächst deduktiv entwickelte Kategorien aus der Theorie zu Fähigkeitsselbstkonzept und die Motivation um induktiv aus den Daten generierte Kategorien zu studiengangspezifischen Einflüssen ergänzt werden. Neben diesen Gesichtspunkten sollen die Interviews in Hinblick auf betonende Aussagen ausgewertet werden. Damit ist gemeint, dass jegliche Emotionen, Adverbien, Adjektive und weitere Betonungen mit fokussiert werden sollen. Damit soll die individuelle Wichtigkeit der Fähigkeitsrepräsentation und Motivation analysiert werden.

Literatur

Brunstein, J., Heckhausen, H. (2010):Leistungsmotivation. In: Heckhausen J., Heckhausen H.: Motivation und Handeln. Springer Medizin Verlag: Heidelberg.

Klose, R.; Tebaartz, P.; Schreiber, Ch. & Lengnink, K. (2014) Audio-Podcasts zu fachmathematischen Inhalten. Verfügbar: http://www.lehrer-online.de/podcast-fachmathematik.php

Koppitz, N., Schreiber, Ch. (2015): Advice and guidance for Students enrolled in Teaching mathematics at Primary Level. Proceedings of the CERME 2015, Prague.

Meyer, W.-U. (1984): Das Konzept der eigenen Begabung. Huber: Stuttgart, Toronto, Bern.

Rheinberg, F. (2006): Motivation. 5. Auflage, Kohlhammer: Stuttgart.

Schiefele, U. (2008): Lernmotivation und Interesse. In: Schneider, W., Hasselhorn, M.: Handbuch der Pädagogischen Psychologie. Hogrefe: Göttingen.

Schöne, C., Dickhäuser, O., Spinath, B. & Stiensmeier-Pelster, J. (2002). Skalen zur Erfassung des schulischen Selbstkonzepts (SESSKO). Manual. Göttingen: Hogrefe.

Weiner, B. (1994): Motivationspsychologie, Beltz, Weinheim.

Jörg KORTEMEYER, Paderborn

Mathematikverwendung in ingenieurwissenschaftlichen Grundlagenfächern am Beispiel der „Grundlagen der Elektrotechnik“

Das Ziel meiner Dissertation im Rahmen des BMBF-geförderten Projekts KoM@ING (FKZ 01PK11021B) ist die Modellierung der Kompetenzen, die Studierende an der Schnittstelle zwischen Mathematik und Elektrotechnik in Grundlagenfächern zur Elektrotechnik benötigen. In ihren ersten Fachsemestern belegen Elektrotechnik-Studierende parallel Veranstaltungen zu den Grundlagen der Elektrotechnik (GET) wie auch zu der Mathematik für Ingenieure (MfI). Typischerweise wird in GET die Theorie in den Vorlesungen präsentiert, während die Übungen Wege zur Lösung der Übungsaufgaben durch Vereinfachung der Vorlesungsinhalte aufzeigen. Die MfI konzentriert sich vor allem auf Rechenmethoden und ihre Inhaltsbereiche sind die Analysis in einer oder mehreren Veränderlichen, die Lineare Algebra sowie Komplexe Zahlen.

Daraus ergeben sich mehrere Herausforderungen für die Studierenden: Es gibt Asynchronizitäten zwischen den beiden Veranstaltungen, insbesondere werden mathematische Inhalte in GET teilweise früher benötigt als sie in der MfI vorkommen, da diese zur Sicherstellung des Verständnisses einer deduktiven Struktur folgt. Des Weiteren gibt es unterschiedliche mathematische Praktiken in GET und MfI z. B. im Umgang mit Differentialen und die Mathematik-Verwendung in GET ist nicht Teil der MfI-Veranstaltungen. Daher ergeben sich folgende Forschungsfragen: Welche (idealisierten) Lösungen können wir von Studierenden nach ihrem ersten Jahr in Elektrotechnik erwarten? Wie lösen die Studierenden tatsächlich die Aufgaben und welche Schwierigkeiten treten auf? Welche Lösungsstrategien gibt es?

Methodik

Die Basis der Analysen bilden vier Aufgaben aus einer GET-Klausur nach dem ersten Jahr. Sie decken folgende Gebiete ab: Magnetischer Kreis (vgl. Biehler et al., 2015), Schwingkreise, Spannungsanalysen sowie Komplexer Wechselstrom. Es wurden mehrere Studien durchgeführt: (1) Experteninterviews zur Identifikation der expliziten und impliziten Kompetenzerwartungen der GET-Lehrenden, (2) Durchführung und Analyse von Videostudien von Problemlöseprozessen von Studierendenpaaren, um Unterschiede zu den Ideallösungen zu finden und Schwierigkeiten identifizieren zu können, (3) Analyse der schriftlichen Lösungen aus der Klausur zur Bestätigung, Verfeinerung und Erweiterung der Ergebnisse aus (1) und (2).

Unsere Analysen in Stufe 2 und 3 basieren auf der sogenannten Studi-Expert-Lösung (SEL). Die Grundlage für die SELen bilden Experteninterviews sowie drei theoretische Ansätze. Die Experteninterviews wurden mit der sogenannten PARI-Methodik (Hall et al., 1995) durchgeführt und setzen sich aus drei Phasen zusammen: Zunächst löst der Experte die Aufgaben mit lautem Denken ohne Unterbrechungen. Anschließend geht der Interviewer die Bearbeitung mit dem Experten durch, um Begründungen für jeden Schritt zu erhalten. Die dritte Phase enthält eine didaktische Rekonstruktion zu Alternativlösungen, typischen Fehlern und Validierungsmöglichkeiten sowie Gründe für das Stellen der Aufgaben und mögliche Aufgabenvariationen.

Es werden folgende theoretische Werkzeuge verwendet. Der Modellierungskreislauf (Blum/Leiß, 2005) unterteilt den Lösungsprozess von Anwendungsaufgaben in Mathematik und den „Rest der Welt" und gliedert ihn in sieben Schritte: Verstehen, Vereinfachen, Mathematisieren, Mathematisch arbeiten, Interpretieren, Validieren und Erklären. Beim Problemlösen (Polya, 1949) wird der Lösungsprozess einer Aufgabe in vier Phasen unterteilt: das Verstehen der Aufgabe, das Entwickeln eines Plans, das Durchführen des Plans sowie die Rückschau. Redish/Bing, 2008, liefert vier Rahmungen für Mathematikverwendung in der Physik: Berechnung, Physikalische Mechanismen, Berufen auf Autoritäten und die mathematische Konsistenz.

Als Grundstruktur für die SEL verwenden wir eine Neuinterpretation der Schritte des Modellierungskreislaufs, welche drei Phasen hat: (1) „Mathematisierung", die mathematische Beschreibung der in der Aufgabe gegebenen Situation, (2) „Mathematisch-elektrotechnischen Arbeiten", das Lösen der Elektrotechnik-Aufgabe unter Verwendung der Mathematik der Größen und schließlich (3) „Validierung", die Überprüfung der Ergebnisse.

Eine Beispielaufgabe zu Schwingkreisen

Das folgende Netzwerk besteht aus einem Ohm'schen Widerstand R, einer Spule L, einem Kondensator C und einer idealen Spannungsquelle U_0:

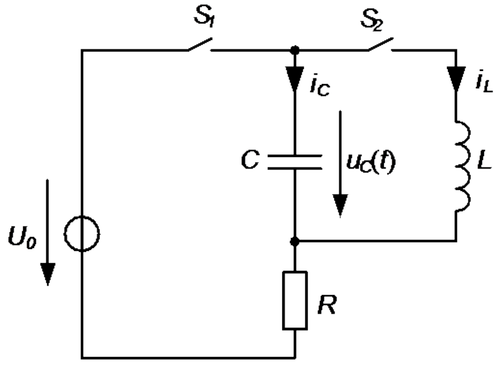


Abbildung 1: Konventionalisierte Darstellung des Schwingkreises

Die Schalter S_1 und S_2 sind geöffnet für $t \leq 0s$ und die Spule und der Kondensator sind vollkommen entladen. Zur Zeit $t = 0$ wird der Schalter S_1 geschlossen. Der Schalter S_2 bleibt geöffnet. Bestimmen Sie eine Gleichung, die die Werte der

Spannung u_C am Kondensator in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt.

Rekonzeptualisierung der Modellierungsphasen

Bei der Mathematisierung verwenden die Studierenden konventionalisierte Skizzen aus der Elektrotechnik. Dabei bleiben die Idealisierungen häufig implizit und sind den Studierenden häufig nicht bekannt. In unseren Studien zeigte sich, dass die Studierenden teilweise versuchten, die physikalischen Mechanismen zu verstehen und von der Realsituation überfordert waren. Beim „Lesen“ der Skizze müssen die Studierenden mehrere Typen von Gleichungen verwenden: Erstens gibt es die Bauteilgleichungen für die beiden Bauteile im geschlossenen Teil des Schwingkreises, also den Ohm’schen Widerstand ($u_R(t)=Ri_R(t)$) und den Kondensator ($i_C(t)=Cu'(t)$), welche in der Vorlesung über Ladungen begründet wurde. Zweitens muss der Aufbau des Schwingkreises beachtet werden, in dem die Kirchhoff-Gesetze, die sogenannten Knoten- und Maschengleichungen, angewendet werden. Hier ergibt sich $U_0=u_R(t)+u_C(t)$ für den geschlossenen Teil, der sogenannten Masche, des Schwingkreises. Der Prozess des „Sammelns“ der Formeln ist eng mit dem mathematisch-elektrotechnischen Arbeiten verbunden, denn die Aufgabe ist nicht lösbar, falls eine der benötigten Formeln fehlt.

Beim math.-elektrotechnischen Arbeiten ist das Ziel, eine Gleichung zu finden, bei der ausschließlich der funktionale Ausdruck $u_C(t)$ unbekannt ist. Die benötigte Kombination der Gleichungen bezeichnen wir als Gleichungsmanagement. Gegeben sind die drei Gleichungen von oben ($u_R(t)=Ri_R(t)$, $i_C(t)=Cu'(t)$, $U_0=u_R(t)+u_C(t)$). Zusätzlich wird noch die Gleichung $i_C(t)=i_R(t)$ benötigt, da der Strom überall im geschlossenen Bereich des Schwingkreises identisch ist. Beim Gleichungsmanagement ergibt sich aufgrund der ersten Ableitung in der Bauteilgleichung für den Kondensator eine Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, da $u_C'(t)$ nicht eliminiert werden kann. Als zu lösende Differentialgleichung ergibt sich $RCu_C(t)+u_C(t)=U_0$. Die Lösungsverfahren (aber nicht das Aufstellen) sind Teil der Mathematik-Veranstaltungen und die Aufgabe kann über Trennung der Veränderlichen und Variation der Konstanten oder über einen Superpositionsansatz aus homogener und partikulärer Lösung gelöst werden.

Die Lösung der Differentialgleichung, $u_C(t)=U_0(1-e^{-t/(RC)})$, kann in verschiedener Weise validiert werden, welche den Rahmungen von Redish/Bing (2008) zugeordnet werden können. Über die Rahmung „Berechnung“ kann argumentiert werden, da das Einsetzen von $u_C(t)$ in die zu lösende DGL $RCu_C(t)+u_C(t)=U_0$ die Richtigkeit bestätigt. Alternativ sind den Studierenden die zugrundeliegenden physikalischen Mechanismen aus Experimenten im Rahmen von Grundlagenlaboren bekannt. In einem solchen Netzwerk nähert sich der Wert von $u_C(t)$ dem Wert der idealen Spannungsquelle U_0 an und kann mittels einer Exponentialfunktion beschrieben werden. Bei der

Rahmung „mathematische Konsistenz“ kann Wissen aus der MfI-Veranstaltung verwendet werden, nämlich, dass eine reelle Exponentialfunktion nicht die Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten sein kann, wobei somit auch ein Berufen auf Autoritäten stattfindet. In unseren Studien validierten die Studierenden sämtliche ihrer Lösungen. Eine Hinterfragung der Modellannahmen fand jedoch nicht statt.

Fazit

Die Studi-Expert-Lösung ist ein neuentwickeltes Werkzeug zur Beschreibung von Problemlöseprozessen in Ingenieur-Grundlagenfächern. Sie konzeptualisiert den Lösungsprozess und unterteilt ihn in drei Phasen: Mathematisierung, mathematisch-elektrotechnisches Arbeiten sowie Validierung. Diese Phasen haben spezielle Charakteristika: Bei der Mathematisierung werden konventionalisierte Skizzen verwendet anstatt dass ein Realmodell konstruiert wird. Beim mathematisch-elektrotechnischen Arbeiten werden Ressourcen wie Gleichungsmanagement verwendet, die das Eintreten in die Welt der Mathematik erlauben, wobei physikalische Größen, d. h. Zahlen und Einheiten, verwendet werden. Zur Validierung können neben innermathematischen Strategien häufig Erfahrungen aus Grundlagenlaboren bzgl. physikalischer Mechanismen verwendet werden.

Literatur

Biehler, R., Kortemeyer, J. & Schaper, N. *Conceptualizing and studying students' processes of solving typical problems in introductory engineering courses requiring mathematical competences*. In: Proceedings of CERME 9 (in press)

Bing, T. J. (2008). *An epistemic framing analysis of upper level physics students' use of mathematics*. Ph.D. thesis University of Maryland. Abgerufen bei: http://drum.lib.umd.edu/bitstream/1903/8528/1/umi-umd-5594.pdf

Blum, W., & Leiß, D. (2007). *How do students and teachers deal with modelling problems?* In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Eds.), Mathematical modelling: Education, engineering, and economics (pp. 222-231). Chichester: Horwood.

Hall, E. P., Gott, S. P., & Pokorny, R. A. (1995). *A procedural guide to cognitive task analysis: The PARI Methodology* (No. AL/HR-TR-1995-0108). Armstrong Lab Brooks AFB TX Human Resources Directorate, Abgerufen bei: http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a303654.pdf

Polya, G. (1949). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Laura KORTEN, Dortmund

Entwicklung und Erforschung eines Lehr-Lernarrangements für den inklusiven Mathematikunterricht zur Anregung des Gemeinsamen Lernens und des flexiblen Rechnens

Diese qualitative Studie untersucht, inwiefern heterogene Lernprozesse von Kindern mit und ohne Lernbehinderung im Kontext des *Gemeinsamen Lernens* in kooperativ-interaktiven Phasen produktiv vernetzt werden können. Ziel ist die Rekonstruktion gemeinsamer Lernsituationen hinsichtlich der kommunikativen Struktur und der individuellen Lernprozesse, um Merkmale für einen gelingenden inklusiven Mathematikunterricht abzuleiten. In diesem Beitrag wird das Projekt vorgestellt und erste Ergebnisse diskutiert.

Gemeinsames Lernen im Sinne der Inklusion

Das Thema *inklusiver Mathematikunterricht* stellt – durch die erhöhte Heterogenitätsspanne – für die Schule eine große Herausforderung zwischen Individualisieren und Gemeinsamem Lernen dar. Denn *Gemeinsames Lernen* im Sinne der Inklusion bedeutet nach Feuser (2012a), dass alle Kinder

- an einem gemeinsamen Gegenstand (*Gegenstandsorientierung*),
- in Kooperation miteinander (*Interaktionsorientierung*),
- auf ihrem jeweiligen individuellem Entwicklungsniveau (*zieldifferente Prozess- und Entwicklungsorientierung*),
- mittels ihrer momentanen individuellen Denk- und Handlungskompetenzen (*zieldifferente Prozess- und Entwicklungsorientierung*) und
- in Orientierung an die nächste „Zone ihrer Entwicklung“ (Vygotskij) lernen (*zieldifferente Prozess- und Entwicklungsorientierung*).

Demnach bedarf es – ergänzend zu *koexistenten* und *subsidiären* Lernsituationen – geeigneter, ***kooperativer Lernsituationen*** (Wocken, 1998). Folglich erscheint es wichtig, empirisch zu untersuchen, ob und inwiefern extrem heterogene, mathematische Lernprozesse in kooperativ-interaktiven Phasen produktiv vernetzt werden können, sodass gleichzeitig alle Beteiligten auf ihrem Niveau arbeiten und sich weiterentwickeln.

Feuser (2012b) beklagt jedoch, nach 25 Jahren Integrations-/Inklusionsforschung, fehlende Studien mit didaktischen Fragestellungen, die zieldifferente Lernprozesse am gemeinsamen Gegenstand in den Blick nehmen.

Ziel und Design der empirischen Untersuchung

Das hier dargestellte Projekt knüpft an dieser Forschungslücke an. Hierfür wurde ein Lehr-Lernarrangement entwickelt, welches im Sinne der Fachdidaktischen Entwicklungsforschung (Dortmunder FUNKEN-Modell nach Prediger et al., 2012), in iterativen *Design Experimenten* erforscht und weiterentwickelt wird. Der interpretativ-epistemologische Analyseansatz orientiert sich an der Interaktionsanalyse nach Krummheuer (Krummheuer &

Naujok, 1991, *Interaktionistische Perspektive*) und der epistemologisch orientierten Analyse nach Steinbring (*2015*, *Epistemologische Perspektive*). Hierdurch wird die Rekonstruktion gemeinsamer Lernsituationen hinsichtlich der *kommunikativen Struktur* und der *individuellen Lernprozesse* ermöglicht, um Merkmale für einen gelingenden inklusiven Mathematikunterricht abzuleiten. Folgende Forschungsfragen auf den Ebenen der Entwicklung (E) und der Forschung (F) stehen dabei im Mittelpunkt:

(E) Wie kann durch ein empirisch und theoretisch fundiertes Lehr-Lernarrangement das Gemeinsame Lernen angeregt werden?
(E1) Welche *Elemente* (Abb. 1) fördern oder begrenzen die individuellen Lernprozesse sowie die produktive Kooperation?

(F) Wie entwickeln sich individuelle Lernprozesse während kooperativ-interaktiver Phasen des Gemeinsamen Mathematiklernens weiter und welche Auswirkung hat dabei das Lehr-Lernarrangement?
(F1) Welche *individuellen Lösungs-/Lernprozesse* entwickeln Kinder? Wie entwickeln sich diese durch die kooperativ-interaktiven Phasen weiter?
(F2) Welche *kommunikativen Strukturen* lassen sich während kooperativ-interaktiver Phasen rekonstruieren? Und wie kann das entwickelte Lehr-Lernarrangement eine kooperativ-interaktive Phase anregen, von der alle Beteiligten profitieren?

Design des Lehr-Lernarrangements

Die Entwicklung des Lehr-Lernarrangements erfolgte vor dem Hintergrund der drei Design Prinzipien *Gegenstands-*, *Interaktions-* und *zieldifferente Prozess- und Entwicklungsorientierung*, die der oben vorstehend dargelegten Definition des Gemeinsamen Lernens abgeleitet wurden. Zur Umsetzung der Design Prinzipien wurden die vier, im Modell (Abb. 1) dargestellten Elemente, besonders in den Blick genommen und aus drei fachdidaktischen Perspektiven beleuchtet:

1) Integrative Didaktik: ‚Entwicklungslogische Didaktik' (Feuser, 2012a; Korff, 2015)
2) Mathematikdidaktik: ‚Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen durch substantielle Aufgaben' (u.a. Wittmann & Müller, 1990)
3) Sonderpädagogik des Lernens: ‚Konzeption des Lernens auf eigenem Weg' (u.a. Scherer, 1995; Heimlich & Wember (Hrsg.), 2015)

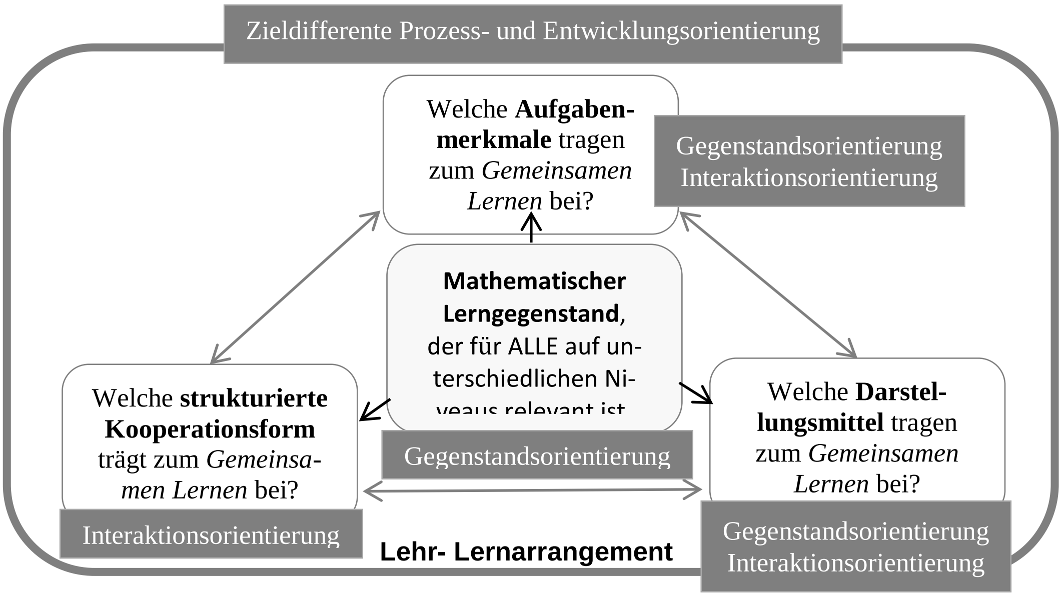


Abb. 1: Modell zur Entwicklung des Lehr-Lernarrangements

Das entwickelte Lehr- Lernarrangement „Wir erforschen Nachbarsummen" konzentriert sich auf die Förderung des *Flexiblen Rechnens* (Rathgeb-Schnierer, 2010). Im Hinblick auf die strukturierte Kooperationsform erfolgt eine Konzentration auf das *Dialogische Lernen* nach Ruf und Gallin (1995); hier wird die ICH-DU-WIR-Methode gewählt, um kooperativ-interaktive Lernsituationen zu schaffen, die zum Gemeinsamen Lernen beitragen sollen. Es wird von ‚singulären Konstruktionen' ausgegangen, welche über ‚kommunikative Austauschprozesse' zu neuen Einsichten führen. Dieser Ansatz macht es möglich, Heterogenität als Chance zu nutzen und Individualisierung mit Gemeinsamem Mathematiklernen zu verknüpfen. In einer ICH-Phase (Einzelinterviews) werden die Zweit-/Drittklässler dazu angehalten, möglichst viele Nachbarzahlen und ihre Nachbarsummen auf einem 20er-Feld zu finden. Der Zusatz, dieses ‚möglichst geschickt' zu tun, regt zum Entdecken und Nutzen operationaler Beziehungen an. In der DU-Phase (Paarinterviews) werden die gefundenen Nachbarsummen gemeinsam sortiert, geordnet, Entdeckungen zusammengetragen und weitere Entdeckungen gemacht, die anschließend in der WIR-Phase hinsichtlich des geschickten Rechnens reflektiert werden. (Auf eine ausführlichere Begründung didaktischer und methodischer Entscheidungen muss an dieser Stelle aufgrund des Umfangs abgesehen werden.)

Ausgewählte Ergebnisse und Ausblick

Die Rekonstruktion *kommunikativer Strukturen (F2)* während der DU-Phase ließ folgende bedeutsame Kooperationsstrukturen erkennen:

1) *Keine Kooperation (Parallele Aktivitäten)*
2) *Keine Kooperation auf mathematischer Ebene*
3) *Dominante Kooperation* (Ein Kind übernimmt die Expertenrolle. Das andere Kind nimmt eine eher passive Lernerrolle ein.)

4) *Ausgewogene Kooperation* (Alle Beteiligten kommunizieren nach individuellem Vermögen über den mathematischen Gegenstand und nehmen aufeinander Bezug.)

Nur im Falle einer *Ausgewogenen Kooperation* konnte die Weiterentwicklung der Lernprozesse beider Kinder beobachtet werden (F1). An dieser Stelle bleibt die Frage offen, wie die kommunikative Struktur mit den individuellen Lernprozessen zusammenhängt, und wann es zu *'Produktiven Momenten'* kommt, welche die Lernprozesse beider Kinder voranbringen.
Im Weiteren wird zudem genauer untersucht, wie das entwickelte Lehr-Lernarrangement eine *Ausgewogenen Kooperation* und diese *'Produktiven Momenten'* der Kommunikation gezielter herausfordern kann (E). Eine erste Ausschärfung der Designprinzipien lässt vermuten, dass ein *'emotionaler Nutzen'* auf beiden Seiten, zum Beispiel durch eine *'positive Abhängigkeit'*, eine ausgewogene Kooperation zwischen Kindern mit und ohne Lernbehinderung im Kontext des Gemeinsamen Lernens ermöglicht.

Literatur

Feuser, G. (2012a). Thesen zu: Gemeinsame Erziehung, Bildung und Unterrichtung behinderter und nichtbehinderter Kinder und Jugendlicher Retrieved März 17, 2016: www.georg-feuser.com/conpresso/_data/Feuser_-_Thesen_Integration_04_2012.pdf

Feuser, G. (2012b). 25 Jahre Integrations-/Inklusionsforschung: Rückblick – Ausblick. In S.Seitz et al. (Ed.). Inklusiv gleich gerecht?. 289-295. Bad Heilbrunn: Klinkhard.

Heimlich, U. & Wember, F.B. (Hrsg.) (2015). *Didaktik des Unterrichts im Förderschwerpunkt Lernen.* Stuttgart: Kohlhammer.

Korff, N. (2015). *Inklusiver Mathematikunterricht in der Primarstufe : Erfahrungen, Perspektiven und Herausforderungen.* Baltmannsweiler: Schneider-Verl.

Krummheuer, G. & N. Naujok (1999). *Grundlagen und Beispiele Interpretativer Unterrichtsforschung*. Opladen: Leske & Budrich.

Prediger, S.; Link, M.; Hinz, R.; Hußmann, S.; Thiele, J. & Ralle, B. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren & erforschen – Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In *MNU* 65(8), 452–457.

Rathgeb-Schnierer, E. (2010). Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern des 2. Schuljahres. *Journal für Mathematikdidaktik* 31(2), 257-283.

Scherer, P. (1995). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. Heidelberg: Schindele.

Steinbring, H. (2015). Mathematical interaction shaped by communication, epistemological constrains and enactivism. *ZDM*, 47, 281-293.

Wittmann, E. Ch. Müller, G.N. (1990): *Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd.1: Vom Einspluseins zum Einmaleins.* Stuttgart: Klett.

Ulrich KORTENKAMP, Potsdam, und Oliver LABS, Potsdam und Mainz

Bausteine in digitalen Lernumgebungen vernetzen: Technologie zur Gestaltung und Analyse von kreativen Lernprozessen

Interaktive Bausteine (Widgets) können aus e-Books digitale Lernumgebungen machen, die kreative und konstruktivistische Zugänge zur Mathematik erlauben. Für Lehrpersonen ist es eine Herausforderung, diese selbst zu gestalten. Daher haben wir im MC Squared Projekt (mc2-project.eu) das Konzept der X-Widget-Communication entwickelt und umgesetzt, das wir an Beispielen erläutern. Damit können auch Informationen zur Benutzung der interaktiven Elemente für Feedback und Analyse gewonnen werden.

1. Die Lernumgebung C-Book-Environment (CBE)

Das EU-Projekt „MC Squared“ (Mathematik und Kreativität ins Quadrat genommen) hat sich der Förderung von Kreativität in der Mathematik verschrieben, sowohl auf Seiten der SuS als auch auf Seiten der Lehrenden bzw. Autoren. Die im Projekt entwickelte digitale Lernumgebung namens „C-Book-Environment“ (kurz CBE) – der Begriff C-Book steht dabei für eine Erweiterung des Konzeptes von E-Books um den Aspekt der Kreativität in Mathematik – ermöglicht daher

– interaktives „lesen“,
– erstellen und adaptieren,
– auswerten

mathematischer Texte, Aufgaben und Visualisierungen. Das CBE basiert auf mehreren zuvor über Jahre hinweg unabhängig voneinander entwickelten Programmen für die Lehre in Mathematik.

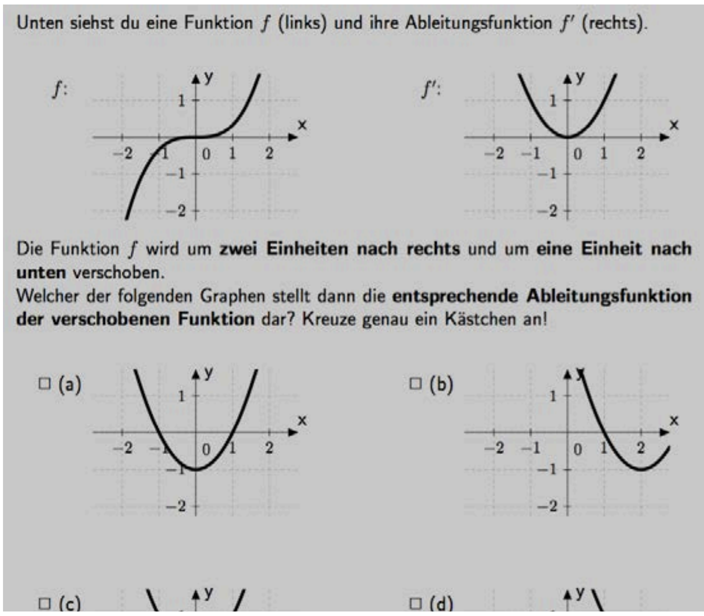
Die Inhalte werden dabei in sogenannte Bücher („C-Books“), Einheiten („Units“) und Seiten eingeteilt, wobei jede Seite neben Texten und Visualisierungen auch interaktive Elemente („Widgets“) enthalten kann. Jede/jeder, der mit einem C-Book arbeiten möchte, erhält ihr/sein eigenes Login für die internet-basierte Umgebung, organisiert nach „Schulen“ und „Klassen“, was den großen Vorteil hat, dass es dadurch möglich ist, dass für jede bearbeitende Person und für jede einzelne Seite der aktuelle Zustand der Bearbeitung im System abgespeichert werden kann. Kommt man zu einem späteren Zeitpunkt auf eine Seite des C-Books zurück, so findet man diese genauso vor, wie man sie verlassen hat, auch wenn man den Bearbeitungsprozess mitten in einem Experiment oder einer Rechnung abgebrochen hatte.

Der kreative Prozess des Erstellens oder Adaptierens eines C-Books wird von der Lernumgebung CBE in vielfacher Weise unterstützt. Einerseits gibt es zahlreiche vorgefertigte und parametrisierbare kleine Programme (Widgets), die in eine Seite eingebunden werden können. Andererseits wurden die im Projekt vertretenen Softwaresysteme, EpsilonWriter, Cinderella, MaLT, so erweitert (zu sogenannten „Widget Factories“), dass es mit ihnen einfach möglich ist, neue Widgets zu erstellen, die dann ihrerseits genauso leicht wie die vorgefertigten in ein C-Book eingebunden werden können. Außerdem können Widgets neuerdings in C-Books miteinander kommunizieren, was große Vorteile bei der Erstellung von Seiten erlaubt, wie im folgenden Abschnitt erläutert wird.

2. Kommunikation innerhalb von C-Books

Die Erstellung eines Widgets mit vielen Funktionalitäten oder unterschiedlichen Repräsentationsformen kann sehr aufwändig sein. Um den kreativen Prozess des Erstellens von Seiten zu unterstützen, die solche interaktiven Inhalte benötigen, haben wir im Rahmen von MC Squared eine Kommunikationsmöglichkeit zwischen Widgets entwickelt, die sogenannte „Cross-Widget-Communication“ (kurz „X-Widget-Com“).

Abbildung 1 zeigt ein erstes Beispiel, das im Rahmen einer Kooperation zwischen dem französischen und dem deutschen Team im Projekt entstanden ist (siehe Trgalova et al). Die Aufgabe ist es dort, die Gleichung der gepunkteten Ortskurve im Geometrie-Fenster zu finden. Diese kann links im Widget angegeben werden, entweder unter Ausnutzung des dortigen Mathematik-Editors, über den beispielsweise Potenzen oder Wurzeln per Mausklick angelegt werden können, oder aber ausschließlich über Tastatur-Eingaben. Klickt

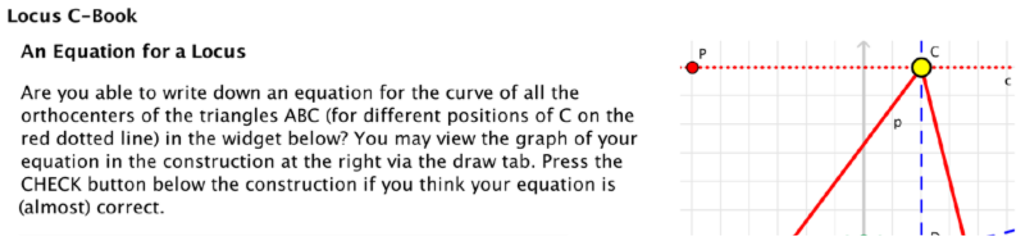


man dann dort auf „Draw function“, so wird der Funktionsgraph mit der angegebenen Gleichung im rechten Geometrie-Fenster angezeigt; dazu übermittelt das Algebra-Widget dem Geometrie-Widget die Gleichung über ein zuvor verabredetes Kommando. In der Dokumentation jedes Widgets wird als Referenz für Autoren von C-Books angegeben, welche Kommandos es senden und welche es empfangen kann. Ein weiteres, sehr kleines, Widget ist in Abbildung 1 zu sehen, nämlich der „Check“-Knopf. Wird dieser betätigt, schickt das Widget, das nur aus diesem einen Knopf besteht, eine Anfrage an das Geometrie-Widget, zu überprüfen, ob die Aufgabe bereits korrekt gelöst wurde, gemeinsam mit der Aufforderung, die erreichten Punkte direkt der Lernumgebung zu übermitteln und dadurch der bearbeitenden Person anzuzeigen. Im Bild ist die Gleichung des (pinken) Funktionsgraphen offenbar noch nicht perfekt, da er noch nicht genau unterhalb der gepunkteten Linie verläuft.

Freilich könnte man obiges Beispiel noch ausbauen; etwa dahingehend, dass der Check-Knopf ersetzt wird durch ein umfangreicheres Feedback-Widget, das der Person, die das C-Book bearbeitet, genauere Informationen über den aktuellen Stand der Bearbeitung liefert, wie z.B., dass bereits der Grad der Funktion und die Symmetrieachse des Graphen korrekt sind etc. Dazu muss allerdings das Geometrie-Widget in der Lage sein, diese Informationen automatisiert zu ermitteln. Welche Informationen sinnvollerweise tatsächlich der bearbeitenden Person bereit gestellt werden sollten, hängt natürlich von vielen Dingen ab, die nur die Lehrperson unter Berücksichtigung ihrer Lerngruppe einschätzen kann.

In einem weiteren Beispiel stellen wir uns für quadratische Funktionen x^2+ax+b die Frage, für welche a und b nur genau eine Nullstelle existiert und wie wir uns diese geometrisch veranschaulichen können. Eine Möglichkeit ist es, a und b als Koordinaten eines Punktes in einem a,b-Koordinatensystem aufzufassen (siehe für dieses und verwandte Beispiele (Labs, 2014)). Um dies in unsere Umgebung umzusetzen, können wir einfach zwei Koordinatensystem-Widgets, die die Koordinaten eines Punktes untereinander austauschen können, in eine gemeinsame Seite einbinden. Wird dann im a,b-Koordinatensystem der Punkt verschoben, so aktualisiert sich automatisch sofort der Funktionsgraph im x,y-Koordinatensystem.

Eine solche X-Widget-Communication legt man als Benutzer in der C-Book-Umgebung folgendermaßen an: Zunächst fügt man die beiden Widgets, die miteinander kommunizieren sollen, in eine Seite ein und aktiviert den Kommunikations-Einrichtungs-Modus über den orangenen Netz-Knopf über dem Inhaltsfenster. Dann zieht man mit gedrückter Umschalt- und rechter Maustaste vom einen der beiden Widgets hinüber auf das andere. Im sich dann öffnenden Dialogfenster (Abbildung 2) werden all die Kommandos angezeigt, für die eine Kommunikation möglich ist, also Kommandos, die das Startwidget senden und das Zielwidget empfangen kann. Für unsere gewünschte Kommunikation der Punktkoordinaten wählen wir dort „pointcoords“ aus.



Die Umgebung signalisiert uns die etablierte Kommunikation über einen orangenen Pfeil in der Kommunikationsrichtung. Für Widgets, die mit der Cinderella-Widget-Factory erstellt wurden, ist es mit ein wenig Erfahrung schnell möglich, weitere Kommunikations-Möglichkeiten hinzuzufügen. Der kreative Prozess des Erstellens von Lehrmaterial wird somit stark vereinfacht, da aus kleinen, überschaubaren Bausteinen auch komplexe Ideen ohne großen Aufwand verwirklicht werden können.

3. Implementierungsstand und Ausblick

Die hier beschriebenen, neuartigen Kommunikations-Möglichkeiten zwischen verschiedenen interaktiven Widgets sind im „Digital Mathematics Environment“ des Freudenthal-Instituts implementiert und funktionieren auch mit einer gerade in Entwicklung befindlichen HTML5/JavaScript-Version dieser Umgebung, so dass diese Lehr/Lernmaterialien auch auf Tablets und anderen mobilen Geräten genutzt werden können. Weitere Informationen zu dieser und anderen Entwicklungen finden sich auf der Projektwebseite mc2-project.eu.

Literatur

Richter-Gebert, J. & Kortenkamp, U. (2012). *The Cinderella.2 Manual: Working with the Interactive Geometry Software*. Berlin und Heidelberg: Springer.

Labs, O. (2014). Diskriminante und Nullstellen von Polynomen. In Kaenders, R. & Schmidt, R. (Hrsg.): *Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen*.

Trgalova, J., El-Demerdash, M., Labs, O., Nicaud, J.-F. *Collaborative design of educational digital resources for promoting creative mathematical thinking*. Angenommen bei der Konferenz ICME 2016, Hamburg.

Maria KÖTTERS, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Materialgestütztes inklusives Lernen am außerschulischen Lernort zum Themenkreis Mathematik

Das Ziel der Promotion ist die Entwicklung eines tragfähigen Konzeptes zur Vernetzung „begreifbarer“ Mathematik mit dem inklusiven Lernen am außerschulischen Lernort. „Begreifbar“ soll hier im wörtlichen Sinn verstanden werden: Schüler sollen Mathematik anfassen können – sie entdecken, erproben und damit experimentieren.

Außer Zweifel stehen die bisherigen Bemühungen zur inklusiven Bildung nach der UN-Behindertenrechtskonvention. Diese Bemühungen sind bereits fest in der Forschung, teilweise in der Praxis und diversen Publikationen zur Mathematik für die Primarstufe angekommen, werden erprobt und reflektiert. Aber in der Sekundarstufe ist der Prozess bisher nur an Fallbeispielen untersucht worden und für die außerschulischen Lernorte noch gar nicht. Das hat zu Folge, dass viele Lehrkräfte die Inklusion nicht ausreichend theoriegebunden leben können.

Verortung der Thematik

Das Promotionsvorhaben wendet sich dieser offenen Problematik zu und nimmt nicht nur die Ganzheitlichkeit der inklusiven Bildungsbemühungen in den Blick, sondern auch die Stärkung des außerschulischen Lernortes mit mathematischer Fokussierung. Dabei wird das Forschungsvorhaben von vielen Aspekten geprägt:

Erstens der Mathematikdidaktik und -methodik, die aktuell in der Schule und dem außerschulischen Lernort Anwendung finden und in denen das Forschungsvorhaben verortet werden muss.

Zweitens die erziehungswissenschaftlichen Forschungsmethoden, die zur Verfügung stehen, die ausgewählt werden, um die Arbeitsthesen zu untersuchen und die natürlich Einfluss auf die Ergebnisse haben werden.

Drittens die ausgewählten Bildungskonzepte und Lernformen, die untersucht werden sollen und mit deren Hilfe die Forschungsergebnisse in die Praxis übertragen werden können. Zwei Bildungskonzepte, das inklusive und das demokratische, werden in den Fokus genommen. Sie werden für zukunftsfähig und belastbar gehalten, um das Forschungsvorhaben theoretisch zu fundieren. Dementsprechend fiel die Wahl auf zwei Lernformen, die stark mit den beiden Bildungskonzepten korrelieren und einen hohen Lern- und Motivationszuwachs bei den Schülern versprechen – das entdeckende und das kooperative Lernen.

Alle bisher getroffenen Differenzierungen zielen aber immer auf die Durchdringung und Weiterentwicklung des außerschulischen Lernortes mit mathematischer Schwerpunktsetzung.

Arbeitsthesen

Der aktuelle Stand der Beschäftigung mit der Promotionsthematik spiegelt sich in folgenden Arbeitsthesen wider. Die Thesen fokussieren explizit auf den Bereich der Mathematik und den außerschulischen Lernort. Mit Hilfe der Thesen und der Betrachtung von Fallbeispielen sollen später Tendenzen abgeleitet werden.

- Mathematisch orientierte Lernorte können so methodisch und didaktisch geplant werden, dass die Vernetzung von inklusiver und demokratischer Bildung gelingt.
- Durch die Vielschichtigkeit des Lernortes werden verschiedene Lern- und Arbeitstypen angesprochen.
- Der Lebensweltbezug von Mathematik wird erlebt und unterstützt den nachhaltigen Wissensaufbau.
- Lernmaterialien lassen sich so aufbereiten, dass sie am inklusiven Lernort für alle Lernenden gleichermaßen zur Lern-Stimulanz führen.

Forschungsdesign

Neben der oben bereits erwähnten groben Verortung des Themas, erfolgt der Einstieg in die Arbeit durch eine Fragebogenvorstudie an Lehrkräften. Die Vorstudie versucht Lehrkräfte mit unterschiedlichem Blick auf Inklusion zu befragen, um ihre Erfahrungen und Wünsche hinsichtlich ihres Arbeitsfeldes zu ermitteln. Die Lehrkräfte sind sowohl an der Regelschule – am Gymnasium, der Sekundarschule, als auch an Förder- und Sonderschulen tätig. Die weitgefächerte Betrachtung der Schulformen soll einen guten Überblick über die Erfahrungen der Lehrkräfte geben. Dieser gefächerte Blick kann in der Hauptstudie fokussiert werden, das heißt, auf Schulbereiche begrenzt, die sich aus den Ergebnissen der Vorstudie als besonders vielversprechend erwiesen haben.

Unter dem Aspekt, dass das Ziel inklusiver Bildung die uneingeschränkte Teilhabe aller am Bildungsangebot und eine individualisierte Förderung verfolgt, muss für das Forschungsvorhaben ein leistbarer Fokus gesetzt werden. Das heißt, dass die an die Lehrerbefragung angeschlossene Studie mit Kindern sich auf bestimmte Schüler mit Handicaps konzentriert, ohne die gesamte Breite des Lernspektrums aus dem Blick zu verlieren. Dabei geht es in diesem Forschungsvorhaben nicht um die Förderung leistungsschwacher oder besonders leistungsstarker Schüler in Mathematik, sondern um die

Schüler, die normal intelligent und normal mathematikinteressiert sind, aber durch eine körperliche Behinderung oder ein sprachliches Defizit im Schulalltag Schwierigkeiten beim Mathematiklernen haben können.

Die Auseinandersetzung mit den Thesen und den Ergebnissen aus der praktischen Untersuchung führen dann zur Verankerung in der Forschungslandschaft.

Fragebogenvorstudie

Im Folgenden soll näher auf den Einstieg in die praktische Untersuchung durch eine Vorstudie eingegangen. Um die Vorstudie dem Forschungsanliegen entsprechend zu gestalten, wurde der Fragebogen als Mittel präferiert. Dieser soll vier Bereiche abdecken.

Im ersten Bereich sollen die Erfahrungen der Lehrkräfte mit außerschulischen Lernorten erfragt werden. Daran anschließend die Gründe und Wünsche der Lehrkräfte, die aus mathematikdidaktischer Sicht Einfluss auf einen Besuch des außerschulischen Lernortes haben. Im dritten Bereich soll der erhoffte Lernerfolg oder Lernzuwachs der Schüler aus Sicht der Lehrkräfte ermittelt werden und abschließend welche (inklusiven) Bedingungen der Lernort erfüllen muss.

Die Fragen oder Fragenkomplexe werden nicht zu umfangreich mit zwölf Fragen gestellt, damit die Lehrkräfte die Beantwortung des Fragebogens in ihrem Unterrichtalltag gut realisieren können. Trotzdem sollen die Frageitems aussagekräftig sein, das heißt, es gibt nur wenige Ankreuz-Fragen. Größtenteils sind die Fragen zur offenen Beantwortung mit gleichmäßig eingeschränkter Platzvorgabe von fünf Zeilen gestellt, damit die Darstellung der individuellen Sichtweise möglich wird und keine Gewichtung der Items im Voraus stattfindet.

Die erste Schule, in der der Fragebogen ausgeteilt wurde, ist eine integrative Gesamtschule. Diese ist hervorragend geeignet – eine Stadt-Schule, ohne fachliche Schwerpunktsetzung, aber mit breitem Schülerspektrum und heterogenem Lehrerkollegium.

Von der Fragebogenvorstudie werden Antworten auf folgende Fragen erhofft:

Wie gehen die Lehrkräfte mit dem Fragebogen um?

Können sie sich zu den Fragen offen äußern?

Sind interessante Antworten eingegangen?

Welches Werkzeug eignet sich zur Auswertung dieses offenen Fragebogens?

Sicher ist bereits jetzt, dass mit der bereits geplanten Vorstudie nicht der gesamte Rahmen des Forschungsvorhabens abgedeckt werden kann. Es müssen also weitere Vorstudien im Bereich Inklusion und demokratische Bildung sowie den favorisierten Lernformen erfolgen, um einen ersten Eindruck des Ist-Zustandes bei den Lehrkräften zu erhalten und Schlussfolgerungen über das weitere Forschungsvorhaben zu treffen.

Literatur

Boban, I., Eckmann, Th. & Hinz, A. (Hrsg.) (2014). *Lernen durch Vielfalt – Variationen aus der sozialästhetischen und inklusiven Praxis.* Bochum/Freiburg: projekt verlag.

Gudjons, H. [7](2008). *Handlungsorientiert lehren und lernen.* Bad Heilbrunn: Julius Klinkhardt.

Korff, N. (2016). *Inklusiver Mathematikunterricht in der Primarstufe.* Baltmannsweiler: Schneider Hohengehren.

Leuders, T. & Prediger, S. (2016). *Scriptor praxis: Flexibel differenzieren und fokussiert fördern im Mathematikunterricht.* Berlin: Cornelsen.

Sauerborn, P. & Brühne, Th. [3](2010). *Didaktik des außerschulischen Lernens.* Baltmannsweiler: Schneider Hohengehren.

Theresa KRASSNIGG, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

Eltern- und SchülerInnenbeliefs zu Mathematik(unterricht)

1. Motivation

Beliefs zu Mathematik wurden in den letzten Jahren in der Mathematikdidaktik sowohl national als auch international häufig beforscht. (vgl. Thompson 1992, Philipp 2007, Leder et al. 2002) Der Fokus liegt hier vermehrt auf SchülerInnen und LehrerInnen, sei es, dass sie für die MathematikdidaktikerInnen besser erreichbar sind, sei es, dass MathematiklehrerInnen mit den SchülerInnen über Mathematik interagieren und dadurch viele „mathematische Berührungspunkte“ haben, es gibt diese und noch viele Gründe mehr. Furinghetti & Pehkonen (2000) meinen, dass „The learning outcomes of students are strongly related to their beliefs and attitudes about mathematics.” Wenn die Beliefs die Mathematikleistungen der SchülerInnen beeinflussen, wäre es interessant herauszufinden, welche Beliefs SchülerInnen haben.

SchülerInnen werden von vielen beeinflusst, unter anderem von ihren Eltern. Diese beeinflussen ihre Kinder bewusst und unbewusst auf verschiedenste Weise und in viele Gebieten (vgl. Bronfenbrenner 1981). Ecarius (2011) bezeichnet die Familie als primäre Sozialisationsinstanz. Schule und Kindergarten fallen unter die sekundäre Sozialisationsinstanz, und Peers sind sogar erst die tertiäre. Eltern beeinflussen ihre Kinder also schon viel früher als alle anderen und haben dadurch auch einen wichtigen Einfluss. Aus diesem Grund wäre es auch interessant, die Beliefs der Eltern zu erfassen.

Pehkonen & Törner (1996) schreiben

> [Students’] mathematics teachers, classmates, friends, parents, relatives and teachers of other subjects all have their own views of mathematics and its teaching and learning. These beliefs influence learners’ beliefs in different degrees, and usually not in the same direction.

Wie sehr die Beliefs der Eltern die ihrer Kinder beeinflussen ist so nicht erfassbar. Wenn zum Beispiel die Mutter eines Kindes ähnliche Beliefs wie dessen beste Freundin hat, ist es unmöglich zu sagen, durch wessen Einfluss und wie das Kind diese Beliefs übernommen hat. Laut McLeod (1992) gilt „Individual experiences and cultural influences are the two origins of beliefs.” Was aber durchaus möglich ist, ist, die Beliefs von Eltern und ihren Kindern zu erfragen und einander gegenüberzustellen.

2. Forschungsfragen

Vor diesem Hintergrund entstanden folgende Forschungsfragen:

1. Welche Einstellungen und Vorstellungen haben Eltern von Kindern der 8. Schulstufe bezüglich (Schul)Mathematik?

2. Welche Einstellungen und Vorstellungen haben die Kinder dieser Eltern bezüglich (Schul)Mathematik?
3. Welche Einstellungen und Vorstellungen haben Eltern und ihre Kinder gemeinsam, wo gibt es Unterschiede? Von welchen Ein- und Vorstellungen denken Eltern, dass ihre Kinder sie haben und vice versa? Stimmt das überein?

3. Theorie und Methodik

Pajares (1992) bezeichnet Beliefs als „messy construct", und Törner (2015) schreibt, dass „sich bis heute keine allgemein akzeptierte [Definition] durchgesetzt hat". Leder et al. (2002) unternahmen einen Versuch, Beliefs als Begriff in der Mathematikdidaktik zu definieren, konnten aber selbst in diesem speziellen Gebiet keine Einigung der ExpertInnen finden. In meiner Arbeit verstehe ich unter Beliefs sowohl Einstellungen als auch Vorstellungen, wobei Einstellungen für mich den eher affektiven Bereich von Beliefs darstellen und Vorstellungen den eher kognitiven Bereich. Beliefs sind hierbei für mich der Überbegriff; dieser beinhaltet neben Einstellungen und Vorstellungen auch Ansichten, Werte, Überzeugungen, Meinungen,…

(Schul)Mathematik bzw. Mathematik(unterricht) bezieht sich darauf, dass ich generell die Eltern und deren Kinder allgemein zu Mathematik befragt habe. Da ich aber die Eltern und deren Kinder gerade deshalb interviewte, weil die Kinder in die 8. Schulstufe gingen und daher Schule schon im Voraus ein Thema war, haben sich die Antworten von Anfang an sehr oft auf Schulmathematik und den Mathematikunterricht bezogen.

Methodisch wurden zu Beliefs sehr viele Untersuchungen mit Fragebögen und Likert-Skala gemacht. Da ich aber sehr offen fragen wollte und außerdem die Möglichkeit haben wollte, nachzufragen, habe ich mich für Leitfadeninterviews entschieden, also für einen qualitativen Ansatz.

4. Auswahl der InterviewpartnerInnen

Ursprünglich wollte ich SchülerInnen interviewen, die so kurz wie möglich in der Schule waren, also Volksschulkinder. Bei diesen Probeinterviews zeigten sich zwei Herausforderungen: Erstens konnten die SchülerInnen wegen ihres Alters nicht sehr viel zu Mathematik und ihrem Unterricht sagen und zweitens gab es bei den Eltern überhaupt keine Kritik an der Mathematik der Volksschule. Jeder Elternteil war überzeugt, dass die Volksschulmathematik für alle höchst notwendig sei und die Äußerungen waren nicht sehr facettenreich. Auch in der unteren Sekundarstufe I sah es ähnlich aus. Ich entschied mich für die 8. Schulstufe, da dort die SchülerInnen alt genug sind, um reflektiert zu antworten, da in diesem Alter noch alle Kinder verpflichtend in die Schule gehen, und insbesondere, da es in der 8. Schulstufe schon einen gewissen „Bruch“ in der (Schul)Mathematik gibt. In Österreich beginnt man in der 7. Schulstufe mit Algebra, also nicht mehr „nur Rechnen“, und viele Eltern können ihren Kindern auch nicht mehr in Mathematik helfen. Die „Nützlichkeit“ von Mathematik wird dann in den Interviews auch differenzierter betrachtet.

Nachdem ich mich also für die 8. Schulstufe entschieden hatte, suchte ich freiwillige Familien, die sich interviewen ließen. In den Vorinterviews hatte sich gezeigt, dass aus Interviews mit unfreiwilligen InterviewpartnerInnen hauptsächlich hervorging, dass sie nicht interviewt werden wollten.

Insgesamt interviewte ich 11 Familien von AHS (Allgemeinbildende Höhere Schule) und 9 Familien von NMS (Neue Mittelschule), aus Kärnten und der Steiermark, wobei nicht alle Familien aus Vater, Mutter und Kind bestanden. "Familie" definiert sich dabei durch gemeinsames Wohnen, sodass ich dann zum Beispiel auch den Stiefvater, oder nur die Mutter, wenn die Eltern getrennt waren, interviewte. Insgesamt interviewte ich 7 Mädchen (1 Zwillingspärchen) und 5 Buben aus der AHS und 5 Mädchen (ebenfalls 1 Zwillingspärchen) und 5 Buben aus der NMS.

5. Erste Ergebnisse

Generell waren alle, die ich interviewte, entweder sehr positiv oder sehr negativ gegenüber Mathematik eingestellt. Einerseits war das auch zu erwarten, da sich die Familien freiwillig gemeldet hatten und es ein zeitlicher Aufwand war – die Interviews dauerten zum Großteil zwischen 45 und 90 Minuten. Die Motivation, sich dafür bereit zu stellen, war, weil Mathematik für sie interessant war, oder weil sie Mathematik nicht mochten und das zum Ausdruck bringen wollten. Trotzdem glaube ich persönlich, sowohl aus Vorinterviews als auch aus Erfahrungen, wie Menschen auf mich als Mathematiktreibende reagierten, dass das generell die deutschsprachige Gesellschaft widerspiegelt. Mathematik polarisiert, und es gibt wenige, denen Mathematik egal ist. Durch meine Vorerfahrung ist diese Polarisierung daher durchaus keine Überraschung.

Was mich doch bis zu einem gewissen Grad überraschte, war, wie gut Eltern und deren Kinder über ihre gegenseitigen Beliefs Bescheid wissen. Es gab einige Interviews, in denen die Eltern meinten, dass sie gewisse Dinge nicht für nützlich empfanden, das den Kindern aber nicht sagten, damit sie zum Beispiel trotzdem ihre Hausaufgabe machten. Die Kinder wiederum wussten aber genau, dass es den Eltern nur wichtig war, damit sie in der Schule keine Probleme bekamen, aber nicht die Aufgabe an sich.

Worauf ich bei der Auswertung der Interviews besonders achten möchte, ist die Differenzierung, warum Eltern(teile) positiv oder negativ gegenüber Mathematik eingestellt sind. Zum Beispiel gab es drei Mütter, die alle positiv eingestellt waren, wobei die erste Mutter meinte, es wäre wichtig, auch einmal „schwere Mathematik“ zu sehen, falls man es einmal bräuchte und dadurch auch die Studierfähigkeit für alle Fächer hätte. Die zweite Mutter meinte, dass Mathematik an sich schon wichtig sei, aber nicht alles, zum Beispiel Integrale nicht, und dass das Kind so viel können sollte, dass es die Schule gut schafft. Der dritten Mutter wiederum war Mathematik an sich wichtig, sowohl elementare als auch höhere Mathematik, sie sah in allem Mathematik und es war ihr ein generelles Anliegen, dass ihr Kind in Mathematik gut ist. Eine detaillierte Auswertung wird meiner Dissertation zu Grunde liegen.

Literatur

Bronfenbrenner, U. (1981). *Die Ökologie der menschlichen Entwicklung.* Stuttgart: Klett-Cotta.

Ecarius, J. et al. (2011). *Jugend und Sozialisation.* Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Furinghetti, F. & Pehkonen, E. (2000). A comparative study on students‘ beliefs concerning their autonomy in doing mathematics. *Nordisk Matematikkdidaktikk, 8(4)*, 7-26.

Leder, G. C. et al. (Ed.) (2002). *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

McLeod, D. B. (1992). Research on Affect in Mathematics Education: A Reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (pp. 575-596). New York: Macmillan.

Pajares, M. F. (1992). Teachers‘ beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 62(3)*, 307-332.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257–315). Charlotte, NC: Information Age.

Thompson, A. G. (1992). Teachers‘ Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Törner, G. (2015). Verborgene Bedingungs- und Gelingensfaktoren bei Fortbildungsmaßnahmen in der Lehrerbildung Mathematik – subjektive Erfahrungen aus einer deutschen Perspektive. *Journal für Mathematik-Didaktik, 36(2)*, 195-232.

Christina M. KRAUSE, Essen

DeafMath - Ein Projekt zum Einfluss der Gebärdensprache auf Mathematikverständnis

Mathematiklernen scheint für hörgeschädigte Schüler schwieriger zu sein als für hörende. Ihre Mathematikleistungen liegen im Schnitt einige Jahre zurück (siehe z. B. Nunes, 2004). Erklärt wird dies unter anderem durch fehlendes informelles Wissen zu mathematischen Konzepten, das hörende Kinder implizit durch Alltagsinteraktion in der frühen Kindheit erlangen (Nunes & Moreno, 1998). Zudem bereitet hörgeschädigten Lernenden das Lesen, Verstehen und Verarbeiten geschriebener Textaufgaben Probleme (Hyde, Zevenbergen & Power, 2003), da die Schriftsprache für sie eine Fremdsprache darstellt.

Wie aber verlaufen mathematische Lernprozesse gehörloser Lernender? Wie beeinflussen ihre geänderten Lernbedingungen den Lernprozess und das mathematische Lernprodukt? Ein besseres Verständnis hiervon kann Chancen für den inklusiven Unterricht, aber auch für den hörender Lernender bieten.

Das hier vorgestellte Project-in-Progress verfolgt das Ziel, ein besseres Verständnis der Besonderheiten des Mathematiklernens hörgeschädigte Lerner zu bekommen. Hierdurch soll genauer ergründet werden, welche speziellen Bedürfnisse hörgeschädigte Lernende beim Mathematiklernen haben. Darüber hinaus bildet diese Lernergruppe einen Spezialfall, wenn es allgemeiner darum geht, ein besseres Verständnis davon zu bekommen, welche Faktoren Einfluss auf die Ausbildung mathematischer Inhalte haben. In einer qualitativen Eingangsstudie wird zunächst der Frage nachgegangen, *wie Gehörlose Gesten und Gebärden nutzen, um sich mathematische Inhalte zu erschließen* und wie dies möglicherweise das Verständnis dieser Inhalte beeinflusst.

Mathematikdidaktische Aspekte

Ich verstehe Mathematiklernen als sozialen Prozess in dem Individuen Bedeutung co-konstruieren, austauschen und abgleichen. Hierdurch wird in und durch soziale Interaktion mathematisches Wissen konstruiert. Dies geschieht nicht nur durch Sprache, sondern auch Gesten, schriftliche Zeichen und den Gebrauch von Artefakten. Lernen verstehe ich somit auch als multimodalen Prozess. Zudem gehe ich davon aus, dass sich unser Denken durch unsere Interaktion in der Welt formt und gleichzeitig darin ausdrückt. Durch ähnliche Erfahrungen in der Welt wird es erst möglich, dass wir ähnliche Bedeutungen konstruieren, die wir in der sozialen Interaktion abstimmen können.

Gehörlosigkeit schafft geänderte Bedingungen für soziale Interaktionen und geänderte Bedingungen die Welt zu erfahren. Wesentlich hierfür scheint vor allem die geänderte Sprachmodalität der Gebärdensprache als gestisch-visuelle, räumliche Sprache. Vygotskij folgend geht Healy (2015) davon aus, dass eine Ersetzung des Sinnesorgans, durch das Informationen aufgenommen werden, auch zu einer Veränderung von Struktur und Ablauf des Denkens führt. Während dieses die individuelle Bedeutungsentwicklung beeinflussen kann, hat dies vor meinem theoretischen Ansatz auch Auswirkungen auf das Lernen in sozialer Interaktion. Ich gehe daher auch davon aus, dass die geänderte Form der Interaktion den sozialen Lernprozess beeinflusst.

Gebärdensprache(n)

Anders als oft angenommen sind Gebärdensprachen nicht einfach eine Visualisierung der Lautsprache, sondern eigene, natürlich wachsende Sprachen mit eigenen syntaktischen Regeln, die die Kommunikationsform der Gehörlosen und vieler Hörgeschädigter bilden. Als relativ junge Sprachen entwickeln sich die Gebärdensprachen ständig weiter, wobei für fehlende Begriffe neue Gebärden geschaffen, innerhalb der Gehörlosengemeinschaft getestet und ausgehandelt werden. Die hierbei entwickelten Gebärden sind bei Weitem nicht einheitlich; die Form und Verwendung von Gebärden, also die konventionellen Bedeutungen der Sprachzeichen, unterscheiden sich international und zum Teil auch bereits überregional. Gemeinsam sind den verschiedenen Gebärdensprachen aber einige Aspekte, in denen sie sich von Lautsprache unterscheiden. Im Folgenden wird sich vor allem auf diese Gemeinsamkeiten bezogen, wenn von *der* Gebärdensprache (GS) die Rede ist.

Zwei Eigenschaften der Gebärdensprache: Simultanität und Ikonizität

Während in Lautsprache Information sequentiell und linear aneinandergereiht wird, besteht im gebärdensprachlichen Ausdruck die Möglichkeit der simultanen Darstellung unterschiedlicher Aspekte der Äußerung. Zwar wird hierdurch ausgeglichen, dass die gebärdensprachliche Artikulation mehr Zeit benötigt, es können in GS aber auch nur solche Konzepte simultan dargestellt werden, die in einer *syntagmatischen Beziehung* zueinanderstehen, d. h. solche, die zusammen genutzt werden (z. B. „Auto“, „Straße“, „fahren“, „schnell“). *Paradigmatische Beziehungen*, also Beziehungen zwischen Konzepten, die hierarchisch angeordnet werden können (z. B. „Auto“, „Fahrzeug“, „Cabrio“), müssen, wie in Lautsprache auch, linear gebärdet werden (Grote, 2010, S. 313). Grote merkt an, dass hierdurch möglicherweise bevorzugt solche Inhalte kommuniziert werden, die in syntagmatischer Beziehungen zueinanderstehen (ebd.). Ihre Vermutung, dass dies wiederum zu einer engeren Vernetzung dieser Beziehungen führen kann, konnte sie experimentell bestätigen. Außerdem weisen Gebärden oft eine äußere Ähnlichkeit zu dem auf, was sie bezeichnen; sie haben eine *ikonische* Beziehung zu ihrem Referenzobjekt. Grote schreibt bezüglich „Begriffsbildung und Wissensgenerierung“: „Wenn man davon ausgeht, dass Erkenntnisprozesse grundsätzlich zeichenvermittelte Prozesse sind, dann wird die Ähnlichkeitsbeziehung zwischen Ikon und Referenzobjekt aktiv konstituiert. Das bedeutet, dass im Prozess der Ikonisierung auf bestimmte Eigenschaften des semantischen Konzeptes fokussiert wird, diese dadurch vermutlich markiert werden und im semantischen Netz eine exponierte Stellung erhalten“ (ebd., S. 312). In Verfikationstests, in denen Probanden entscheiden mussten, ob vorgegebene Bilder zu einem gegebenen Begriff passten oder nicht, erhielt sie Evidenz dafür, dass „diejenigen Merkmale, die im ikonischen Moment der Gebärdensprache reflektiert werden, eine besondere Relevanz für das gesamte semantische Konzept [besitzen]“ (ebd., S. 316). So fielen die Reaktionszeiten für diejenigen Bilder, die auf das Merkmal verwiesen, das der Gebärde ikonisch ähnelt, kürzer aus, was auf eine stärkere semantische Verbindung hinweist.

Wie wirken sich diese Aspekte aber nun auf das Mathematiklernen in sozialer Interaktion aus? Führt die bevorzugte simultane Artikulation zu einer besonderen Ausprägung syntagmatischer innermathematischer Beziehungen? Und welche Rolle spielt die ikonische Referenz auf mathematische Inhalte?

Die Eingangsstudie

In einer Eingangsstudie untersuche ich zunächst, *wie Gehörlose Gesten und Gebärden nutzen, um sich mathematische Inhalte zu erschließen*. Nach einer ersten Annäherung an das Feld durch Gespräche mit Lehrkräften an Förderschulen für Kommunikation und Sprache sowie Unterrichtshospitationen, filme ich Mathematikunterricht in einer fünften (Geometrie) und in einer sechsten (Bruchrechnung) Klasse. Die Videoaufnahmen, die den Klassenraum aus drei Perspektiven erfassen, werden von einer gehörlosen Mitarbeiterin in Gebärden-Glossen transkribiert und untertitelt. Diese untertitelten Videos werden als Grundlage für die Interpretation der mathematischen Referenz hinsichtlich der Simultanität und Ikonizität der im Mathematikunterricht gebrauchten Gebärden dienen. Hieraus bilde ich Hypothesen, auf deren Grundlage ich einen Leitfaden für weitere Schülerinterviews entwickele, die von der gehörlosen Mitarbeiterin durchgeführt werden. Durch diese Interviews sollen Einsichten zum Zusammenhang zwischen gebrauchten Gebärden und Schülervorstellungen erlangt werden.

Aus Beobachtungen in den Phasen 0 und 1 lassen sich bereits erste potentiell bedeutsame Eindrücke ableiten. So tritt eine *innersprachliche Ikonizität* auf, in denen die Gebärde an eine andere Gebärde erinnert die in der Alltagssprache Bedeutung hat. Eine Abweichung findet sich hier nur im Mundbild, in dem ein anderes Wort geformt wird. Als Beispiel lässt sich hier die Einführung des Begriffes „Kredit“ im Kontext Zinsrechnung anführen, dessen Gebärde mit der für „leihen“ gleich ist. Außerdem stehen Gebärden mit ikonischer Ähnlichkeit zu symbolischen Schreibweisen oder Handlungen denen gegenüber, die eher den metaphorischen Charakter der mathematischen Idee widerspiegeln. So werden für „Zähler“ und „Nenner“ einerseits Gebärden gebraucht, die auf „Zahl oben“ und „Zahl unten“ verweisen, andererseits auch solche, die innersprachlich ikonisch ähnlich sind zu „Zählen“ und „Name“/“nennen“, wie auch Mischformen von beidem (Handhaltung von „Name“ unter einem angedeuteten Bruchstrich).

Ausblick

Die bisherigen Beobachtungen betreffen vor allem Aspekte der Ikonizität. Für tiefere Analysen hierzu, sowie die Analyse betreffend der Simultanität werden zunächst die Untertitelungen der Videoaufnahmen benötigt.

Im weiteren Projektverlauf ist u.a. eine Erforschung mathematischer Grundvorstellungen gehörloser Schülerinnen und Schüler geplant. Ergebnisse des Zusammenhangs dieser mit den entsprechenden Gebärden können zu einer Entwicklung eines Lexikons mathematischer Gebärden beitragen. Hieran zeigen vor allem die kooperierenden Lehrer starkes Interesse, da es hierzu wenig Einigkeit gibt. Einigungen finden bisher, wenn überhaupt, zumeist schulintern statt, wobei die „Natur der Gebärde“ hinsichtlich der mathematischen Referenz oft nicht mitreflektiert wird. Weiterhin könnte eine komparative Interventionsstudie, durchgeführt im Regel- wie auch im Förderunterricht, Aufschlüsse darüber geben, wie Gesten im Mathematikunterricht gewinnbringend hinsichtlich syntagmatischer und paradigmatischer Beziehungen im Kontext Mathematik eingebracht werden können.

Literatur

Grote, K. (2010). Denken Gehörlose anders? Auswirkungen der gestisch-visuellen Gebärdensprache auf die Begriffsbildung. *Das Zeichen - Zeitschrift für Sprache und Kultur Gehörloser 85*, 310-319.

Healy, L. (2015). Hands that see, hands that speak: Investigating relationships between sensory activity, forms of communicating and mathematical cognition. In: *Preconference Proceedings of ICME 12* (S. 298–316). Seoul: ICMI.

Hyde, M., Zevenbergen, R. & Power, D. (2003). Deaf and hard of hearing students´ performance on arithmetic word problems. *American Annals of the Deaf* 148, 56-64.

Nunes, T. & Moreno, C. (1998). Is hearing impairment a cause of difficulties in learning mathematics? In C. Donlan (Ed.), *The development of mathematical skills* (S. 227-254). Hove (UK): Psychology Press.

Nunes, T. (2004). *Teaching Mathematics to the Deaf Children*. London and Philadelphia: Whurr Publishers LtD.

Eduard KRAUSE, Siegen

Erkenntnistheoretische Parallelen zwischen Schulmathematik und –physik aus mathematikdidaktischer Sicht

1. Der pragmatische Zusammenhang von Mathematik und Physik

Mathematische Kompetenzen spielen bekanntlich eine große Rolle im Physikunterricht. Häufig benötigte Fertigkeiten sind dort beispielsweise das Umstellen von Gleichungen, Ableiten von Funktionen oder das Bestimmen von Mittelwerten u.v.m. Andererseits erfreut sich die Physik auch im Mathematikunterricht zunehmender Beliebtheit. Dabei geht es nicht nur um die Veranschaulichung mathematischer Inhalte durch physikalische Anwendungsbeispiele, sondern auch um die Methoden der Physik. Allen voran wird das Experimentieren, zunehmend im Mathematikunterricht eingesetzt. Doch sind physikalische Anwendungen und Methoden sinnvoll für den Mathematikunterricht? Welches sind die Parallelen beider Fächer und wie können sie fächerverbindend gelehrt werden, ohne eine falsche Vorstellung des jeweils anderen Faches zu vermitteln? Diese Fragen sollen im Folgenden diskutiert werden.

2. Vor- und Nachteile eines anschaulichen und experimentellen Mathematikunterrichts

Der anwendungsorientierte und experimentelle Mathematikunterricht ist aus vielerlei Hinsicht sinnvoll. Aus bildungspolitischen Gründen sollten Schülerinnen und Schüler mit Hilfe der Mathematik Ereignisse in der Gesellschaft, Kultur und Natur in einer spezifischen Art und Weise wahrnehmen und verstehen (Winter 1996). Des Weiteren gibt es auch entwicklungspsychologische Argumente für das händische und induktive Schließen im Mathematikunterricht (vgl. Gopnik 1998). Neben diesen Vorteilen birgt der anwendungsorientierte und experimentelle Mathematikunterricht aber auch Risiken. Alan Schoenfeld betont in seinem Werk „mathematical problem solving“ den Einfluss des belief systems eines Menschen auf sein mathematisches Problemlösen (Schoenfeld, 1985). Schoenfelds Schülertransskripte machen deutlich, dass ein anschauungsorientierter Mathematikunterricht Gefahr läuft, eine naiv-empirische Auffassung von Mathematik zu vermitteln. Mit einer solchen Auffassung argumentieren Schülerinnen und Schüler rein anschauungsgebunden. So werden beispielsweise zwei sich logisch widersprechende Lösungen eines geometrischen Problems gleichermaßen als richtig angesehen, weil die Zeichnungen jeweils richtig aussehen. Die konkrete Aufgabe war, zwischen zwei gegebenen nichtparallelen Geraden einen Kreis derart zu konstruieren, dass er von beiden Geraden tangiert wird. Ein Berührpunkt war gegeben (Abbildung 1). Dabei ist hier Lösung A falsch und Lösung B richtig.

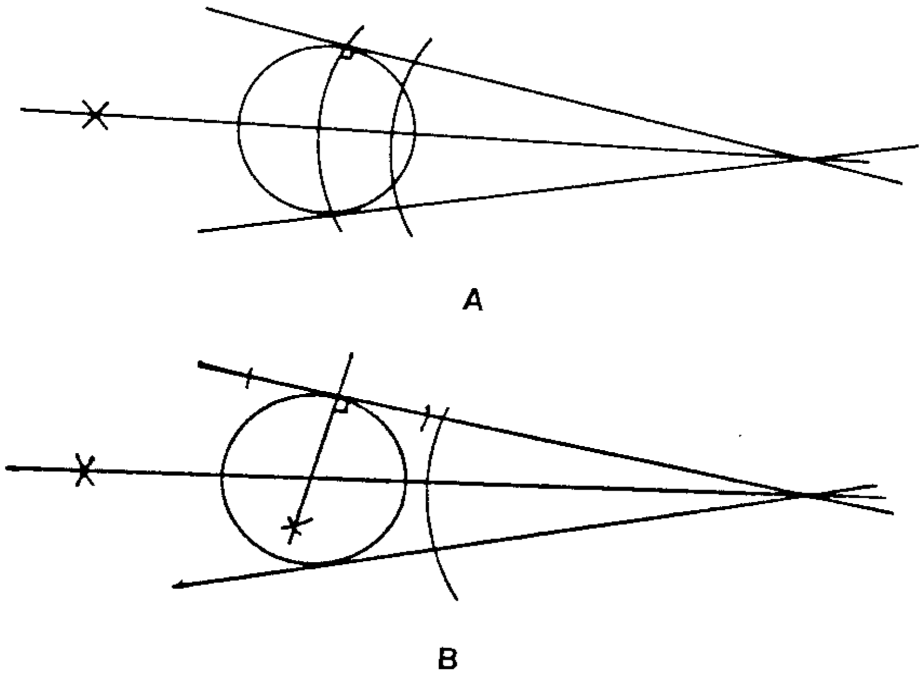


Abbildung 4: Zwei sich widersprechende Lösungen werden von Schülern mit einer naiv-empirischen Auffassung von Mathematik beide als richtig angesehen, wenn die Zeichnung gut aussieht, d.h. wenn die Tangenten den Kreis auf dem Zeichenblatt berühren (vgl. Schoenfeld 1985).

Wenn die Physik nur als Anwendungspool für den Mathematikunterricht fungiert und die Mathematik wiederum nur als „Werkzeugkasten“ gesehen wird, schürt man mit diesen Stereotypen grundsätzlich falsche Auffassungen beider Fächer. Diese Darstellung beider Fächer und deren strikte Trennung sind auch aus historischen Gründen nicht haltbar. So wurde der Bezug zur Empirie lange als Bestandteil der Mathematik gesehen. Moritz Pasch sagt beispielsweise: „Die geometrischen Begriffe bilden eine besondere Gruppe innerhalb der Begriffe, welche überhaupt zur Beschreibung der Außenwelt dienen […] und wonach wir in der Geometrie nichts weiter erblicken als einen Theil der Naturwissenschaft“ (Pasch, 1882). Andererseits nutzt die Physik die Mathematik spätestens seit Einführung der experimentellen Methode Galileis nicht nur als Werkzeug, sondern hat diese als essentielles Glied im Prozess der Erkenntnisgewinnung eingebunden (vgl. Kuhn 2001). Mathematiklehrende sollten sich der tieferliegenden Parallelen zur Physik bewusst sein und diese als Grundlage für fachübergreifende Aspekte im Mathematikunterricht nutzen. Im nächsten Abschnitt werden diese weiter ausgeführt.

2. Schulmathematik und Physik als empirische Theorien

Zur Beschreibung der erkenntnistheoretischen Parallelen zwischen Schulmathematik und Physik soll ein Brief Einsteins an Solovine genutzt werden (reprinted und kommentiert bei Holton 1981). Einstein spricht sich gegen die Auffassung aus, dass Naturgesetze durch induktive Verallgemeinerung generiert werden. Für ihn sind physikalische Begriffe und Axiome ad hoc-Setzungen, aus denen Sätze geschlussfolgert werden können. Diese gefolgerten Sätze werden in der Physik dann an der Empirie überprüft. Dieses Vorgehen, das schematisch in Abbildung 2 dargestellt ist, ist analog zum Vorgehen in einer anwendungsorientierten Mathematik.

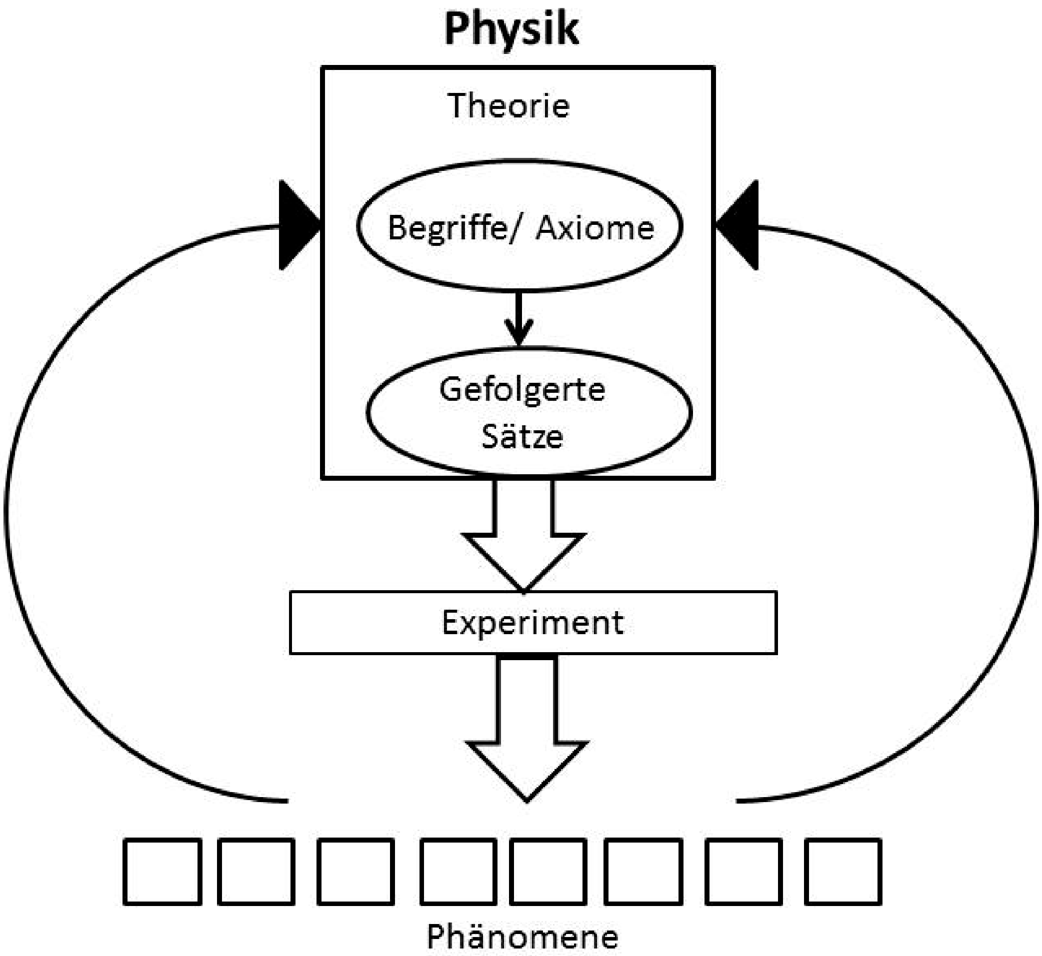


Abbildung 5: Einsteins schematische Darstellung zur Methodik der Physik

Würde in diesem Schaubild allgemeiner „Experiment" durch „Bewährung in der Empirie" und „Phänomene" durch „Konkrete Beispiele/ Gegenständliches" ersetzen werden, könnte mit diesem Modell ebenfalls die Schulmathematik beschrieben werden. Die Begriffe und Axiome sind geistige Schöpfung aber die aus ihnen gefolgerten Sätze sollen zum Zweck der Wirklichkeitserschließung auf die Realität angewendet werden können. Damit unterscheidet sich Schulmathematik von allgemeiner (Hochschul-) Mathematik, die – spätestens seit Hilbert – nicht mehr zwangsläufig Realitätsbezug vorweisen muss. In der reinen Mathematik ist die Existenz und Wahrhaftigkeit nur durch innere Konsistenz und Widerspruchsfreiheit gegeben. Möchte man aber die Mathematik in der Schule anwendungsorientiert lehren und keine naiv-empirische Auffassung vermitteln, so stellt das in Abbildung 2 dargestellte Konzept eine gute Möglichkeit dar. In diesem Sinne könnten beide, die Physik und die Schulmathematik, als empirische Theorien bezeichnet werden. Als solche sind sie im Rahmen des Strukturalismus auch schon rekonstruiert worden (Balzer, Moulines, Sneed 1987; Burscheid, Struve 2010).

3. Forschungspotential

Der Ansatz, Schulmathematik und Physik als empirische Theorien aufzufassen, betont die Gemeinsamkeiten und nicht die Unterschiede beider Disziplinen. Es stellt damit eine gute Grundlage für interdisziplinäres Forschen und Lehren dar. In dem Forschungsverbund der MINT-Didaktiken der Universität Siegen (MINTUS) sollen mit diesem Ansatz erkenntnistheoretische Parallelen von Physik erkannt und genutzt werden. Konkret geht es da u.a. um die Grundlegung und Konzeption von fächerverbindendem Unterricht oder die Beforschung der Übergangsproblematik von der Schule zur Hochschule in den MINT-Fächern.

Literatur

Balzer, W.; Moulines, C.U.; Sneed J. (1987): *An Architectonic for Science.* New York: Springer

Burscheid, H. J.; Struve, H. (2010): *Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen. Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung.* Hildesheim: Franzbecker.

Gopnik, Alison; Meltzoff, Andrew N. (1998): *Words, thoughts, and theories*. Cambridge, MA: MIT Press (A Bradford book).

Holton, G. (1981): *Thematische Analyse der Wissenschaften – Die Physik Einsteins und seiner Zeit.* Frankfurt am Main: suhrkamp Verlag

Kuhn, W. (2001): *Ideengeschichte der Physik.* Braunschweig: vieweg-Verlag.

Pasch, M. (1882): *Vorlesungen über die neuere Geometrie*. Berlin: Springer-Verlag

Schoenfeld, Alan H., (1985): *Mathematical Problem Solving*. Orlando et al.: Academic Press.

Winter, H. (1996). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik Nr. 61*, 37-46

Kerstin KRIMMEL, Werner Blum, Universität Kassel

Materialien aus dem Projekt MAKOS – Eine kompetenzorientierte Behandlung von Prognose- und Konfidenzintervallen

Im Februar 2016 wurde in Hessen das neue Kerncurriculum (KC) für die gymnasiale Oberstufe im Fach Mathematik verabschiedet, das zum Schuljahr 2016/17 in Kraft tritt. Im Bereich Stochastik (Q3) wurde das Thema „Prognose- und Konfidenzintervalle“ als neuer Unterrichtsinhalt aufgenommen; es löst damit in manchen Schuljahren (jeweils per Erlass) das Thema Hypothesentest als verpflichtenden Unterrichtsgegenstand ab.

Das Projekt MAKOS (**MA**thematische **K**ompetenzentwicklung in der **O**ber-**S**tufe) unterstützt die Einführung des KC durch die Erstellung einer Handreichung mit vielfältigen Unterrichtsmaterialien zu den verschiedenen Oberstufenthemen, mit einem Fokus auf Kompetenzorientierung, Binnendifferenzierung und Technologieunterstützung. Das Projekt wird vom HKM und vom DZLM finanziert und ist an den Universitäten Darmstadt und Kassel angesiedelt (für nähere Informationen zu diesem Projekt siehe Bruder & Roder, 2015, sowie den Beitrag von U. Roder in diesem Band).

Im vorliegenden Beitrag wird ein Einblick in die Projektergebnisse zu dem Modul „Prognose- und Konfidenzintervalle“ gegeben. Nach einer kurzen fachlichen Einordnung wird eine mögliche Unterrichtsreihe mit besonderem Blick auf die Einstiege skizziert, bei der die Förderung der prozessbezogenen Kompetenzen sowie der Selbstregulation der Lernenden durch binnendifferenzierende Bausteine im Vordergrund steht.

Fachliche Einordnung und Ziele

An das Themenfeld Wahrscheinlichkeitsverteilungen, das im Grundkurs die Binomialverteilung als einzige verpflichtende Verteilung beinhaltet, schließt im KC das Themenfeld Prognose- und Konfidenzintervalle mit folgenden drei inhaltlichen Stichworten an (vgl. Hessisches Kultusministerium 2016: Kerncurriculum gymnasiale Oberstufe Mathematik, Q.3.5):

- Sigma-Regeln: Legitimieren der Sigma-Regeln (1σ-, 2σ-, 3σ-Umgebungen) anhand konkreter Binomialverteilungen
- Prognoseintervalle für relative Häufigkeiten (auf Grundlage der obigen Sigma-Regeln): Schließen von der Grundgesamtheit auf die Stichprobe, Bestimmen von Prognoseintervallen in versch. Sachzusammenhängen
- Konfidenzintervalle für Wahrscheinlichkeiten (auf Grundlage der Sigma-Regeln): Schließen von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit, Konfidenzniveau, Bestimmen von Konfidenzintervallen in verschiedenen Sachzusammenhängen

Die Prognoseintervalle werden in der nachfolgend skizzierten Unterrichtseinheit als eine Verallgemeinerung der Sigma-Regeln aufgefasst, bei denen der Trefferanteil h ‚prognostiziert‘ wird und bei denen neben ganzzahligen σ-Umgebungen auch Umgebungen wie $\pm 1{,}96 \cdot \sigma$ mit ganzzahligen W‘keiten betrachtet werden. Die Legitimierung dieser Faustregeln erfolgt nur exemplarisch und empirisch durch Betrachtung konkreter Binomialverteilungen mit ausreichend großem Stichprobenumfang (Konvention: $\sigma > 3$).

Bei Prognoseintervallen wird mittels Informationen über die Grundgesamtheit auf eine Stichprobe geschlossen. Die Konfidenzintervalle werden dem als Intervallschätzung mit umgekehrter Schlussrichtung gegenübergestellt: Man schließt anhand von Informationen über eine Stichprobe auf die Grundgesamtheit, d.h. es wurde eine Trefferanzahl X (bzw. ein Trefferanteil h) in einer Stichprobe beobachtet, mit der man dann die unbekannte Trefferw‘keit p schätzt.

Bei beiden Themen soll der Fokus im Unterricht nicht auf dem Berechnen der Intervalle und damit der Kompetenz K5 liegen, sondern auf den Kompetenzen Modellieren, Kommunizieren und Argumentieren, um ein nachhaltiges Grundverständnis bei den Lernenden aufzubauen. Neben der Grundidee des (Intervall-) Schätzens und dem wechselseitigen Schließen zwischen Grundgesamtheit und Stichproben sollen anhand der Konfidenzintervalle exemplarisch die Möglichkeiten und Grenzen der induktiven Statistik in verschiedenen Anwendungsbereichen erfasst werden.

Differenzierende Einstiege

Gemäß dem zugrundeliegenden Binnendifferenzierungskonzept des MAKOS-Projekts werden den Lernenden zum Einstieg in eine Unterrichtseinheit verschiedene Zugänge zum selben inhaltlichen Kern ermöglicht. Die Einstiege zu den Themen Prognose- und Konfidenzintervalle umfassen jeweils drei ähnlich aufgebaute Lernaufgaben, die sich hinsichtlich Schwierigkeitsgrad, Grad der Offenheit und Kontext unterscheiden und aus denen die Lernenden (oder die Lehrkräfte) je eine Aufgabe wählen. Die drei Kontexte „A: Haribo“, „B: Umfragen zu Mathe als Lieblingsfach“ und „C: Werfen von Legosteinen & Würfeln“, die zur Einführung alltagsnah gewählt wurden, werden bei den Prognoseintervallen verwendet und wiederholen sich bei den Einstiegen zu den Konfidenzintervallen. Durch die ähnlichen Kontexte zu beiden Themen bietet sich die Chance, dass die wechselseitige Beziehung zwischen Prognose- und Konfidenzintervallen, d.h. deren Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede besonders deutlich werden. Exemplarisch werden nun die beiden Haribo-Aufgaben näher beschrieben, die als jeweils leichteste der drei Varianten erstellt wurden.

Zum Haribo-Teil 1 (Sigma-Regeln & Prognoseintervalle): Ausgehend von der bekannten W’keit p=1/6 dafür, dass ein zufällig ausgewählter Goldbär weiß ist (die W’keit wird in den Materialien durch einen Zeitungsartikel über Haribo belegt), schätzen die Schüler die Anzahl der weißen Bären in einer großen Tüte vom Stichprobenumfang n=100. Die Lernaufgabe mit den vorgegebenen Daten eignet sich gut, um sie handlungsorientiert durch tatsächliches Zählen von Goldbären zu begleiten oder auch zu ersetzen. Neben einer Punktschätzung sollen die Lernenden in der Aufgabe zunächst ein Intervall nennen, das sie intuitiv für plausibel halten. Anschließend berechnen sie mit geeigneter technischer Unterstützung (z.B. WTR, GeoGebra) und schriftlichen Hilfestellungen die W'keit für dieses Intervall und für weitere, symmetrische Umgebungen um μ, wie z.B. $\mu \pm 2\sigma$ (Ergebnis ca. 95,5%). Sie vergleichen ihre Ergebnisse mit den W'keiten, die ihnen nun als Faustregeln auch für andere Umgebungen wie $\mu \pm 1{,}96\sigma$ (ca. 95%) genannt werden, und validieren dadurch exemplarisch die Sigma-Regeln. Zum Abschluss geben sie mit Hilfe der nun bekannten Faustregeln ein 95%-Prognoseintervall für den *Anteil* der weißen Goldbären in einer großen Tüte an. Hiermit kann in späteren Aufgaben leicht das $1/\sqrt{n}$-Gesetz wie auch das empirische Gesetz der großen Zahlen begründet werden.

Zum Haribo-Teil 2 (Konfidenzintervalle): Wie groß ist der Anteil von Goldbären bei Haribo-ColoRados? Dieser Frage sollen die Lernenden anhand einer Stichprobe ColoRados vom Umfang n=80 nachgehen, entweder nur mit Hilfe von Daten aus der geführten Lernaufgabe oder auch durch tatsächliches Zählen. Nach einer intuitiven Punkt- und Intervallschätzung auf Basis des beobachteten Stichprobenwertes X überprüfen die Lernenden zunächst nur graphisch für verschiedene B(n;p)-Verteilungen, bei welchen p (zu festem n) der beobachtete X-Wert im 95%-Prognoseintervall liegt. Hierfür steht z.B. auf GeoGebra Tube eine abgestimmte Umgebung zur Verfügung. Die Lernenden erhalten damit eine anschauliche Definition des Konfidenzintervalls zum Niveau 95%. Im Anschluss an das Entwickeln dieser Grundvorstellung wird nun das Konfidenzintervall (mit schriftlichen Hilfestellungen) wie üblich schrittweise berechnet. Zum Abschluss dieser Lernaufgabe wird die vereinfachte Näherungsformel zur Berechnung eingeführt, bei der das unbekannte p im Radikanten durch h abgeschätzt wird.

Diagnosesets

Bei beiden Themen folgt im Anschluss an die Einstiege und ersten Übungen jeweils ein Diagnoseset zur Feststellung und Förderung des Grundverständnisses zu den neuen Inhalten. Die unbenoteten Sets sind ähnlich aufgebaut, umfassen jeweils vier Aufgaben und werden von den Lernenden in Einzelarbeit unter genauen Zeitvorgaben bearbeitet (25 Min.). In der ersten Aufgabe soll jeweils die Grundidee der Themen unter Nennung von Anwendungsbereichen verbal erläutert werden. In beiden Sets folgen eine Grundaufgabe zur Berechnung und Interpretation eines Prognose- bzw. Konfidenzintervalls in einem neuen Sachkontext und eine Umkehraufgabe, bei der Rechnung und Ergebnis gegeben sind. In der letzten Aufgabe werden im Muliple-Choice-Stil inhaltliche Aussagen beurteilt (richtig/falsch).

Aufgabenset

Mit einem niveaugestuften Aufgabenset zu den beiden Themen Prognose- und Konfidenzintervalle wird das Verständnis der Lernenden gefördert und vertieft. Das Set umfasst acht Aufgaben mit steigendem Schwierigkeitsgrad, aus denen die Lernenden z. B. drei auswählen und selbständig bearbeiten. Durch die Bereitstellung von Wahlaufgaben mit schülergerechten Lösungen wird die Selbstregulation der Lernenden gefördert.

Das Set umfasst vielfältige Basis-, Standard- und Vertiefungsaufgaben, die hinsichtlich Aufgabentyp und geforderten Kompetenzen variieren. Im Kasten ist exemplarisch eine Aufgabe mit mittlerem Schwierigkeitsgrad abgebildet, durch die insbesondere Argumentieren, Kommunizieren und Umgehen mit formalen Elementen der Mathematik gefördert werden.

Aufgabe 5: Behauptungen prüfen *(K1, K5, K6)*

Entscheiden und begründen Sie jeweils, ob die die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Dabei sind die nicht angesprochenen Parameter (Konfidenzniveau, W'keit, Stichprobenumfang) jeweils konstant.

Nr.	Aussage	w	f
A	Je höher der Stichprobenumfang, desto kürzer ist das Konfidenzintervall.		
B	Bei einer Verdoppelung des Stichprobenumfangs halbiert sich die Länge des Konfidenzintervalls (wenn es mithilfe der Näherungsformel bestimmt wurde).		

Checkliste

Ein abschließender Überblick zu der Unterrichtseinheit wird den Lernenden durch eine Checkliste ermöglicht, in der die Basiskompetenzen zu den beiden Themen auf einer DinA4-Seite zusammengefasst werden. Die „Ich kann“ – Formulierungen werden alle durch eine Beispielaufgabe illustriert.

Literatur

Bruder, R. & Roder, U. (2015): MAKOS - Ein Projekt zur Umsetzung der Abiturstandards Mathematik in Hessen. In Kaiser, G. & Henn, H.-W. (Hrsg.): *Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht* (S.281 - 295). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Thomas KROHN, Leipzig; Karin RICHTER, Halle (Saale)

Spielend lernen: zur Vernetzung geometrischer Grundbegriffe

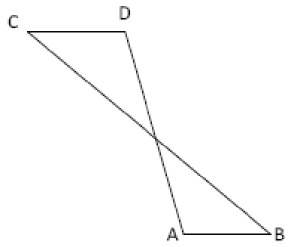
Das Lernen geometrischer Grundbegriffe verbindet den Erwerb konkreter Kenntnisse mit dem Aufbau angemessener Vorstellungen und dem Aneignen damit verknüpfbarer Vorgehensweisen. Dies wird für Grundbegriffe dadurch erweitert, dass ein leistungsfähiges Netz zwischen Begriffen aufgebaut wird. Wie gelingt es, diese für geometrische Grundbegriffe vielschichtige Lernsituation so zu gestalten, dass sie nachhaltig, intensiv, differenziert ist? Der Beitrag stellt spielbasierte Ansätze und die zugehörigen fachdidaktischen Grundlagen vor.

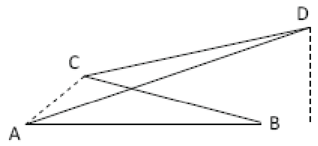
1. Lernen geometrischer Begriffe im Mathematikunterricht

„Begriffe bilden Bausteine der Mathematik. Sie sind Gegenstände, über die wir nachdenken, und Werkzeuge, mit denen wir arbeiten.“ [Vollrath 1987] Diese Sichtweise macht deutlich, was A. Lambert 2003 betont: Begriffsbildung ist ein wesentlicher Gegenstand des Mathematikunterrichts, der alle Bereiche des Mathematik-Curriculums durchzieht. Der Aufbau angemessener Vorstellungen, der Erwerb von Kenntnissen um die Eigenschaften und die Vernetzung von Eigenschaften, die den Begriff ausmachen, ebenso wie das Aneignen von Fähigkeiten der Nutzung des Begriffs bilden zentrale Aspekte für den Prozess des Erlernens, Verankerns und Anwendens mathematischer Begriffe. Im Folgenden soll dies exemplarisch aus der Sicht des Erlernens geometrischer Schlüsselbegriffe beleuchtet werden.

Aufbauend auf geometrischen Grundbegriffen (wie Punkt, Gerade, Ebene,…) entwickelt sich das „Haus der Geometrie“ hieraus durch Zuweisung von charakterisierenden Eigenschaften für die Begriffsbausteine in ihrer Vernetzung und Abgrenzung untereinander. Ist ein geometrischer Begriff angelegt, ist sein Inhalt also durch Eigenschaften, Merkmale und deren Beziehungen untereinander bestimmt, gilt es, ihn einzuordnen in einen größeren Kontext, abzugrenzen und zu vernetzen. So kristallisieren sich über Beispiele und Gegenbeispiele, Begriffsnetzwerke heraus.

Anhand des Vierecks soll dies beispielhaft verdeutlicht werden: *Eine Fläche, die von 4 Strecken begrenzt wird, heißt Viereck. Ein Viereck hat 4 Ecken.* Diese gebräuchliche, auf den Grundbegriffen Fläche und Strecke aufbauende Begriffsfestlegung scheint durch die geforderten Eigenschaften, die den Grundbegriffen hier zugeordnet werden, wohl gelungen, wenn auch vielleicht etwas redundant - aber dies nimmt man im Mathematikunterricht zumindest auf den ersten Stufen der Begriffsbildung oft in Kauf, geht es doch darum, angemessene und belastungsfähige Vorstellungen vom Begriff zu entwickeln. Im Umgang mit dem Begriff geht es darum zu untersuchen, ob betrachtete Objekte diese Eigenschaften oder vielleicht sogar Spezialisierungen hiervon erfüllen. So entwickeln sich speziell für Vierecke Ansätze zu unterschiedlichen *Häusern der Vierecke*, je nachdem, welche weiteren Eigenschaften im Blick sind. Gleichzeitig entsteht die Frage, ob betrachtete Objekte (wie etwa die nebenstehend abgebildeten Figuren) die geforderten Eigenschaften erfüllen.





Der hier beschriebene Weg zeichnet ein typisches, gewohntes Vorgehen nach: Der Begriff wird durch eine Familie von charakteristischen Eigenschaften festgelegt. Durch lokales Ordnen wird in einem bekannten Begriffsfeld nach Zusammenhängen und Beziehungen gesucht und diese werden im Haus der Geometrie verankert. Aber warum sollte – um das Begriffsverständnis und die Fähigkeit des schöpferischen Umgangs damit zu vertiefen und auszubauen – nicht auch noch ein weiterer Schritt getan werden: der Versuch, sich aus dem bekannten Begriffsfeld zu lösen und nun aus dem Blickwinkel der als wichtig erkannten Eigenschaften nach Begriffen zu suchen, die diese Eigenschaften erfüllen? Die im Folgenden vorgestellten spielerischen Ansätze zur Auseinandersetzung mit Vierecken versuchen diesen Perspektivwechsel zwischen Begriff und Eigenschaften exemplarisch am Beispiel von Vierecken umzusetzen und so einen Beitrag zu liefern für nachhaltig sicheren Umgang mit Begriffsvernetzungen und die logische Durchdringung des Bildens von geometrischen Begriffen.

2. Entdeckend-erkundende spielbasierte Ansätze

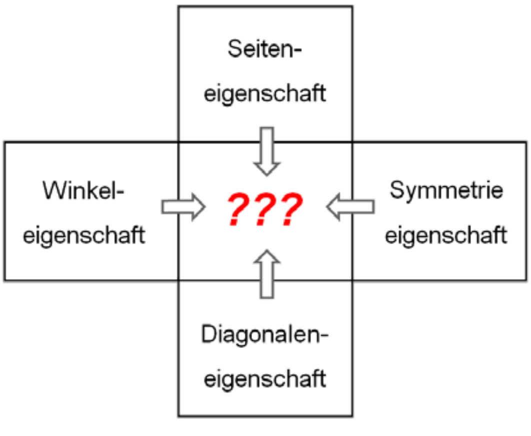
Die für einen Einsatz im Mathematikunterricht vorgesehenen Situationen innerhalb des Lernens geometrischer Grundbegriffe greifen nun die obigen Grundlagen zur Entwicklung eines gefestigten Begriffsverständnisses der Schülerinnen und Schüler auf und betten sie ein in spielerische Kontexte. Dabei wurden grundlegende allgemein-pädagogische und fachdidaktische Anforderungen an im Mathematikunterricht gewinnbringend eingesetzte Lernspiele berücksichtigt:

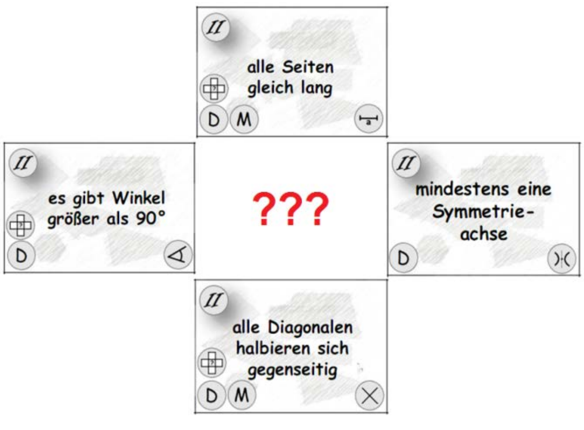
- ausgewogene Balance zwischen Strategie und Zufall
- einfache und nachvollziehbare Regeln
- individuell steuerbar und differenzierbar durch Lehrende, durch Lernende, durch Lerngruppe
- möglichst in unterschiedlichen Unterrichtsphasen einsetzbar

Hierauf aufbauend sind für den konkreten Unterrichtsgebrauch in der Sekundarstufe 1 verschiedene Spielsituationen entstanden, darunter einige basierend auf bekannten Gesellschaftsspielen.

Zu diesen zählt das Spiel „*n-Eck-Domino*“, welches auf Grundstruktur des Anlegens zweier zueinander passender Objekte beruht. Modifiziert wurden die bekannten Domino-Anlegeregeln dahingehend, dass es nun einen permanenten Blickrichtungswechsel zwischen Begriff/Abbildung und einer charakterisierenden Eigenschaft aus den Kategorien Seite, Winkel, Diagonale oder Symmetrie erfordert, um die bestehende Domino-Reihe zu ergänzen. Gerade die Blickrichtung von der Eigenschaft zu einem passenden Begriff steht dem vorrangig gewohnten Weg, einen Begriff mit (Gegen-) Beispielen zu begründen entgegen. Durch die unterschiedlich stark einschränkenden Eigenschafts-Vorgaben (z. B. „es gibt mindestens einen rechten Winkel“ gegen „alle Diagonalen sind senkrecht zueinander, aber halbieren sich nicht“) ist nicht nur der Zufall, sondern auch strategisches Vorgehen eine wesentliche Spieleigenschaft. Differenzierung ist etwa durch konkrete die Wahl der n-Ecke (etwa nur Vierecke) möglich.

Eine weitere Spielsituation, die besonders die Blickrichtung von charakterisierender Eigenschaft hin zur Reichhaltigkeit möglicher Begriffe thematisiert ist „*Aus vier wird Eins – n-Eck-Raten*“. Hierbei gilt es aus den oben genannten vier Eigenschafts-Kategorien (siehe Abbildung) einen möglichen Begriff zu erkennen oder (schwieriger!) die Nicht-Existenz zu begründen. Gerade diese Erkenntnis, dass unvereinbare Eigenschaften auf die Nicht-Existenz führen können, eröffnet viele Möglichkeiten für entdeckendes Lernen. Durch Aufzeichnen oder Auslegen mit Stäbchen ist der konstruktive Zugang möglich, gemeinsames argumentativ-kommunikatives Systematisieren und Vernetzen wird spielerisch umgesetzt. Auch hier ist eine Differenzierung wie oben möglich.





Fazit: Statt *„Ist das ein ...?“* vor allem *„Was ist das für ein ...?“*

Kann es gelingen, die gewohnte Blickrichtung auf geometrische Begriffe, hier am Beispiel der Vierecke, aufzubrechen und die verstehende Sicht auf geometrische Eigenschaften nachhaltig zu entwickeln? Erste Erfahrungen aus der Schulpraxis haben gezeigt, dass dies zunächst *ungewohnt* und *anstrengend* sein mag, aber, eingebettet in eine Übungs- und Festigungsphase zu ebenen Vierecken, wirkt bald das Motivationspotential der Spielsituationen. Der entdeckende Umgang mit Eigenschaften und das Herausknobeln passender Vierecke entfalten rasch ihren Reiz und gleichzeitig wird ganz unversehens vorhandenes Wissen um Vierecke und ihre Eigenschaften vertieft und gefestigt.

Trotz dieses hohen Anspruchs hat sich gezeigt, dass die Einbettung des Lernens von geometrischen Begriffen in spielerische Situationen mit der Beachtung der Gleichwertigkeit der Blickrichtungen Begriff $\leftrightarrow$ Eigenschaft erstens zu einem nachhaltig sicheren Umgang mit und innerhalb der Begriffsvernetzung von geometrischen Basisbegriffen führen kann und zweitens besonders die Rückrichtung sehr stark der wissenschaftlich-logischen Durchdringung des Bildens mathematischer Begriffe entspricht und damit über diesen Spielkontext hinaus einen Beitrag für das Erkunden, Systematisieren und Reflektieren von mathematischer Strukturen leistet.

Literatur

Krohn, Th., Kurow, J., Richter, K. (2016): Lernspiele zu Eigenschaften von n-Ecken. Hamburg: Raabe.

Grzesik, J. (1992). Begriffe lernen und lehren. Stuttgart Klett.

Hischer, H. und Lambert, A. (2002): Begriffsbildung und Computeralgebrasysteme. In: Hischer, H. (2002): Mathematikunterricht und Neue Medien. Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht. Hildesheim Franzbecker, S. 138-166.

Homann, G. (1991): Thesen zum Einsatz von Lernspielen im Mathematikunterricht. In: Homann, G. (Hrsg.)(1991) Mathematik – Lernspiele.

Lambert, A. (2003): Begriffsbildung im Mathematikunterricht. Universität des Saarlandes: Preprint 77.

Prediger, Susanne Wege zur Nachdenklichkeit im Mathematikunterricht. In: Peschek, W. [Hrsg.] (2002): Beiträge zum Mathematikunterricht, Hildesheim Franzbecker, S. 399-402.

Vernay, R. (2013): Spiele im Mathematikunterricht. In: mathematik lehren 43, S. 6-12.

Vollrath, H.-J. (1987) Begriffsbildung als schöpferisches Tun im Mathematikunterricht. In: ZDM Jg. 19(3), S. 123-127.

Weth, Th. (1999): Kreativität im Mathematikunterricht. Begriffsbildung als kreatives Tun. Hildesheim Franzbecker.

Julian KRUMSDORF, Köln

Visual Proving

Wer vorher sah, weiß nunmehr, weise – dieser mehrdeutige Sinnspruch, in dem die etymologische Herkunft vom *(be)weisen* im lat. *videre* und altgrch. (ϝ)οῖδα/εἴδω (respektive sanskr. *vḗda*) aufscheint, lässt sich in gewisser Weise auch auf die (Vermittlung von) Mathematik als beweisender Disziplin beziehen. Welche Rolle spielt das Visuelle beim Beweisen als mathematischer Tätigkeit? Hanna & Sidoli (2007, 73ff.) interpretierend, lässt sich je nach Standpunkt ein Bild oder eine (visuelle) Repräsentation als optional, integral oder gar beweiskonstituierend verstehen, während die Beweisführenden den Beweis als latente Sinnstruktur idealerweise allmählich und miteinander aushandelnd offenlegen. Dabei können sie ihren Beweis am Bilde, anhand der jeweiligen (visuellen) Repräsentation oder allgemeiner diagrammatisch gebunden führen, oder sich von einer solchen Darstellung lösen, diese ggf. wechseln und eine andere beiziehen.

Nach Bemerkungen zu Visualisierung und Beweisen soll also deren Verbindung zu *visual proofs* der einschlägigen Literatur nach kurz skizziert werden. Versteht man zudem den Beweis als latente Sinnstruktur, wirft dies die Frage auf, in welcher Weise das Bild oder die jeweilige (visuelle) Repräsentation beim (beispielgebundenen) Beweisen fungiert. Wie kann diese den Beweisenden dienlich sein, um den Beweis subjektiv zu realisieren, dabei sprachlich auszuhandeln und zu manifestieren? Empirisch mag dies etwa durch ein Lehr-Lern-Experiment mit an Plättchenmustern agierenden und schließlich *modulo*-rechnenden Schülerpärchen der 4. Klasse untersucht werden.

1. Proof and Visualisation

An hauptsächlichen Beweisfunktionen nennt de Villiers (1990, 18f.) *verification*, *explanation*, *systematisation*, *discovery* und *communication*. Bell (1976, 24) bezeichnet den zweiten Aspekt noch als *illumination* und sieht die Vermittlung von Einsicht, warum eine Behauptung gilt, als Qualitätsmerkmal eines Beweises an. Mit Hanna (1989) gesprochen, handelt es sich primär also um den Unterschied zwischen *proofs that prove* und *proofs that explain*. Als Tätigkeit des *proving why* verlangt dies im Mathematikunterricht auch das Einbeziehen nicht-formeller Ausdrucksweisen im Beweisen durch die Lernenden. Hanna & Sidoli (2007, 73ff.) werfen die Schlüsselfrage auf, ob und inwieweit visuelle Repräsentationen beim Beweisen nicht nur Evidenz erzeugen, sondern auch selbst begründend wirken. Je nach Forschungsperspektive lässt sich ihrer Ausführung nach ein Bild oder eine (visuelle) Repräsentation als Beweiszugabe, Beweismittel oder Beweis selbst verstehen:

Im ersten Fall trägt Visualisierung illustrativen Charakter, und der (zumeist formelle) Beweis steht für sich in eher verifikativer Funktion. Dass ein Bild kein Beweis sei, jenes zuweilen über diesen hinwegtäuscht oder auch stattdessen besonders haftend bleiben kann, lässt sich historisch wie auch subjektiv durchaus nachvollziehen. Kadunz (2010, 12f.) verweist in diesem Zusammenhang etwa auf Platons Dialoge und stellt dabei eine gewisse Reserve der älteren Philosophie gegenüber dem Betrachten von Bildern fest.

Nicht nur die neuere Verbreitung dynamischer Visualisierungswerkzeuge relativiert das verifikative Primat des Beweisens. Dem genannten Autorenduo nach sieht Giaquinto (1992, 389ff.) Visualisierung auch als innerlich vollzogenes Experiment, welches Beweisen konstruktiv ermöglicht und insofern mehr entdeckenden Charakter hat. Welche (visuelle) Repräsentation kann dabei aber als Beweismittel gewählt werden und Sinnstruktur aufdecken? Dies hängt wohl neben stofflichen Gegebenheiten auch vom Verlauf des Beweisprozesses ab – das jeweilige Bild oder die (visuelle) Repräsentation sollte nach eigener Auffassung manchen Beweisführenden die allgemeingültige Behauptung nämlich nicht nur (ggf. entdecken und) beispielhaft prüfen, sondern nach allem auch noch beweisen lassen. Bilder sind nach Kadunz (1998, 336) zudem nicht selbstevident, so dass der Lernende sie wie Veranschaulichungsmittel lesen, intern repräsentieren und erfolgreich verwenden lernen muss. Visualisierung lässt sich insofern als kognitive, zwischen wahrnehmbaren Objekten und internem Konstrukt vermittelnde Tätigkeit betrachten. Dabei leiste sie Kautschitsch (1994) zufolge eine „Rekonstruktion von Begriffs- und Operationssystemen“, knüpft also insbesondere an bereits vorhandenes Wissen an.

2. Visual Proofs

Dem Rahmen von Hanna & Sidoli (2007, 73ff.) weiter folgend, können visuelle Repräsentationen auch selbst beweiskonstitutierend wirken. Man kann daher wohl sagen, dass sie gleichsam *visual proofs* im engeren Sinne bilden. Borwein & Jörgenson (2009) betonen, dass deren „successfull visual representations tend to be spartan in their detail“. Nach Barwise & Etchemendy (1991, 180) steht der Beweisführende beim *diagrammatic reasoning* vor der Herausforderung, relevante implizite Strukturen explizit (auch digital) präsentierten Informationen zu entnehmen. Dies kann man auch als Versuch ansehen, den Beweis als latente Sinnstruktur vermöge der jeweiligen (visuellen) Repräsentation selbst zu entwickeln (oder vergleichsweise zu ersetzen, wie Brown (1999) mit seinen *picture-proofs*). Dem gegenüber fassen Pineda, Lee & Garza (2004) *diagrammatic proofs* als Transformationen von -prämissen und Beweiskonklusion repräsentierenden Diagrammen auf, wie sie eingangs am Beispiel des Satzes von Pythagoras zeigen.

Nelsen (1993, vi) überrascht in seinem Buch *Proofs without Words* mit der Aussage, dass diese nicht wirklich Beweise seien, die angeführten *pictures* *or diagrams* aber explanativen Charakter trügen und beweisevozierend wirkten. Kirsh (2008, 5ff.) versucht *visual proofs* vermöge von *(conceptual) illustrations* zu charakterisieren: „Visual proofs are illustrations in which the solution to an abstract proposition can be 'readily' grasped by looking at the labels and properties in the illustration." Ein *(conceptual) illustration* soll dem Leser in der Betrachtung der *concrete instance* einer Aussage zu deren *universal generalization* verhelfen. Dies erinnert an die Untersuchungen von Balacheff (1988, 217ff.) und Mason & Pimm (1984, 287) zu *generic proofs*: Das dabei als Träger des Allgemeinen fungierende *generic example* kann vom jeweiligen Betrachter unterschiedlich gedeutet und damit versprachlicht werden. Nach Tall (1995, 31f.) enthalten *visual proofs* oft enaktive Elemente und wirken generisch bzw. prototypisch für eine Klasse von Behauptungen.

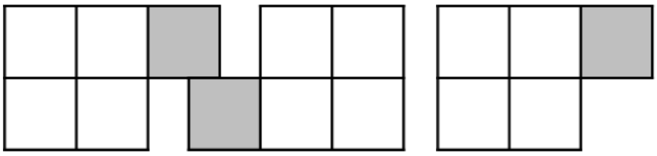
Das Visuelle streifend, sprechen Neubrand & Möller (1990, 57) in der figuralen Arithmetik von einem *Beweisen durch Hinschauen*, während Wittmann & Müller (1988, 249) den Begriff vom *inhaltlich-anschaulichen Beweisen* geprägt haben. Wittmann & Ziegenbalg (2004, 37ff.) betonen das Moment der Versprachlichung in den sogenannten *operativen Beweisen*. Dreyfus (1991, 15) resümiert über *visual thinking*, dass dieses mit verbalem und algebraischem Denken gleichermaßen einhergehen müsse.

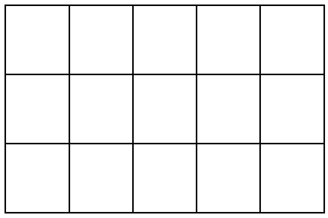
3. Latente Sinnstrukturen

Wie in Krumsdorf (2015) über beispielgebundenes Beweisen ausführlich dargestellt, lässt sich ein Beweis als latente Struktur auffassen, die Lernende allmählich subjektiv realisieren, (ggf. gemeinschaftlich) aushandeln und manifestieren. Dabei referenziert der Oevermann & al. (1979) entlehnte Begriff der latenten Sinnstruktur auf den Forschungsgegenstand selbst; der Beweis ist vermöge Toulmin (1958) häufig als geschichtetes Argumentgefüge darstellbar. Für das *visual proving* im engeren Sinne bedeutet dies nach dem oben Gesagten, dass für einen (gelingenden) Beweisprozess die Art der visuellen Repräsentation respektive Diagrammatik entscheidend ist. Diese kann den (geschichteten) Beweis als latente Sinnstruktur (ent)bergen. Lernenden kann dabei die Entwicklung ihrer visuellen Strukturierungsfähigkeit zu Gute kommen. Da das Visuelle die latenten Sinnstrukturen umso mehr verdecken kann, als dies etwa beim Beweisen an arithmetischen Beispielen der Fall ist, dürfte eine größere Bandbreite an beobachtbaren Beweiswegen zu erwarten sein. Die jeweilige Repräsentation muss zudem ähnlich wie die fragliche Behauptung ggf. erst konstitutiert und auf ihre Tauglichkeit hin geprüft werden, um Lernenden Erkenntniswege zum Latenten zu ebnen.

4. Lehr-Lern-Experiment

Mudaly (2013) untersucht die Frage „Is proving a visual act?" durch 1:1-Interviews mit Schülern der Mittelstufe über eine ihnen unbekannten, visuell lösbare Beweisaufgabe. Um dem kommunikativen Beweisaspekt gerechter zu werden, führte der Verfasser dieses laufenden Artikels mit Schülerpärchen der 4. Klasse vergleichbare Lehr-Lern-Experimente. Anders als Wittmann (2014, 214ff.), der operative Beweise zu (un)geraden Zahlen vermöge von Plättchenmustern bis zur 4. Klasse anbahnt, ist hier allgemeiner die visuell vorzunehmende Addition und Multiplikation mit Restklassen thematisiert worden (siehe Abbildungen). Eine erste Auswertung der eigenen Lehr-Lern-Experimente zeigte, dass es den Schülerpärchen durchaus gelingen kann, anhand von Plättchenmustern behauptete Rechengesetze im Zahlenbereich $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (für $n = 2, 3, 4, 5$) visuell zu begründen.





Ausgewählte Literatur

Dreyfus, T. (1991): On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. *Proceedings 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1, 33 – 48.

Giaquinto, M. (1992): Visualization as a means of geometrical discovery. *Mind and Language, 7,* 382 – 401.

Hanna, G. & Sidoli, N. (2007): Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives. *ZDM Mathematics Education 39,* 73 – 78.

Kadunz, G. (1998): Bemerkungen zur Visualisierung. In: Neubrand, M. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht.* Hildesheim: Franzbecker, 335 – 338.

Kautschitsch, H. (1994): „Neue“ Anschaulichkeit durch „neue“ Medien. In: *ZDM 1994 (3),* 79 – 81.

Kirsh, D. (2002): Why Illustrations aid understanding. *International Workshop on Dynamic Visualizations and Learning, Tubingen, Germany*.

Krumsdorf, J. (2015): Beispielgebundenes Beweisen. Universität Münster.

Mudaly, V. (2013): Is Proving a Visual Act? *Online Submission*, *Mevlana International Journal of Education (MIJE) 3(3),* 36 – 44.

Pineda, L., Lee, J., & Garza, G. (2004): Abstraction, Visualisation And Graphical Proof.

Tall, D. (1995): Cognitive development, representations and proof. *Proceedings of the conference Justifying and Proving in School Mathematics,* 27 – 38.

Wittmann, E. Chr. (2014): Operative Beweise in der Schul- und Elemenarmathematik. *mathematica didactica, 37,* 213 – 232.

Jessica KUNSTELLER, Köln

Zur Bedeutung von (Familien-)Ähnlichkeiten in mathematischen Lernprozessen

Dem Lernen von Ähnlichkeiten wird in der mathematikdidaktischen Forschung eine bedeutende Rolle zugeschrieben. In dem Beitrag wird mittels des Begriffs (Familien-)Ähnlichkeiten nach Ludwig Wittgenstein eine neue und verbindende Perspektive hinsichtlich der verschiedenen Forschungsansätze präsentiert. Hierzu werden außerdem verschiedene Arten und Funktionen von (Familien-)Ähnlichkeiten in mathematischen Lehr- und Lernprozessen herausgestellt.

Familienähnlichkeiten nach L. Wittgenstein (1953)

Der Begriff „Familienähnlichkeiten" geht auf die Sprachspielphilosophie von L. Wittgenstein zurück. Betrachtet man Zeichen wie -5, 13 und ¾ so lassen sich aus Expertensicht Ähnlichkeiten feststellen, z.B. dass sie als „Zahlen" bezeichnet und in verschiedene Zahlbereiche untergliedert werden können. Wittgenstein definiert den Begriff Familienähnlichkeiten an keiner Stelle seiner Werke - er exemplifiziert ihn anhand von Beispielen: „Und ebenso bilden z.B. die Zahlenarten eine Familie. Warum nennen wir etwas ‚Zahl'? Nun etwa, weil es eine - direkte - Verwandtschaft mit manchem hat, was man bisher Zahl genannt hat; [...]. (PU §67)" Ähnlichkeiten oder „Verwandtschaften", wie bei dem Begriff „Zahl", bezeichnet Wittgenstein als Familienähnlichkeiten: „Ich kann diese Ähnlichkeiten nicht besser charakterisieren als durch das Wort ‚Familienähnlichkeiten'; denn so übergreifen und kreuzen sich die verschiedenen Ähnlichkeiten, die zwischen den Gliedern einer Familie bestehen: Wuchs, Gesichtszüge, Augenfarbe, Gang, Temperament, etc. etc. - Und ich werde sagen: die ‚Spiele' bilden eine Familie. (PU §67)" Vergleichbar dazu, dass sich Mitglieder einer Familie durch verschiedene Eigenschaften ähneln können, ist dies auch bei den verschiedenen Zahlen der Fall (reelle Zahlen, Position auf dem Zahlenstrahl, ...): Während einzelne Eigenschaften gleich oder vergleichbar sind, unterscheiden sich andere voneinander. Neben Zeichen können auch Worte, Sätze oder (Sprach-)Spiele einander ähneln (s. Kunsteller 2015).

Empirie

Im Rahmen meines Dissertationsprojektes haben die Lernenden einer vierten Schulklasse die in Abb. 1 stehende Aufgabe erhalten.

a) Löse die folgenden Rechnungen möglichst geschickt.

$20 + 2 =$ ____	$16 + 7 =$ ____
$18 + 4 =$ ____	$3 + 20 =$ ____
$16 + 6 =$ ____	$17 + 6 =$ ____
$14 + 8 =$ ____	$7 + 16 =$ ____
$12 + 10 =$ ____	$20 + 3 =$ ____
$10 + 12 =$ ____	$13 + 10 =$ ____

b) Formuliert zusammen mindestens zwei Regeln.

c) Begründet eure Regeln.

Abb. 1: Erstes Arbeitsblatt

In dem an die Arbeitsphase anschließenden Unterrichtsgespräch wurde zunächst herausgestellt, dass die Ergebnisse spaltenweise gleich sind. Dieses Phänomen erklärte Lorena relativ zur linken Spalte mit folgendem allgemeinen Zusammenhang, welcher nachfolgend als „Regel“ bezeichnet wird: „wenn immer zwei abgezogen werden’ *(L nickt)* werden in der ersten Zeile dann- bei der plus halt immer zwei draufgetan [...] und dann kommt das gleiche Ergebnis raus.“[2] Nachdem das obenstehende Arbeitsblatt besprochen wurde, erhielten die Lernenden ein neues Arbeitsblatt (s. Abb. 2).

a) Löst die folgenden Rechnungen möglichst geschickt.

$24 \cdot 1 =$ ____
$12 \cdot 2 =$ ____
$8 \cdot 3 =$ ____
$6 \cdot 4 =$ ____
$4 \cdot 6 =$ ____
$3 \cdot 8 =$ ____
$2 \cdot 12 =$ ____
$1 \cdot 24 =$ ____

b) Formuliert zusammen mindestens zwei Regeln.
c) Begründet eure Regeln.

Abb. 2: Zweites Arbeitsblatt

Im Unterricht sprachen die Lernenden zunächst an, dass das Ergebnis immer 24 ist. Außerdem äußerten sie, dass sich die Zahlen entlang des ersten Faktors halbieren und die Zahlen des zweiten Faktors verdoppeln. Daraufhin gab Orla die folgende Regel an: „wenn bei der ersten Zahl immer geteilt- ist und bei der zweiten Zahl immer mal. ... [...] dann bleibt das Ergebnis gleich.“

Die Gegenüberstellung von Lorenas und Orlas Regeln verdeutlicht zahlreiche (Familien-)Ähnlichkeiten innerhalb der Äußerungen. Die Lernenden nutzen beispielsweise vergleichbare Worte oder Worthülsen, wie „ersten Zeile“ – „ersten Zahl“, „zwei“ – „zweiten“ oder „das gleiche Ergebnis“. Ähneln Lautbilder oder auch Worthülsen einander, werden diese als (*Familien-)Ähnlichkeiten phonetischer Art* betitelt. Die Ausdrücke „ersten Zeile“ sowie „ersten Zahl“ ähneln einander hinsichtlich der Wortbedeutung,

2 Die Transkriptionsregeln sind aus Meyer (2007, S. 118f) entnommen.

insofern sich beide auf den ersten Operanden zu beziehen scheinen. Ähnlichkeiten, die sich auf den Wortgebrauch bzw. die Wortbedeutung beziehen, werden als (*Familien-)Ähnlichkeiten semantischer Art* bezeichnet. Weitere Ähnlichkeiten lassen sich auf der *inferentiellen* Ebene rekonstruieren. Entsprechend der Theorie der Abduktion (s. Meyer 2007) lässt sich bei Lorena eine Regel wie folgt rekonstruieren: *„Wenn erst zwei abgezogen werden und anschließend zwei draufgetan werden, dann bleibt das Ergebnis gleich.“* Hinsichtlich Orlas Äußerung lässt sich folgende Regel erkennen: *„Wenn erst geteilt und anschließend (mit der gleichen Zahl) mal gerechnet wird, dann bleibt das Ergebnis gleich*.“ Die Anlässe zu den Entdeckungen der Regeln sind in der Schülersprache identisch. Solche Ähnlichkeiten werden als (*Familien-)Ähnlichkeiten inferentieller Art* aufgefasst. Ausführlichere Betrachtungen und Arten von (Familien-)Ähnlichkeiten finden sich in Kunsteller (2015) sowie Kunsteller/Meyer (2014).

Nachdem Orla ihre Regel nannte, meldete sich Anja und führte an: „ich glaube das ist wie eben nur- mit mal und das war eben mit plus und minus und das hier ist mit- mal und geteilt'“. Anja scheint hier eine Ähnlichkeit zwischen der ersten und der zweiten Aufgabe zu sehen, was ihr „wie eben“ andeutet. Der vorherige Vergleich der Regeln zeigt, dass Lernende zahlreiche Ähnlichkeiten nutzen können und diese, wie Anjas Äußerung verdeutlicht, auch explizieren können.

Im Anschluss an die Nennung der Regel für die Multiplikation forderte die Lehrerin dazu auf das gleichbleibende Ergebnis bei der zweiten Aufgabe zu begründen. Hieraufhin äußerte Marco: „also ehm .. und das ist auch so halt- ehm das Ergebnis bleibt immer gleich, weil wir haben ja ehm .. [...] also bei den Zahlen ehm- links haben wir geteilt gerechnet und rechts haben wir- ehm mal gerechnet und dann kommts so dazu dass es immer, das gleiche Ergebnis ist weil das haben wir auch bei minus und plus gemacht' [...] die eine ehm- Aufgabe wird plus gerechnet und die andere wird minus gerechnet.“ Marco beschreibt zu der geforderten Begründung Ähnlichkeiten zwischen den beiden Aufgaben. Die Aufgaben werden als einander ähnlich herausgestellt, weswegen das gleichbleibende Ergebnis für die Multiplikation gelte. Um die Aussage als tragfähige Begründung zu erkennen, muss diese sehr optimistisch gedeutet werden, indem z.B. die Funktion einer Umkehrfunktion bzw. die Definitionen der verschiedenen Operationen hinzugezogen werden. Da dies bspw. aus zeitlichen Aspekten kaum im Horizont der Situation lag, zeigt dieser Ausschnitt, dass Lernende Ähnlichkeiten eine zu hohe Bedeutung beimessen können, sodass sie Lernprozesse auch behindern können.

Abschluss und Ausblick

Der Begriff (Familien-)Ähnlichkeiten und seine verschiedenen Kategorien ermöglichen die Rekonstruktion und somit das Verstehen von Schüleräußerungen und Lernprozessen. Die Analyse zeigt, dass Lernende (Familien-)Ähnlichkeiten erkennen und nutzen können, um inhaltlich Mathematik zu betreiben. Dieses Nutzen von Ähnlichkeiten kann jedoch auch negative Auswirkungen haben.

Die ambivalenten Auswirkungen des Nutzens von Ähnlichkeiten werden auch im Kontext von Metaphern angesprochen. Ähnlichkeiten beziehen sich bei Metaphern auf die partielle Übereinkunft von Eigenschaften zwischen dem herkömmlichen und dem (mathematischen) Begriff. Dem Vorteil für die konstituierende Eigenschaft einer Metapher steht der Nachteil gegenüber, dass ungleiche Eigenschaften als gleiche angesehen werden können. Dies lässt sich auch bei Sfard (2008, S. 35) wiederfinden: „[...] metaphors are often like Trojan horses that enter discourses with hidden armies of unhelpful entailments." Vergleichbar verhält es sich beim „analogical reasoning" (z.B. English/Sharry 1996), wo strukturelle Informationen von einem „Quellbereich" auf einen „Zielbereich" übertragen werden. Als Beispiel sei die von Marco konstruierte Analogie „-" : „+" :: „:" : „•" angeführt, wobei u.a. eine mögliche Relation „Umkehroperation sein zu" zwischen „-" und „+" hergestellt werden müsste, um die Beziehung inhaltlich zu begründen und sie somit von der rein äußeren Form einer Vergleichbarkeit zu entbinden. Weitere Funktionen von (Familien-)Ähnlichkeiten werden in nachfolgenden Veröffentlichungen ausgebaut.

Literatur

English, L. & Sharry, P. (1996): Analogical reasoning and the development of algebraic abstraction. Educational Studies in Mathematics 30, S. 135-157.

Kunsteller, J. (2015): Familienähnlichkeiten und ihre Bedeutungen im Sprachspiel „Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht". In: Linneweber-Lammerskitten, H. (Hrsg.): BzMU 2015. WTM-Verlag: Münster, S. 524-527.

Kunsteller, J. & Meyer, M. (2014): Zur Rolle von Familienähnlichkeiten bei der Einführung der Potenzfunktionen. In: Der Mathematikunterricht 60 (2), S. 50-57.

Meyer, M. (2007): Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Franzbecker: Hildesheim.

Sfard, A. (2008): Thinking as communication. Cambridge UP: New York.

Wittgenstein, L. (1984): Werkausgabe 1. Philosophische Untersuchungen. Suhrkamp: Frankfurt. (erstmals 1953 erschienen)

Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg

Professionelles Wissen und Überzeugungen von Lehrkräften zum Modellieren im Mathematikunterricht als Bezugspunkte für spezifische Analysekompetenz

Wenn Lehrkräfte Kompetenzen des Modellierens von Lernenden im Mathematikunterricht optimal fördern sollen, setzt dies nicht nur unterrichtsbezogene Überzeugungen sowie Wissen über das Modellieren und seine Bedeutung im Fach Mathematik voraus, sondern es kommt entscheidend darauf an, ob Mathematiklehrkräfte mit Aufgaben und Unterrichtssituationen verbundene Lernangebote kriterienbasiert analysieren können. Im Folgenden werden nach einer Einführung in den theoretischen Hintergrund Ergebnisse aus mehreren Studien und Projekten gesichtet, die eine Basis für die Untersuchung modellierungsspezifischer Analysekompetenz bilden.

Analysekompetenz zum Modellieren im Mathematikunterricht

Unterricht zur Förderung von Kompetenzen des Modellierens (Kuntze, 2010) lebt ganz entscheidend von den Aufgaben, mit denen sich die Lernenden beschäftigen und vom Umgang mit diesen Aufgaben im Unterricht. Aufgaben mit Modellierungsanforderungen zeichnen sich unter anderem dadurch aus, dass Übersetzungsprozesse zwischen Mathematik und dem „Rest der Welt“ (Blum, 2007) herausgefordert werden, dass Angaben über- oder unterbestimmt sein können, dass eine Offenheit bezüglich der nutzbaren mathematischen Modellierung besteht und unterschiedliche Lösungen möglich sind. Diese Aufgabenmerkmale machen das spezifische Lernpotential solcher Aufgaben aus, dies wurde vielfach beschrieben (vgl. z.B. Blum et al., 2007; Borromeo-Ferri, Greefrath & Kaiser, 2013). Damit das Lernpotential zum Tragen kommen kann, ist jedoch auch ein geeigneter Umgang mit den Aufgaben im Unterricht erforderlich, beispielsweise eine Offenheit multiplen Lösungswegen gegenüber.

Damit Lehrkräfte diese Lernpotentiale erkennen und nutzen können, müssen sie in der Lage sein, Aufgaben und Unterrichtssituationen zu analysieren. Unter Analysieren (z.B. Kuntze, Dreher & Friesen, im Druck), verstehen wir in Weiterentwicklung des Noticing-Begriffs von Sherin (Sherin et al., 2011) einen *„wissensbasierten Prozess, der von kriterienbezogener Bewusstheit und Aufmerksamkeit ausgelöst und angetrieben wird, in dem Beobachtungen zu einem Analysegegenstand mit relevantem Kriterienwissen verknüpft werden und der von kriteriengestütztem Interpretieren und Argumentieren gekennzeichnet ist“* (vgl. Kuntze, Dreher & Friesen, im Druck). Analysegegenstände können beispielsweise konkrete Unterrichtssituationen, einzelne Äußerungen von Lernenden, Inhalte des Unterrichts oder eben auch einzelne Aufgaben sein.

Analysieren ist damit ein auf professionelles Wissen gestützter Prozess: Wissen über das mathematische Modellieren auf verschiedenen Ebenen ist in der Regel notwendig, um Lernziele in Verbindung mit der Förderung von Kompetenzen des Modellierens mit konkreten Aufgaben verbinden zu können, Aufgabenmerkmale zu erkennen, Akzentsetzungen im Modellierungsprozess zu lokalisieren, mögliche modellierungsbezogene Schwierigkeiten der Lernenden zu berücksichtigen und somit das Lernpotential von Aufgaben mit Modellierungsanforderungen optimal für den Unterricht nutzen zu können (vgl. Kuntze, Schäferling & Friesen, eingereicht).

Am Beispiel des Analysierens von Aufgaben könnte vor diesem Hintergrund ein hierarchisches Beschreibungsmodell wie in Tabelle 1 dargestellt aussehen. Bei diesem Modell werden Intensitätsstufen des Verknüpfens mit professionellem Wissen zugrunde gelegt, die vom Fehlen von Verbindungen über erste lose Verknüpfungen bis hin zu einem differenzierten Abwägen verschiedener Deutungsweisen und Implikationen reichen.

Tab. 1: Modellierungsbezogene Analysekompetenz (auf spezifische Lernpotentiale von Aufgaben bezogen) – Beschreibung von Kompetenzniveaus

I	Das modellierungsbezogene Lernpotential wird nicht erkannt, keine Verknüpfung von Beobachtungen zu Aufgaben mit modellierungsbezogenem professionellen Wissen
II	Lernpotential von Aufgaben mit Modellierungsanforderungen wird erkannt, jedoch auf der Basis von Oberflächenmerkmalen der Aufgaben und ohne argumentative Verknüpfung mit modellierungsbezogenem professionellen Wissen
III	Lernpotential von Aufgaben mit Modellierungsanforderungen wird erkannt und mit relevantem modellierungsbezogenem professionellen Wissen auch argumentativ verknüpft, wobei jedoch noch keine Deutungen in Frage gestellt und Deutungen bzw. wissensbasierte Implikationen abwägend gegenübergestellt werden
IV	Lernpotential von Aufgaben mit Modellierungsanforderungen wird verknüpft mit relevantem modellierungsbezogenem professionellen Wissen differenziert erörtert, wobei Deutungen bzw. wissensbasierte Implikationen in Frage gestellt und abwägend sowie argumentierend gegenübergestellt werden.

Da es sich bei der modellierungsbezogenen Analysekompetenz von angehenden und praktizierenden Mathematiklehrkräften um ein auf professionelles Wissen gestütztes Kompetenzkonstrukt (Weinert, 2001) handelt, wird im Folgenden der vorbereitenden Fragestellung nachgegangen, *welche Hinder-*

nisse oder Voraussetzungen im Bereich professionellen Wissens (zu dem zugrunde gelegten Modell professionellen Wissens vgl. Kuntze & Zöttl, 2008; Kuntze, 2012) *sich für modellierungsbezogene Analysekompetenz in früheren Befunden abzeichnen*.

Die Ergebnisse früherer Studien zeigen, dass viele angehende und praktizierende Lehrkräfte kaum über optimales professionelles Wissen zum Modellieren (einschließlich förderlicher Sichtweisen) verfügen. So konnte nur etwa die Hälfte der Mathematiklehrkräfte in einer Studie von Siller und Kollegen (2011; vgl. Siller & Kuntze, 2011) Auskunft über den Modellierungskreislauf geben. Auch die Lehrkräfte in der Studie von Kuntze (2011) zeigten ein kaum ausgeprägtes Metawissen zum mathematischen Modellieren. Beispiele für Aufgaben, die die Idee des mathematischen Modellierens betonen, konnten immerhin im Mittel mehr als 50% der Lehrkräfte der Studie von Siller und Kollegen (2011) angeben. Die Bedeutung des Modellierens als „Big Idea" des Mathematikunterrichts wurde jedoch im Vergleich zu anderen Big Ideas nur als mittel eingeschätzt und beschränkte sich in ihrer Bedeutungswahrnehmung eher nur auf ausgewählte Inhalte. Ferner (Kuntze, Siller & Vogl (2011) schätzten Lehrkräfte ihre Voraussetzungen eher als gering ein und nahmen Defizite in der Lehramtsausbildung wahr. Entsprechend stellte sich in einer Studie mit Lehramtsstudierenden (Kuntze, 2011, Kuntze & Zöttl, 2008) heraus, dass die angehenden Lehrkräfte Aufgaben mit erhöhten Modellierungsanforderungen ein vergleichsweise geringeres Lernpotential zuordneten als Aufgaben, in denen das mathematische Modell bereits vorab weitgehend festgelegt war. Im Vergleich mit praktizierenden Mathematiklehrkräften (Kuntze, 2011) wurde deutlich, dass praktizierende Lehrkräfte das Lernpotential der Aufgaben beider Typen ähnlicher einschätzten, wobei sie die Aufgaben mit größeren Modellierungsanforderungen jedoch nicht positiver als die anderen Aufgaben einschätzten. Als Hindernisse für das Analysieren fungieren offenbar auch Sichtweisen der Befragten, etwa wahrgenommene Konflikte mit den Ziel exakten Arbeitens im Mathematikunterricht (z.B. Kuntze, Schäferling & Friesen, eingereicht).

Fazit und Forschungsdesiderata

Die Ergebnisse früherer Untersuchungen zeigen, dass professionelles Wissen mit Bezug zum Modellieren für viele angehende und praktizierende Lehrkräfte nicht in ausreichendem Maße verfügbar ist. Es ist also damit zu rechnen, dass die modellierungsbezogene Analysekompetenz von Lehrkräften hierdurch erschwert wird. Dem sollte möglichst in Forschungsdesigns Rechnung getragen werden. Bei der Messung der modellierungsbezogenen Analysekompetenz von Lehrkräften sollten daher auch mögliche Einflussvariablen aus dem Bereich des professionellen Wissens erhoben werden, um deren Einfluss genauer untersuchen zu können und Aspekte des Konstrukts auf diese Weise differenziert abbilden zu können.

Literatur

Blum, W. (2007). Mathematisches Modellieren – zu schwer für Schüler und Lehrer? In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (S. 3–12). Hildesheim: Franzbecker.

Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, H.-W., Niss, M. (Hrsg.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study*. New York: Springer.

Borromeo-Ferri, R, Greefrath, G. & Kaiser, G. (Hrsg.). (2013). *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Kuntze, S. (2010). Zur Beschreibung von Kompetenzen des mathematischen Modellierens konkretisiert an inhaltlichen Leitideen. *Der Mathematikunterricht*, 56(4), 4-19.

Kuntze, S. (2011). In-Service and Prospective Teachers' Views about Modelling Tasks in the Mathematics Classroom – Results of a Quantitative Empirical Study. In G. Kaiser et al. (Eds.), Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling (pp. 279-288). Dordrecht: Springer.

Kuntze, S. (2012). Pedagogical content beliefs: global, content domain-related and situation-specific components. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(2), 273-292.

Kuntze, S., Dreher, A., & Friesen, M. (2015, in press). Teachers' resources in analysing mathematical content and classroom situations. *CERME 2015*.

Kuntze, S., Schäferling, H. & Friesen, M. (eingereicht) Einschätzungen von Mathematiklehrkräften zu Aufgaben mit Modellierungsgehalt als Zugang zu spezifischer modellierungsbezogener Analysekompetenz. In W. Blum & R. Borromeo-Ferri (Hrsg.) *Lehrerkompetenzen zum mathematischen Modellieren* [Arbeitstitel]. Springer.

Kuntze, S., & Zöttl, L. (2008). Überzeugungen von Lehramtsstudierenden zum Lernpotential von Aufgaben mit Modellierungsgehalt. *mathematica didactica*, 31, 46-71.

Kuntze, S., Siller, H.-S. & Vogl, C. (2011). Which Self-Perceptions do Mathematics Teachers Hold towards their Pedagogical Content Knowledge Related to Modelling? – An Empirical Study with Austrian Teachers. In: G. Stillman & J. Brown (Eds.), *ICTMA 15 – Melbourne, Australia. A Selection of Papers*. Melbourne: University.

Sherin, M., Jacobs, V., Philipp, R. (2011). *Mathematics Teacher Noticing. Seeing Through Teachers' Eyes*. New York: Routledge.

Siller, H.-S., Kuntze, S., Lerman, S., & Vogl, C. (2011). Modelling as a big idea in mathematics with significance for classroom instruction – How do pre-service teachers see it? In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), Proceedings of CERME 7 (pp. 990-999). Rzeszow, Poland: University.

Siller, H.-S., & Kuntze, S. (2011). Modelling as a big idea in mathematics – knowledge and views of pre-service and in-service teachers. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(6), 33-39.

Weinert, F. (2001). *Leistungsmessungen in Schulen*. (S. 17-31). Weinheim: Beltz.

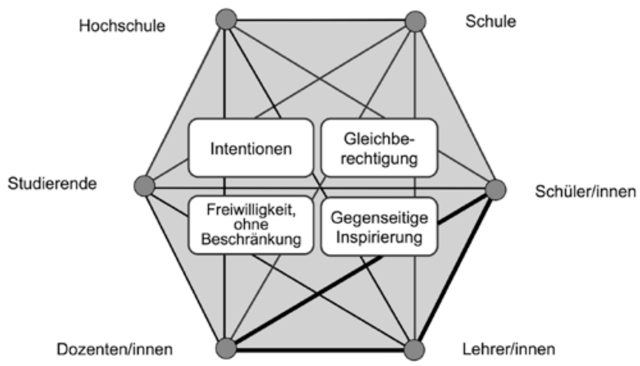
Jenny KUROW, Halle-Wittenberg

Von- und miteinander lernen: Vernetzungsmöglichkeiten von Schule und Hochschule im Bereich Mathematik

Der folgende Beitrag stellt die Vernetzung von Schule und Hochschule im Bereich der Mathematik mit dem Schwerpunkt der Förderung von mathematisch interessierten Schülerinnen und Schülern in den Mittelpunkt. Ausgangspunkt stellt dabei das gemeinsame Ziel beider Institutionen und ihrer Akteure dar, den Lernenden einen optimalen (mathematischen) Entwicklungskontext zu bieten. Es zeigt sich, dass bei aktuellen Vernetzungsansätzen der Aspekt zu inspirierender Zusammenarbeit oft noch ausbaufähig ist.

Wird die Vernetzung von Schule und Hochschule seit dem letzten Jahrzehnt besonders vorangetrieben, wird der Begriff bisher in unterschiedlicher, zum Teil nicht ausgeführter Bedeutung verwendet. Eine Annäherung an den Begriff kann mit Hilfe von Begriffsdefinitionen des sozialen Netzwerks erfolgen, da Netzwerke zwischen der Schule und Hochschule eine spezielle Form jener darstellen (z.B. Smith & Wohlstetter, 2001).

Arbeitsdefinition (angelehnt an Czerwanski, 2003): Netzwerke von Schulen und Hochschulen sind Unterstützungssysteme auf Gegenseitigkeit. Die einzelnen Beteiligten im Bereich der Mathematik tauschen sich aus, kooperieren im Rahmen gemeinsamer Angelegenheiten, Ziele, Schwerpunkte oder Projekte. Sie lernen von- und miteinander.

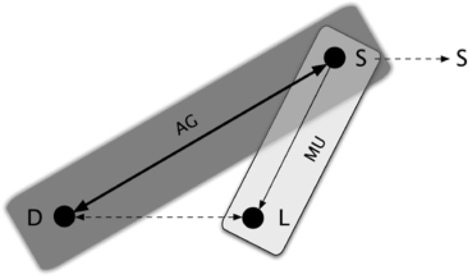


Auf der Basis dieses Begriffsverständnisses lässt sich Vernetzung von Schule und Hochschule insbesondere durch die Merkmale gemeinsame Intentionen, Gleichberechtigung, ohne Beschränkung und gegenseitige Inspiration (ausführlicher siehe Kurow, 2015) charakterisieren. Diese Arbeitsdefinition begreift das Netzwerk zwischen Schule und Hochschule als ein Lernarrangement, in dem sich alle Beteiligten freiwillig und auf Augenhöhe begegnen, was eine wechselseitige Rolleneinnahme sowohl des Lernenden als auch des Lernbegleiters der Anderen erlaubt und so das Lernen von- und miteinander begünstigt.

Netzwerkkonzept

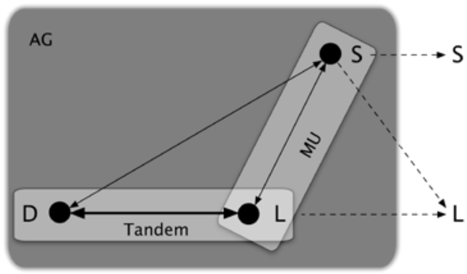
In diesen größeren Kontext eingebettet, soll im Folgenden ein dreiteiliges, fallbasiert exploriertes Vernetzungskonzept von Schule und Hochschule im

Bereich der Mathematik vorgestellt werden, welches das von- und miteinander lernen im Dreieck Schülerinnen und Schüler, Lehrerinnen und Lehrer sowie Dozentinnen und Dozenten in den Mittelpunkt stellt.



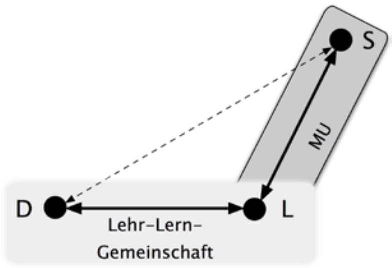
❶ Mathematikarbeitsgemeinschaft

Es beginnt mit von der Hochschule wöchentlich gestalteten Mathematikarbeitsgemeinschaften über einen Zeitraum von 1,5 Jahren an drei Schulen ohne mathematischen Schwerpunkt. Die Arbeitsgemeinschaft (AG) dient hierbei als geschützter Lernkontext für alle Beteiligten, da sie mathematisches Arbeiten ohne Druck ermöglicht und durch das Bündeln der vielfältigen Kompetenzen und Vorerfahrungen eine gemeinsame Weiterentwicklung ermöglichen kann. Die Teilnahme an der AG ist für alle Teilnehmenden freiwillig und richtete sich an alle mathematisch interessierten Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 7 bis 9. Methodischer Ansatz in den AGs ist das aktiv-entdeckende Lernen im Rahmen eines gemeinsamen Projektes. Die gemeinsame Arbeit ist insbesondere durch ein gemeinsames Ziel und die geteilte Verantwortung gekennzeichnet. Das Potenzial der natürlichen Differenzierung ermöglicht es allen sich gemäß ihren Möglichkeiten einzubringen. So bekommen die Schülerinnen und Schüler eine langfristige Möglichkeit sich eigenständig und kreativ mit für sie subjektiv interessanten mathematischen Problemstellungen auseinanderzusetzen und den Verlauf der AG mitzubestimmen.



❷ Lehr-Lern-Tandem

Im Fokus des zweiten Teils, dem Lehr-Lern-Tandem Schule-Hochschule steht die gegenseitige unterstützende, einander anregende und gemeinsam forschende Zusammenarbeit zwischen Lehrerin bzw. Lehrer und Dozentin bzw. Dozenten. Anliegen ist es die Schülerinnen und Schüler mathematisch zu fördern und den Lehrenden einen geschützten Lernkontext für vielgestaltige Erfahrungen im Initiieren und Begleiten von Lernprozessen von Schülerinnen und Schülern in Mathematik zu geben. Unter dieser Zielsetzung, den Lernenden eine Möglichkeit zur kreativen, aktiven, selbstgesteuerten Auseinandersetzung mit Mathematik zu bieten, gestalten beide Lehrende gemeinsam, gleichberechtigt eine wöchentliche AG. Die Rollenkonstellation im Tandem-Ansatz ist folglich dadurch charakterisiert, dass Lehrende der Schule und Hochschule gemeinsam und insbesondere gleichberechtigt die Verantwortung für den (mathematischen) Lernprozess der Schülerinnen und Schüler übernehmen. Dieser für alle Beteiligten geschützte Kontext ermöglicht den Lehrenden die intensive Beobachtung der mathematischen Lernprozesse der Kinder und eine intensive Interaktion mit ihnen. Neben der Arbeitssituation in der AG, umfasst der Tandem-Ansatz für die Lehrenden zudem die innerschulischen Arbeitstreffen vor und nach der AG: Aus Lernbegleitern innerhalb der AG werden Lernende. Im Fokus der gleichberechtigten Treffen steht die professionelle Reflexion der individuellen Eindrücke aus der AG, die Weiterentwicklung der Lernsituation in der AG und die Reflexion der eigenen Lehrtätigkeit.



❸ Lehr-Lern-Gemeinschaft

Die dritte Phase orientiert sich schließlich auf den Mathematikunterricht. Die Gestaltung erfolgt nun durch die Lehrerinnen und Lehrer, aber weiterhin im methodisch-didaktischen Forschungsaustausch mit Lehrenden der Hochschule. In einer Lehr-Lern-Gemeinschaft Schule und Hochschule wird über einen Zeitraum von einem Jahr in regelmäßigen Arbeitstreffen auf der Grundlage von vorliegenden und begleitend entstehenden Praxiserfahrungen versucht, gemeinsam prototypische, leistungsstarke Beispielsituationen und Konzepte für eine Einbindung des aktiv-entdeckenden Lernens in den Mathematikunterricht zu erarbeiten, zu erproben und professionell zu reflektieren. Zentrales Kriterium während der gemeinsamen Arbeit ist die Arbeit „auf Augenhöhe". Alle Beteiligten sind während der gemeinsamen Arbeit sowohl Lernende als auch Lernbegleiter der Anderen. Die besondere Zusammensetzung der Lehr-Lern-Gemeinschaft ermöglicht das Erleben und Reflektieren der entwickelten Lernsituationen in unterschiedlichen Schul-Kontexten und aus individuell geprägten Perspektiven und kann so die Entwicklung von innovativen Ideen begünstigen. Neben der gegenseitigen Anregung von allen Beteiligten ist auch eine Inspiration der nicht direkt am Netzwerk involvierten Akteure (Lernende, Lehrende) beabsichtigt.

Zielebenen und Forschungsfragen

Mit dem Netzwerkkonzept sind verschiedene Zielebenen verknüpft. Übergreifende Zielebene des Netzwerkkonzepts ist die Förderung von mathematisch interessierten Schülerinnen und Schülern. Diese Zielebene umfasst insbesondere die Teilziele Kompetenzentwicklung und Förderung von Interesse und Motivation der Lernenden. Das Arbeiten im Netzwerk stellt eine weitere Zielebene des Netzwerkkonzepts dar. Ziel ist es im Netzwerk Schule-Hochschule ein geeignetes Kooperationsklima und eine langfristige, kokonstruktive Zusammenarbeit aufzubauen sowie Austausch- und Lernprozesse im Bereich der Mathematik zu initiieren. Eine dritte Zielebene ist die Entwicklung, Erprobung und Evaluation von praxistauglichen, offenen Lehr-Lern-Situationen an Schulen. Aus dem Netzwerkkonzept und dessen Zielebenen leiten sich folgende übergreifenden Forschungsfragen ab:

- Gelingt es eine gegenseitige Inspiration von Schule und Hochschule zu erreichen? Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für die Schule bzw. Hochschule?
- Wie gelingt es? Was sind leistungsstarke Gelingensfaktoren?
- Wie lassen sich diese Gelingensfaktoren umsetzen?

Ausgewählte Ergebnisse

Die Untersuchung dieser Fragestellungen ist Bestandteil eines Promotionsprojektes. Es zeigt sich, dass die fallbasierte Untersuchung instruktiv und orientierend ist. Exemplarisch wird dies im Folgenden an der ersten Fragestellung verdeutlicht. Ziel war eine Vernetzung aller Beteiligten im Sinne einer gegenseitigen Inspiration. Im Kontext des gemeinsamen Interaktionsfeldes von Schule und Hochschule gelang es langfristig gemeinsame Erfahrungen zu machen und anschlussfähige mentale Modelle insbesondere im Hinblick auf die mathematische Förderung von Schülerinnen und Schülern zu entwickeln, zu erproben und weiterzuentwickeln. Diese aktive Beziehung zwischen allen Beteiligten ermöglichte auf der Ebene der Schülerinnen und Schüler eine Kompetenzentwicklung mit dem Schwerpunkt auf den Prozesszielen. Auf der Ebene der Lehrerinnen und Lehrer zeigte sich im Kontext der Netzwerkarbeit eine berufliche (insbesondere methodisch-didaktische) Weiterentwicklung. Der Aspekt der gegenseitigen Inspiration äußerte sich auf der Seite der Dozentinnen und Dozenten in ähnlicher Weise in einer beruflichen Weiterentwicklung, hier in Form von Forschungsimpulsen im Bereich der Mathematikdidaktik.

Literatur

Czerwanksi, A. (2003). Netzwerke als Praxisgemeinschaften. In A. Czerwanski (Hrsg.), *Schulentwicklung durch Netzwerkarbeit. Erfahrungen aus den Lernnetzwerken im „Netzwerk innovativer Schulen in Deutschland“* (S. 9-18). Gütersloh: Bertelsmann Stiftung.

Kurow, J. (2015). Mathematik und Musik: Mathematik konkret im Tandem Schule-Hochschule. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2015. [4S.] Münster: WTM.

Smith, A. & Wohlstetter, P. (2001). Reform through school networks: A new kind of authority and accountability. *Educational Policy*, *15* (4), 499-519.

Ronja KÜRTEN, Münster

(Mathematische) Selbstwirksamkeitserwartung von Ingenieurstudierenden in der Studieneingangsphase – Entwicklungen während des Mathematik-Vorkurses

An der Fachhochschule Münster wird seit September 2013 im Rahmen des Kooperationsprojektes der Fachhochschule Münster und der Universität Münster, der Rechenbrücke, ein modifizierter Mathematik-Vorkurs angeboten und dessen Auswirkungen auf verschiedene Faktoren untersucht, die den Studienerfolg beeinflussen können.

Der Mathematik-Vorkurs findet jedes Jahr im September statt. Zunächst wird eine Einführung in das Studieren sowie die Arbeitsweisen der Mathematik gegeben. Anschließend werden Inhalte der Sekundarstufe I und II mit Vorlesungen und Tutorien wiederholt (Kürten & Greefrath, 2015b). Zur Erfassung der Selbstwirksamkeitserwartung (SWE) wurde eine Befragung der Studienanfängerinnen und -anfänger durchgeführt. Untersucht wurden Veränderungen der mathematischen, sozialen und allgemeinen SWE während des Vorkurses und im Verlauf des ersten Semesters.

Theoretischer Rahmen und Design des Mathematik-Vorkurses

Selbstwirksamkeitserwartung ist die Einschätzung einer Person, ob sie eine schwierige Situation auf Grund der eigenen Fertigkeiten bewältigen kann (Schwarzer & Jerusalem, 2002). Diese Einschätzung korreliert mit Durchhaltewillen und Leistung (Schunk & Pajares, 2002) und kann somit einen Einfluss auf den Studienerfolg haben. Aus diesem Grund wurden die Maßnahmen im Projekt Rechenbrücke so konzipiert, dass eine Stärkung der SWE von Studienanfängerinnen und -anfängern erreicht werden soll.

Die Tutorien zum Vorkurs finden in kleinen Gruppen statt. Dies soll die Bildung von Lerngruppen für den weiteren Studienverlauf fördern. Die Selbsttests, die vor und nach dem Vorkurs durchgeführt werden, geben den Studierenden eine objektive Rückmeldung zu ihren Fertigkeiten. Sie sollen zu einer realistischeren Selbsteinschätzung führen und Lernfortschritte, die während des Vorkurses gemacht wurden, sichtbar machen. Basierend auf den Ergebnissen einer qualitativen Untersuchung der SWE der Studierenden im Wintersemester 14/15 (Kürten & Greefrath, 2015a) wurde der Vorkurs im Jahr 2015 angepasst. Die Vorlesungen wurden mehrfach unterbrochen und den Studierenden Übungsaufgaben gestellt, die anschließend gemeinsam besprochen wurden. Dadurch sollten die Studierenden direktes Feedback zum eigenen Kenntnisstand, mit der anschließenden Möglichkeit offene Fragen zu klären, erhalten. Die Tutorien, wurden in eine Gruppenarbeitsphase, in der schwierigere Aufgaben in Kleingruppen gelöst und anschließend präsentiert wurden, und eine Übungsphase, in der Rechenfertigkeiten eingeübt wurden, unterteilt. Die Gruppenarbeit sollte allen Studierenden die Möglichkeit geben, Erfolge bei der Lösung komplexer Aufgaben zu erleben und dadurch die SWE stärken.

Forschungsfragen und Methodik

Ausgehend von der Frage nach Einflüssen des Mathematik-Vorkurses auf studienerfolgsrelevante Faktoren sollten in der hier vorgestellten Untersuchung die folgenden Fragen beantwortet werden:

1. Wie verändern sich die mathematische, soziale und allgemeine SWE von Studierenden zu Beginn des Studiums?
2. Wie hängt die mathematische SWE mit der Leistung im Mathematiktest zusammen?

Die Vorkurs-Teilnehmenden absolvierten am ersten Tag des Vorkurses einen PC-basierten Selbsttest mit 19 Aufgaben zur Mathematik der Sekundarstufe I und Fragebögen zur allgemeinen, mathematischen und sozialen SWE. Nach Ende des Vorkurses wurde zu Semesterbeginn ein weiterer Test durchgeführt. Dieser enthielt die gleichen Fragebögen zur SWE wie der erste Test sowie parallel gestaltete Aufgaben. Im Januar 2016 wurde dann ein dritter Test durchgeführt, der wieder dem ersten Test entsprach.

Die Skala zur allgemeinen SWE wurde von Schwarzer und Jerusalem (1999) übernommen. Sie besteht aus zehn Items und bildet eine vierstufige Likert-Skala. Zur Erfassung der mathematischen SWE wurde die fünfstufige Likert-Skala MaSE-T von Bescherer, Spannagel und Zimmermann übernommen. Diese besteht aus 15 Items, die sich drei Unterdimensionen zuordnen lassen: Innermathematische Probleme (‚mathematical problems'), Anwendungsprobleme (‚real-world mathematical problems') und mathematische Argumentationsprobleme (‚reasoning problems') (Bescherer, Spannagel & Zimmermann, 2011). Diese Skala wurde gewählt, da die Zielgruppe zu Beginn des Studiums i. d. R. lediglich schulmathematische Kenntnisse mitbringt und die MaSE-T-Skala ausschließlich Kompetenzerwartungen bei Aufgaben abfragt, die mit Schulwissen gelöst werden könnten. Für die Skala zur sozialen SWE wurde eine deutsche Übersetzung der „Scale of Perceived Social Self-Efficacy (PSSE)" (Smith & Betz. 2000) verwendet. Die fünfstufige Likert-Skala besteht aus 24 Items. Die Übersetzung wurde dabei durch unabhängige Rückübersetzung überprüft (Blömker, 2016). Die Skalen wurden auf Objektivität, Reliabilität und Validität untersucht (Zimmermann, Bescherer & Spannagel, 2011, Blömker, 2016, Smith & Betz, 2000) und erfüllen die Gütekriterien zufriedenstellend.

Ergebnisse

Zur Beantwortung der ersten Forschungsfrage wurden diejenigen Studierenden betrachtet, die an beiden Selbsttests in September und Oktober (n = 163) bzw. an beiden Selbsttests in Oktober und Januar (n = 82) teilgenommen haben. Für die Analyse wurden Mittelwertunterschiede der verschiedenen Messzeitpunkte verglichen. Die allgemeine SWE verändert sich weder während des Vorkurses noch in den ersten drei Monaten des Semesters signifikant ($p = 0{,}363$). Bei der sozialen SWE zeigen sich sowohl während des Vorkurses (Effektstärke Cohens $d = 0{,}20$) als auch in den folgenden drei Monaten ($d = 0{,}26$) hoch signifikante ($p < 0{,}001$) Zuwächse mit kleinem Effekt. Anders sieht die Situation bei der mathematischen SWE aus: Während des Vorkurszeitraums steigt die mathematische SWE hoch signifikant mit mittlerer Effektstärke ($d = 0{,}62$) an. Betrachtet man die Subskalen einzeln, fällt insbesondere die Skala zum innermathematischen Problemlösen auf, für die der Anstieg eine große Effektstärke ($d = 0{,}74$) besitzt. Beim Argumentieren ($d = 0{,}53$) und insbesondere beim angewandten Problemlösen ($d = 0{,}27$) sind die Effekte geringer. Während der ersten Monate des Semesters steigt die mathematische SWE ebenfalls sehr signifikant ($p < 0{,}01$) an, die Effektstärke ist jedoch deutlich geringer als während des Vorkurses ($d = 0{,}25$). Entsprechendes gilt für die drei Subskalen.

Zur Beantwortung der zweiten Forschungsfrage wurde die Produkt-Moment-Korrelation zwischen den Ergebnissen im Leistungstest und der mathematischen SWE bzw. den Subskalen im September- und Oktober-Test berechnet. Sowohl zwischen der mathematischen SWE und der Leistung im entsprechenden Test als auch zwischen dem innermathematischen Problemlösen und der Leistung im Test lassen sich hohe Korrelationen feststellen (Siehe Tabelle 1).

*Tabelle 1: Korrelationen (Pearson) zwischen den Punkten im Leistungstest und den Skalen zur mathematischen SWE. (** = hoch signifikante Korrelation)*

Testzeitpunkt	*Math. SWE*	*Innermath. Problemlösen*	*Angewandtes Problemlösen*	*Argumentieren*
September (n = 402)	,49**	,53**	,29**	,37**
Oktober (n = 240)	,50**	,58**	,32**	,37**

Diskussion und Ausblick

In der präsentierten Studie bleibt die allgemeine SWE über alle drei Messzeitpunkte stabil. Dies entspricht der Einordnung der allgemeinen SWE als „überdauernde Persönlichkeitseigenschaft“ (Schwarzer & Jerusalem, 2002, S. 33). Der Anstieg der sozialen und mathematischen SWE während des Vorkurses kann als Indiz für den Erfolg der Gestaltung des Vorkurses zur Förderung der SWE interpretiert werden. Für eine Steigerung der mathematischen SWE durch Erfolgserlebnisse (Schwarzer & Jerusalem, 2002) spricht, dass insbesondere die Subskalen zum innermathematischen Problemlösen und in geringerem Umfang Argumentieren einen Anstieg erfahren haben: Die Vorkursaufgaben befassten sich größtenteils mit dem innermathematischen Arbeiten und in einigen Fällen dem Argumentieren und Beweisen, Anwendungsprobleme kamen kaum vor. Für eine Klärung der Ursachen können die Ergebnisse von Leitfadeninterviews herangezogen werden, die vor und nach dem Vorkurs mit einigen Studierenden durchgeführt wurden.

Literatur

Bescherer, C., Spannagel, C., & Zimmermann, M. (2011). MaSE-T. Abgerufen am 30.12.2015, von http://www.sail-m.de/sail-m.de/sail-m/MASE-T_ger.pdf

Blömker, L. (2016). Selbstwirksamkeitserwartungen von Studienanfängerinnen und Studienanfängern: Eine quantitative Untersuchung an der Fachhochschule Münster. Unveröffentlichte Masterarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster.

Kürten, R. & Greefrath, G. (2015a). Selbstwirksamkeitserwartungen angehender Ingenieurstudierender – Einflüsse von Vorkurs und Tests im Projekt Rechenbrücke. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2015. Münster: WTM-Verlag. S. 516-519.

Kürten, R. & Greefrath, G. (2015b). The Rechenbrücke – A project in the introductory phase of studies. In K. Krainer, N. Vondrová (Hrsg.) Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Prag: Charles University. S. 2166-2172.

Schunk, D. H. & Pajares, F. (2002). The Development of Academic Self-Efficacy. In A. Wigfield & J. Eccles (Hrsg.), Development of achievement motivation. San Diego: Academic Press. 16-31.

Schwarzer, R., & Jerusalem, M. (1999). Skalen zur Erfassung von Lehrer- und Schülermerkmalen. Dokumentation der psychometrischen Verfahren im Rahmen der Wissenschaftlichen Begleitung des Modellversuchs Selbstwirksame Schulen. Berlin: Freie Universität Berlin.

Schwarzer, R. & Jerusalem, M. (2002). Das Konzept der Selbstwirksamkeit. In: M. Jerusalem & D. Hopf (Hrsg.). Selbstwirksamkeit und Motivationsprozesse in Bildungsinstitutionen. Weinheim: Beltz (44), 28–53.

Smith, H. M., & Betz, N. E. (2000). Development and Validation of a Scale Perceived Social Self-Efficacy. Journal of Career Assessment, 8(3), 283–301.

Zimmermann, M., Bescherer, C., & Spannagel, C. (2011). A questionaire for surveying mathematics self-efficacy expectations of future teachers. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Hrsg.), Proceedings of CERME7. Rzeszów: University of Rzeszów, Polen. 2134-2143.

Ana KUZLE, Potsdam

Im Forderunterricht Problemlösen lehren und lernen: Entwicklung von praxisorientierten und theoriegeleiteten Materialien mittels Design-Based Research

Problemlösen soll im Mathematikunterricht gefördert und gefordert werden. Im Kontext dieser Reformagenda ist die Entwicklung von Materialien hinsichtlich des systematischen Problemlösekompetenzaufbaus von großer Bedeutung, die die Lücke zwischen Theorie und Praxis überwinden. Hier fokussiere ich mich auf eben solche praxisorientierten und theoriegeleiteten Materialien zum Problemlösen, die im Rahmen des Forderunterrichts mit Sechstklässlern erprobt und anhand von Feedback evaluiert und re-designed wurden.

1. Einleitung

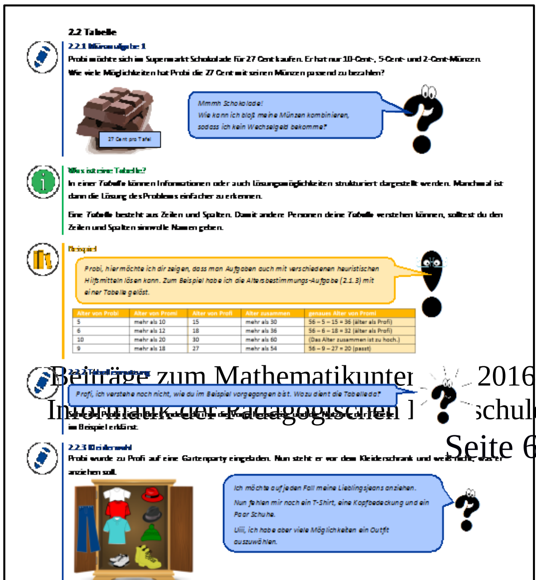
Im Rahmen der Schulsteuerung werden in NRW Qualitätsanalysen durchgeführt, um unter anderem die Einhaltung der Bildungsstandards beziehungsweise der Kernlehrpläne zu kontrollieren. Im Herbst 2014 wurde an einer Schule in der Bezirksregierung Detmold eine solche Qualitätsanalyse durchgeführt. Das Ergebnis im Bereich der Problemorientierung besagt, dass zwar Anteile herausfordernder Aufgaben im Unterricht enthalten seien, überwiegend jedoch Routineaufgaben von den Schülerinnen und Schülern bearbeitet und nur in etwa einem Drittel aller Unterrichtsbeispiele Problemlösestrategien angewendet wurden.

Die Schule reagierte innerhalb einer Fachkonferenz Mathematik darauf und suchte den Kontakt zu Institutionen, die sie bei einer Verbesserung der Schulsituation unterstützen können. Es entstand eine hochschulgeleitete Projektgruppe mit dem Ziel eines **Sy**stematischen und **m**aterialgestützten **P**roblemlösekompetenz**a**ufbaus (**SymPa)** unter Berücksichtigung der Kernlehrpläne von NRW. Die Projektgruppe (Kuzle, Gebel und Conradi) die aus verschiedenen Akteuren der Lehrerausbildung besteht, entwickelte daraufhin nach dem Design-Based Research (DBR)-Ansatz ein Arbeitsheft für Schülerinnen und Schüler. Ergänzend hierzu wurde ein Begleitheft für Lehrerinnen und Lehrer hergestellt, das den didaktischen Rahmen vorstellt, in dem das Arbeitsheft unterrichtet werden sollte und somit die Lehrkräfte durch die theoretische Aufarbeitung des Themas entlastet. Innerhalb dieses Aufsatzes steht die leitende Frage: *Wie kann Material mittels Design-Based Research (weiter-)entwickelt werden, sodass fachdidaktische Ansätze zum Aufbau von Problemlösekompetenzen in der Praxis Einzug finden?* im Fokus, zu der zum Abschluss explizit Stellung genommen wird.

2. Entwicklung der Materialien zum Problemlösen gemäß DBR

Die Zielsetzung im Projekt SymPa bezieht sich in erster Linie auf einen systematischen Aufbau von Problemlösekompetenzen der Schülerinnen und Schüler der 6. Klasse. Hierzu sollen sie geeignete Vorgehensweisen (Heurismen) zur Bearbeitung mathematischer Fragestellungen kennen und situationsgerecht anwenden lernen sowie Anstrengungsbereitschaft und Reflexionsfähigkeit für ihr eigenes Handeln entwickeln (Bruder & Collet, 2011). Entsprechend den Zielen des Projektes wurden die Erkenntnisse aus vier überschneidender Forschungsdisziplinen aufgegriffen: (1) Ansätze zum Problemlösenlernen und zur Heurismenbildung (u.a. Bruder & Collet, 2011), (2) Theorien zum selbstregulierten Lernen (Zimmerman, 2002), (3) selbstreguliertes Lernen (u.a. Pólya, 1957; Zimmerman, 2002), und (4) Ansätze zum Problemlösenlehren (Schoen, 2003). Eine entscheidende Grundlage zum fachdidaktischen Fundament der Materialien stellt die Arbeit von Bruder und Collet (2011) dar, welche die Ansichten anerkannter Mathematikdidaktiker, wie Grouws, Kilpatrick, Pólya und Schoenfeld nicht unberücksichtigt lassen. Insgesamt wurde dem expliziten Heurismentraining nach Bruder und Collet (2011) gefolgt. Dabei wurden Heurismen und Aufgaben so ausgewählt, die laut Kernlehrplan NRW und nach Aussagen des Fachlehrers für die sechste Jahrgangsstufe angemessen waren. In Abbildung 1 wird exemplarisch die Berücksichtigung, der oben kurz dargelegten theoretischen Ansätze, an dem Kapitel Tabelle präsentiert.

Im Arbeitsheft wurde zusätzlich die Förderung von Selbstregulation auf unterschiedlichen Ebenen aufgegriffen. Zum einen wird in den einzelnen Aufgaben zu Selbstregulation aufgerufen, indem die Schülerinnen und Schüler beispielsweise Heurismen miteinander vergleichen oder Präferenzen äußern sollen. Andererseits befinden sich am Ende eines Oberkapitels gesondert Reflexionsfragen, die sich auf das gesamte Oberkapitel beziehen (siehe Abb. 1). Ziel ist hierbei, dass die Schülerinnen und Schüler einen Überblick entwickeln sollen und dabei die eigenen Vorlieben reflektieren, indem sie das Kapitel Revue passieren lassen und Zusammenhänge zwischen den Heurismen erkennen. Bezugnehmend auf Pólyas Phasenmodell (1957) wurde auf der letzten Seite des Arbeitsheft ein Fragenkatalog in Form einer Tabelle angeführt, die im Laufe des Unterrichts ausgefüllt werden soll. Der so entstandene Fragenkatalog soll als Nachschlagewerk dienen, falls die Schülerinnen und Schüler im Problemlöseprozess Schwierigkeiten haben, um mittels selbstregulativer Fragen eigenständig weiterzukommen. Dadurch befinden sich die Schülerinnen und Schüler auf der letzten Phase des Unterrichtskonzeptes von Bruder und Collet (2011). Mehrere Details befinden sich in Kuzle (2016) und Kuzle und Gebel (eingereicht).


2.2 Tabelle

2.2.1 Münzaufgabe 1

Probi möchte sich im Supermarkt Schokolade für 27 Cent kaufen. Er hat nur 10-Cent-, 5-Cent- und 2-Cent-Münzen. Wie viele Möglichkeiten hat Probi die 27 Cent mit seinen Münzen passend zu bezahlen?

27 Cent pro Tafel

Mmmh Schokolade! Wie kann ich bloß meine Münzen kombinieren, sodass ich kein Wechselgeld bekomme?

Was ist eine Tabelle?

In einer *Tabelle* können Informationen oder auch Lösungsmöglichkeiten strukturiert dargestellt werden. Manchmal ist dann die Lösung des Problems einfacher zu erkennen.

Eine *Tabelle* besteht aus Zeilen und Spalten. Damit andere Personen deine *Tabelle* verstehen können, solltest du den Zeilen und Spalten sinnvolle Namen geben.

Beispiel

Probi, hier möchte ich dir zeigen, dass man Aufgaben auch mit verschiedenen heuristischen Hilfsmitteln lösen kann. Zum Beispiel habe ich die Altersbestimmungs-Aufgabe (2.1.3) mit einer Tabelle gelöst.

Alter von Probi	Alter von Promi	Alter von Profi	Alter zusammen	genaues Alter von Promi
5	mehr als 10	15	mehr als 30	56 – 5 – 15 = 36 (älter als Profi)
6	mehr als 12	18	mehr als 36	56 – 6 – 18 = 32 (älter als Profi)
10	mehr als 20	30	mehr als 60	(Das Alter zusammen ist zu hoch.)
9	mehr als 18	27	mehr als 54	56 – 9 – 27 = 20 (passt)

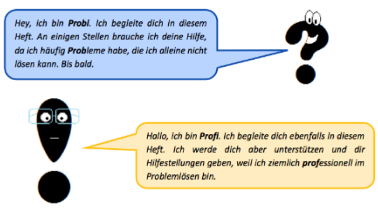
Profi, ich verstehe noch nicht, wie du im Beispiel vorgegangen bist. Wozu dient die Tabelle da?

im Beispiel erklärst.

2.2.3 Kleiderwahl

Probi wurde zu Profi auf eine Gartenparty eingeladen. Nun steht er vor dem Kleiderschrank und weiß nicht, was er anziehen soll.

Ich möchte auf jeden Fall meine Lieblingsjeans anziehen.
Nun fehlen mir noch ein T-Shirt, eine Kopfbedeckung und ein Paar Schuhe.
Uiii, ich habe aber viele Möglichkeiten ein Outfit auszuwählen.




2.3 Reflexionsfragen 1

Welche heuristischen Hilfsmittel hast du kennengelernt?

Heuristische Hilfsmittel helfen mir, um

Welches heuristische Hilfsmittel empfandest du am leichtesten? Warum?

Welches heuristische Hilfsmittel empfandest du am schwersten? Warum?

Fragenkatalog zum Problemlösen

Vor dem Problemlösen	Während des Problemlösens	Nach dem Problemlösen

Abbildung 1. Auszug aus dem Arbeitsheft – Kapitel zur Tabelle inkl. Förderung von Selbstregulation und Motivation

3. Schlussfolgerungen und Ausblick

In diesem letzten Teil ziehe ich Schlussfolgerungen auf verschiedene Bereiche, indem ich speziell auf die leitende Frage dieser Arbeit eingehe und diskutiere, die hier als Thesen formuliert sind.

Lassen sich aus gegenwärtigen fachdidaktischen Ansätzen mittels DBR Arbeitsmaterialien zum bemerkbaren Problemlösekompetenzaufbau der Schülerinnen und Schüler entwickeln?

Die erste These lässt sich vorerst insofern bestätigen, als dass die Lehrkräfte eine Verbesserung des Heurismeneinsatzes der Schülerinnen und Schüler beschrieben. Aus diesem Grund kann davon ausgegangen werden, dass sich aus den gegenwärtigen fachdidaktischen Ansätzen Materialien entwickeln ließen, die einen bemerkbaren Problemlösekompetenzaufbau bewirken. Das heißt, es war möglich, Materialien zu entwickeln, die den hiesigen theoretischen Ansprüchen für einen Unterricht mit dem Ziel des Problemlösekompetenzaufbaus gerecht werden.

Ist das Heft sprachlich und inhaltlich an das Niveau der Schülerinnen und Schüler angepasst?

Aus den Rückmeldungen ist zu entnehmen, dass das Anspruchsniveau für die Schülerinnen und Schüler angemessen war, jedoch einige Aufgaben modifiziert und ersetzt wurden. Innerhalb der verwendeten Sprache bot sich ein vielschichtiges Bild: Bspw. wurde die Sprach- und Lesekompetenz der Schülerinnen und Schüler zum Teil überschätzt. Insgesamt beschrieben die Lehrkräfte aber die verwendete Sprache als adäquat, sodass die Schülerinnen und Schüler die Aufgaben bearbeiten konnten. Durch die weiteren Umsetzungen der Materialien erwarten wir deutliche Ergebnisse, inwiefern die Veränderungen im Re-Design ausreichen, um die Anforderungen und die Sprache an das Niveau der Schülerinnen und Schüler anzupassen.

Ist es Lehrkräften möglich durch das Begleitheft, Unterrichtskonzepte und fachdidaktische Ansätze aus dem Bereich des Problemlösens im Unterricht umzusetzen?

Es wurde deutlich, dass das Material alleine die Ausführung des Unterrichtskonzeptes nicht gewährleistet. Eine inhaltliche Wissensbasis zur fachdidaktischen Idee zum Beispiel durch klare Anweisungen und konkrete Aufforderungen zur Selbstreflexion scheint notwendig, um gemäß des theoretischen Fundaments zu unterrichten. Obwohl das Begleitheft als hilfreich empfunden wurde, muss die These widerlegt werden, weil die Lehrkräfte dadurch nicht in der Lage waren, das Material durchgängig sinngemäß im Unterricht anzuwenden. Zusätzlich darf der schulorganisatorische Faktor hier nicht außer Acht gelassen werden.

Der erste Schritt, die abstrakten Ansätze der Problemlöseforschung auf eine praktische Ebene zu setzen, sodass Problemlösen tatsächlich im schulischen Alltag Einzug finden kann, wurde durch diese Materialentwicklung geschaffen. In weiteren Schritten des SymPa Projektes geht es mehr darum, die zweite DBR Einsatzmöglichkeit, nämlich die Entwicklung der kontextabhängigen Theorien zum Lernen und Lehren im Hinblick auf den systematischen Problemlösekompetenzaufbau in den Vordergrund zu stellen.

Literatur

Bruder, R., & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Kuzle, A. (erscheint 2016). Design-Based Research as a foundation for systematical and material based development of problem solving competences. ICME 13. Hamburg.

Kuzle, A., & Gebel, I. (eingereicht). Problemlösen lernen im Rahmen des Forderunterrichts: Entwicklung von praxisorientierten und theoriegeleiteten Materialien mittels Design-Based Research. *mathematica didactica*

Pólya, G. (1957). *How to solve it* (2nd ed.). New York: Doubleday.

Schoen, H. L. (Hrsg.). (2003). *Teaching mathematics through problem solving: Grades 6–12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Zimmerman, B. J. (2002). Becoming a self-regulated learner: An overview. *Theory Into Practice, 41*(2), 64–70.

Xenia LAMPRECHT, Bamberg

Multiplikatives Verständnis fördern – Einblicke in das Projekt FeDeR

Vor dem Hintergrund eines inklusiven Mathematikunterrichts wird im Forschungsprojekt FeDeR ein Förderkonzept zum multiplikativen Verständnis (MV) entworfen, das in differenten Settings eingesetzt und evaluiert wird. Die Lernumgebungen wurden aufgrund der theoriegeleiteten Arbeitsdefinition in verschiedenen MV-Bereichen designt. Im Beitrag werden diese Förderbereiche des MV kurz skizziert sowie erste Einblicke in die Auswertungsmethode der Testbearbeitungen gegeben.

Design der Lernumgebungen

Aufgrund der Inklusionsforderung stehen Überlegungen im Raum, wie Kinder mit unterschiedlichen Voraussetzungen geeignet gefördert werden können. Die Grundidee des Forschungskonzepts ist es, herauszufinden, welche Form der Beschulung effektiv ist. Deswegen wurden die Lernumgebungen zur Förderung in verschiedenen Settings erprobt.

Grundlage des Konzepts ist die Arbeitsdefinition zum MV, die theoriebasiert entwickelt wurde: MV basiert auf *Grundvorstellungen* wesentlicher Aspekte der Multiplikation (wiederholte Addition, kartesisches Produkt) und ermöglicht, Multiplikationsaufgaben in unterschiedlichen *Repräsentationsformen* mit Hilfe der Eigenschaften der Operation lösen zu können (vgl. Lamprecht, 2015). Aus mathematischer Perspektive ergeben sich zwei Grundvorstellungen der Multiplikation, die in der Definition zum MV aufgenommen wurden: wiederholte Addition und kartesisches Produkt.

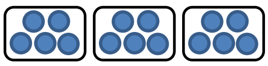


Abbildung 1: Darstellung für die Grundvorstellung der wiederholten Addition

Der Aufbau und Abruf der Grundvorstellung der *wiederholten Addition* wird im Konzept z. B. mit einer solchen Darstellung gefördert (Abb. 1), die typischerweise die gleichmächtigen disjunkten Mengen anschaulich macht und so additive Verknüpfungen nahe legt.

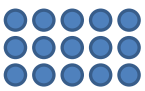


Abbildung 2: Darstellung für die Grundvorstellung des kartesischen Produkts

Die Grundvorstellung des *Kartesischen Produkts* wird gefördert, indem z. B. eine Darstellung wie in Abbildung 2 verwendet wird. Die beiden Faktoren des Produkts lassen sich als Dimensionen auffassen, die eine Matrix mit einer spezifischen Anzahl an Spalten und Zeilen aufspannen. Die Anzahl (Produkt) ergibt sich somit nahe liegend durch eine multiplikative Verknüpfung.

Das zweite konstituierende Element im Design von Lernumgebungen und Testaufgaben sind Repräsentationsformen. Mathematisches Verständnis kann dann aufgebaut werden, wenn Grundvorstellungen auch in unterschiedlichen Repräsentationsformen aktiviert werden können (Wartha & Schulz, 2011). Verständnis kann also dann identifiziert werden, wenn Repräsentationswechsel stattfinden. Deswegen beinhalten die Lernumgebungen Aufgaben, die den Wechsel der Repräsentationsformen erfordern. Folgende Repräsentationsformen wurden einbezogen: *Modellierung* bezieht sich entsprechend der Bildungsstandards auf Aufgaben, die einen Kontextbezug enthalten. Bei der Repräsentationsform *Darstellung* geht es um Aufgaben, die Abbildungen von didaktischem Material enthalten oder die Handlung mit oder Deutung von didaktischem Material erfordern. Aufgaben in der *Symbolform* enthalten eine rein symbolische Schreibweise der Multiplikation.

Die Wesensaspekte der Definition zum MV, also Grundvorstellungen und Repräsentationsformen, definieren auch die Bereichsebenen der Lernumgebungen.

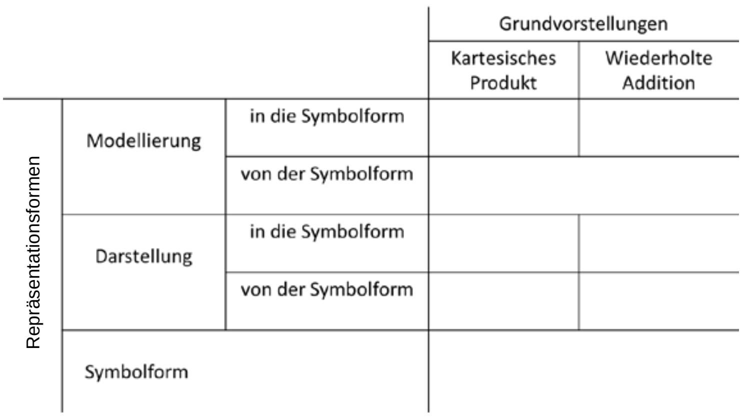


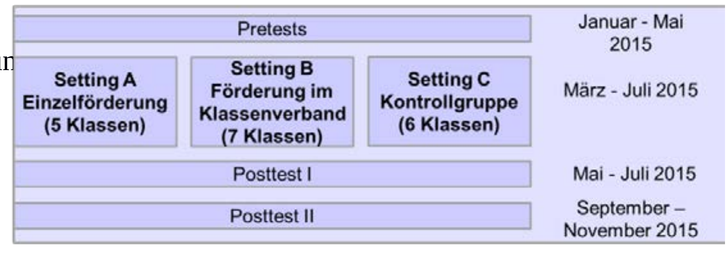
Abbildung 3: Matrix der Bereichsebenen der Lernumgebungen

Diese Ebenen spannen eine Matrix auf (Abb. 3), wobei Modellierung und Darstellung noch unterteilt werden nach Übersetzung *in* die Symbolform und *von* der Symbolform. Einerseits ist die Matrix Grundlage für die Testaufgaben, andererseits ist sie auch Basis für die Konzeption der Lernumgebungen. Die Lernumgebungen werden im Projekt sowohl in der Einzelförderung als auch im Klassenverband eingesetzt.

Design der Intervention

Im Projekt haben insgesamt 18 Klassen der 2. Jahrgangsstufe (ca. 340 Schülerinnen und Schüler) in der Stadt und im Landkreis Bamberg teilgenommen. Der Zeitrahmen der Intervention erstreckte sich von Januar bis November 2015 (Abb. 4).

Abbildun



Aus der Erprobung und Intervention ergeben sich vielfältige Dokumente, die für die Auswertung zur Verfügung stehen:

- Videoaufnahmen der Einzelförderung und Interviews in Setting A

- Testbearbeitungen zum MV aller Kinder aus drei Messzeitpunkten sowie den Bearbeitungen des Bielefelder Rechentests für das 2. Schuljahr zum Messzeitpunkt 1 in Setting A, B und C
- ausführliche Dokumentationen unterrichtlichen Vorgehens durch die Lehrkräfte in Setting A, B und C (inklusive Zeitumfang, eingesetztes Anschauungsmaterial, genutzte Lernumgebung etc., um Einblick in das unterrichtliche Vorgehen der Lehrkräfte zu erhalten)

Die Auswertung folgt unterschiedlichen Methoden. Im Folgenden wird die Methode der quantitativen Auswertung der Dokumente der Testbearbeitungen kurz vorgestellt.

Methode der Auswertung der Testbearbeitungen

Den Wesenselementen der Arbeitsdefinition des MV entsprechend, wurde ein Kategoriensystem für die Auswertung der Testaufgaben zum MV mit der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2013) entwickelt. Ziel ist es hierbei, durch das Kategoriensystem jeder Aufgabenbearbeitung einen eindeutigen Zahlencode zuzuweisen, der zum einen quantitativ ausgewertet werden kann und zum anderen gleichzeitig alle relevanten Informationen der Einzelbearbeitungen rekonstruierbar abbildet.

Zunächst folgt die Kategorienbildung der Arbeitsdefinition des MV und damit einem deduktiven Vorgehen, d. h. das Kategoriensystem steht „schon vor der Arbeit am Material" (Mayring & Brunner, 2013, S. 327) fest. Aufgrund der gezeigten Bearbeitungen durch die Kinder wurde dieses Vorgehen um eine Kategorie nach induktiver Kategorienbildung ergänzt, d. h. dass einzelne Analyseperspektiven „erst aus dem Material heraus entwickelt" (Mayring & Brunner, 2013, S. 327) werden.

Erste Ergebnisse

Ein erster exemplarischer Einblick in die Ergebnisse kann zur Kategorie ‚Angemessenheit' präsentiert werden. Diese Kategorie bildet die Adäquatheit der Bearbeitung bezüglich der Aufgabenstellung unter selbst gewählter Verwendung einer der Grundvorstellungen (wiederholte Addition, kartesisches Produkt) zur Multiplikation ab.

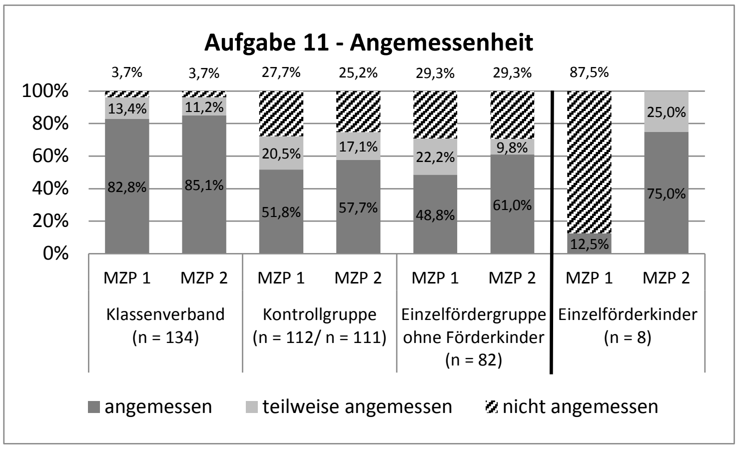


Abbildung 5: Ergebnisse der Aufgabe 11 zur Kategorie ‚Angemessenheit'

Abbildung 5 zeigt exemplarisch die Ergebnisse zu Aufgabe 11 bezüglich der Kategorie ‚Angemessenheit' zu Messzeitpunkt (MZP) 1 und 2, also zu Beginn und direkt nach der Intervention in den verschiedenen Settings. Es zeigen sich hier geringe Zuwächse der Anteile an ‚angemessenen' Bearbeitungen in den Gruppen Klassenverband, Kontrollgruppe und Einzelfördergruppe ohne Förderkinder und ein erheblicher Zuwachs bei den Kindern der Einzelförderung. Ob sich dieser erste Trend auch bei den anderen Aufgaben und bezüglich weiterer Kategorien zeigt, müssen die weiteren Auswertungen zeigen.

Literatur

Bönig, D. (1995). *Multiplikation und Division. Empirische Untersuchungen zum Operationsverständnis bei Grundschülern*. Münster: Waxmann Verlag GmbH.

Hofe, R. vom (1992). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. *Journal für Mathematik-Didaktik* 13 (4).

Lamprecht, X. (2015). Das Projekt ‚Förderung und Diagnose in differenten Rahmenbedingungen' (FeDeR). In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. (S. 548–551). Münster: WTM-Verlag.

Mayring, P. & Brunner, E. (2013). Qualitative Inhaltsanalyse. In B. Friebertshäuser, A. Langer & A. Prengel (Hrsg.), *Handbuch qualitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft*. (4. Aufl.). Weinheim: Juventa-Verl.

Ruwisch, S. (1999). *Angewandte Multiplikation. Klassenfest, Puppenhaus, und Kinderbowle: Eine qualitative empirische Studie zum Lösungsverhalten von Grundschulkindern beim Bearbeiten multiplikativer Sachsituationen*. Frankfurt am Main: P. Lang.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel.

Schipper, W., Wartha, S. & Schroeders, N. von. (2011). *BIRTE 2 - Bielefelder Rechentest für das 2. Schuljahr. Handbuch mit CD-ROM*. Braunschweig: Schroedel.

Wartha, S. & Schulz, A. (2011). *Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen. Handreichung des Programms SINUS an Grundschulen*. http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_WarthaSchulz.pdf. Zugegriffen 04.01.2015.

Matthias LEHNER, Kristina REISS, München

Erfassung des Fachwissens von Studierenden im ersten Semester: Einschätzung des kognitiven Anspruchs eines Tests in Einzelinterviews

Kompetenzmessung und das Fachwissen von Lehrkräften

Empirisch validierte Kompetenzstufenmodelle für das mathematische Wissen von Schülerinnen und Schülern gibt es beispielsweise für die Primarstufe (Reiss & Winkelmann, 2009) und die Sekundarstufe (Blum, Roppelt & Müller, 2013). Die mathematischen Inhalte im weiteren Verlauf der Ausbildung sind allerdings deutlich komplexer, sodass es (noch) schwieriger wird, solche Modelle für spätere Ausbildungsabschnitte zu generieren. Dies gilt auch für das Fachwissen von Lehramtsstudierenden zu Beginn des Studiums.

Unser Ziel ist ganz allgemein, geeignete Items für die Messung des Fachwissens von angehenden Studierenden des gymnasialen Mathematiklehramts zu entwickeln. Im vorliegenden Beitrag betrachten wir zunächst die Ausweisung von Anforderungsbereichen in Anlehnung an die Bildungsstandards (vgl. etwa KMK, 2012). Mit Hilfe von schwierigkeitsgenerierenden Merkmalen werden diese Anforderungsberiche genauer spezifiziert und validiert. Beide Aspekte werden im Folgenden kurz beschrieben.

Anforderungsbereiche

Um bei der Itementwicklung das Leistungsspektrum möglichst breit abzudecken, sind Aufgaben verschiedener Anforderungsbereiche zu erarbeiten (vgl. Klieme et al., 2007). Der erste Schritt der Itementwicklung ist daher die Entwicklung von Anforderungsbereichen. In diesem Beitrag wählen wir dazu exemplarisch den Bereich des Argumentierens. Die Bildungsstandards für die Lehrerbildung konzentrieren sich auf das Benennen konkreter Inhalte, ohne dabei Anforderungsbereiche zu spezifizieren (KMK, 2008). Aus diesem Grund wird im vorliegenden Beitrag eine Extrapolation der Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife (KMK, 2012) vorgeschlagen. In diesen Standards konzentriert sich Anforderungsbereich I auf das Wiedergeben von Sachverhalten im bekannten Kontext. Aufgaben im Anforderungsbereich II beinhalten das selbständige Übertragen auf vergleichbare neue Zusammenhänge, und im Anforderungsbereiche III steht das Anwenden von Wissen auf neue Problemstellungen sowie die Reflexion des eigenen Vorgehens im Vordergrund (KMK, 2012). In Bezug auf Argumentieren umfasst Anforderungsbereich III insbesondere die Bewertung von Schlüssen in Hinblick auf deren Gültigkeit und Reichweite (KMK, 2012). Übertragen auf Studienanfängerinnen und Studienanfänger werden folgende Anforderungsbereiche formuliert:

- Anforderungsbereich I: Die Studierenden können Routineargumentationen wiedergeben und anwenden sowie einfache logische Schlussfolgerungen auf Schulniveau ziehen.
- Anforderungsbereich II: Die Studierenden können einfache logische Schlussfolgerungen ziehen, die über das Schulniveau hinausgehen.
- Anforderungsbereich III: Die Studierenden können Aussagen über die Grenzen der Gültigkeit von Schlüssen treffen.

Diese Anforderungsbereiche sind auf einer normativen Basis entstanden. Aus diesem Grund ist es erstrebenswert, eine empirische Einordnung der Komplexität von Items vorzunehmen, die auf der Grundlage dieser Anforderungsberiche entstehen, und damit die Anforderungsbereiche zu präzisieren und auch zu validieren.

Komplexität von Aufgaben

Die Kenntnis schwierigkeitsbestimmender Merkmale ermöglicht es, den Anspruch von Aufgaben systematisch einzuschätzen (Cohors-Fresenborg, Sjuts & Sommer, 2004). So wurden etwa die empirisch gefundenen PISA-Schwierigkeiten mit Hilfe der folgenden vier Kategorien der Komplexität von Denkvorgängen von Cohors-Fresenborg et al. (2004) erklärt: Sprachlogische Komplexität, kognitive Komplexität, Formalisierung von Wissen und Formelhandhabung. Die *sprachlogische Komplexität* betrifft Anforderungen beim Identifizieren und Verstehen relevanter Informationen im Aufgabentext vor dessen Übertragung in eine mathematische Beschreibung. *Kognitive Komplexität* spezifiziert das Ausmaß und die Intensität der notwendigen Denkvorgänge und beinhaltet insbesondere die Gleichzeitigkeit sowie das Verketten von mehreren Denkschritten. Das Kriterium *Formalisierung von Wissen* beschreibt ob oder in welchem Ausmaß formale Repräsentationen verstanden oder erarbeitet werden müssen. *Formelhandhabung* schließlich ist ein Maß dafür, wie viele Termumformungen für die Lösung der Aufgabe notwendig sind.

Diese vier Kriterien zur Komplexität von Denkvorgängen sind nicht auf ein bestimmtes Themengebiet oder eine bestimmte Klassenstufe limitiert. Vielmehr ist es möglich, sie auf verschiedene Aufgabentypen anzuwenden. Dadurch wird es ermöglicht, die Items, die auf Basis der oben spezifizierten Anforderungsniveaus für angehende Studierende formuliert wurden, aus einer anderen Perspektive zu charakterisieren.

Forschungsfrage und Methode

Unsere Studie zielt auf die Frage, ob die Konzeption von Items auf Grundlage der Anforderungsniveaus und Einschätzung der Komplexität der Aufgaben mit Hilfe der vier Kategorien von Cohors-Fresenborg et al. (2004) zur selben Charakterisierung der Komplexität der entwickelten Items führt. Um diese Frage zu beantworten, wurden Items, die auf Grundlage der Anforderungsbereiche für angehende Studierende erarbeitet worden waren, einer Gruppe von N = 8 fortgeschrittenen Studierenden (3 weiblich, 5 männlich) vorgelegt, die im Mittel M = 25.6 Jahre alt waren (SD = 1.9). Sie lösten die Items und bewerteten anschließend deren Komplexität. Dazu wurde den Studierenden ein Bewertungsleitfaden ausgehändigt, auf dem für jede der vier Kategorien von Cohors-Fresenborg et al. (2004) drei Stufen explizit beschrieben wurden. Es war jeweils Stufe 0 das Niveau mit dem geringsten Anspruch, in Stufe 1 und Stufe 2 wird die Aufgabe als anspruchsvoller gewertet. Die Studierenden wurden aufgefordert, jede der sechs vorgelegten Aufgaben mit jedem der vier Kriterien zu bewerten. Die Übereinstimmung der acht Studierenden ist mit Fleiss κ = .29 nur gering. Die Studierenden stimmen zwar nicht bezüglich der absoluten Bewertung der Aufgaben überein, sehr wohl aber sind sie sich einig, was die Reihenfolge der Aufgaben von der einfachsten bis hin zur schwierigsten betrifft.

Ergebnisse

Wir gehen der Frage nach, ob die Einschätzung der Komplexität der Items zu dem Ergebnis führt, das als Folge der Konzeption der Items auf Grundlage der Anforderungsbereiche zu erwarten ist und berichten dazu die über alle acht Personen gemittelte Einschätzung der Komplexität der Aufgaben:

Item	*Komplex. gesamt*	*Sprach-log. Komplex.*	*Kognitive Komplex.*	*Formalismus*	*Formelhandhabung*
1a	0.6	0.3	0.3	0.3	0.0
1b	1.6	0.5	0.6	0.4	0.1
1c	2.5	0.1	1.0	1.0	0.4
2a	3.9	0.3	1.4	1.5	0.8
2b	4.6	0.3	1.5	1.6	1.3
2c	3.3	0.1	1.6	0.9	0.6

Die Items 1a und 2a sind Anforderungsbereich I zuzuordnen, Items 1b und 2b Anforderungsbereich II und 1c sowie 2c Anforderungsbereich III. Es wird innerhalb der Aufgabenblöcke eine steigende Komplexität erwartet.

Die Tabelle zeigt, dass die gesamte Komplexität innerhalb des ersten Aufgabenblockes erwartungsgemäß ansteigt, im zweiten hingegen ist dies nicht der

Fall. Eine genauere Betrachtung der Ergebnisse zeigt, dass die sprachlogische Komplexität in allen sechs verwendeten Items ähnlich hoch ist, diese wirkt sich also kaum auf die gesamte Komplexität aus. Die kognitive Komplexität der Aufgaben steigt innerhalb beider Aufgabenblöcke an. Dies deckt sich mit der Erwartung, die auf Grund der Konzeption der Aufgaben mit Hilfe der drei Anforderungsbereiche vorab getroffen wurde. Im zweiten Itemblock ist in Bezug auf Formalisierung von Wissen sowie Formelhandhabung zu beobachten, dass Item 2c weniger komplex ist als die Items 2a und 2b. Dadurch zeigt sich in der Gesamtskala nicht die erwartete Tendenz.

Insgesamt lässt sich feststellen, dass sich die auf Grund der Anspruchsniveaus erwartete Komplexität der Items nicht vollständig in den Einschätzungen der Schwierigkeit zeigt. Vielmehr ist bei der Itementwicklung zu beachten, dass neben der kognitiven Komplexität von Aufgaben weitere Charakteristika der Items deren Schwierigkeit beeinflussen können.

Literatur

Blum, W., Roppelt, A. & Müller, M. (2013). Kompetenzstufenmodelle für das Fach Mathematik. In H. A. Pant, P. Stanat, U. Schroeders, A. Roppelt, T. Siegle & C. Pöhlmann (Hrsg.), *IQB-Ländervergleich 2012. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe I* (S. 61–73). Münster: Waxmann.

Cohors-Fresenborg, E., Sjuts, J. & Sommer, N. (2004). Komplexität von Denkvorgängen und Formalisierung von Wissen. In M. Neubrand (Hrsg.). *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000,* S. 109-144. VS Verlag: Wiesbaden.

Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., Reiss, K., Riquarts, K., Rost, J., Tenorth, H. E. & Vollmer, H. J. (2003). *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. Eine Expertise.* Berlin: BMBF.

KMK (2008). *Ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in der Lehrerbildung.* Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 16.10.2008.

KMK (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife.* Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012.

Reiss, K., & Winkelmann, H. (2008). Step by step. Ein Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik. *Grundschule, 40*(10), 34–37.

Denise LENZ, Halle an der Saale

Relationales Denken und das Umgehen mit Unbekannten. Eine qualitative Studie mit Vor-und Grundschulkindern

1. Relationales Denken

Kieran (2011) beschreibt als zentrale Themen algebraischen Denkens unter anderem: „thinking about the general in the particular", „thinking relationally about quantity, number, and numerical operations" und „thinking conceptually about the procedural". Die beiden letztgenannten Aspekte greifen relationales Denken auf. Dies beschreibt das Erkennen und Nutzen von Beziehungen in Gleichungen, wobei mathematische Ausdrücke als Ganzes (statt als auszuführende Prozesse) analysiert werden, um Beziehungen für eine Lösungsfindung zu nutzen (vgl. Molina et al. 2009). Carpenter et al. (2005) bemerken dazu, dass relationales Denken ein erstes Verständnis für die Eigenschaften von Zahlen und Operationen voraussetzt, nicht aber dass diese bereits formal ausgedrückt werden müssen. Dies verdeutlicht, dass relationales Denken bereits in einem vorformalen Stadium möglich ist.

2. Umgehen mit Unbekannten- Variablenaspekte

Das Umgehen mit Unbekannten stellt einen weiteren wichtigen Aspekt algebraischen Denkens dar (vgl. Karpinski-Siebold, Kieran 2011). Da die folgend dargestellte Studie die Bereiche des relationales Denkens sowie des Umgehens mit Unbekannten miteinander vereint, wird an dieser Stelle kurz auf die Einteilung von Variablenaspekten nach Freudenthal (1973) eingegangen: Unbekannte: Die Variable wird in diesem Aspekt als spezifische Zahl verstanden, die sich eindeutig bestimmen lässt. Veränderliche: Die Variable als Veränderliche durchläuft durch sukzessive Einsetzung einen Zahlenbereich. Unbestimmte/ allgemeine Zahl: Die Variable trifft beispielsweise bei Rechengesetzen eine allgemeine Aussage. Die Aspekte der Unbekannten und der Unbestimmten sind hierbei als komplementär zueinander zu betrachten. Während Unbekannte da auftauchen, wo sich ein Wert eindeutig bestimmen lässt, treffen Unbestimmte eine allgemeine Aussage, ohne einzelne Werte zu spezifizieren (vgl. Akinwunmi 2012). Neben den oben genannten Variablenaspekten lassen sich noch weitere, empirisch gefundene Variablenvorstellungen angeben, die jedoch häufig auch Fehlvorstellungen abbilden. An dieser Stelle seien Quasi-Variable gesondert aufgeführt, da diese auch in der vorliegenden Studie eine Rolle spielen: Quasi-Variable beschreiben ebenso wie Variable als Unbestimmte allgemeine Zusammenhänge, jedoch unter zu Hilfenahme konkreter Zahlenbeispiele (vgl. Fuji & Stephens 2003).

3. Forschungsinteresse und methodisches Vorgehen

Studien zu relationalem Denken beziehen sich hauptsächlich auf formale Aufgabenstellungen, bezüglich Zahlen und Operationen innerhalb formaler Gleichungen. Schüler in Grundschulalter sind durchaus in der Lage, Beziehungen zwischen Zahlen und Operationen zu nutzen, um Gleichungen ohne ein prozedurales Ausrechnen zu lösen (vgl. u.a. Carpenter 2005, Steinweg 2004). Untersuchungen zum Äquivalenzverständnis 7 bis 11-Jähriger von Schliemann et al. (2013) zeigen auf, dass die Repräsentation unbekannter Mengen mittels Kisten und Murmeln ebenso Potentiale zum relationalen Denken bietet. Eine ähnliche Repräsentation verwendete Melzig (2013) und konnte zeigen, dass die entwickelte Lernumgebung „Knack die Box" einen Beitrag zur Entwicklung von Variablenvorstellungen leisten kann. Die Repräsentation von Boxen und Murmeln aufgreifend, wurde ein Untersuchungsdesign entwickeln, welches es erlaubt, das Herstellen von Beziehungen zwischen bekannten und auch unbekannten Mengen bereits bei Grundschul-und Kindergartenkindern zu erfassen. In videographierten klinischen Interviews wurden Kindern des Kindergartens kurz vor Schuleintritt, Zweitklässlern sowie Viertklässlern eine Rahmengeschichte von zwei Kindern erzählt, die mit Murmeln spielen. Einige dieser Murmeln sind in unterschiedlich farbigen Boxen verpackt, wobei in Boxen der gleichen Farbe immer gleich viele Murmeln enthalten sind. Die insgesamt 12 Aufgabenitems wurden in ihrem Schwierigkeitsgrad und der Verwendung bekannter und unbekannter Werte so gewählt, dass bereits die Kindergartenkinder Zugang zu den Aufgaben finden. Abbildung 1 zeigt das Aufgabenitem C1, bei der erstmalig unbekannte Mengen in Form der beiden Boxen bei beiden Kindern auftauchen.

Abb. 1: Item C1 unter Verwendung zweier unbekannter Werte. „Wie viele Murmeln müssen in der grünen (linken) Kiste sein, damit beide Kinder gleich viele Murmeln haben?"

Die halbstandardisierten Interviewnachfragen geben einen Einblick in das kindliche Denken und ermöglichen den Kindern beispielsweise durch Angabe verschiedener Zahlenwerte eine andere Sicht auf die Kisten einzunehmen, welche die verschiedenen Variablenaspekte wiederspiegeln.

4. Ergebnisse

Nach Durchsicht der Daten ergaben sich durch deduktives und induktives Kategorienbilden unterschiedliche Ausprägungen hinsichtlich der beiden Konzepte des relationalen Denkens und des Umgehens mit den unbekannten Mengen, welche sich wiederum in Beziehung zueinander bringen lassen. Die folgenden Beispiele beziehen sich auf das oben dargestellte Beispielitem C1.

Hinsichtlich der Frage, inwieweit Beziehungen zwischen den Mengen benannt werden, konnten drei unterschiedliche Ausprägungen festgestellt werden: (1) Es wird eine Beziehung zwischen den Mengen benannt. So sagt Lukas (4.Kl.): „In der grünen Kiste ist immer eine Murmel mehr, als in der orangen Kiste.“ (2) Es wird geäußert, dass zwischen den Mengen eine Abhängigkeit besteht, ohne diese jedoch zu spezifizieren. Die Viertklässlerin Katha sagt: „Es kommt darauf an, wie viele Murmeln in der orangen Kiste sind.“ (3) Es wird weder eine Beziehung genannt, noch eine Abhängigkeit zwischen den Werten in den beiden Kisten geäußert. Hierbei werden beispielsweise Werte für eine oder beide der Kisten geäußert, wie das Beispiel von Lena (2.Kl.) zeigt: „In der grünen Box sind drei Murmeln und in der orangen Box sind zwei Murmeln“. Hinsichtlich der Frage, wie die unbekannten Mengen aufgefasst werden, ließen sich die in der Literatur beschriebenen Variablenaspekte in den Äußerungen der Kinder erkennen. Diese wurden induktiv durch die Kategorien „Variablen als Unbestimmbar“ und „Variable als absolute Zahl“ angereichert. Die unbekannten Mengen werden gedeutet als: (A) Unbestimmte/ allgemeine Zahl: Hierbei lässt sich das bereits genannte Beispiel von Lukas anfügen: „In der grünen Kiste ist immer eine Murmel mehr, als in der orangen Kiste“. Er ist in der Lage die Anzahl der der Murmeln in der grünen Kiste als allgemeine Zahl aufzufassen und in Beziehung zur anderen Kiste anzugeben. (B) Quasi-Variable: Marcus (4.Kl.) sagt: „Wenn zum Beispiel in der Kiste von dem Mädchen vier Kugeln sind und dann rechnet man das plus eins und dann sind hier fünf, bei dem Jungen“. Der Unterschied zu A liegt hierbei nur darin, dass auf Zahlenbeispiele zurückgegriffen wird, die jedoch die ebenso die Beziehung beschreiben. (C) Veränderliche: Anton (4.Kl.) beschreibt „Es gibt, da gibt’s verschiedene Möglichkeiten, weil ich hier (orange Kiste) nicht weiß, was da drinne ist“. Er erkennt, dass beide Werte voneinander abhängen und kann im Anschluss auch verschiedene Zahlenpaare angeben. (D) absolute Zahl: hierbei werden konkrete Zahlenwerte genannt, ohne sie in Beziehung zu einander zu setzen, wie Clara (Kindergarten) „Vier, weil die Box ist so klein, da passen nur vier Murmeln rein“. (E) Unbestimmbare: die Kinder beschreiben hierbei, dass sich die Anzahl der Murmeln nicht bestimmen lässt, wie Axel (2.Kl.) „Ich bin ja kein Hellseher“.

Bringt man beide Auswertungsdimensionen - das Herstellen von Beziehungen und den Variablenumgang - zusammen, so ergibt sich folgende Übersicht, die verdeutlicht, wie beide Aspekte algebraischen Denkens zusammenhängen:

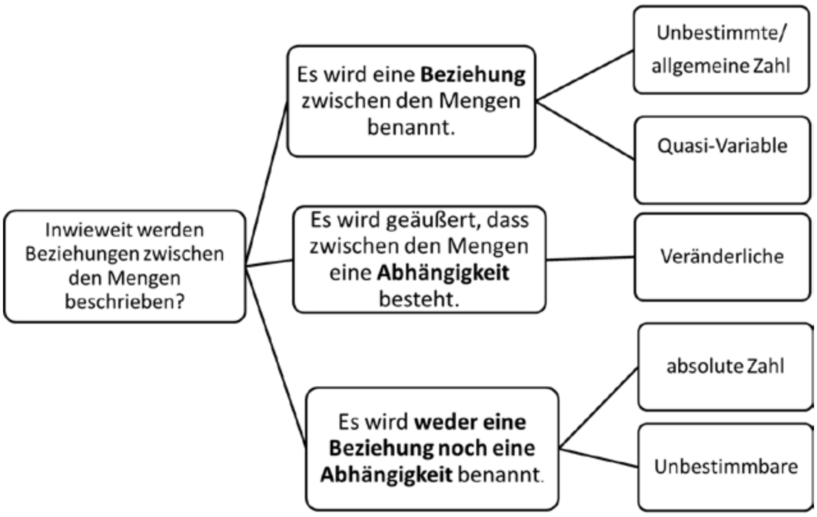


Abb.2: Das Herstellen von Beziehungen zwischen unbekannten Mengen und die damit verbundenen möglichen Deutungen dieser unbekannten Mengen.

Literatur

Akinwunmi, K. (2012). Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster (Vol. 7). Springer-Verlag.

Carpenter, T.P., Levi, L., Franke, M.L., & Zeringue, J.K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37(1), 53-59.

Fujii, T., & Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables. In Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the teaching and learning of algebra (Vol. 1, pp. 258-264).

Freudenthal, H. (1973). Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1. Stuttgart: Klett

Kieran, C. (2011). Overall commentary on early algebraization: Perspectives for research and teaching. In Early algebraization (pp. 579-593). Springer Berlin Heidelberg.

Melzig, D. (2013). Die Box als Stellvertreter: Ursprüngliche Erfahrungen zum Variablenbegriff (Doctoral dissertation, Duisburg, Essen, Universität Duisburg-Essen, Diss., 2013).

Molina, M., Ambrose, R., Castro, E. & Castro, E. (2009). Breaking the addition addiction: Creating the conditions for knowing-to act in early algebra. In S. Lerman & B.Davis (Eds.), Mathematical Action & Structures of noticing: studies inspired by John Mason (pp. 121-134). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publisher.

Schliemann, A. D. (2013). Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice. Routledge.

Steinweg, A. S. (2004). Why 25+4 might be 54. Children’s Interpretations of Uncompleted Equations. URL: https://www.uni-baberg.de/fileadmin/uni/fakultaeten/ppp_professuren/mathematik_informatik/DateieD/steinwegICME.pdf

Susanne LERMER, Deggendorf, Leonhard RIEDL, München

Aktivierende Methoden für heterogene Lerngruppen – ein Vergleich zweier konzeptioneller Ansätze

Im Artikel werden aktivierende Methoden für heterogene Lerngruppen im Fach Mathematik an Hochschulen beschrieben. Die konzeptionellen Ansätze beruhen auf dem HD-MINT Projekt an der Hochschule München und dem Projekt DEG-DLM an der Technischen Hochschule Deggendorf.

HD-MINT Projekt (Hochschuldidaktik in den MINT Fächern)

Dieses Verbundprojekt mit sechs bayerischen Hochschulen wird vom Zentrum für Hochschuldidaktik geleitet. Ziele sind die didaktische Professionalisierung der Hochschullehre im MINT Bereich und die Verbesserung der Lernerfolge der Studierenden. Um Lernende aktiv an der Lehre zu beteiligen, werden unter anderem die Methoden Peer Instruction (Mazur 1997) und Just-in-Time Teaching (Novak et al. 1999) eingesetzt. Beide Konzepte werden beschrieben und Beispiele angeführt.

Peer Instruction

Diese Methode soll Studierende zum Nachdenken und zur aktiven Mitarbeit in der Vorlesung anregen (Mazur 2006). Nach einem fachlichen Input wird den Studierenden eine verständnisorientierte Frage zum Inhalt gestellt. Jeder Lernende beantwortet diese für sich über ein Abstimmungsgerät; das Ergebnis wird daraufhin gezeigt. Liegt die Quote der richtigen Antwort zwischen ca. 30 % und 80 %, beginnt das Kernstück der Methode, die Peer Diskussion (unter etwa 30 % müssen weitere Erklärungen erfolgen, über etwa 80 % wird die Fragestellung aufgeklärt). Die Lernenden versuchen dabei, ihre Mitstudierenden mit fachlichen Argumenten von der richtigen Lösung zu überzeugen. Daraufhin folgt die zweite Abstimmung, wobei nun die Quote der richtigen Antwort höher liegen sollte. Abschließend wird im Plenum die Frage aufgelöst, indem die richtige Antwort erklärt und die falschen Optionen widerlegt werden. Folgendes Beispiel zeigt eine verständnisorientierte Frage zum Thema Nullfolgen (Wolf et al., 2014, S. 136):

Welche Aussage ist wahr?

A. Eine alternierende Folge kann keine Nullfolge sein.

B. Keine konstante Folge ist eine Nullfolge.

C. Die Glieder einer Nullfolge kommen 0 beliebig nahe, werden aber nie 0.

D. Eine Nullfolge kann ein von 0 verschiedenes Supremum bzw. Infimum haben.

E. Alle Nullfolgen sind monoton fallend.

Peer Instruction regt Großgruppen zum aktiven Mitdenken an und rhythmisiert die Lehre durch den Wechsel zwischen Input und eigenständigen Denken. Durch verständnisorientierte Fragen können Fehlvorstellungen von Lernenden aufgezeigt und mit spezifischen Erklärungen von Mitstudierenden und Dozierenden behoben werden. Die Lernenden erhalten unmittelbares Feedback zum individuellen Lernstand. Der Lehrende erhält auch Rückmeldung zum Wissensstand seiner Studierendengruppe und kann seine Lehre entsprechend anpassen. Die Methode fördert Diskussions- und Argumentationskompetenz sowie soziale Kompetenzen. Heterogene Lerngruppen werden zum Mitdenken angeregt und ihre mathematischen Fähigkeiten gefördert. Von zentraler Bedeutung ist die Qualität der Frage; diese muss verständnisorientiert sein und Fehlvorstellungen von Studierenden aufzeigen. Es eignen sich somit keine Fragen, die nur Faktenwissen prüfen.

Just-in-Time Teaching

Diese Methode richtet die Präsenzzeit in der Lehre effektiv an den fachlichen Bedürfnissen der Studierenden aus. Es werden geeignete Lesematerialien zu einer Thematik und dazu passende Rechen- und Verständnisaufgaben auf einer Lernplattform zur Verfügung gestellt. Die Studierenden vertiefen sich in die Inhalte und bearbeiten die Aufgaben, wobei sie zur Bearbeitung der Aufgaben unmittelbar Feedback durch die Lernplattform erhalten. Den Studierenden muss dabei die Möglichkeit gegeben werden, Verständnisprobleme und Fragen äußern zu können. Anhand dieser Rückmeldung muss der Dozierende die Präsenzzeit spezifisch an den fachlichen Bedürfnissen der Studierenden ausrichten. Im Folgenden wird der Einsatz der Methode im Rahmen einer Numerikvorlesung (Informatik) an der Hochschule München beschrieben: es werden die vier Themen Interpolation von Funktionen, numerische Integration, lineare Gleichungssysteme und nichtlineare Gleichungen behandelt. Das Lesematerial hat jeweils einen Umfang von ca. acht Seiten, wobei die Inhalte mit vielen Beispielen ausführlich erklärt werden. Dabei werden bekannte Themen aus Analysis und linearer Algebra, die in der Numerik von Bedeutung sind, wiederholt und auch neue Inhalte thematisiert, die selbständig gut erlernbar sind. Als Beispiel dient eine Rechenaufgabe zum Thema nichtlineare Gleichungen, wo das Newton-Verfahren aus Analysis wiederholt wird:

Bestimmen Sie für die Gleichung $x - cos\, x = 0$ mit dem Newton-Verfahren die ersten beiden Iterationsschritte x_1 und x_2. Der Startwert ist $x_0 = 1$. Runden Sie auf drei Nachkommastellen.

Die Präsenzzeit in der Lehre wird an den fachlichen Bedürfnissen der Studierenden ausgerichtet, was für den Dozierenden oft mit Zeitaufwand verbunden ist. Dabei wird das kontinuierliche und selbstständige Lernen während des Semesters gefördert, so dass Fehlvorstellungen früh behoben werden können. Dieses Konzept ist auch geprägt durch das gegenseitige Feedback. Studierende melden Verständnisprobleme, die in der Präsenzphase geklärt werden und der Dozierende erhält dabei Einblick in die Denkweise seiner Studierenden. Die

Selbstlernphasen bei heterogenen Lerngruppen werden somit stark gefördert und typische Fehlkonzepte behoben.

Projekt DEG-DLM (Deggendorfer Distance Learning Modell)

Das Projekt DEG-DLM an der TH Deggendorf sieht die mediendidaktische Neukonzeption von berufsbegleitenden Lehrveranstaltungen vor. Ziel ist es, heterogenen Lerngruppen in berufsbegleitenden Weiterbildungen, wie Personen mit der Absicht des Wiedereinstiegs oder mit Familienpflichten sowie beruflich Qualifizierten, mit einer angemessenen und zielgruppenspezifischen Lehre zu begegnen (Coenen et al., 2014). Unter die im Projekt zu konzipierenden Lehrveranstaltungen fällt ein Brückenkurs Mathematik. Um Personen unter Berücksichtigung ihres Vorwissens auf die Anforderungen der Erstsemesterveranstaltungen vorzubereiten, richtet sich der Kurs an die dem Projekt zugrundeliegende Zielgruppe. Die Charakteristika dieser Zielgruppe erfordern umfangreiche Unterstützungsangebote sowie individuelle, zeitlich flexible und wohnortnahe Lernmöglichkeiten. Diesen Bedürfnissen wird im Brückenkurs mit einem Blended Learning Format begegnet, dessen didaktische Basis das flexible Lernen, orientiert an der „MGML-Methodology“ (Girg, Lichtinger & Müller, 2012), darstellt.

Flexibles Lernen im Brückenkurs

Flexibles Lernen zeichnet sich durch Wissenskomponenten aus, die in kleine, aufeinander aufbauende Schritte strukturiert sind und von den Lernenden in unterschiedlichen Sozialformen vertieft werden. Die Lernfortschritte werden dabei eigenständig kontrolliert. Dadurch wird sowohl individualisiertes als auch gemeinsames Lernen auf Basis des jeweiligen Vorwissens ermöglicht und bei heterogenen Gruppen ein hoher Lernerfolg begünstigt (Girg et al., 2012, S. 76ff). Zentrales Element ist die sogenannte Lernleiter, die in fünf mit Symbolen versehene Bausteine (Einführung, Übung, Evaluation, Vertiefung/Wiederholung) gegliedert ist. Sie gibt eine Strukturierung des Lernstoffes vor und unterstützt den Lernenden bei der individuellen Lernprozesssteuerung (Girg et al., 2012, S. 71). Den Symbolen kommt eine große Rolle im Verlauf der Lehrveranstaltung zu. Sie sind sowohl in der Präsenz- als auch in der Onlinephase neben den Anweisungen für jede Aufgabe zu finden, so dass die Teilnehmenden selbstgesteuert die Bearbeitungsreihenfolge nachempfinden und die Aufgaben auswählen können.

Das Material im Brückenkurs

Für die Gestaltung der Lernaktivitäten gelten im flexiblen Lernen vier Prinzipien: nach Girg et al. (2012, S. 44) sollen die Aktivitäten „small“, „manageable“, „meaningful“ und „joyful“ gestaltet sein; „small“ bedeutet, dass die Lernaktivität zeitlich angemessen sein soll, während „manageable“ für eine schrittweise Erarbeitung des Lernstoffes steht. „Meaningful“ unterstreicht, dass das Material an die Lebensumwelt der Lernenden angepasst sein soll und

„joyful“ soll den Spaß am Lernen verdeutlichen. Im Brückenkurs Mathematik passiert dies durch selbstentwickelte Materialien wie z.B. ein Funktionendomino. Das am Gesellschaftsspiel orientierte Domino wird in der Vertiefung zum Thema „elementare Funktionen“ eingesetzt. Die Steine bestehen aus Funktionsgraph und -vorschrift, die es in richtiger Reihenfolge aneinanderzulegen gilt. Ziel ist es, die Transformation der Darstellungsarten von Funktionen zu stärken.

Fazit

Beide Projekte erstreben die didaktische Professionalisierung der Lehre mit aktivierenden Methoden. Das HD-MINT Projekt erreicht mit lernerzentrierten Konzepten wie Peer Instruction und Just-in-Time-Teaching traditionelle Studierende im MINT Bereich und damit eine sehr große Zielgruppe. Der Brückenkurs Mathematik im Projekt DEG-DLM fokussiert sich auf nichttraditionell Studierende, die ihr Studium in einem technischen Fach erst beginnen.

Literatur

Coenen, A., Fisch, K., Oswald, A., Reitmaier, M. & Seifert, I. (2014). Ist- und Bedarfsanalyse im Rahmen des Projekts DEG-DLM. Deggendorfer Distance Learning Modell zur Stärkung der Region Niederbayern und der Förderung der akademischen Weiterbildung in ländlich strukturierten Gebieten. Verfügbar unter https://www.th-deg.de/files/0/degdlm/deg-dlm_ist-bedarfs-analyse.pdf

Girg, R., Lichtinger, U. & Müller, T. (2012). Lernen mit Lernleitern. Unterrichten mit der Multi-GradeMultiLevel-Methodology (MGML). Immenhausen: Prolog Verlag.

Mazur, E. (2006). Peer Instruction: Wie man es schafft, Studenten zum Nachdenken zu bringen. In: Praxis der Naturwissenschaften; Physik in der Schule, 4/55, (S. 11-15).

Mazur, E. (1997). Peer Instruction: A User’s Manual. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.

Novak, G., Gavrin, A., Christian, W. & Patterson, E. (1999). Just-In-Time Teaching: Blending Active Learning with Web Technology. Upper Saddle River, NJ: Benjamin Cummings.

Wolf, K., Nissler, A., Eich-Söllner, E. & Fischer, R. (2014): Mitmachen erwünscht - aktivierende Lehre mit Peer Instruction und Just-in-Time Teaching. In: Zeitschrift für Hochschulentwicklung, Band 9, Heft 4, (S. 131-153).

Andreas LINDNER, Linz

Differential- und Integralrechnung mit GeoGebra3D

Im Lehrplan für Mathematik in der Sekundarstufe 2 der allgemein bildenden höheren Schulen in Österreich ist unter den didaktischen Grundsätzen das Lernen mit technologischer Unterstützung verpflichtend vorgeschrieben (BMBF 2004). Ab dem Jahr 2018 wird auch die zentrale Abschlussprüfung unter Verwendung von PC, Notebooks oder Taschencomputern, die ein bestimmtes Mindestmaß an Anforderungen erfüllen müssen, geschrieben.

Neben den verschiedenen Funktionen des Technologieeinsatzes im Mathematikunterricht wie die Verwendung als Experimentier-, Modellier- oder als Rechenwerkzeug, spielt das Visualisieren eine zentrale Rolle (BIFIE 2011, S. 73f). Aus diesem Grund sollen ein paar Anregungen aus dem Bereich der Differential- und Integralrechnung vorgestellt werden, die eine hilfreiche Unterstützung im Lernprozess sein können.

Einige der Beispiele bewegen sich am oberen Ende der in Schulen vermittelten Lehrinhalte und können auch als Unterstützung beim Studium von angehenden Lehrkräften eingesetzt werden.

Alle Beispiele finden sich in dem GeoGebraBook Differential- und Integralrechnung mit GeoGebra3D unter http://tube.geogebra.org/b/2362601. Die Leserinnen und Leser sind eingeladen, die Materialien kostenfrei als Download zu beziehen oder direkt online zu erproben. Viele Arbeitsblätter entwickeln ihre ganze Wirkung erst in der Dynamik der Veränderung und diese kann hier nur unzureichend in allen Einzelheiten erklären werden. Aufgrund der vorgegebenen Kürze der Ausführungen ist auch eine Beschreibung der verfügbaren Materialien in allen Details nicht möglich.

Differentialrechnung

Differentialrechnung wird traditionell in der Schulmathematik nur mit Funktionen in einer Variablen betrieben. Die Möglichkeiten für Visualisierungen im Raum im Zusammenhang mit Differentialrechnung sind demnach relativ spärlich gesät, einige Anwendungen bieten sich dennoch an.

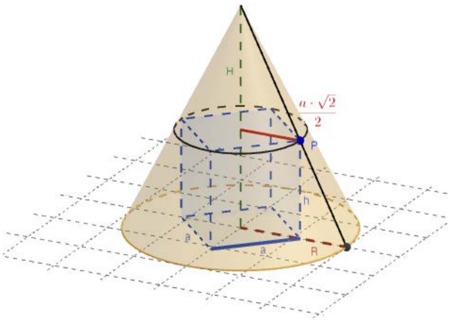


Abbildung 6: Kegel und Quader

Ein Standardbeispiel für Optimierungsaufgaben ist die bekannte Aufgabe, bei der einem Kegel ein Quader mit quadratischer Grundfläche eingeschrieben werden soll, das ein möglichst großes Volumen hat (vgl. Abb.1). Hier eignet sich das 3D-Modul von GeoGebra nicht nur zum Visualisieren des Sachverhalts, sondern bietet auch die Möglichkeit zum Experimentieren und Interpretieren. Mit Multiple Choice-Abfragen und offenen Fragestellungen können die Rückmeldungen der Lernenden gesammelt werden. Je nach Einstellung haben die Schülerinnen und Schüler auch die Möglichkeit, ihre Antworten sofort selbst in einem Selbstcheck zu überprüfen.

Im Zusammenhang mit der Statistik lässt sich der Einsatz der Differentialrechnung am Beispiel der Regressionsgeraden aufzeigen. Für eine bestimmte Anzahl von Daten – geometrisch als Punkte dargestellt – soll die Regressionsgerade ermittelt werden. Das ist jene Gerade mit Steigung k und Achsenabschnitt d, für die die Summe der quadratischen Abstände minimal ist. Damit kann eine Optimierungsaufgabe für eine Funktion in zwei Variablen formuliert und im 3D-Modul mit Hilfe von einer entsprechenden Fläche und der Tangentialebene in einem Punkt visualisiert werden (vgl. Abb. 2).

Das Applet ersetzt natürlich nicht die Herleitung der Formel für die Berechnung einer Regressionsgerade, es kann aber die Begründung für eben diese Berechnung besser verständlich machen. Außerdem ist es ein Beispiel für das Zusammenspiel von Grafik 3D-Fenster und einem zweidimensionalen Grafik-Fenster, wobei die zweidimensionale Darstellung nicht einfach der Grundriss der dreidimensionalen ist.

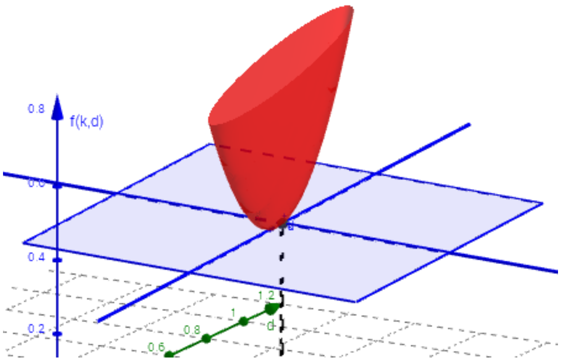


Abbildung 7: Regressionsgerade

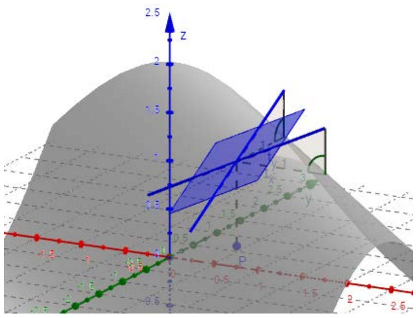


Abbildung 8: Tangentialebene

Tangentialebenen können sehr vielfältig für Veranschaulichungen (vgl. Abb. 3) herangezogen werden und bieten ein geeignetes Werkzeug zum Experimentieren mit verschiedenen Flächen. Dies sollen die Beispiele zu *Tangentialebene an eine Fläche* und *Richtungsableitung* zeigen. Hier sind die Anwender aufgefordert, das Verhalten von Tangentialebene und Tangenten in verschiedene Richtungen an den Graphen von beliebigen Funktionen zu erforschen.

Integralrechnung

Die Intention beim Einsatz von bereits vorgefertigten Applets im Zusammenhang mit der Integralrechnung liegt in der Erwartung, dass das Verständnis für das Zustandekommen der verwendeten Formeln bei der Berechnung von Volumina von Körpern erhöht werden kann. Visualisierungen bieten auch eine praktischen Vorteil: Viele Zeichnungen und Skizzen sind sehr zeitaufwändig und manchmal auch zu umfangreich, um in einer Unterrichtseinheit von den Lernenden angefertigt zu werden. Anstelle des Betrachtens einer statischen Zeichnung in einem Lehrbuch tritt nun die Beschäftigung mit einer dynamischen Darstellung, die so oft wie möglich mit einem konkreten Arbeitsauftrag verbunden sein soll.

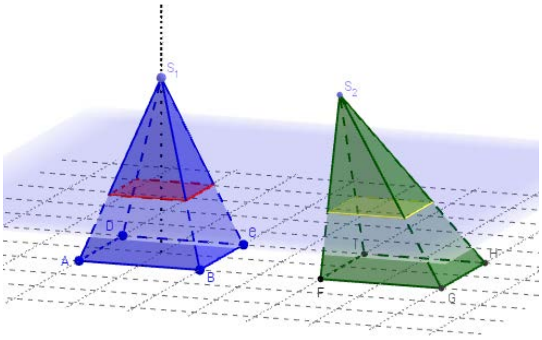


Abbildung 9: Prinzip von Cavalieri

Das erste Applet im Abschnitt *Integralrechnung* zeigt eine Veranschaulichung des Prinzips von Cavalieri: Zwei Körper, deren Schnittfläche in jeder beliebigen Höhe denselben Flächeninhalt besitzen, haben dasselbe Volumen. Im Applet werden eine gerade und eine schiefe vierseitige Pyramide für die Visualisierung verwendet. Gleichzeitig werden die Werte für beide Flächeninhalte der Schnittflächen angezeigt. Hier liegt aber auch eine Gefahr für eine unreflektierte Verwendung der Veranschaulichung: In der Praxis hat sich gezeigt, dass Lernende eine Übereinstimmung der Flächeninhalte für einige wenige Werte als ausreichenden Beweis für die Gleichheit der Volumina angesehen haben.

Bei den Beispielen *Volumen einer Pyramide*, *Dom zu Speyer*, *Volumen eines Staudamms* und *Rotationsvolumen* soll in weitere Folge gezeigt werden, wie durch die Berechnung einer endlichen Summe der Volumina von Quadern bzw. Prismen das Volumen eines Körpers immer besser angenähert werden kann. Es geht also darum zu veranschaulichen, dass ein bestimmtes Integral näherungsweise als Summe von Produkten aufgefasst werden kann.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_n f(x_n) \cdot \Delta x$$

Die Benutzer sollen bei der Beschäftigung mit dem Applet unmittelbar erleben, dass sich bei einer Erhöhung der Anzahl n der Unterteilungen der Wert der endlichen Summe immer mehr einem bestimmten Wert annähert.

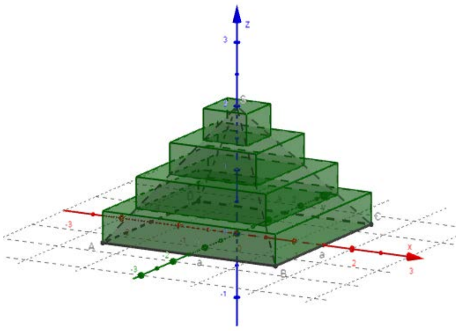


Abbildung 10: Pyramide

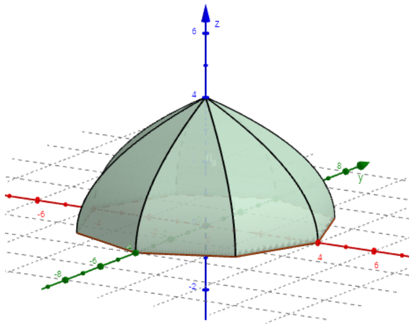


Abbildung 11: Dom zu Speyer

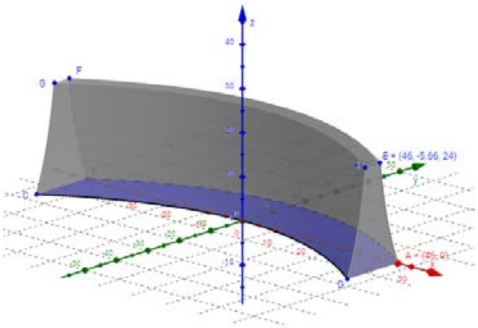


Abbildung 12: Staudamm

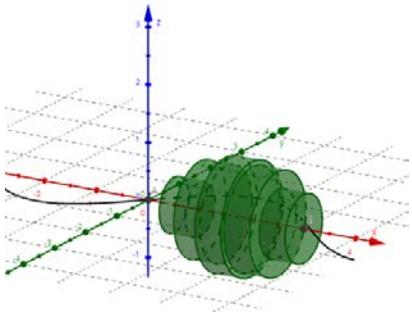


Abbildung 13: Rotationsvolumen

Eine weitere Hilfe für die Vorstellung, welches Aussehen ein Körper hat, der durch die Rotation eines Funktionsgraphen um die x- oder y-Achse entsteht, bietet das Applet *Volumen von Rotationskörpern*. Ein Benutzer kann in einem Eingabefeld die darzustellende Funktion und die Grenzen für die Berechnung bzw. Darstellung eingeben.

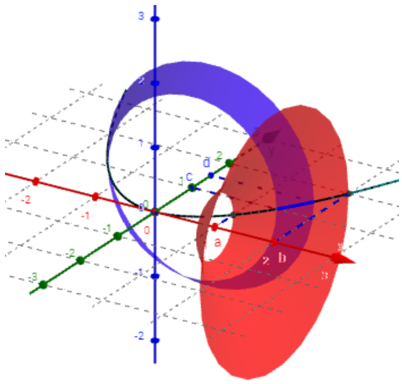


Abbildung 14: Rotationskörper

Wurde dynamische Geometrie mit GeoGebra bisher vor allem für ebene Problemstellungen herangezogen, so ist nun auch die Erweiterung auf 3D im System integriert. Gerade im Zusammenspiel mit dem zweidimensionalen Grafikfenster und dem CAS-Fenster ergeben sich viele neue Möglichkeiten, den Mathematikunterricht zu bereichern.

Literatur

BIFIE (Hrsg.) (2011). Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe. Auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung, Teil 1. Graz: Leykam.

BMBF (Bundesministerium für Bildung und Frauen) (2004). Lehrplan Mathematik. https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf. Zugriff am 1.3.2016

Lindner, A. (2016). Differential- und Integralrechnung mit GeoGebra3D. http://tube.geogebra.org/b/2362601. Zugriff am 1.3.2016

Peter LUDES, TU Dresden

Förderung überfachlicher Fähigkeiten durch informatische Grundbildung im Mathematikunterricht der Primarstufe

Programmieren ist die Sprache des 21. Jahrhunderts. Wer eine Programmiersprache spricht, wird auf der ganzen Welt verstanden. Mehr als das: Er ist in der Lage die Welt zu verändern. Viele IT Unicorn Businesses haben ihre Wurzeln in einem Kinderzimmer oder der Garage der Eltern. Oft kamen diese Unternehmen nur zu Stande, weil außerordentliche Begabung und autodidaktisches Lernen aufeinandertrafen. Die breite Masse der Menschen scheint die modernen Technologien jedoch nur zu nutzen, ohne die grundlegenden Funktionen oder Hintergrundstrukturen zu verstehen, die die Entwicklung eines Produkts erst möglich machen. In welcher Form auch immer eine solche Idee zustande kommt, sie wird sehr wahrscheinlich durch Programmierung realisiert. Die Wahl der Programmiersprache ist dabei eher nebensächlich, da diese fast alle den gleichen Grundregeln folgen. Die Grundregeln einer jeden Programmiersprache ermöglichen es, ein fundamentales Verständnis für Informatik zu vermitteln, das weit über das hinausgeht, was im Allgemeinen als Medienkompetenz bezeichnet wird. Was ist ein Algorithmus? Was ist Logik? Wie kann Technologie mir helfen, meine Arbeit zu erleichtern? Mit all diesen Fragen können sich Kinder im Grundschulalter beschäftigen.

Insofern gibt es ein großes gesellschaftliches Interesse daran, die Schule auch als Teil der digitalen Welt zu gestalten. Verfolgt man aktuelle Medienberichte wird dies deutlich. Schlagzeilen, wie „Die digitale Schulklasse“ (Zeit Online, 19.11.2014), „Grundschüler sollen programmieren lernen” (Zeit Online, 02.01.2015), „Programmieren als Kulturtechnik“ (Main-Post, 21.02.2016), oder gar „Gelingt die digitale Revolution im Kindergarten“ (Die Welt, 30.09.2014), sind an der Tagesordnung. Die Informatik ist der Hauptbaustein zum Zugang zu dieser Welt. Hiernach sollte man annehmen, dass es vielfältige Bemühungen in der Schul- und Bildungsforschung gibt, erste Zugänge zum Lernen der Informatik bereits früh zu legen. Dies scheint jedoch in Deutschland bis dato nicht der Fall und das Lernen von informatischen Grundkompetenzen einer Nische der weiterführenden Schule vorbehalten. In den USA finden sich hingegen verstärkt Umsetzungen von Informatik in allen Schulformen, die sogar schon in einigen Bundesstaaten fest zum Lehrplan gehören (vgl. Morgridge 2015).

Informatik und Medienkompetenz

Die deutsche Grundschule verschließt sich nicht der digitalen Welt, reduziert diese jedoch vielfach auf Aspekte der Medienkompetenz (vgl. Krauthausen 2012, Schreiber 2012). Medienkompetenz (-einsatz, -nutzung) ist im Mathematikunterricht der Grundschule vielfältig vertreten, wobei fälschlicherweise angenommen wird, man würde durch derartige Zugänge auch informatische

Grundkompetenzen anbahnen. Medienkompetenz ist für sich gesehen kein standardisierter Terminus, es ist „ein schillernder und je nach Interesse sehr unterschiedlich auslegbarer Begriff.“ (Krauthausen 2012, S. 1). Interessante Ideen, die nicht nur versuchen Medienkompetenz zu vermitteln, sondern zeigen, wie Informatik in der Grundschule umgesetzt werden könnte, liefern bspw. Herper und Hinz (2009) und Weigand (2009). Herper und Hinz (2009) zeigen, wie sie den Unterricht über das OLPC (One Laptop Per Child) Prinzip strukturieren und mit einem speziell entwickelten Laptop sogar teilweise das Schulbuch ersetzen können. Weigand (2009) geht mit dem Projekt „Algorithmik in der Grundschule“ noch einen Schritt weiter und zeigt, wie ganz ohne Einsatz von PCs die Struktur eines Algorithmus auf dem Papier erlernt werden könne. Hier werden z.B. If-Else-Schleifen über das schrittweise Zeichnen verschiedener Blumenmuster eingeführt.

Informatik im Fachunterricht der Grundschule

Um Inhalte der Informatik im Grundschulunterricht nutzen zu können, müssen diese Inhalte mit einem bestehenden Schulfach verknüpft werden, da ein eigenständiges Fach Informatik in der Grundschule (noch) nicht existiert. Die Mathematik scheint dafür ein idealer Ort zu sein, da sie eine sehr kompatible Basis für die Prinzipien der Informatik anbietet wie bspw. für die Themenbereiche Algorithmen oder Logik.

Wenn dem so ist, dass die Mathematik und die Informatik kompatible Themenbereiche haben, die ähnliche Strukturen aufweisen, sollte es möglich sein, diese konkret zu benennen. Einige Bereiche, wie der Algorithmus, erscheinen trivial. Denkt man etwa an die schriftlichen Rechenarten, so kann jede Ausführung eben dieser als Anwendung eines Algorithmus verstanden werden, der einer immer gleichen Struktur folgt und zu jeder erlaubten Eingabe auch eine Ausgabe liefert. Um weitere Verbindungen zu verdeutlichen, betrachten wir die inhaltlichen Kompetenzen der Bildungsstandards für die Grundschule im Bereich Mathematik mit ihren fünf Teilbereichen: Raum und Form, Daten und Zufall, Muster und Strukturen und Größen und Messen (Tabelle 1) und zeigen mögliche Umsetzungen dieser im Bereich der Informatik auf, ähnlich wie diese von Krauthausen (2012) für den Medieneinsatz vorgeschlagen werden.

Bildungsstandards MA-GU	Informatik
• Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen • Rechenoperationen verstehen und beherrschen	• Rechenoperationen in Algorithmen • Hochzählen von Schleifendurchläufen • Sortieralgorithmen • Variablentypen integer, float, double

• sich im Raum orientieren	• Programmierung von Robotern • Bewegungsareal definieren und abschätzen • Planung von Bewegungsabläufen mit möglichen Hindernissen
• Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen	• Algorithmen strukturieren, planen und umsetzen • Abläufe planen und in "Program-miersprache" übersetzen • Aussagenlogik verstehen/erstellen • Sortieralgorithmen
• Größenvorstellungen besitzen • mit Größen in Sachsituationen umgehen	• Schrittweite eines Roboters bestim-men • Einfache Laufzeitbestimmung
• Daten erfassen und darstellen • Wahrscheinlichkeiten von Er-eignissen in Zufallsexperimen-ten vergleichen	• Wahrscheinlichkeit verschiedener Eingaben/Ausgaben • Daten verarbeiten -> Speicherung von Daten, Verschlüsselung • Rolle der Zufallszahlen in der Pro-grammierung

Tabelle 1

Untersuchungsdesign

Das hier zugrunde gelegte (in der Planung befindliche) Pilotprojekt versucht Belege dafür zu finden, dass das Lernen informatischer Grundkompetenzen Kinder dazu befähigt, Kompetenzen und Fähigkeiten zu entwickeln, die weit über das spezifische Fach hinaus genutzt werden können. Mehr als nur das fachliche Wissen der Kinder zu erweitern, könnte das Gelernte helfen, bessere Lernstrategien und Organisationsfähigkeiten zu entwickeln. Dieses Projekt versucht u.a. auch durch den Einsatz von LEGO-Mindstorms Baukästen das Lernen von Grundstrukturen der Informatik anzuregen. Mit diesen Baukästen können Kinder Roboter entwickeln, die sie später auch selbst programmieren können, um bestimmte Anweisungen ausführen zu lassen. Um die Programmierung zu planen und umzusetzen, müssen die Kinder Algorithmen entwerfen („if this then that"), die so gestaltet sind, dass sie alle möglichen auftretenden Gegebenheiten und Situationen abdecken und es an keiner Stelle zu einem Fehlverhalten des Roboters kommt. Ideal hierbei ist, dass die Lernenden ihre Algorithmen sofort in einer Realsituation und nicht nur in einer virtuellen Umgebung testen können und eine direkte Rückmeldung zu ihren vorherigen Planungen erhalten. Im Rahmen eines Forschungsseminars sollen in Zusammenarbeit mit Studierenden der TU Dresden informatische Lernumgebungen entwickelt werden, die eben diese Grundkompetenzen der Informatik erläutern und entwickeln. Diese Lernumgebungen sollen in einer Pilotierungsphase in der Schule erprobt werden, um sie später in überarbeiteter Form in einer Hauptstudie zu verwenden. Die so entwickelten Lernumgebungen sollen in Kleingruppen von zwei bis vier Kindern in einem Zeitraum von ca. neun Wochen in einer wöchentlichen Einheit à 90 Minuten in der Nachmittagsbetreuung bearbeitet werden. Die Lerneinheiten werden videographiert und mit Methoden der interpretativen Unterrichtsforschung analysiert. Zusätzlich zur Bearbeitung der Lernumgebung soll der Lernfortschritt bzw. das Vorgehen der Kinder dokumentiert werden. Dies wird über ein Lerntagebuch, die Erstellung eines Wikis bzw. eines Storyboards erfolgen. Die einzelnen Tools sollen im Vorfeld in idealer Passung zur Lernumgebung gewählt werden. Hier soll auch darauf geachtet werden, ob etwaige strukturelle Lerninhalte, die dem Kinde in der Lernumgebung vermittelt wurden in der Dokumentation Anwendung finden.

Ziel des Projektes ist es zu ergründen, inwieweit die Bearbeitung informatischer Lernumgebungen der Kompetenzentwicklung und –schulung der Kinder zugutekommt, indem die Kinder Kompetenzen entwickeln, die nicht nur dem Bereich der Informatik, sondern gegebenenfalls auch dem der Mathematik oder denen anderer Bereiche zuzuordnen ist. Im Idealfall könnte die Untersuchung ein erster Schritt sein auf dem Weg, Informatik als Teilbereich der Mathematik und später sogar als eigenständiges Fach in der Grundschule zu etablieren.

Literatur

Herper, H. & Hinz, V. (2009). Informatische Bildung im Primarbereich. In B. Koerber (Hrsg.), Zukunft braucht Herkunft (S. 74-85). Bonn: Gesellschaft für Informatik.

Krauthausen, G. (2012). Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule. Berlin: Springer-Verlag.

Morgridge, C. (2015). Every Gift Matters: How Your Passion Can Change the World. Greenleaf Book Group. Austin.

Schreiber, C. (2012). Podcasts selbst erstellen? Na klar: PriMaPodcasts! Grundschulunterricht Mathematik, 4, 39-42.

WEIGEND, M. (2009). Algorithmik in der Grundschule. In B. Koerber (Hrsg.), Zukunft braucht Herkunft (S. 97-108). Bonn: Gesellschaft für Informatik.

Jürgen MAASZ, Linz (Österreich)

Modellieren im Mathematikunterricht

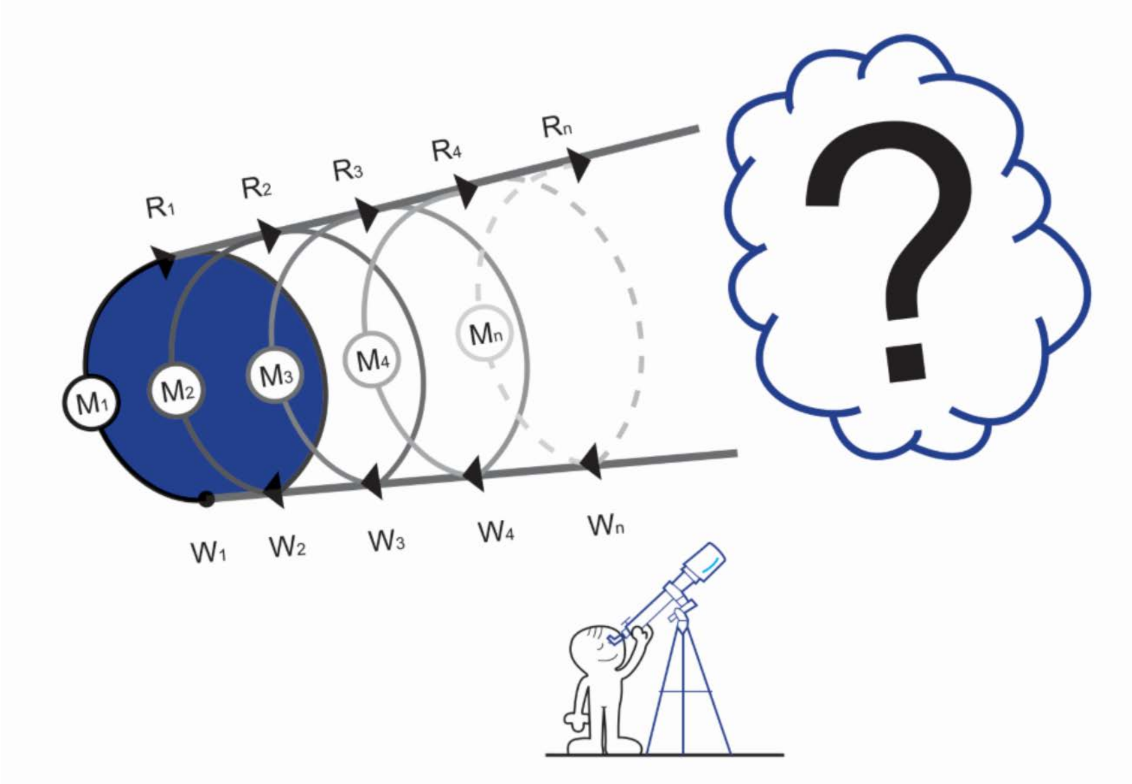
Abstract: *Das Modellieren steht im Zentrum des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts. Modellieren ist ein Instrument zur Erkenntnis und zur Gestaltung der Welt, das – so können wir von der Philosophie lernen – konstitutiv für fast jede Erkenntnis und jedes Handeln ist, also sehr weit über den Mathematikunterricht hinaus Bedeutung hat. Zudem ist es kein Kreis, sondern ein offener Prozess, der – hoffentlich – zu besserem Verständnis und zu vermehrten Handlungsmöglichkeiten führt.*

Vom Modellierungskreislauf zur offenen Modellierungsspirale

Im Zusammenhang mit dem Modellieren im realitätsbezogenen Mathematikunterricht hat es sich eingebürgert, von einem **Modellierungskreislauf** zu sprechen. Von der Realität bzw. einem ausgewählten Aspekt der Realität geht es je nach Darstellung über mehr oder weniger viele Stationen zu einem mathematischen Modell, also in die Welt der Mathematik und von dort aus zurück in die Realität. Auch optisch sehen die Darstellungen von Blum, Grefrath, Kaiser, Leiß etc. ebenso wie die von Mathematikern wie Buchberger oder Pollak kreisförmig aus.

Im Vergleich zu jenem Mathematikunterricht, in dem nur operatives Handeln geübt wird (etwa: teaching – to - the - test), ist die Orientierung an einem Modellierungskreislauf ein großer Fortschritt, weil nicht nur etwas ausgerechnet wird, sondern auch im Unterricht erlebt werden kann, wie Mathematik in Alltag und Beruf, in der Realität, nützlich sein kann, um etwas besser zu verstehen oder besser zu machen. Wenn aber das „besser“ ernst gemeint ist, scheint mir die Metapher vom Laufen im Kreis ungünstig gewählt zu sein. Was erreicht ein Mensch, der im Kreis läuft? Wer regelmäßig im Kreis läuft, also etwa in einem Sportstadium, erzielt ohne Zweifel einen Trainingseffekt: Dieser Mensch wird in Zukunft vermutlich besser im Kreis laufen. Unter gewissen Bedingungen ist das Laufen auch gut für die Gesundheit. Aber ein Fortschritt im realen Leben, eine Bewegung auf ein mehr oder weniger fernes Ziel zu, lässt sich durch Laufen im Kreis nicht erreichen. Dazu muss schon das Ziel selbst anvisiert werden; die Bewegung muss in Richtung auf dieses Ziel erfolgen. Dabei wird wie im realen Leben die Bewegung nicht immer einfach geradeaus aufs Ziel gehen können, manche scheinbaren Umwege erweisen sich im Rückblick sogar als außerordentlich wichtig.

In meinem Buch über das Modellieren im Mathematikunterricht (Maaß 2015) habe ich versucht, diese Überlegung in eine passende Grafik umzusetzen:



Ausgangspunkt (W1) einer Modellierung (M1) sind WIR, also Menschen, die etwas verstehen oder verändern wollen, dazu Modellieren und Konsequenzen für die Realität (R1) bewirken (wollen). Wir, nun als (W2), betrachten die (wenn auch nur leicht) veränderte Realität (R1) und entwickeln das Interesse an weiteren Änderungen. Also wird erneut modelliert. Die erneuten Anstrengungen führen zu neuen und hoffentlich besseren Modellen (M2), die wiederum Auswirkungen auf die Realität (R2) haben. Wir (W3) haben etwa dazu gelernt, neue Einsichten gewonnen und können unsere Interessen und Wünsche präziser formulieren. Daraus mag der Wunsch nach weiterer Aktivität resultieren. Wann und wie die Bemühung um eine Verbesserung der Erkenntnis oder der Realität endet, ist zu Beginn prinzipiell ebenso offen, wie die abschließende Bewertung des Prozesses: Ist tatsächlich (bzw. aus wessen Sicht?) eine Verbesserung erreicht worden?

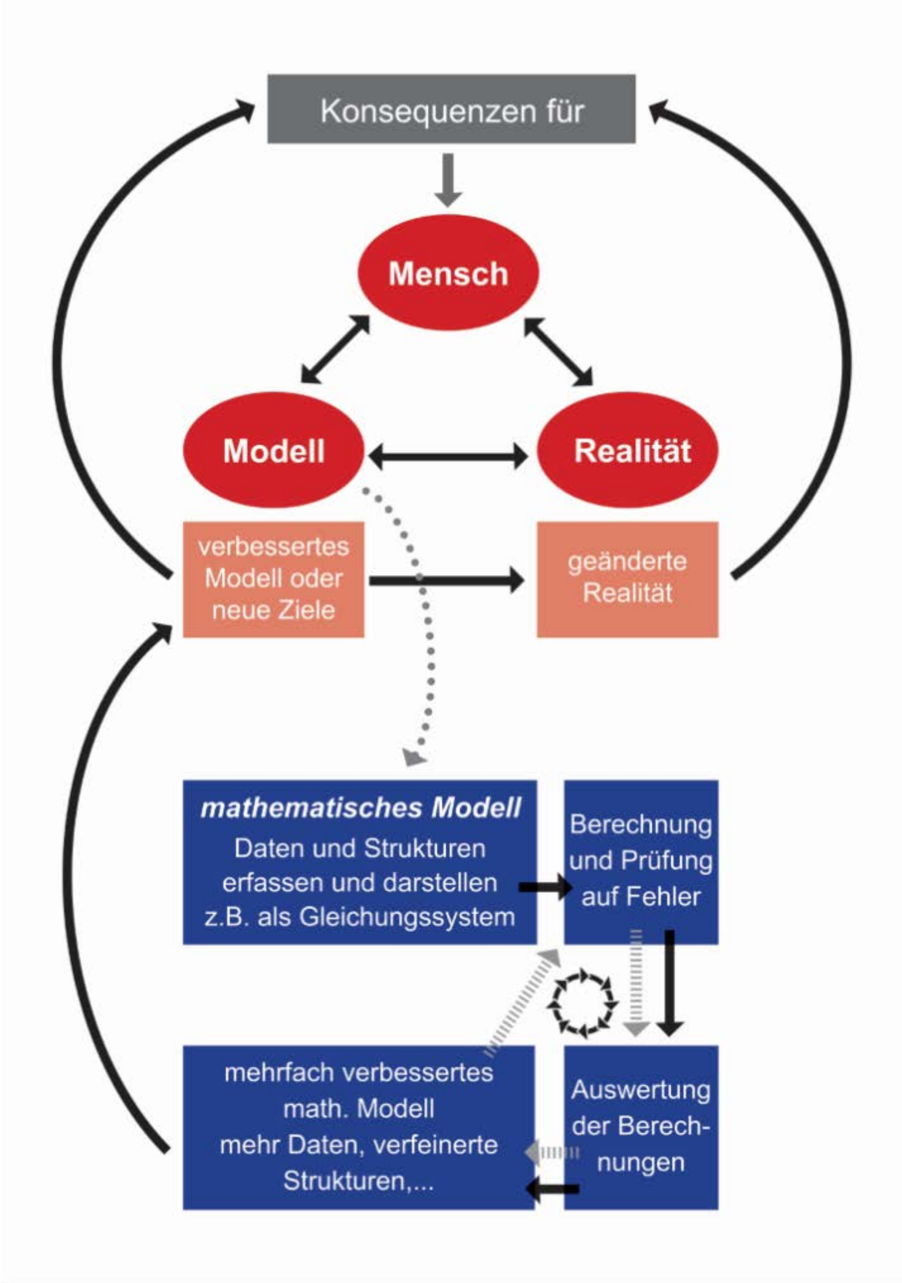
Für den Mathematikunterricht kann die Bemühung, diese Frage nach dem Abschluss, der Bewertung und der damit verbundenen rückblickenden Reflexion der eigenen Arbeit zu einer großen und sinngebenden Bereicherung führen. Wenn der Unterricht sich darauf konzentriert, den jeweils aktuellen Algorithmus zu üben, endet die Beschäftigung mit einer Aufgabe mit einem Ergebnis, das richtig oder falsch ausgerechnet ist. Der Sinn der Aufgabe, die Interpretation des Ergebnisses im Hinblick auf die Welt außerhalb des Klassenraumes ist kein Thema. Deshalb wird auch kein über den Unterricht und die Benotung hinausreichender Sinn dieses Mathematikunterrichtes erkannt.

Ein zweiter großer Vorteil der Selbststeuerung, der eigenen Entscheidung darüber, ob an einer Frage weiter gearbeitet werden soll oder nicht, liegt in der Förderung der Selbstständigkeit der Schülerinnen und Schüler. So kann auch im Mathematikunterricht etwas Wichtiges zur Erreichung der allgemeinen Lehrziele wie Mündigkeit beigetragen werden.

Schülerinnen und Schüler modellieren sehr oft im Alltag, aber nicht im Mathematikunterricht

Wer im Rahmen von Lehrerausbildung oder Lehrerfortbildung sowie in fachdidaktischen Diskussionen den Vorschlag vertritt, den Mathematikunterricht phasenweise auch realitätsbezogen zu gestalten und in diesem Zusammenhang mathematische Modellierung zu lehren, kennt den typischen Einwand: Hier wird etwas zusätzlich verlangt, das angesichts der bereits vorhandenen übergroßen Stofffülle nicht mehr leistbar ist. Ganz zu Recht kann gegen diesen Einwand auf Forschungen zum Themenbereich „Erwachsene und Mathematik" (vgl. http://www.alm-online.net/) verwiesen werden, die in vielen Ländern gezeigt hat, dass bei Erwachsenen vom Mathematikunterricht oft hauptsächlich eine negative Erinnerung und ganz wenig von all dem gelehrten Stoff übrig bleibt, weil – so die häufige Antwort von Erwachsenen auf die Frage nach ihrem Mathematikunterricht – sie nie den Sinn des Ganzes gesehen haben.

Hier will ich ein anderes Gegenargument einführen. Modellieren ist für die Schülerinnen und Schüler nichts Neues, was zusätzlich erlernt werden muss, sondern alltäglicher Weg zur Erkenntnis. Neu für Schülerinnen und Schüler und offenbar auch für Mathematiklehrerinnen und -lehrer ist die Einsicht, dass **mathematisches** Modellieren die Qualität der verwendeten Modelle, ihre Präzision und Aussagekraft, verbessern kann (vgl. dazu ausführlich Maaß 2015, S. 194ff.). Wenn es gelingt, diese Qualität von Mathematik im Unterricht erlebbar zu machen, stellt sich die Sinnfrage deutlich weniger. Wenn für die Schülerinnen und Schüler und ihre Eltern zum Elternsprechtag Kuchen gebacken werden soll und die Menge und Zusammensetzung der benötigten Zutaten wird richtig vorausberechnet, ist dies ein kleines Beispiel. Ähnliche Beispiele, wie etwa das Ausmalen eines Raumes und der Einkauf der richtigen Menge Farbe, die Planung für die Einrichtung des eigenen Zimmers oder für die Aufstellung von Ständen in der Aula der Schule beim Schulfest können auch ohne bewussten Einsatz von Mathematik gelingen, aber mit viel besser. Wenn zudem Bespiele aus der professionellen Anwendung von Mathematik in der Industrie, der naturwissenschaftlichen Forschung oder in der Medizintechnik etc. thematisiert werden, ist der wesentliche Nutzen mathematischer Modellierung ganz offensichtlich. Die folgende Grafik zeigt den Zusammenhang.



Literatur

Jürgen Maaß: Modellieren in der Schule. Ein Lernbuch zu Theorie und Praxis des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts, Reihe „Schriften zum Modellieren und zum Anwenden von Mathematik“, WTM Verlag Münster 2015

Tobias MAI, Rolf BIEHLER, Alexander BÖRSCH, Christoph COLBERG, Paderborn

Über die Rolle des Studikurses Mathematik in der Studifinder-Plattform seine didaktischen Konzepte

Der Studikurs Mathematik ist ein auf der Studifinder-Plattform (www.studifinder.de) eingebettetes Angebot von Lernmaterialien für den Übergang in die Hochschule. Im Studifinder finden zukünftige Studierende verschiedene Unterstützungsangebote für den Übergangsprozess. Dabei handelt es sich um ein gemeinsames Projekt des Ministeriums für Innovation, Wissenschaft und Forschung und den Fachhochschulen sowie Universitäten des Bundeslandes Nordrhein-Westfalen (vgl. Kallweit 2014).

Der Studifinder ist in vier Bereiche gegliedert: Studitest, Studisuche, Studicheck und Studikurs. Studitests sind Interessen- und Neigungstests, welche durch individuelles Feedback an die jeweiligen Nutzer eine erste Orientierung bei der Studiengangswahl sowie Hinweise auf weiter interessanten Angebote – z.B. Tage der offenen Tür oder Vorkurse – an den Fach-/Hochschulen geben. Mit der Studisuche sind alle in NRW angebotenen Studiengänge zentral zusammengestellt worden. Studiengänge können dort entweder anhand inhaltlich-thematischer Kriterien oder anhand der Standorte gesucht werden. Zur Überprüfung des Schulwissens bieten die Studichecks fachliche Tests mit automatischer Auswertung für das Sprach- und Textverständnis sowie die Mathematik an. Der Studikurs bietet unterteilt nach Sprach- und Textverständnis sowie Mathematik Selbstlernmaterial an. Im Folgenden wird genauer auf die Studichecks für Mathematik und den Studikurs Mathematik eingegangen.

Studichecks Mathematik

Insgesamt werden derzeit 13 Studichecks für Mathematik angeboten, die von Johanne Heitzer (RWTH Aachen) federführend entwickelt wurden. Die Anzahl orientiert sich dabei an den 13 Wissensbereichen (s. Tabelle 1), welche in einem fortwährenden Diskussionsprozess herausgearbeitet wurden. Alle Studichecks sind frei für Nutzer der Plattform verfügbar. Zusätzlich wird eine Zuordnung der Wissensbereiche zu den einzelnen Studiengängen an den jeweiligen Fach-/Hochschulen in NRW durch die Standorte selbst vorgenommen. Somit wird für den Nutzer ersichtlich, welche Wissensbereiche von einem möglichen zukünftigen Studiengang als besonders studienrelevant bewertet werden. Darüber hinaus werden Schwellenwerte für Empfehlungen im Anschluss an einen Test von jedem Studiengang selbst festgelegt.

In insgesamt drei Stufen wird nach Abschluss eines Tests unterschiedlich nachdrücklich dazu geraten, Vorwissen durch die Teilnahme an Vorkursen oder durch den direkt verlinkten Studikurs Mathematik zu verbessern. Innerhalb eines Studichecks finden sich verschiedene Frageformate – zum Beispiel Eingabefelder für Terme oder Zahlen oder Antwortauswahlen im Multiple-Choice-Format.

• **Elementare Funktionen** • **Differentialrechnung** • **Höhere Funktionen** • **Integralrechnung** • **Lineare Gleichungssysteme** • **Potenzen, Wurzeln, Logarithmen** • **Rechenregeln und -gesetze** • **Rechnen mit rationalen Zahlen** • **Terme und Gleichungen**	• **Analytische Geometrie** • **Geometrie** • **Stochastik I** • **Stochastik II** • **Trigonometrie**

Tabelle 1: Fertigstellte (links) und in der Entwicklung befindliche (rechts) Lerneinheiten im Studikurs Mathematik.

Studikurs Mathematik

Der Studikurs Mathematik wird an der Universität Paderborn von den Autoren und zusätzlich von Yael Fleischmann entwickelt und im Laufe des Sommers 2016 über die Studifinder Webseite komplett zugänglich sein. Durch die Orientierung an den Wissensbereichen entstehen passgenaue Lerneinheiten, welche auf der Plattform mit den Studichecks und den Studiengängen eng verbunden sind. Tabelle 1 zeigt eine Liste aller Wissensbreiche. Die passgenauen Lerneinheiten setzen sich je aus einem Intro und mehreren Langlerneinheiten – diese Anzahl variiert je nach Wissensbereich – zusammen. Erreichbar ist der Studikurs über die Zuordnung zu den Studiengängen, in der Auswertungsansicht der einzelnen Studichecks und auf direktem Wege. Unabhängig von der Art des Zugangs stehen Lernenden stets alle Lernmaterialien zur freien Verfügung bereit. Die Lerneinheiten zu den Wissensbereichen bilden nach der Fertigstellung im Sommer 2016 zusätzlichen einen kompletten Kurs, um Schulwissen zu wiederholen und erste Schritte im Übergang an die Hochschule zu machen. Bis dahin werden die Lernmaterialien des VEMINT-Projekts übergangsweise im Studikurs als vollständiger Kurs angeboten und es wird auf den OMB+ Kurs extern verlinkt.

Intros

Ein Intro soll einen problemorientierten Einstieg bieten und einen kompakten fachlichen Querschnittsüberblick über einen Wissensbereich bei ca. 1h

Lernzeit bieten. Dies soll erste positive Lernerlebnisse vermitteln und eine Motivierung für die Lernenden darstellen, sich tiefergehend mit den Inhalten des Wissensbereichs bzw. des Studikurses auseinanderzusetzen.

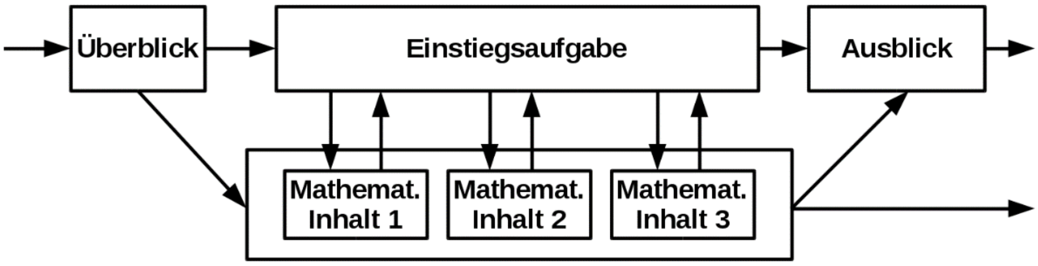


Abb. 1: Schematische Darstellung des Aufbaus eines Intros

Wie in Abbildung 1 dargestellt beginnt der Lernende auf einer Übersichtsseite und kann sich danach wahlweise mit der Einstiegsaufgabe auseinandersetzen sowie die fachlichen Kurzwiederholungen als Hilfestellung dabei nutzen oder die Kurzwiederholungen als fachlichen Einblick nutzen, um einen Überblick über den Wissensbereich zu erhalten. Am Ende geben Intros noch einen Ausblick, was in den zugehörigen Lerneinheiten weiter gelernt werden kann. Auf die verschiedenen Nutzungsmöglichkeiten werden Lernende jeweils zu Beginn eines Intros explizit hingewiesen.

Langlerneinheiten

Die ausführlichen Lernmodule sollen bei einer durchschnittlichen Lernzeit von 6h ein Thema eines Wissensbereiches behandeln. Alle Lernmodule folgen einer einheitlichen Inhaltsstruktur, in welcher die Inhalte den Lernenden in folgenden Bereichen dargeboten werden: Übersicht, Hinführung, Erklärung und Begründung, Aufgaben, Anwendung sowie Kompaktübersicht. Basierend auf den Erfahrungen und Konzepten aus dem VEMINT-Projekt werden den Lernenden verschiedene Lernwege zu Beginn eines Lernmoduls vorgestellt und sie werden darauf hingewiesen, dass sie die Strukturierung in die Bereiche ebenso für individuelle Lernwege nutzen können (vgl. Biehler et. al, 2012).

Als Lernmaterial für den Brückenschlag von der Schule in die Fach-/Hochschule ist die Erklärung auf einem fachlich angemessenem Niveau eine besondere Herausforderung. Erklärungen sollen mathematisch korrekt dargestellt werden und dennoch die Lernvoraussetzungen der Zielgruppe, also Schulabsolventen, berücksichtigen. Dazu ist es notwendig in mathematischer Hinsicht intellektuell redlich zu reduzieren (vgl. Kirsch 1977, S. 87ff). Diese Darbietung der Inhalte weicht an einigen Stellen von dem Schulniveau ab, birgt aber das Potential besser auf die Gegebenheiten an der Fach-/Hochschule vorzubereiten ohne einen Bruch im Übergang zu provozieren (vgl.

Klein 1967, S. 1). Um diese Ziele zu erreichen, werden im Studikurs Mathematik zu allen Regeln, Sätzen usw. jeweils Begründungen bzw. Beweise angegeben und falls mit den verfügbaren mathematischen Mitteln kein sinnvolle Begründung im Kontext des Lernmaterials möglich ist, wird zumindest auf die Beweisbarkeit einer Aussage und die Notwendigkeit eines Beweises hingewiesen. Allerdings kann eine Auseinandersetzung mit diesen Begründungen manchmal unerwünscht sein, deshalb werden viele Begründungen nur in Form eines aufklappbaren Zusatztextes zugänglich gemacht.

Fazit

Mit dem Studikurs Mathematik entsteht ein für Lernende frei verfügbares Lernmaterial, welches zusätzlich durch die Studifinder-Plattform in ein breites Beratungsangebot eingebettet ist. Der Studikurs unterstützt verschiedene Anwendungsszenarios und zeichnet sich durch seine Sorgfalt für eine intellektuell redliche mathematische Darbietung der Lerninhalte aus.

Literatur

Biehler, R., Fischer, P. R., Hochmuth, R., und Wassong, T. (2012). *Mathematische Vorkurse neu gedacht: Das Projekt VEMA*. In: M. Zimmermann, C. Bescherer und C. Spannagel (Eds.): Mathematik lehren in der Hochschule – Didaktische Innovationen für Vorkurse, Übungen und Vorlesungen (pp. 21–33). Hildesheim/Berlin: Franzbecker.

Kallweit, M. (2014). Studienvoraussetzungen prüfen – *Der StudiCheck Mathematik in NRW*. In Roth, J., Ames, J. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2014. Band 1. Münster: Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Kirsch, A. (1977). Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. *Didaktik der Mathematik*, 5(2). S. 87–101.

Klein, F. (1967). *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte aus, I - Arithmetik · Algebra · Analysis*. Berlin/Heidelberg: Springer Verlag.

Günter MARESCH, Salzburg

Smartphones und Boolesche Operationen – Via QR-Codes zu einem digitalen Lernpfad

1. Smartphones im Unterricht

Smartphones gehören mittlerweile zu den selbstverständlichen Gebrauchsgegenständen von Jugendlichen. Zahlreiche Studien zeigen die beträchtlichen Steigerungsraten des Besitzes von Smartphones von Jugendlichen in den vergangenen Jahren auf. 2013 besaßen durchschnittlich 72% Prozent der Mädchen und Burschen im Alter von 12-19 Jahren aus Deutschland ein Smartphone (Feierabend et al., 2013). Bis zum April 2014 stieg der Besitz von Smartphones bereits auf 84% der Jugendlichen aus Deutschland im Alter von 12-13 Jahren (Bitkom, 2015). Bei einer aktuellen Studie (Maresch, 2016) gaben knapp mehr als 95% der Jugendlichen im Alter von 12-16 Jahren an, ein Smartphone zu besitzen. Wir können daher davon ausgehen, dass aktuell von einer (nahezu) flächendeckenden Ausstattung von Jugendlichen mit Smartphones ausgegangen werden kann und dass dadurch (nahezu) alle Lernenden mit einem kleinen kompakten Hochleistungscomputer ausgestattet sind.

Das Potential von Smartphones wird zumeist über das Installieren und Verwenden von zusätzlichen Programmen (Apps) genutzt. In Deutschland hatten im Jahr 2013 Jugendliche durchschnittlich 19 Apps installiert – Mädchen im Schnitt 15 und Burschen durchschnittlich 24 (Feierabend et al., 2013). Ein Typ von Apps sind sogenannte QR-Code-Scanner. Diese Apps ermöglichen es NutzerInnen die kleinen quadratischen Codes einzuscannen und damit zu weiteren Texten bzw. Inhalten aus dem Internet geleitet zu werden.

2. QR-Code

Der Begriff QR-Code steht für „Quick Response"-Code (schnelle Antwort). QR-Codes sind zweidimensionale in quadratischer Form generierte Muster, die aus schwarzen und weißen Punkten nach genau definierten Gesetzmäßigkeiten generiert werden. QR-Codes wurden von der japanischen Firma Denso Wave im Jahr 1994 erfunden und werden vorrangig in der Industrie als Ersatz für Barcodes verwendet. Breiter Beliebtheit erfreuen sich die Codes durch die Möglichkeit, Internetadressen, Termine, Visitenkarten und kurze Texte grafisch darstellen zu können. Mittels Smartphones oder Tablets werden die Codes eingelesen und die NutzerInnen direkt zu den entsprechenden Informationen geleitet. Diese Eigenschaft der Codes lieferte die Motivation die einzelnen Stationen des Lernpfads mittels QR-Codes an die Lernenden zu vermitteln.

3. Die wissenschaftliche Basis des Lernpfads

Als wissenschaftlich-didaktische Grundlage für die Konzeption des QR-Code-Lernpfads wurde das Blended Learning Konzept von Maresch (2013) herangezogen. Die lernparadigmatische Grundlage des didaktischen Konzepts stellt der konstruktivistisch basierte Ansatz des Cognitive Apprenticeship mit den sieben zentralen Methoden Modelling, Coaching, Scaffolding, Fading, Articulation, Reflection und Exploration dar (Collins et al., 1989). Entlang der vier Stufen des Blended Learning Konzepts wurde der Lernpfad entwickelt, wobei neben den grundlegenden Stufen auch die weiteren Empfehlungen des Konzepts wie z.B. zu Sozialformen und zur Cognitive Load (Sweller, 1988) Beachtung fanden.

4. Einleitende Bemerkungen zum Lernpfad

Mithilfe des QR-Code-Lernpfads können sich SchülerInnen vorrangig im Alter von 13-19 Jahren eigenständig das Themenfeld Boolesche Operationen erarbeiten. Die Booleschen Operationen sind im Allgemeinen aus dem Bereich Mengenlehre bekannt. Mengendiagramme dienen zur grafischen Veranschaulichung der Mengenlehre (siehe Abbildung 1 oben). Die drei Booleschen Operationen Vereinigung, Durchschnitt und Differenz werden anhand unterschiedlichster Materialien kennengelernt und mit verschiedenartigsten Übungsformen gefestigt. Schließlich geben die Lernenden am Ende des Lernpfads ihr digitales Feedback ab, wodurch die LehrerIn entsprechend Rückmeldung für etwaige Adaptierungen des Unterrichts erhält.

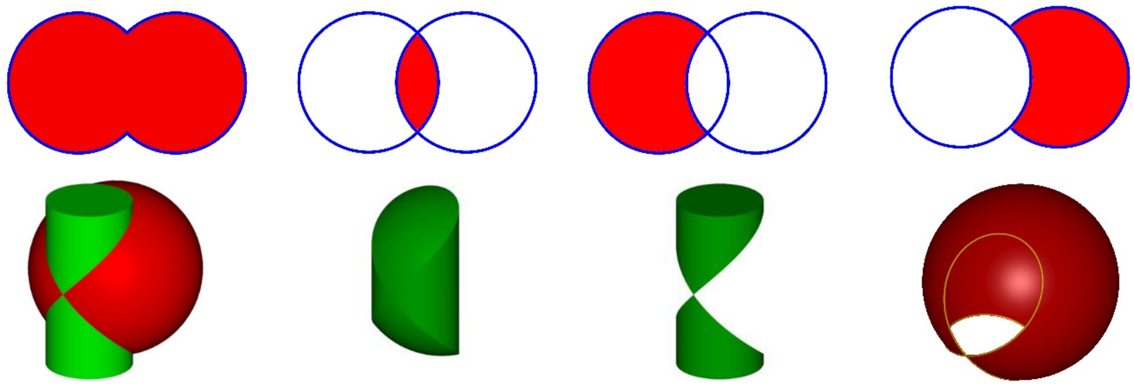


Abbildung 1: Vier Ergebnisse von Booleschen Operationen von zwei Kreisen (oben) und Zylinder und Kugel (unten)

Für die Bewältigung des Lernpfads benötigen die SchülerInnen ein Smartphone mit Internetzugang. Zudem wird ein installierter pdf-Reader vorausgesetzt. Einige Stationen (Station 2, 3a und 4a) können von den Lehrenden zusätzlich auch als Ausdruck zur Verfügung gestellt werden. Für das Bearbeiten der Arbeitsblätter benötigen die Lernenden Bleistift, Radierer und je nach Vorliebe Farbstifte. Als Sozialform für das Arbeiten am Lernpfad wird Partnerarbeit empfohlen. Hierbei wird gewährleistet, dass die SchülerInnen in Diskurs miteinander das Themenfeld erarbeiten. Zeitlich sollte für einen Durchlauf des Lernpfads in etwa 30 Minuten vorgesehen werden.

Der gesamte Lernpfad ist unter http://www.geometriedidaktik.at in der Rubrik „Training“ / „Boolesche“ auf zwei Varianten zugänglich: Einerseits als Internetseite, auf der sämtliche QR-Codes und die erklärenden Texte tabellarisch angeführt sind und andererseits als layoutierter Ausdruck des vollständigen Lernpfads zum Aushang in der Klasse.

5. Der Lernpfad

Die Inhalte und Materialien der insgesamt neun Stationen des Lernpfads werden nachfolgend vorgestellt:

Theoretische Einführung in das Themenfeld Boolesche Operationen (1a, 1b, 1c). Lernende erhalten einen Überblick über die drei möglichen Operationen Vereinigung, Durchschnitt und Differenz und sehen jeweils anschauliche zwei- und dreidimensionale Beispiele.

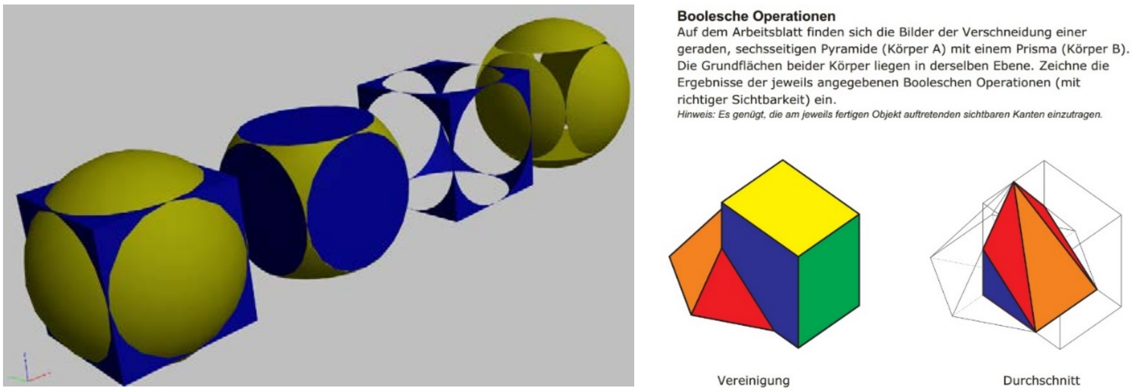


Abbildung 2: Ausschnitte aus Station 1c (links) und Station 3b (rechts)

Selbsttest zu den Inhalten der ersten Station (2). Bei dieser Station können Lernende am Smartphone gemeinsam die Lösungen der Aufgaben besprechen bzw. diese mit einem App, welches das Editieren von pdfs ermöglicht, direkt bearbeiten. Übungsbeispiel (3a) zum freihändigen Einzeichnen der vier Möglichkeiten, wie zwei Objekte via Boolescher Operationen in Verbindung gebracht werden können. Die Station 3b zeigt die Lösungen.

Die SchülerInnen tragen bei (4) auf dem Bildschirm bzw. Arbeitsblatt die unterschiedlichen Lösungen der Booleschen Operationen zwischen einem gegebenen Würfel und Zylinder ein. 4b und 4c zeigen die Lösungen von Station 4a in zwei unterschiedlichen Varianten. Bei (5) erwartet die SchülerInnen ein „Quartett zu den Booleschen Operationen“. In einem Quiz weisen die Teilnehmenden den grafischen Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben die jeweils passenden Lösungen zu. Die Station (6) bietet einen kompakten und zeitlich in wenigen Augenblicken bewältigbaren Selbsttest als interaktive Übung, die auf der Plattform http://learningapps.org erstellt wurde. Bei

Station (7) machen die Lernenden einen abschließenden Selbsttest in Quizform zum Themenfeld Boolesche Operationen, der sie auf insgesamt 11 Unterseiten diverse Fragen beantworten lässt. SchülerInnen geben bei Station (8) ihr Feedback zum Lernpfad ab, indem sie Multiple Choice-Fragen beantworten. Lehrende können hier individuell gestaltete Fragen erstellen und somit ein der jeweiligen Klasse entsprechendes Feedback einholen.

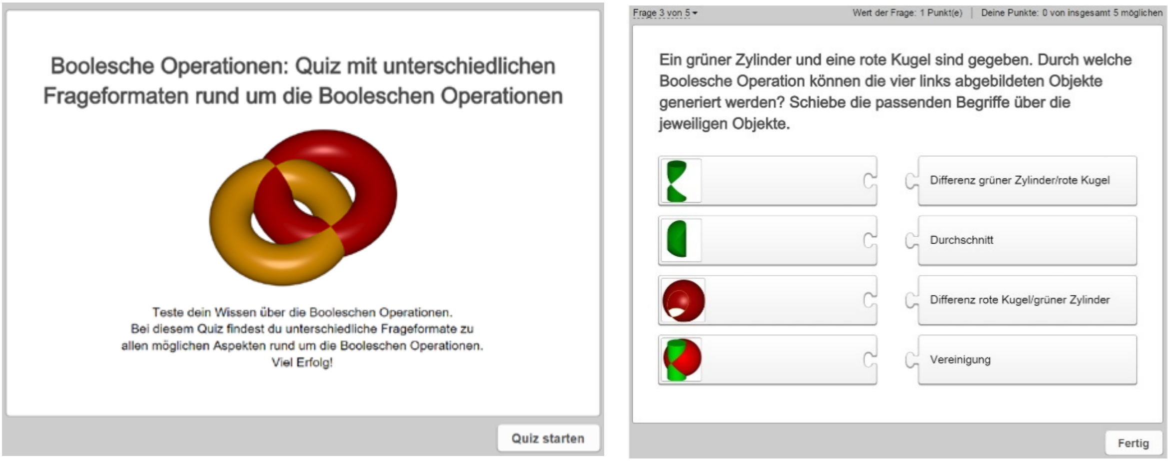


Abbildung 3: Ausschnitte aus Station 7 (links) und Station 9 (rechts)

Das Quiz der Bonusaufgabe (9) ermöglicht einen abschließenden Selbsttest zu den Booleschen Operationen, bei dem unterschiedlichste Frageformate zu unterschiedlichen Aufgaben rund um das Themenfeld Boolesche Operationen gestaltet sind.

Literatur

Bitkom (Bundesverband Informationswirtschaft, Telekommunikation und neue Medien e.V.) (2015). Studie zu Kindern und Jugendlichen in der digitalen Welt. https://www.bitkom.org/Publikationen/2014/Studien/Jung-und-vernetzt-Kinder-und-Jugendliche-in-der-digitalen-Gesellschaft/BITKOM-Studie-Jung-und-vernetzt-2014.pdf [25.02.2016]

Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S.E. (1989). Cognitive Apprenticeship: Teaching the Crafts of Reading, Writing and Mathematics. In Resnick L.B.: Knowing, Learning and Instruction; Lawrence Erlbaum, Hillsdale NJ, 453-494.

Feierabend, Sabine, Karg, Ulrike, & Rathgeb, Thomas (2013). JIM-Studie 2013. http://www.mpfs.de/fileadmin/JIM-pdf13/JIMStudie2013.pdf [25.02.2016]

Maresch, G. (2016). (Noch) nicht veröffentlichtes Manuskript der Auswertungen der Erhebung vom Jänner und Februar 2016 an einem österreichischen Gymnasium.

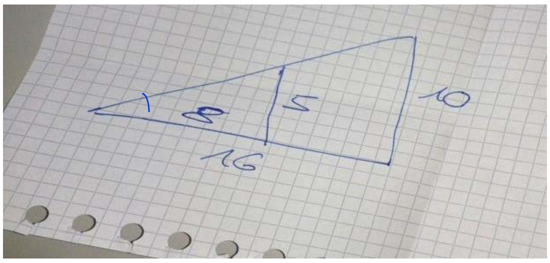
Maresch, G. (2013). Ein didaktisches Blended-Learning-Konzept. In Jahrbuch für Allgemeine Didaktik (JfAD), Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. In Cognitive Science, 12, 257-285.

Michael MARXER, Freiburg

Was hat Geld umtauschen mit Trigonometrie zu tun? Verhältnismäßig: viel!

Ganz unterschiedlichen Problemen kann dieselbe Mathematik zugrunde liegen. Einer schlichten Verhältnisgleichung sieht man nicht (mehr) an, ob sie ein Geldwechselproblem löst oder eine trigonometrische Problemstellung. Der in frühen Klassenstufen entwickelte Blick auf Verhältnisse kann in den weiteren Klassenstufen zunehmend geschärft und genutzt werden. Ziel ist dabei, in unterschiedlichen Problemstellungen die Verhältnisse zu erkennen um dann auf bekannte Lösungsstrategien zurückgreifen zu können.



Einer Handskizze wie der obigen sieht man nicht eindeutig an, auf welchen mathematischen Inhalt sie sich bezieht und erst recht nicht, welche Problemstellung damit gelöst wird. Die Skizze könnte aus einer Aufgabenstellung zu ähnlichen Dreiecken stammen, möglicherweise aber auch aus der Trigonometrie. Oder es könnte sich um eine vereinfachte Darstellung von Steigungsdreiecken bezüglich des Graphen einer linearen Funktion handeln. Wechselt man auf die symbolische Ebene und stellt die Aussage durch die Verhältnisgleichung

$$\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$$

dar, könnte es sich auch um eine Aufgabenstellung zum Erweitern von Brüchen oder um Überlegungen zum maßstäblichen Vergrößern handeln. Es wird deutlich, dass all diesen (vermeintlich sehr verschiedenen) Stoffgebieten eine gemeinsame Mathematisierung zugrundliegt: die proportionale Zuordnung. Für das Lernen und die verständige Nutzung von Mathematik ist es also sinnvoll, diese Verbindung zwischen den jeweiligen mathematischen Inhalten transparent zu machen. Dies hat Auswirkungen auf die jeweiligen Aufgabenformate und die damit verbundenen Fragestellungen. Insgesamt ist es das Ziel, eine weitere Strategie im Umgang mit Problemstellungen im Bewusstsein zu verankern und entsprechend den Handlungsspielraum in der Nutzung mathematischer Werkzeuge zu vergrößern.

Obwohl diese verbindende Strategie den Lehrenden bewusst ist, wird sie doch selten im Unterricht thematisiert. Beziehungen zwischen den Einflussgrößen herzustellen erscheint schwieriger, als sich auf dem vertrauten Boden von Formeln zu bewegen, in die nur richtig eingesetzt werden muss. Dabei ist das Aufstellen einer geeigneten Verhältnisgleichung oft der einfachere und schnellere Weg. Zur Illustration hierzu ein Beispiel aus der Prozentrechnung:

In der Klasse 6a gibt es 11 Brillenträger. Die Klasse hat 25 Schüler. Wie hoch ist der Anteil der Brillenträger?

Der Griff zur Formelsammlung wäre zunächst verlockend: $P = \frac{G \cdot P}{100}$

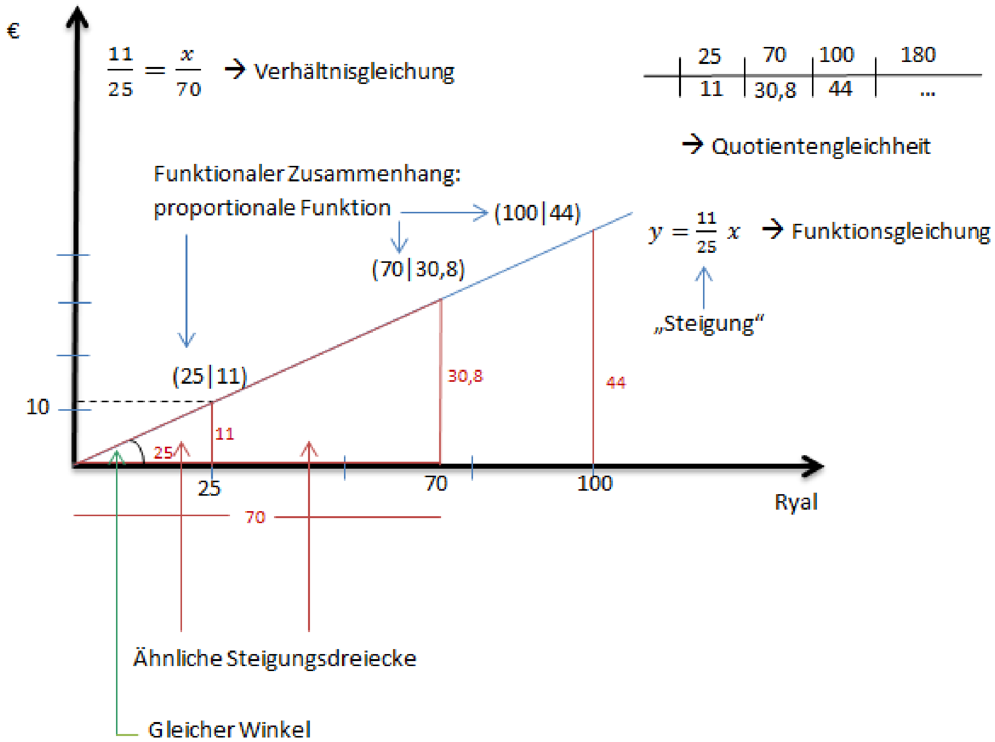
Nachdem geklärt ist, welche Zahl für den Prozentwert und welche für den Grundwert steht, muss nur noch eingesetzt und umgeformt werden. Nach dem Umstellen der Gleichung steht das Ergebnis fest. Allerdings setzt diese Herangehensweise ein Auswendiglernen der Formel oder eine geeignete Bezugsquelle voraus. Die gefundene Formel ist auch nur begrenzt verwendbar, sie löst genau dieses Problem bzw. alle entsprechend strukturierten Probleme mit anderen Zahlen. Bereits zum Lösen eines Geldumtauschproblems (s.u.) würden Schüler diese Formel nicht mehr als Lösungsmöglichkeit akzeptieren.

Es geht aber auch anders: Die Brillenträger sind ein Teil der ganzen Klasse, nämlich $\frac{11}{25}$. Wenn in der 5. Klasse ein solider Aufbau der Grundvorstellungen bei Brüchen geleistet wurde, fällt diese Bestimmung des Anteils leicht. Über die Normierung der Prozentrechnung („pro cent“/“pro hundert“) lässt sich die Aussage so aufbereiten, dass sie mit anderen Klassengrößen vergleichbar ist.

Die Konvention ist, dies auf die Vergleichsgröße 100 zu beziehen:
11 zu 25 wie x zu 100.
Also ist folgende Gleichung zu lösen: $\frac{11}{25} = \frac{x}{100}$

Mit dieser Lösungsstrategie folgt die Mathematisierung direkt der Struktur des Sachverhalts. Es geht um Anteile bzw. um konstante Verhältnisse: im Zähler steht die Größe der Teilmenge, im Nenner steht die Größe des Ganzen. Der linke Bruch stellt die tatsächlichen (Zahlen-)verhältnisse dar, der rechte Bruch normiert auf ein fiktives Ganzes von 100 Personen. Bei der Verwendung der Formel geht dieser Blick verloren, eine fehlerhafte Formel würde beispielsweise gar nicht erst erkannt, weil sich deren Konstruktionsprinzip nicht erschließt.

Warum ist die obige Verhältnisgleichung $\frac{11}{25} = \frac{x}{100}$ universeller als die zunächst genannte Formel? Einfach deshalb, weil andere Probleme mit *derselben* Denkweise gelöst werden können: Der Wechselkurs des Euro zum in den Vereinigten Arabischen Emiraten gültigen Ryal steht im Verhältnis 11:25. Der Gegenwert von 100 Ryal ist mit der obigen Verhältnisgleichung ebenso leicht zu berechnen wie der umgerechnete Preis des Hotelzimmers von 180 Ryal. Nachfolgend wird deutlich, dass sich eine einzige Darstellung für all die bisher angesprochenen Problemstellungen eignet:



Die Schulung des Blicks für Verhältnisse kann schon früh beginnen. Lehrende, die diese Chance wahrnehmen, eröffnen ihren Schülern die Möglichkeit, später auf diese Denkweise aufzubauen. Beispielsweise bietet das Thema „Maßstab“ in Klasse 5 bereits breite Möglichkeiten, konstante Verhältnisse zu thematisieren und beim Namen zu nennen. Die Bruchrechnung erweitert das Spektrum der Möglichkeiten, Verhältnisse formal auszudrücken. Wer auf konstante Verhältnisse achtet, der „sieht“ bei der Behandlung linearer Funktionen auch das größere, (mathematisch) ähnliche Steigungsdreieck und setzt es z.B. gezielt zur Erhöhung der Zeichengenauigkeit ein. Wer aber mit diesem Blick auf die Funktionsgraphen schaut, vermag in der Betrachtung zentrisch gestreckter Figuren oder in der Anwendung der Strahlensätze keine Schwierigkeit mehr erkennen. Ebenso werden in der Trigonometrie die zu einem bestimmten Winkel gehörenden rechtwinkligen Dreiecke als ähnlich erkannt und somit das Verständnis für die Definition z.B. des Tangens als Ausdruck gleicher Verhältnisse verstanden.

Kurz: die Betrachtung (konstanter) Verhältnisse stellt ein Konzept dar, das bei neuen mathematischen Inhalten zum besseren Verständnis immer wieder verwendet werden kann. Für die Lernenden lassen sich zukünftige Anwendungen für das Denken in Verhältnissen natürlich nicht vorhersehen. Deshalb liegt es in der Verantwortung der Lehrenden, bei den entsprechenden mathematischen Inhalten den Blick auf die Verhältnisse durch geeignete Aufgabenstellungen immer wieder auf diesen Zugang zu lenken. Umgekehrt wird, wer schon früh auf Verhältnisse geachtet hat, bei vielen mathematischen Inhalten späterer Klassen die Verhältnisse deutlicher „sehen“ und nutzen. Anstatt für jedes neue Kapitel andere Regeln und eine Vielzahl von „Eselsbrücken“ auswendig zu lernen, scheint es vorteilhafter, die Zusammenhänge zu sehen und diese immer wieder auf neue, andere Inhalte anzuwenden. So wird deutlich, dass Mathematik letztlich dazu verwendet wird, Probleme, die als strukturgleich erkannt wurden, mit den gleichen Werkzeugen zu lösen.

Literatur

Barzel, Bärbel & Kleine, Michael (2013): Verhältnisse – ein Thema quer durch die Schulmathematik. In: *Mathematik lehren*, Heft 179 (August 2013), S. 2 - 8

Rink, Roland (2013): *Zum Verhältnisbegriff im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlegung und Analyse kindlicher Vorgehensweisen im Umgang mit Verhältnissen im 4. Schuljahr.* Franzbecker-Verlag Hildesheim.

Greefrath, Gilbert (2010): *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe.* Spektrum Akademischer Verlag, S. 125 – 158

Führer, Lutz (2004): Verhältnisse – Plädoyer für eine Renaissance des Proportionsdenkens. In: *Mathematik lehren* Heft 123, S. 46 – 51

Andelfinger, B. (1981): Thema: Proportion. *Didaktischer Informationsdienst Mathematik*, Curriculum Heft 22. Landesinstitut für Curriculumentwicklung, Lehrerfortbildung und Weiterbildung Soest

Freudenthal, Hans (1983): *Didactical phenomenology of mathematical structurs,* S. 178 – 209. Dordrecht 1983

Hartwig MEISSNER, Münster und Annabella DIEPHAUS, Rheine

SPONTAN versus LOGIK

Vorbemerkung

*It is by **logic** that we prove, but by **intuition** that we discover* (Henri Poincaré, 1908). Do we also need both when working on problem solving, brauchen wir beides auch beim Aufgabenlösen? Im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen unbewusst ablaufende mentale Prozesse, die uns spontan eine Lösung suggerieren, welche aber nicht immer übereinstimmt mit einer korrekten Lösung.

Kognitive Konfliktsituationen

Wir beginnen mit einfachen Beispielen, den sog. Kapitänsaufgaben:

(1) Auf einem Schiff befinden sich 26 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?

(2) In Klasse 2b sind 11 Jungen und 14 Mädchen. Wie alt ist die Lehrerin?

(3) Ein 52 Jahre alter Hirte hat 23 Schafe und 32 Ziegen. Wie alt ist der Hirte?

Die Angabe von zweistelligen Zahlen in Verbindung mit dem Thema Addition im aktuellen Arithmetikunterricht verleitet den Schüler schnell zu einer spontanen Reaktion. Kapitänsaufgaben sind ein Ärgernis, wenn man in die „Falle“ hineintappt und eine Freude, wenn man die „Falle“ rechtzeitig erkennt. Hier zwei weitere Aufgaben dieses Typs:

(4) Um 3 Eier zu kochen, braucht man 6 Minuten. Wie lange braucht man für ein Ei?

(5) Ein Wanderer braucht drei Stunden vom See bis zur Hütte. Wie lange werden zwei Wanderer brauchen?

Falsche Algorithmen

(6)	(7)	(8)	(9)
72	951	132	551
- 49	- 67	14 .	+ 37
37	916	272	88

Wie entstehen solche Fehler? Menschliche Erfahrungen werden im Gedächtnis in individuell organisierten Mikrowelten bzw. Subjektiven Erfahrungsbereichen abgespeichert (Lawler 1981, Bauersfeld 1983). Je nach Stimuli von außen wird dann ein "passender" Subjektiver Erfahrungsbereich (SEB) aufgerufen und es werden ggf. *things and processes* für diese Situation unbewusst so angepasst (oder ignoriert), dass sie zu der ausgewählten Mikrowelt passen. So beschreibt Lawler (1981), wie Miriam die Aufgabe *How much is seventy-five plus twenty-six?* abzählend in ihrer Zählwelt beantwortete, die darauf folgende

Beiträge zum Mathematikunterricht 2016, hrsg. v. Institut für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Heidelberg. Münster: WTM-Verlag

Frage *How much is seventy-five cents and twenty-six?* aber unmittelbar in der Geldwelt mit *„That's three quarters, four and a penny, a dollar one"*.

Fehlerursachen

Unsere Beispiele zeigen Fehler auf verschiedenen Niveaus. Zunächst wird ein passender SEB gesucht, in der Regel unbewusst und spontan. Bei den Aufgaben (6) bis (9) erfolgt nach der Entscheidung "SEB Schriftliches Rechnen" (bzw. "Papiersummen-Welt" bei Miriam) subjektiv die Auswahl von "passenden" Teil-Algorithmen.

Bei den Beispielen (1) bis (3) dominiert evtl. der "SEB Addition zweistellige Zahlen", wobei diese Fixierung so intensiv sein kann, dass eine Zusatzinformation ggf. ignoriert wird (hier im Beispiel (3)). Antworten zu den Beispielen (4) und (5) dagegen können unbewusst immer wieder von dem im Alltag sehr dominanten "SEB Proportionalität" gesteuert werden.

Alltag und Mathematik

Eines der Hauptziele vom Sachrechenunterricht ist die Erarbeitung von Sachwissen und die Verflechtung mit Alltagserfahrungen. Mathematik ist dabei ein Hauptwerkzeug, dessen geschickte Benutzung jedoch immer wieder Probleme bereitet:

(10) Schulausflug mit 4 Bussen und 147 Kindern, Schüler-Antworten:

- Jeder Bus muss 36,75 Kinder fassen
- Die Aufgabe ist nicht lösbar
- Dies ist mathematisch möglich - aber in Wirklichkeit ist es unmöglich, weil man Kinder nicht zerteilen kann

(11) Zwei Glas Wasser von je 10^0 Celsius werden zusammengeschüttet.

Welche Temperatur hat die Mischung?

- It's different when you use numbers

Viele Schüler und Erwachsene entscheiden (meist unbewusst) viel zu schnell, welcher SEB für die Bearbeitung einer Aufgabe in Frage kommt. Und wenn das dann gefundene Ergebnis plausibel erscheint und keine spontanen Konflikte auslöst, wozu braucht man dann noch eine "Probe"? Zweifeln an sich selbst als Unterrichtsziel? Besser wäre das automatische Aufflackern einer roten Warnlampe als Signal für eine Konfliktsituation:

!! HALLO !! *Dein Rechenergebnis stimmt nicht überein mit deinen Erfahrungen*. Notwendig dazu wäre ein Erfahrungsschatz an Stützpunktwissen, welcher unbewusst aufgerufen wird (siehe auch DIEPHAUS 2013, S. 45ff).

U-Shaped Behavior

Es ist naheliegend, dass Sachwissen und Alltagserfahrungen vom Alter abhängen. STRAUSS (1980) hat dies näher untersucht und festgestellt, dass es z. B.

bei Aufgabe (11) Kinder gab mit der Antwort 20^0 Celsius, während jüngere und ältere Kinder korrekt antworteten. Dieses Phänomen fand er auch bei zwei weiteren Aktivitäten:

(12) *Subitizing* (Anzahl der Elemente einer Menge erkennen durch kurzes Hinschauen, ohne Zeit zum Abzählen)

(13) *Quantitätsvergleich* von zwei Mengen: Welche der zwei nebeneinander vorgegebenen Mengen hat mehr Elemente (ohne Zeit zum Abzählen)

Nach STRAUSS können Kinder bereits vor Schulbeginn vergleichbare Fragen mit dem gesunden Menschenverstand lösen (*common sense knowledge*), während dann in der Schule ein wissenschaftliches, geschultes Verständnis aufgebaut wird (*cultural knowledge*). Auf diese Dualität wird schon von VYGOTZKIJ (2002, *Alltägliche* vs. *Wissenschaftliche Begriffe*) oder GINSBURG (1980, *informal* vs. *formal mathematics*) hingewiesen.

Zusammengefasst, beim Aufgabenlösen können zwei Arten von Vorstellungen aktiviert werden, intuitiv-spontane Vorstellungen und logisch-analytische. Letztere sind hoch dominant im Mathematikunterricht.

Dual Process Theories (DPT)

Die Analyse von Denkprozessen beim Aufgabenlösen sollte sich jedoch stärker auch mit den intuitiv-spontanen Vorgängen beschäftigen. In der Kognitionspsychologie hat sich hierzu ein neuer Schwerpunkt entwickelt, die Dual Process Theories (DPT): „Dual-process theories of thinking and reasoning quite literally propose the presence of two minds in one brain“ (EVANS 2003, S. 458). Kahnemann (2002) in seiner Nobelpreisrede:

- SPONTAN-Denkprozesse sind schnell, parallel, automatisch, anstrengungslos, locker, assoziativ und schwer veränderbar.
- LOGIK-Denkprozesse sind langsam, seriell, kontrolliert, aufwendig, Regeln-folgend und flexibel veränderbar.

Versuchen und Probieren

Aufgabenlösen ist mehr als der erfolgreiche Ablauf von LOGIK-Denkprozessen. Anspruchsvolles Aufgabenlösen wird unbewusst begleitet von einer Fülle spontaner Entscheidungen (Thesen testen, SEB auswählen, Größenordnungen vergleichen, . . .). Man braucht Zusatz-Ideen. Eine im SPONTAN-System häufig genutzte, aber im LOGIK-System verpönte Technik ist *Versuchen und Probieren,* vgl. Meißner (1985).

Wir schlagen vor, dass für den Unterricht ganz bewusst häufiger Aufgaben ausgewählt werden, die SPONTAN-Denkprozesse auslösen und Versuchen und Probieren als Arbeitstechnik fördern. Aufgaben vom Typ *Zahlenmauern, Rechendreiecke* oder *Rechenfenster* erfüllen dies nur selten.

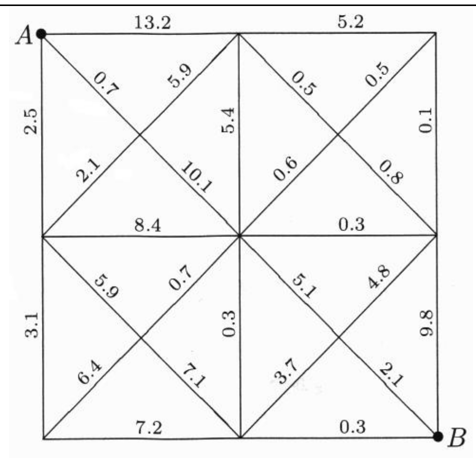
Taschenrechner und Computer

Taschenrechner und Computer sind exzellente Werkzeuge für den Ausbau des SPONTAN-Systems. Leider können wir aus Platzmangel hier nur ein Beispiel geben. (Für mehr Details siehe Meißner 2003, Diephaus 2013):

(14) Dezimalzahl-Eigenschaften

gesucht: Weg von A nach B mit kleinstem Produkt.

Regeln: Weg suchen mit Richtungswechsel an jeder "Kreuzung" und zugehörige Wege-Zahlen multiplizieren.



Für viele Schüler (und Lehramtsstudenten) ist es total überraschend, dass (auf der LOGIK-Ebene) für das "kleinste Produkt" unterschiedliche Ergebnisse genannt werden und dass das berechnete Produkt zusätzlich angibt, welcher Weg und damit welche SPONTAN-Strategien gewählt wurden.

Literatur

Diephaus, A. (2013): *Zahlengefühl 2000.* Münster: WTM-Verlag.

Evans, J. St.B.T. (2003): *In two minds: dual-process accounts of reasoning.* Trends in Cognitive Sciences, 7(10)/2003, S. 454-459.

Meißner, H. (1987): *Schülerstrategien bei einem Taschenrechnerspiel*. Journal für Mathematik-Didaktik, 8(1/2)/1987, S. 105-128.

(aus Platzmangel hier verweisen wir auf das ausführliche Literaturverzeichnis in Diephaus (2013), wo alle hier genannten Veröffentlichungen auch aufgelistet werden.)

Johannes MEISTER, Andreas FILLER, Annette UPMEIER ZU BELZEN, Berlin

Funktionales Denken im Biologieunterricht: Konstruktion von Liniendiagrammen

Relevanz und theoretischer Hintergrund

Eine Verbindung von Mathematik und Biologie ist für beide Fächer von hoher Bedeutung. Aus Sicht des Mathematikunterrichts bietet die Biologie zahlreiche Anwendungskontexte, ebenso sind aber auch mathematische Kompetenzen bei der Erschließung verschiedener biologischer Phänomene essentiell. Beispielsweise weisen Bindel (2014) und So (2013) mit Blick auf das Experimentieren im biologischen Fachunterricht darauf hin, dass mathematische Denkweisen vor allem bei der Konstruktion von Tabellen und Diagrammen zur Organisation, Visualisierung und Interpretation der gewonnenen Daten erforderlich sind.

Aus biologiedidaktischer Perspektive entwickelte Lachmayer (2008) ein Strukturmodell zur Diagrammkompetenz, das sich in die Dimensionen Konstruktion, Informationsentnahme und Integration unterteilt. Darauf aufbauend konnten Schwierigkeiten beschrieben werden, die Schüler_innen beispielsweise bei der Konstruktion von Diagrammen zu biologischen Kontexten haben (v. Kotzebue, Gerstl & Nerdel, 2015). Mit Blick auf Liniendiagramme, d.h. in ein kartesisches Koordinatensystem gezeichnete Funktionsgraphen, zielen diese vorrangig auf Probleme hinsichtlich des Umgangs mit formalen Aspekten der Diagrammkonstruktion wie der Zuordnung der betrachteten Größen zu den Achsen und weniger auf den dargestellten (funktionalen) Zusammenhang als solchen. Daher erscheint eine tiefergehende Analyse der hierfür nötigen mathematischen Denkweisen als vielversprechend.

Der Umgang mit Funktionen wird durch das funktionale Denken beschrieben (Vollrath, 1989), wobei zum einen auf den Wechsel zwischen unterschiedlichen Darstellungsformen von Funktionen (Nitsch et al., 2015; Swan, 1982; Janvier, 1978) und zum anderen auf die charakterisierenden Aspekte funktionalen Denkens (Vollrath, 1989; Malle, 2000) verwiesen wird.

Ziel und geplantes Vorgehen

Ziel des Projekts ist die Beschreibung der wesentlichen mathematischen Fähigkeiten bei der Konstruktion von Liniendiagrammen zu biologischen Phänomenen, wobei der Fokus auf das funktionale Denken gelegt wird.

Als zentraler biologischer Kontext dient die Abhängigkeit der Fotosyntheseleistung von abiotischen Faktoren, wie beispielsweise der Lichtintensität. Hierbei sollen in einer qualitativen Untersuchung diejenigen Handlungen und Denkweisen von Schüler_innen der Sekundarstufe II erfasst werden, die bei der Konstruktion eines Diagramms, das die Abhängigkeit von Fotosyntheseleistung und Lichtintensität darstellt, verwendet werden. Ausgangspunkt ist die Präsentation des Phänomens in Form eines Videoclips, der ein entsprechendes Experiment zur Untersuchung dieses Zusammenhangs an der Wasserpest (*Elodea spec.*) zeigt, wobei hier die Fotosyntheseleistung durch die Menge an gebildetem Sauerstoff kodiert und quantifizierbar durch die Bläschenbildung im Medium Wasser operationalisiert ist.

Zur Erfassung der Denkweisen wird die Untersuchung in Einzelarbeit und unterstützt durch die Methode des Lauten Denkens durchgeführt. Hierdurch sollen Rückschlüsse sowohl auf die Art der funktionalen Überlegungen als auch auf die Qualität der Bezugnahme auf das zugrundeliegende biologische Phänomen ermöglicht werden.

Die Ergebnisse der Untersuchung können zum einen dazu dienen, die Qualität von entsprechenden Mathematisierungsprozessen im biologischen Fachunterricht zu beschreiben und zum anderen als Grundlage für die Konzeption von fachübergreifenden Unterrichtseinheiten genutzt werden.

Literatur

Bindel, L. (2014). Scientific Inquiry und Mathematik. Evaluation einer interdisziplinären Lerneinheit zum Klimawandel. In D. Krüger, P. Schmiemann, A. Dittmer & A. Möller (Hrsg.), *Erkenntnisweg Biologiedidaktik 13*, 89–104.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations: studies and teaching experiments*. Ph.D, Nottingham University.

Kotzebue, L. von, Gerstl, M. & Nerdel, C. (2015). Common Mistakes in the Construction of Diagrams in Biological Contexts. *Research in Science Education*, 45 (2), 193–213.

Lachmayer, S. (2008). *Entwicklung und Überprüfung eines Strukturmodells der Diagrammkompetenz für den Biologieunterricht*. Dissertation, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel. Kiel.

Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *Mathematik lehren* (103), 8–11.

So, W. W.-M. (2013). Connecting Mathematics in Primary Science Inquiry Projects. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 385–406.

Swan, M. (1982). The Teaching of functions and graphs. In G. van Barneveld & H. Krabbendam (Hrsg.), *Proceedings of the Conference on Functions* (S. 151–165). Enschede.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 10 (1), 3–37.

Dennis MEYER, Universität Hamburg

Detailanalysen zum Lehrerprofessionswissen und dessen Entwicklung bei Grundschullehrkräften im Rahmen der Lehrerbildungsstudie TEDS-Follow Up

Lehrerprofessionswissen gilt als wesentlicher Faktor für erfolgreichen Unterricht. Wie allerdings der Berufseinstieg zu einer Umstrukturierung des Professionswissens führt und wie sich diese auf situationsspezifische Kompetenzen auswirkt, ist noch nicht hinreichend geklärt. Die vorliegende Studie soll eingebettet in die Lehrerbildungsstudien TEDS-M und ihrer Follow Up-Studie (TEDS-FU) Antworten auf diese Fragen liefern. Im Fokus der Untersuchung stehen Lehrerpersonen der Primarstufe.

Forschungsfeld und Fragestellung

Bereits seit Beginn des 20. Jahrhunderts, spätestens aber mit der internationalen Schulleistungsuntersuchung PISA, wurde die Kritik nicht nur am deutschen Bildungswesen im Allgemeinen, sondern auch an der Wirksamkeit der Lehrerbildung immer schärfer. Dabei wurde vor allem die Praxisferne der Lehrerausbildung bemängelt. Bereits 1908 hat der berühmte Mathematiker Felix Klein diese Kritik als sog. „doppelte Diskontinuität" formuliert (Klein 1908). Durch diese und andere Einschätzungen rückten Forderungen nach Veränderung der Lehrerausbildung in den Mittelpunkt von Reformdiskursen im Bildungswesen und standen zunehmend auch im Fokus wissenschaftlicher Untersuchungen.

Mit der im Jahr 2008 durchgeführten Studie *Teacher Education and Development Study of Mathematics* (TEDS-M) konnte erstmalig die Effektivität der Mathematiklehrerausbildung – auch im internationalen Vergleich – untersucht werden. Wenige Jahre später lieferte die Anschlussstudie *Teacher Education and Development Study Follow Up* (TEDS-FU) bedeutsame längsschnittliche Daten, die eine Modellierung und Analyse der professionellen Kompetenz von Junglehrkräften ermöglichten.

Vor diesem Hintergrund versucht die empirische Bildungsforschung unter anderem zu klären, inwieweit sich das in der Lehrerausbildung erworbene professionelle Wissen mit dem Berufseinstieg verändert und inwieweit mittelfristig ein Expertiseprofil entsteht (vgl. Blömeke et al., 2014). Die hier vorgestellte Untersuchung beschäftigt sich im Besonderen damit, (1) inwieweit sich die Wissensfacetten im Detail (d.h. auf der Ebene spezifischer Aufgabenanforderungen) strukturieren und (2) wie sich der Zusammenhang zwischen Professionswissen und situationsspezifischen Kompetenzen darstellt.

Theoretischer Rahmen und verwendetes Datenmaterial

Im Anschluss an Shulman (1986) unterscheidet TEDS-M drei verschiedene Domänen des Lehrerprofessionswissens, die jeweils mit gesonderten Testteilen erhoben wurden: (1) Mathematisches Fachwissen (mathematical content knowledge, MCK), (2) Mathematikdidaktisches Wissen (mathematical pedagogical content knowledge, MPCK), (3) Allgemeinpädagogisches Wissen (general pedagogical knowledge, GPK)

Für TEDS-FU wurde diese auf kognitiven und affektiv-motivationalen Dispositionen basierende Konzeptualisierung von professioneller Kompetenz um eine handlungsorientierte Facette erweitert. An das Konzept des *noticing* von Erickson (2011) angelehnt, wurden in TEDS-FU durch den Einsatz von Videovignetten die präzise Wahrnehmung von Unterrichtssituationen (*perception*), deren zielorientierte Analyse und Interpretation (*interpretation*) sowie die flexible Reaktion hierauf (*decision-making*) gemessen (sog. PID-Modell; vgl. Blömeke et al. 2015). Durch dieses Design ist es möglich, Aussagen über Wirkungszusammenhänge zwischen dem Ausbildungswissen und den handlungsbezogenen Kompetenzen von Lehrkräften zu treffen und hieraus Schlüsse für die Lehrerexpertise zu ziehen (siehe Abb. 1).

Das Datenmaterial, auf das sich diese Untersuchung stützt, umfasst alle 131 Primarstufenlehrkräfte, die sowohl an TEDS-M als auch vier Jahre später an TEDS-FU teilgenommen haben. Für diese Teilstichprobe muss eine positive Verzerrung angenommen werden, da die Teilnahme an TEDS-FU freiwillig war. Die für die Untersuchung relevanten Testteile bestehen aus 84 Aufgaben, die sich in etwa gleichem Verhältnis auf die fünf Skalen MCK, MPCK, GPK, mathematikdidaktische Handlungskompetenz (M-PID) und pädagogische Handlungskompetenz (P-PID) verteilen Für längsschnittliche Analysen stehen 28 exakt gepaarte Aufgaben zum Professionswissen zur Verfügung.

Methodisches Vorgehen

Um einen tieferen Einblick in die Wirkungszusammenhänge von Professionswissen und handlungsorientierten Kompetenzen – sowohl facettenintern

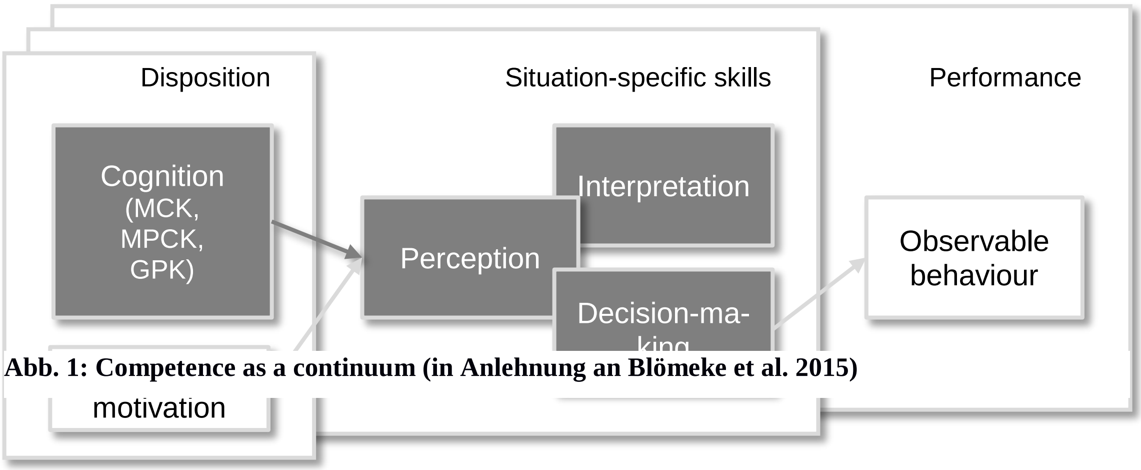


Abb. 1: Competence as a continuum (in Anlehnung an Blömeke et al. 2015)

als auch facettenübergreifend – zu erhalten, wurde auf ein Verfahren von Busse und Kaiser (2015) zurückgegriffen, das bereits bei der Analyse der Daten der Sekundarstufenlehrkräfte zum Einsatz kam. Hierbei wurden gruppenweise Vergleiche der Probandenleistungen in allen relevanten Testteilen durchgeführt.

Für die paarweisen Vergleiche wurden auf Basis eines Mediansplits der fünf relevanten Skalen (s.o.) diejenigen Probanden ermittelt, die sich jeweils in der oberen Leistungshälfte befinden. Den so definierten fünf Gruppen kann eine gewisse Expertise in den entsprechenden Kompetenzfacettenzugeschrieben werden, da sie den Anforderungen des sie konstituierenden Tests in besonderem Maße gerecht geworden sind. Zur Identifikation von äquivalenten und differenten Leistungen zweier Vergleichsgruppen in einer Aufgabe wurde die empirische Verteilung der Aufgaben-Scores mithilfe von U-Tests (Hypothesentest zur Bestimmung von Unterschieden bzw. TOST-Verfahren zur Bestimmung von Ähnlichkeiten) analysiert. Sofern ein signifikantes Ergebnis vorlag und Decken- oder Bodeneffekte ausgeschlossen werden konnten, wurde die Aufgabe bei weiteren Analysen berücksichtigt.

Diskussion der Ergebnisse

Die Ergebnisse der paarweisen Vergleiche (siehe Abb. 2) zeigen in mehrfacher Hinsicht numerische Auffälligkeiten: Zu betonen sind einerseits die sehr hohen Quotienten (äquivalente Leistungen : differente Leistungen) der Gruppenvergleiche MCK/MPCK, M-PID/P-PID, GPK/M-PID und GPK/P-PID. Diese weisen eine hohe Passung zu den Korrelationskoeffizienten der jeweiligen Skalen auf. Dies lässt auf eine große Nähe der Anforderungen der Kompetenzfacetten bzw. der Kompetenz der in diesen Facetten starken Probanden schließen.

Weiterhin auffällig ist, dass bei den facetteninternen Vergleichen höhere Quotienten als bei fast allen facettenübergreifenden Vergleichen zu finden sind. Die Ausnahmen bilden hier die oben genannten Vergleiche GPK/P-PID und GPK/M-PID. Es kann angenommen werden, dass durch die verschiedenen Arten der Testung (eher deklarativ versus eher situativ) vor allem die Konstrukte MPCK und GPK ganzheitlicher erfasst werden und daher die genannte Konzeptualisierung von Blömeke et al. (2015) empirisch stützen.

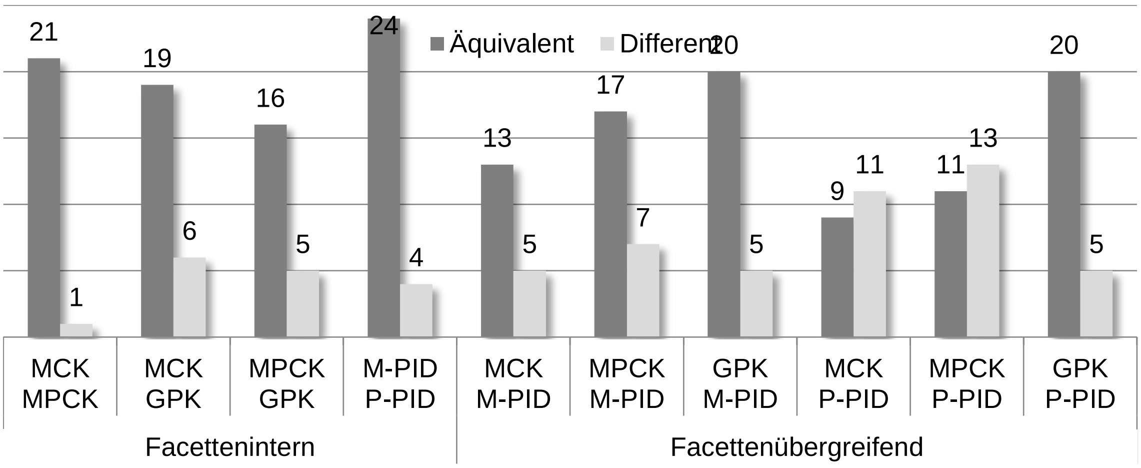


Abb. 2: Numerische Ergebnisse aller paarweisen Gruppenvergleiche

Darüber hinaus validieren die Ergebnisse das von Blömeke et al. (2015) entwickelte Modell zur Lehrerexpertise, nach dem das allgemeinpädagogische Wissen entgegen den Erwartungen eine größere Nähe zu den handlungsbezogenen Kompetenzfacetten als zu den Wissensfacetten aufweist.

Eine qualitative Detailanalyse der spezifischen Aufgabenanforderungen für eine tiefergehende Interpretation der quantitativen Ergebnisse ist derzeit in Vorbereitung.

Literatur

Blömeke, S., Gustaffson, J.-E., Shavelson, R. J. (2015). Beyond Dichotomies. Competence Viewed as a Continuum. Zeitschrift für Psychologie, 223 (1), 1-13.

Blömeke, S., Busse, A., Kaiser, G., König, J. & Suhl, U. (in Vorbereitung). On the nature of teacher expertise: Modeling the relation of knowledge, perceptual accuracy and speed.

Busse, A. & Kaiser, G. (2015). Wissen und Fähigkeiten in Fachdidaktik und Pädagogik: Zur Natur der professionellen Kompetenz von Lehrkräften. Zeitschrift für Pädagogik, 61(3), 328-344.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15 (2), 4-14.

Michael MEYER und Susanne SCHNELL, Köln

Was ist ein „gutes“ Argument? Bewertung von Schülerargumenten durch Lehrkräfte

Insofern das Argumentieren ein wesentlicher Kern und ein Ziel des Mathematikunterrichts ist, werden Lehrende vor die Herausforderung gestellt, Begründungen von Lernenden angemessen zu beurteilen. Eine differenzierte Bewertung sollte dabei über die reine mathematisch-inhaltliche Korrektur hinausgehen. Welche Bewertungskriterien werden in der Realität von den Lehrkräften genutzt bzw. welche Aspekte können generell herangezogen werden? In diesem Beitrag werden erste Ergebnisse einer Interviewstudie präsentiert, die sich mit dieser Frage beschäftigt.

Argumentieren – einige Aspekte zur Einführung

Das Argumentieren nimmt hinsichtlich des Lehrens und Lernens mathematischer Inhalte eine bedeutende Stellung ein. So lässt es sich beispielsweise bei der Diskussion der Ziele eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts wiederfinden (Heymann 1996). Auch wurde die Funktion des Argumentierens zur Bedeutungsaushandlung für (mathematische) Inhalte fokussiert (z.B. Schwarzkopf 2000) bzw. Lernprozesse generell mittels der Partizipation an Argumentationen beschreiben (z.B. Krummheuer 1995).

Werden Argumente analysiert, so kann dies u.a. durch die Betrachtung verschiedener Dimensionen erfolgen (Kiel, Meyer, Müller-Hill 2015): Bei der Aushandlung von Bedeutungen bestimmt die Mathematik die inhaltliche Diskussion. Diese *inhaltliche Dimension* wird begleitet von einer *pragmatischen Dimension*, denn mit dem Argumentieren werden auch immer Ziele verfolgt (der von der Lehrperson gesetzte Begründungsbedarf soll befriedigt werden, etc.). Relativ zu verschiedenen Adressaten eines Arguments (*Dimension der Rezipientenorientierung*) kann z.B. eine andere Nutzung von (Fach-)Sprache notwendig sein. Die *strukturelle Dimension* beinhaltet, dass Argumente besondere Handlungsformen sind, die einen spezifischen, logischen Aufbau haben. In der Literatur finden sich verschiedene Ausführungen dieser Dimension (u.a. Buth 1996). In der mathematikdidaktischen Diskussion hat sich die Betrachtung von Toulmin (1996) durchgesetzt, die im Kern darin besteht, dass ausgehend von einem Datum (D; eine unbezweifelte Tatsache) eine Konklusion (K; die vormals fragliche Behauptung) erschlossen wird. Eine Regel (R; auch „warrant“, „Schlussregel“ oder „Garant“ genannt) gibt den allgemeinen Zusammenhang zwischen Datum und Konklusion wieder (s. Toulmin 1996, S. 89): Warum kann man aus Daten wie diesen Konklusionen wie jene folgern? Wird die Regel angezweifelt, so kann diese mittels der Angabe eine Stützung (S) gerechtfertigt werden. Insbesondere in Alltagssituationen können weiterhin Regeln nicht notwendig zu einer bestimmten Konklusion führen – es können Ausnahmebedingungen (A) existieren unter denen sie nicht zutreffen. Entsprechend folgt die Konklusion nicht zwangsläufig aus dem Datum, sondern womöglich nur wahrscheinlich. Diese Struktur sei in Abbildung 1 an dem Beispiel der in der empirischen Untersuchung verwendeten Aufgabe verdeutlicht:

Zwei Würfel werden geworfen und die Summe wird notiert. Basti gewinnt bei den Augensummen 1, 2, 3, 10, 11 und 12. Derya gewinnt bei 4, 5, 6, 7, 8, 9. Basti beschwert sich: Da habe ich ja kaum eine Chance zu gewinnen! Stimmt das? Begründe.

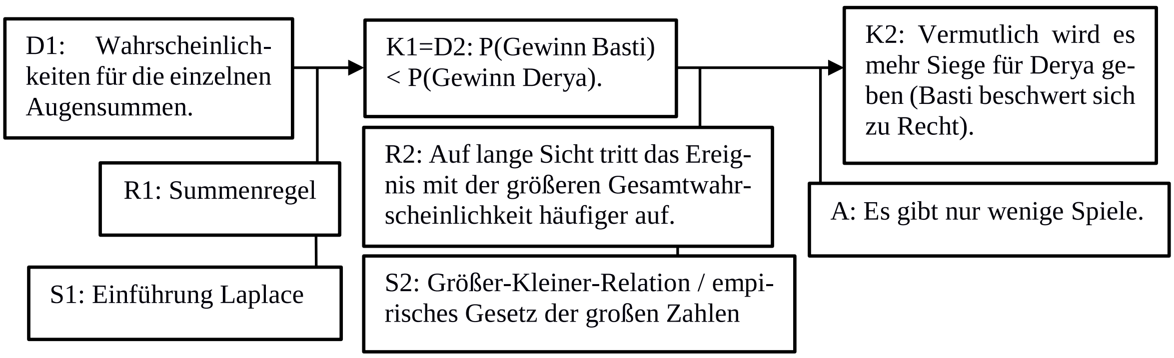


Abb. 1: Exemplarisches Argument zur Augensummenaufgabe in der Struktur nach Toulmin

Design der empirischen Untersuchung

In der empirischen Untersuchung wurde folgender Frage nachgegangen werden: Wie bewerten Lehrkräfte Argumente, d.h. welche Elemente von Schülerargumenten fokussieren sie und welche Kriterien ziehen sie zur Bewertung heran?

Dazu wurden zu der oben thematisierten Aufgabenstellung 12 (fiktive und reale) Schülerargumente insgesamt 16 Lehrpersonen (Sekundarstufe I und II) zur Bewertung vorgelegt. Die verwendeten Argumente variierten systematisch hinsichtlich der Anzahl der funktionalen Bestandteile (s. strukturelle Dimension): Mal war nur eine Regel vorhanden, mal fehlte lediglich eine Stützung, usw.

Die Beurteilung der Argumente durch die Lehrpersonen fand in halbstandardisierten Interviews statt, in denen stets nach den Bewertungskriterien gefragt wurde, die videografiert und transkribiert wurden. Die interpretative Analyse erfolgte entsprechend des methodischen Vorgehens, wie es aus der Bielefelder Arbeitsgruppe Bauersfeld (s. Voigt 1984) bekannt ist.

Einblick in erste Ergebnisse: ‚Herr Schwarz'

Aufgrund des beschränkten Umfangs werden nur die Bewertungskriterien von Herrn Schwarz (Name anonymisiert; Gymnasium) anhand seiner Beurteilung der Schülerlösung von ‚Tobi' vorgestellt. In jenem sind ausschließlich K1=D2, A und K2 expliziert (vgl. Abb. 1).

Herr Schwarz charakterisiert zu Beginn des Interviews den Operator „begründe“ als ihm aus seinem Schulalltag bekannt. Aufgrund dessen analysiert er diese und alle nachfolgenden Schülerlösungen in zwei Schritten: Zunächst überprüft er, ob die Frage nach der angebrachten Beschwerde beantwortet wurde (also ob K2 vorliegt), d.h. ob das Argument die pragmatische Dimension erfüllt. Danach betrachtet er die „Art und Weise der Begründung“, wie am folgenden (zur besseren Lesbarkeit geglätteten) Transkriptausschnitt exemplarisch illustriert werden soll.

> Herr Schwarz: „[Tobi] hat beide Wahrscheinlichkeiten hier berechnet- die Wahrscheinlichkeit [von Derya] ist höher als die [von Basti] - demnach gewinnt Derya häufiger- richtig- als der Basti- und die Begründung macht er durch diese Abschätzung- durch diese Rechnung. (…) da fehlt mir der Schritt wie er, dahin kommt. (…) dementsprechend ist die tolle Rechnung super, nützt mir aber nichts wenn die Begründung eben nicht vollständig ist. Wie gesagt- freue ich mich über sein Verständnis des Wahrscheinlichkeitsbegriffs- freue mich über die sichere Anwendung der Bruchrechnung- (…) [aber] weil lediglich ein Teil der Begründung fehlt-, dieser Schritt ist allerdings- wie ich gerade festgestellt habe nachvollziehbar, herleitbar- (…) würde ihn deswegen zu einer [Note] 2 schieben.“

Herr Schwarz fokussiert zuerst den vorgenommen Vergleich der berechneten Wahrscheinlichkeiten (also K1=D2), die er auf Korrektheit prüft. Weiterhin bezieht er sich in seiner Bewertung auf verschiedene Elemente der Schülerlösung, u.a. „Rechnung“, „Verständnis des Wahrscheinlichkeitsbegriffs“, sowie „Anwendung der Bruchrechnung“. Als fehlend charakterisiert er die „Herleitung der Rechnung“ (also D1). Um die Qualität der Lösung zu prüfen, zieht er verschiedene Kriterien heran wie Nachvollziehbarkeit, Vollständigkeit usw. Für den von ihm als fehlend identifizierten Schritt beurteilt er die Komplexität und Herleitbarkeit.

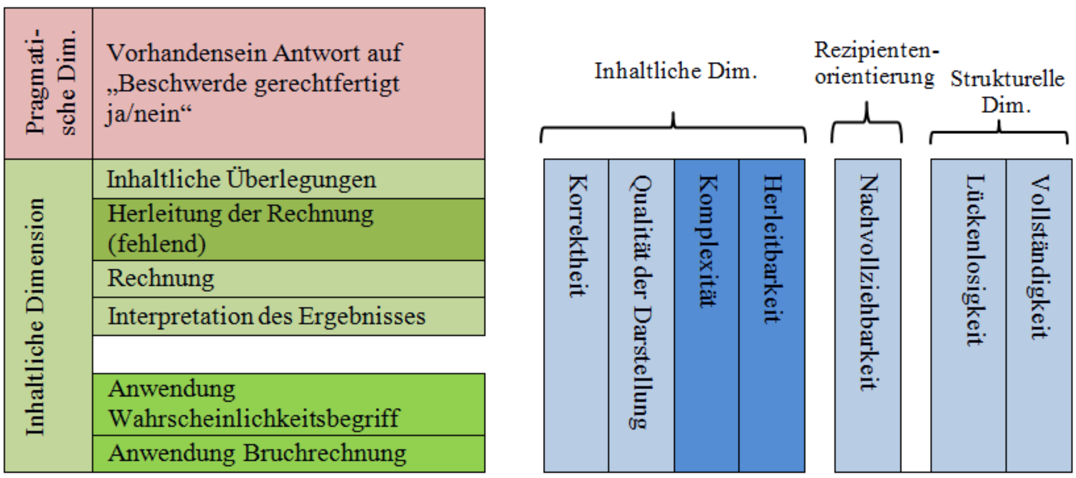


Abb. 2: Bewertungsschema von Herrn Schwarz mit von ihm betrachteten Elementen (links) und Prüfkriterien (rechts)

Auffällig ist, dass Herr Schwarz zwar das Fehlen des ersten Datums kritisiert, die ebenfalls fehlenden Schlussregeln sowie deren Stützungen jedoch nicht thematisiert. Die Ausnahmebedingung wird von Herrn Schwarz als „Wahrscheinlichkeitsbegriff“ thematisiert, über dessen Anwendung er zwar erfreut ist, ebenso wie über die Anwendung der Bruchrechnung, diese jedoch als nicht notwendig für die Bearbeitung der Aufgabe ansieht.

Fazit und Ausblick

Die Analyse der Bewertung von Herrn Schwarz zeigt, dass Datum und Konklusion von ihm als wichtig erachtet werden; die Regeln allerdings verlangt er nicht explizit bzw. bezeichnet sie an anderer Stelle als „gute, notwendige Informationen“, die jedoch für die korrekte Bearbeitung der Aufgabe nicht notwendig sind. Ähnliche Ergebnisse können bei anderen Lehrkräften gezeigt werden. Weiterhin lassen sich alle genannten Dimensionen von Argumenten wiederfinden, wobei jedoch die inhaltliche Dimension bei der Bewertung überwiegt. In den kommenden Analysen sollen weitere Bewertungsschemata der Lehrkräfte erarbeitet und hinsichtlich der enthaltenen Dimensionen verglichen werden. Ziel ist die Entwicklung eines umfassenden, empirisch gestützten Bewertungsschemas für Argumente im Mathematikunterricht.

Literatur

Buth, M. (1996). *Einführung in die formale Logik unter der besonderen Fragestellung: Was ist die Wahrheit allein aufgrund der Form.* Frankfurt am Main: Lang.

Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim: Beltz.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Hrsg.), *The Emergence of mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures* (S. 229–270). Hillshale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Kiel, E., Meyer, M. & Müller-Hill, E. (2015). Erklären – Was? Wie? Warum?. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *64*(57), S. 2-9.

Schwarzkopf, R. (2000). *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und Fallstudien*. Hildesheim: Franzbecker.

Toulmin, S. (1996). *Der Gebrauch von Argumenten*. Weinheim: Beltz.

Voigt, J. (1984). *Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen*. Hildesheim: Franzbecker.

Angel MIZZI, Universität Duisburg-Essen

Raumvorstellung und Sprache: Eine empirische Studie über die Bewältigung von räumlich-geometrischen Anforderungen und die Rolle der Sprache

Zahlreiche mathematikdidaktische Studien weisen darauf hin, dass sowohl Raumvorstellung (vgl. Büchter 2011) als auch sprachliche Kenntnisse (vgl. Prediger et al. 2015) wichtige Faktoren für Mathematikleistung sind. Jedoch werden diese in klassischen Intelligenzmodellen (vgl. Thurstone 1938) als voneinander unabhängige Bereiche betrachtet. Um die Beziehung zwischen den beiden Faktoren zu untersuchen, werden Lernenden bei der Bewältigung von räumlich-geometrischen Anforderungen und der Verwendung von Sprache untersucht. Eine Erforschung dieser Beziehung soll einen Beitrag zur Erforschung zum sprachlichen und fachlichen Lernen in der Mathematikdidaktik leisten.

Vorhaben

Die zu untersuchende Kernfrage dieser empirischen Studie ist, wie unterschiedliche Lernende räumlich-geometrische Anforderungen bewältigen und welche Rolle Sprache in solchen Lernprozessen spielt. Dabei sollen die durch die Lernenden eingesetzten Strategien und potenziellen Hürden bei der Bewältigung räumlich-geometrischer Anforderungen erforscht werden. Zusätzlich soll untersucht werden, inwiefern der Einsatz der Strategien von anderen Faktoren (Geschlecht, räumliches Vorstellungsvermögen und sprachliche Kenntnisse), die das Lösen von Raumvorstellungsaufgaben beeinflussen könnten, abhängt. Außerdem soll aus der methodologischen Perspektive ein geeignetes Setting, das die Untersuchung der Kernfrage ermöglicht, vorgestellt und theoretisch analysiert werden.

Theoretische Grundlagen

Raumvorstellung umfasst die Fähigkeiten mit räumlichen Objekten im Raum zu operieren (vgl. Pinkernell 2003). Pinkernell (2003) betrachtet drei Komponenten, die wichtig für die Raumvorstellung sind. Diese umfassen räumlich-visuelles Operieren, geometrisches Denken und Visualisierungskompetenzen (u.a. Konstruktion und Interpretation der Darstellungsformen von räumlichen Objekten).

Die Rolle der Sprache beim Mathematiklernen wurde in verschiedenen Studien hervorgehoben (vgl. Maier & Schweiger 1999). Im Mathematikunterricht hat Sprache zwei Funktionen: zum Kommunizieren und zur Konstruktion neuen Wissens durch Information mithilfe von konzeptuellen Repräsentationen (vgl. Maier & Schweiger 1999).

Ein entscheidender Schnittpunkt von Raumvorstellung und Sprache ist die räumliche Sprache, die als Sprache zur Beschreibung von räumlichen Objekten, deren räumlicher Lage und Beziehungen aufgefasst werden kann. Levinson (1996) behauptet, dass eine Analyse der räumlichen Sprache zum besseren Verständnis der Raumvorstellung von

Lernenden beitragen kann. Insbesondere soll räumliche Sprache in einem Dialog entwickelt werden, um eine aktive Auseinandersetzung der Lernenden mit den räumlichen Objekten zu ermöglichen (vgl. Coventry et al. 2009).

Der Rekonstruktionsversuch als Datenerhebungsmethode

Die Untersuchung der Bewältigung von räumlich-geometrischen Anforderungen benötigt eine geeignete qualitative Erhebungsmethode gekoppelt mit einer Aufgabenstellung. Der Rekonstruktionsversuch hat sich in einer Vorstudie als adäquat bewiesen, um räumlich-geometrische Anforderungen mit Sprache als Darstellungsform zu entwickeln. Der Rekonstruktionsversuch ist eine Lernumgebung, in der zwei Lernende in einer Rücken-an-Rücken Sitzkonstellation miteinander kommunizieren mit dem Ziel eine Aufgabe im Sinne des sozialen und interaktionistischen Konstruktivismus (vgl. Gräsel et al. 1997) und des materialbasierten Lernens gemeinsam zu lösen. Eine solche Aufgabe kann in verschiedene Schritte zerlegt werden, die ein Lernender, der Geber oder Beschreibende, einem zweiten, dem Nehmer oder Nachbauenden, kommunizieren muss.

Abb. 16: Objekt A

Abb. 15: Objekt B

Die folgende Aufgabe wird im Rekonstruktionsversuch gestellt: „*In diesem Experiment erhältst du [Geber] ein Objekt aus Steckwürfeln. Du [Geber] musst ihm/ihr [Nehmer] Anweisungen geben, wie er/sie [Nehmer] diesen nachbauen kann. Die Farbe der Steckwürfel spielt keine Rolle, und während der Beschreibung darfst du [Geber] das Objekt anfassen und bewegen, aber die Struktur muss unverändert bleiben. Am Ende sollte das Nachgebaute mit dem Beschriebenen identisch sein*“. Diese Aufgabe soll mit zwei verschiedenen Objekten aus Steckwürfeln (Objekte A und B, vgl. Abb. 1 und Abb. 2) durchgeführt werden, deren Zusammensetzung theoretisch und empirisch (nach Untersuchung von verschiedenen in einer Vorstudie eingesetzten räumlichen Objekten) entwickelt wurde. Das Design der räumlichen Objekte beruht auf der Aktivierung von räumlichem und geometrischem Wissen der Lernenden, und weitere Kriterien, wie Dreidimensionalität und Zerlegbarkeit.

Stichprobenbildung

Mit Hinblick auf die Beziehung zwischen der Verwendung der Strategien und den drei oben genannten Faktoren wurde die Stichprobe nach drei Dichotomisierungen gebildet: sprachstark (S+) vs. -schwach (S-), raumvorstellungsstark (RV+) vs. -schwach (RV-), und männlich (m) vs. weiblich (w) (siehe Tab. 1). Die sprachlichen Kompetenzen und das räumliche Vorstellungsvermögen der 16 Lernenden (5. Klasse, Haupt- und Realschule) wurden mithilfe von schriftlichen Tests erfasst.

	S+	***S-***

RV+	m, m, w, w	m, m, w, w
RV-	w, w, m, m	w, w, m, m

Tab. 1: Stichprobenbildung nach theoretischem Sampling

Datenanalyse und potenzielle Ergebnisse

Im Bezug auf die methodologischen Aspekte dieser Studie soll zunächst untersucht werden, inwiefern der Rekonstruktionsversuch eine geeignete qualitative Methode zur Untersuchung von Sprache und Raumvorstellung ist. Insbesondere sollen die Designprinzipien des Rekonstruktionsversuchs analysiert werden, u.a. die Verbalisierung des eigenen räumlichen Denkens, Sprachreflexion und –lernen.

Darüber hinaus sollen die Strategien und Hürden durch eine interpretative Analyse der Kommunikationsprozesse beider Lernender im Rekonstruktionsversuch untersucht werden. Dabei wird unter einer Strategie eine ziel- und aufgabenorientierte flexibel einsetzbare Herangehensweise verstanden (vgl. Fülöp 2015).

Eine erste Analyse der kommunikativen Prozesse im Rekonstruktionsversuch hat gezeigt, dass neue Chance zum Lernen und zur Entwicklung von Strategien entstehen, wie beim Beschreiben von Objekt A im folgenden Transkriptausschnittsichtbar:

Geber 1*: “Eigentlich sollte das einen Knick geben.”*

Nehmer 1*: “Ein was?”*

Geber 1*: “Knick... Äh nein einen Winkel.”*

Nehmer 1*: “Achso links.”*

Geber 1: *“Also die Mauer geht ja eigentlich von links nach rechts und wenn du drehst dann geht die auch also dann geht die von rechts nach links (…)”*.

Geber 1 beschreibt die geometrischen Eigenschaften des räumlichen Objektes durch bestimmte Begriffe, wie „Knick“ und „Winkel“. Seine weitere prozesshafte Beschreibung ist gekennzeichnet durch eine Drehung des räumlichen Objektes, die als eine bestimmte Strategie aufgefasst werden kann.

Nichtsdestotrotz bringt die neue durch den Rekonstruktionsversuch entstehende Situation auch neue Hürden mit sich, wie das Erreichen von sprachlichen Grenzen im folgenden Transkriptausschnitt beim Beschreiben von Objekt A:

Geber 2: *“Nein! Ehm du sollst die eine Viererreihe neben die andere Viererreihe kleben und zwar, was soll ich dann, eh!”*

Nehmer 2: *“Rechts?”*

Geber 2*: “Kleb es einfach dran! Also an die Seite, nicht von unten, an die Seite.”*

Nehmer 2: *“Seite eins, zwei, drei oder vier? Ja was? Sag.”*

Geber 2: *“Oh man, wie soll ich dir das erklären?”*.

Schlussfolgerung

Diese Studie soll einen Beitrag zum sprachlichen und fachlichen Lernen in der Mathematikdidaktik leisten. Insbesondere sollen räumliche Sprache und Raumvorstellungsaufgaben mit Sprache als Darstellungsform untersucht werden, um neue Erkenntnisse über die Entwicklung von Strategien und Hürden und den Einfluss weiterer Faktoren auf die Bewältigung von räumlich-geometrischen Anforderungen zu gewinnen.

Literatur

Büchter, A. (2011): *Zur Erforschung von Mathematikleistung. Theoretische Studie und empirische Untersuchung des Einflussfaktors Raumvorstellung.* Dortmund: Technische Universität Dortmund.

Coventry, K., Tenbrink, T. & Bateman, J. (2009): *Spatial Language and Dialogue: Navigating the Domain*. Oxford: Oxford University Press.

Fülöp, E. (2015): Teaching problem-solving strategies in Mathematics. *Lumat 3 (1),* S. 37-54.

Gräsel, C. Bruhn, J., Mandl H. & Fischer, F. (1997): Lernen mit Computernetzen aus konstruktivistischer Perspektive. *Unterrichtswissenschaft 25,* S. 4-18.

Levinson, S. C. (1996): Language and Space. *Annual Review of Anthropology, Vol. 25,* 353-382.

Maier, H. & Schweiger, F. (1999): *Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden der Fachsprache im Unterricht.* Wien: öbv & hpt.

Pinkernell, G. (2003): *Räumliches Vorstellungsvermögen im Geometrieunterricht: Eine didaktische Analyse mit Fallstudien*. Hildesheim: Franzbecker.

Prediger, S., Renk, N., Büchter A., Benholz, C. & Gürsoy, E. (2015): Sprachkompetenz und Mathematikleistung – Empirische Untersuchung sprachlich bedingter Hürden in den Zentralen Prüfungen 10. *Journal für Mathematikdidaktik, Vol. 36 (1),* S. 77-104.

Thurstone, L. L. (1938): *Primary mental abilities*. Chicago: University of Chicago Press.

Renate MOTZER und Adrian SCHLOTTERER, Augsburg

Wurzelziehen mit dem Malkreuz

Bekannt ist vielen das Wurzelbrett der Montessori-Pädagogik. Montessori-Schüler und –Lehrer sind vielfach stolz darauf, dass sie Wurzeln auch ohne Taschenrechner berechnen können. Außerhalb von Montessori-Schulen wird das händische Wurzelziehen kaum mehr gelernt.

Wie lassen sich günstige Bedingungen so gestalten, dass junge Menschen auch ohne Wurzelbrett solch einen komplexen mathematischen Zusammenhang wie das Wurzelziehen einer Zahl erforschen wollen? Hier liefert das Malkreuz eine gute Möglichkeit, den Kindern ein anschauliches Werkzeug an die Hand zu geben, mit dem sie relativ schnell und effizient die Wurzel einer Quadratzahl bestimmen können. Außerdem heißt es z.B. im gymnasialen Lehrplan Bayerns für die fünfte Klasse: „Der Mathematikunterricht des ersten Jahrs am Gymnasium knüpft an die Inhalte und Methoden der Grundschule an, er vertieft, systematisiert und erweitert die dort erworbenen Kenntnisse und Fähigkeiten.“ Dieses Anliegen könnte durch die Verwendung eines Malkreuzes beim Wurzelziehen erfüllt werden.

1 Malkreuz als Vorwissen

Das Malkreuz als visuelles Recheninstrument für die Multiplikation war in der untersuchten Klasse den meisten Kindern aus der Grundschule bekannt. Dies lässt sich auch am Fragebogen nachweisen, in dem ca. 65% der Befragten (18 von 28 Schülern) angaben, dass sie das Malkreuz als halbschriftliche Rechenstrategie kennen würden. Fast alle Schüler beherrschten nach dem Unterrichtsgang einen sicheren Umgang mit der Darstellungsform, wie sich bei der Bearbeitung eines Fragebogens gezeigt hat. Diese Visualisierung kann sinnvoll eingesetzt werden, um ein höheres Verständnis für formale Rechenoperationen (wie das Wurzelziehen) zu generieren.

Das Malkreuz ist eine distributive Zerlegung und stellt zugleich eine Verbindung zum Vierhunderterfeld her, das bereits aus der Grundschule bekannt ist. Das Rechteckfeld kann durch eine horizontale und vertikale Linie dem Distributivgesetz entsprechend in vier Rechteckteilfelder zerlegt werden. Dieser Zusammenhang zwischen Malkreuz und Vierhunderterfeld wurde beim Einstieg des Unterrichtsgangs fruchtbar gemacht.

Das untenstehende Bild zeigt ein Malkreuz, das die Multiplikation der Zahl 15 mit sich selbst veranschaulicht. So kann das Malkreuz als eine Art Multiplikationstabelle gedeutet werden.

•	10	5

10	100	50	-
5	50	25	- 150
75			

$\boxed{\mathbf{225}}$

Darstellungsmittel wie das Malkreuz sind einerseits Lernhilfen, weil sie mathematische Sachverhalte veranschaulichen, und andererseits Lernstoff, da der Gebrauch mit ihnen und der Umgang mit deren Bedeutungen von den Schülern erst erlernt werden muss.

Allgemein ist zu beachten, dass visuelle Darstellungen wie das Malkreuz nicht nur zum Rechnen, sondern auch zum Entdecken, Beschreiben und Begründen eingesetzt werden können.

Beispielaufgabe:

> Schätze zuerst, welches Produkt wohl größer sein wird: $64 \cdot 57$ oder $46 \cdot 75$? Veranschauliche die Situation an einem Malkreuz und berechne anschließend.
>
> Fällt dir bei den Malkreuzen etwas auf? Findest du eine Regel, mit der du entscheiden kannst, welches Produkt immer größer ist?
>
> Vergleiche dazu auch die beiden Produkte $36 \cdot 72$ und $63 \cdot 27$.

Die intendierte Erkenntnis ist hier: Nur das Produkt der Zehnerstellen entscheidet, welches Gesamtprodukt letztlich größer ist.

2 Herleitung des Wurzelziehens

Nun sei eine 3-4 stellige Quadratzahl gegeben und ihre Wurzel gesucht. Die erste binomische Formel lautet bekanntermaßen: $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$ und ist mit dem Malkreuz entsprechend identifizierbar. Angenommen die Zehnerstelle wurde gefunden, so ist die Variable a, sowie das innere Feld a^2 bekannt.

Was wissen wir nun über die Einerstelle (Variable b)? Die übrigen drei inneren Felder ba, ab und b^2 müssen aufsummiert genau die Zahl ergeben, die als Ergebnis aus der Subtraktion von Radikand und a^2 hervorgeht.

Somit erhält man vorerst folgende Gleichung: $2\,ab + b^2 = \text{Radikand} - a^2$.

•	a	b	
a	a^2	ab	- $a^2 + ab$
b	ba	b^2	- $ba + b^2$ insgesamt $(a+b)^2$.

Die einzelnen Strategieschritte sollen an einem explizitem Beispiel erläutert werden: Bestimme $\sqrt{5041}$.

Reformulierung der Aufgabenstellung: Finde diejenige Zahl, die quadriert (bzw. mit sich selbst multipliziert) die Zahl unter der Wurzel, also 5041, ergibt.

1. $50 > 49 = 7^2$, $70^2 = 4900 < 5041$ (Bestimmung der Zehnerstelle)

•	70	b
70	4900	$70 \cdot b$
b	$b \cdot 70$	b^2

$\boxed{5041}$

2. Nebenrechnung: 5041 – 4900 = 141. Diese Zahl muss auf die übrigen drei inneren Felder verteilt werden (spätere Kontrolle).

3. Betrachten wir nun die Endziffer der Zahl unter der Wurzel, um die Einerstelle der Quadratwurzel zu besetzen: die 1 an der Einerstelle des Radikanden kann nur das Ergebnis der Quadrate 1^2 und 9^2 sein. Von den möglichen Einerstellen 1 – 9 stehen somit nur noch die Zahlen 1 und 9 zur Verfügung. Mit der „Tabellenmethode“ kommt wohl nur eine Einerstelle im unteren Bereich (1, 2 oder 3) in Frage, da der Abstand zum Radikanden ziemlich gering ist (eben nur 141).

Werden beide Überlegungen miteinander kombiniert, so fällt die Wahl schnell auf die Zahl 1, um die Einerstelle passend zu besetzen (Bestimmung der Einerstelle).

3 Schüleraussagen zum Malkreuz und zum Wurzelziehen

Wie hast du das Rechnen mit dem Malkreuz verstanden?

Sehr gut Gut Naja Ich verstehe es nicht

Bei der zweiten Frage war ein deutliches Verständis erkennbar: 15 kreuzten „Sehr gut“ an, 9 entschieden sich für „Gut“ und 3 für „Naja“. Lediglich ein Kind gab an, das Malkreuz auch nach dem Unterrichtsgang nicht zu verstehen. Die Grundvoraussetzung, um das Wurzelziehen mithilfe des Malkreuzes überhaupt beherrschen zu können, ist also bei fast allen Kindern gegeben.

Wie findest du das Malkreuz verglichen mit der „normalen“ schriftlichen Multiplikation? Kannst du gut damit rechnen?

Fast alle Schüler trauten sich zu, mit dem Malkreuz gut rechnen zu können. Es standen aber Bedenken (z.B. zusätzlicher Zeitaufwand für die Skizze) im Raum, die bei den meisten Kindern das „normale“ schriftliche Multiplikationsverfahren zunächst attraktiver erscheinen lässt. Weiterhin ließen sich zwiegespaltene Meinungen finden, die Vorteile in beiden Strategien sahen: „Also ich kann damit [erg. Malkreuz] besser, vor allem leichter rechnen. Aber es dauert etwas länger.“

Immerhin befanden sieben Kinder das Malkreuz (trotz des Zeitaufwands) für eine bessere Lösungsstrategie, was einer 1/4 – Minderheit entspricht.

Wie gefällt dir das Wurzelziehen? Versuche in deinen eigenen Worten zu beschreiben, was das Wurzelziehen ist.

10 Schüler ließen die Frage unbeantwortet. 11 Kinder befinden das Wurzelziehen für „gut“ bis „sehr gut“, 4 stehen dem Wurzelrechnen neutral gegenüber („okay/naja“). Weniger als 10% (3 Kinder) finden keinen Gefallen am Wurzelziehen („nicht gut“). Darunter war ein Kind, das in Aufgabe 1 und 2 angab, das Malkreuz noch nicht gekannt und auch nach dem Unterrichtsverlauf nicht verstanden zu haben.

Die Versuche, die Rechenoperation „Wurzelziehen“ in eigenen Worten zu beschreiben, reichten von richtigen und falschen Aussagen über kreative Beispiele bis hin zur genauen Beschreibung des Vorgehens beim Ausfüllen des Malkreuzes, wie folgende Ausschnitte zeigen:

„Beim Wurzelziehen hast du eine Zahl z.B. 196. Du zeichnest als erstes das Malkreuz. Dort schaust du, wie du die hunderter aufteilen. In dem Fall 10 · 10. Dann musst du dir eine N.R. schreiben: 196 – 100 = 96. Das Ergebnis wo du raus bekommen hast musst du wieder aufteilen.“ oder „Man bekommt [beim Wurzelziehen] eine Zahl, bei der man dann die Quadratwurzel herausfinden muss. (man muss bei der Zehnerzahl „schätzen“ was am nähesten dran ist und bei der einer Zahl es dann ausrechnen…)“

Ein anderes Kind bemerkte lediglich: „Das Wurzelziehen ist ein bisschen wie ein Ratespiel.“, womit es wohl das Finden der Zehner- und Einerstelle im Malkreuz meinte. Oftmals wurde von Schülern die Beziehung zum Quadrieren angesprochen: „Das Wurzelziehen ist das Gegenteil vom Quadrieren.“ oder „Das Wurzelziehen ist sozusagen die Umkehrrechnung vom Quadrieren.“ „Man bestimmt [beim Wurzelziehen] die Quadratzahl“ oder „Man findet heraus wie die Quadratzahl lautet“, sowie „Das Wurzelziehen ist das Ergebnis einer quadrierten Zahl“.

Wurzelziehen (zumindest aus 4stelligen Zahlen)kann also in der 5. Klasse thematisiert werden, ohne dass ein Taschenrechner zum Einsatz kommt. Es lässt sich auch bei Zahlen, die selbst keine Quadratzahlen sind, untersuchen, zwischen welchen Quadratzahlen sie liegen.

Thomas MÜLLER, Krems/Donau (Österreich)

Ein freier Raumvorstellungstest für Schulen, Projekt RIF-3D

2015 wurde ein 7-minütiger Raumvorstellungstest für den Faktor *Mentale Rotation* entwickelt und frei online gesetzt. Mehr als 3000 Schülerinnen und Schüler aus der Sekundarstufe haben in Österreich daran teilgenommen. Durch die hohe Teilnehmerzahl konnte eine Normierung für die 5. bis zur 8. Schulstufe durchgeführt werden. Aufgezeigt werden die Testentwicklung bis zur Normierung sowie die ersten Ergebnisse in Bezug auf Gender, Schulstufe und Schultyp. Dieser und weitere Raumvorstellungstests sollen nun frei zur Verfügung gestellt werden.

Beim Raumvorstellungsprojekt GEODIKON (2012-2014), über das auch im Rahmen der GDM-Tagungen berichtet wurde, wurden vier international anerkannte Raumvorstellungstests kostenfrei zur Verfügung gestellt. Mehr als 900 Schülerinnen und Schüler aus NÖ, ST und Salzburg haben teilgenommen. [Maresch 2014] Die Testbatterie der Pre- und Posttests bestand aus folgenden Raumvorstellungstests: *Dreidimensionaler Würfeltest* (3DW-Test; Gittler, 1984), *Differential Aptitude Test* (DAT; Bennett, Seashore, Wesman, 1973), *Mental Rotation Test* (MRT; Peters, Laeng, Latham, Jackson, Zaiyouna, Richardson, 1995) und *Spatial Orientation Test* (SOT; Hegarty, Waller, 2004). Die Tests waren verständlicherweise mit der Auflage versehen, sie ausschließlich für dieses Projekt zu verwenden. Nun hatten sich im Vorfeld für GeodiKon weit mehr Kolleginnen und Kollegen gemeldet, die mit ihren Klassen teilnehmen wollten, als tatsächlich angenommen werden konnten. Bei so viel Interesse entstand die Idee für ein neues Projekt mit dem Namen *RIF-3D*: Eigene Tests zu entwickeln, die interessierte Lehrpersonen frei im Unterricht verwenden dürfen …

Als Vorabprojekt wurde im Rahmen einer Bachelorarbeit an der KPH Wien / Krems von einem Studierenden (Johannes Reiss) Beispiele zum Abtesten des Faktors *Mentale Rotation* tatsächlich erstellt. Dabei sollten die Aufgaben bereits für Kinder aus der 4. Schulstufe gelöst werden können. Die Aufgaben sollten deshalb möglichst kindgerecht sein und möglichst konkrete und verständlich-erkennbare Objekte beinhalten, also z.B. keine reinen Würfelketten.

Die Testentwicklung

Dabei entstanden sowohl Zeichnungen von Kantenmodellen – genauer weiß gefüllten Volumskantenmodellen – als auch solche mit schattierten Teilflächen. Dabei interessierte natürlich auch, ob es Unterschiede bei der Lösungshäufigkeit von Kantenmodellen oder jenen mit Teilschattierungen gäbe.

Das Design jeder Aufgabe sollte gleich sein: 2 aus 5 gezeichneten Objekten, aus unterschiedlichen Blickwinkeln dargestellt, sollen tatsächlich mit einem Ausgangsobjekt identisch sein. Richtig von falsch unterscheidet sich in allen Fällen im Durchbrechen der Symmetrie der Objekte.

Um das Niveau der Aufgaben relativ niedrig zu halten (ab 4. Schulstufe primar!) wurden alle Objekte auf einer horizontalen Ebene aufgestellt und nur in dieser gedreht. Zusätzlich wurden bei jeder Aufgabe nur Ansichten von oben gewählt und nur in fünf vorab überlegten Richtungen verdreht. Insgesamt stand dann ein Pool von 200 Grafiken zur Verfügung, aus dem die 17 Aufgabenpaare komponiert wurden: Denn jede Aufgabe wurde genau zweimal gestellt, einmal schattiert und einmal als Kantenmodell im obigen Sinn.

Parallel zur Testkomposition erfolgten Überlegungen zur Wahl der Testsoftware. Es galt für uns, zwischen zwei Programmen zu wählen: Quizmaker oder LimeSurvey. Wir entschieden uns wegen der Programmier- und einfachen Exportmöglichkeit in eine EXCEL-Datei für LimeSurvey.

Die Testung

Damit die viele Arbeit nicht nur für die vier Klassen im Rahmen der Bachelorarbeit gemacht wäre, wurde kurzfristig entschieden, eine Aussendung über das „Netzwerk der Geometrie" zu beantragen. Dadurch werden die Infos an über 2000 Lehrpersonen aus dem Bereich des Geometrieunterrichts in Österreich geschickt: Schon am Abend nach der Aussendung am 18. Feber 2015 um 12.10 Uhr gab es über 100 auswertbare Datensätze, eine Woche später bereits über 1000 und Anfang Juni schließlich 3050 vollständige Datensätze.

Um den Klassenlehrpersonen eine Rückmeldung geben zu können, wurde die Excel-Rohdatei entsprechend gefiltert und Teilberechnungen durchgeführt. Dann wurden die Klassenlisten mit den Einzelergebnissen an jene Lehrpersonen geschickt, die per Mail darum gebeten hatten. Es waren knapp mehr als 100 Klassen, die händisch auf diese Art ausgewertet worden sind.

Bereits nach den ersten paar Hundert Datensätzen zeigte sich, dass eine Normierung nach Alter, Geschlecht und Schultyp vorzunehmen war, um verwertbare Aussagen zum Entwicklungsstand des Raumvorstellungsvermögens in Bezug auf mentale Rotation machen zu können. So konnte bei den Rückmeldungen an die Lehrpersonen eine Vergleichstabelle mit dem Abschneiden der anderen Schülerinnen und Schüler derselben Altersstufe und desselben Schultyps mitgesandt werden. Bei *Schultyp* wurde lediglich nach Gymnasium und Neue Mittelschule (Hauptschule) unterschieden. Diese Tabelle nährte sich jeweils aus den Ergebnissen aller bis dahin Teilnehmenden.

Für eine abschließende Auswertung konnten von den 3050 vollständigen Datensätzen 2127 Datensätze der 5. bis zur 8. Schulstufe zugeordnet werden.

Davon waren 810 aus dem (Real-)Gymnasium und 1317 aus den NMS, vom Geschlecht her gesehen waren 1222 männlich und 905 weiblich.

Die Testergebnisse

Schon die ersten Boxplotdarstellungen zur Untersuchung der Lösungsvielfalten zwischen Kanten- und Schattierungsbeispielen zeigen, dass kein Unterschied zwischen beiden Aufgabentypen besteht. Der erwartete Effekt, dass sich die Anschaulichkeit durch das Färben einiger Teilflächen erhöhen und dadurch schattierte Beispiele besser gelöst würden, tritt nicht ein. Der Korrelationskoeffizient von $r = 0{,}946$ (mit $p < 0{,}001$) bestätigt den signifikanten Zusammenhang zwischen den beiden Testserienergebnissen. Deshalb erfolgen alle weiteren Untersuchungen nur noch für die Klasse der reinen Kantenbeispiele im obigen Sinne. Das Histogramm der Items für die Kantenbeispiele deutet auf eine Normalverteilungsannahme hin. Auf Grund der großen Anzahl von Probanden ist eine gewisse Robustheit gegenüber Verletzungen dieser Annahme gegeben. Der Test von *Kolmogorov-Smirnov* zeigt allerdings, dass keine genügend gute Anpassung an eine Normalverteilung vorliegt. Dies hat die Konsequenz, dass nur sogenannte *nichtparametrische* Tests für weitere Untersuchungen verwendet werden können.

Der Weg zur Normierung

Ist der Test zuverlässig/reliabel? Sind die Beispiele konsistent? Praktisch wird die Zuverlässigkeit jedes einzelnen Beispiels so geprüft, dass jedes einzelne Item in Korrelation zur der um das betroffene Item reduzierten Gesamtskala gesetzt wird. *Cronbachs Alpha* ist jene Maßzahl für die innere Konsistenz einer Skala und bezeichnet das Ausmaß, in dem die Aufgaben miteinander in Beziehung stehen. Der Wert reicht von 0 bis 1, je größer, desto zuverlässiger der Test. Cronbachs Alpha beträgt 0,892. Eine Alternative ist die *Split-half*-Methode, dabei wird nur jedes zweite Beispiel zur Auswertung herangezogen und die Kontrollrechnung mit der zweiten Hälfte der Beispiele durchgeführt. Hier sind die Gronbachs Alpha-Werte: 0,810 bzw. 0,903. (vgl. Bühner, 2010, S. 166f und 241f)

Die nächste Analyse bezieht sich auf den *Schwierigkeitsgrad* der einzelnen *dichotomen* Items (Richtig-Falsch-Items). Für jedes Item kann die Zahl der TN mit der richtigen Antwort gezählt werden. So haben z.B. 90% der Probanden das Item 1 richtig beantwortet. Der *Schwierigkeitsindex* für Item 1 ist also 90. Eigentlich handelt es sich um einen *Leichtigkeits*index: Je näher bei 100%, desto mehr haben das Beispiel gelöst, desto leichter ist es gefallen. Der Schwierigkeitsindex sollte zwischen 0,2 und 0,8 liegen. Dies ist bei 10 von der 17 Aufgaben der Fall. (vgl. Bühner, 2010, S. 222f)

Sind die Items *trennscharf*? Die Trennschärfe ermöglicht eine Einschätzung, wie gut ein Item „zwischen Personen mit niedriger und hoher Merkmalsausprägung trennt“. An sich berechnet man immer eine Korrelation zwischen einem Einzelitem und dem (um dieses Item reduzierte) Gesamtergebnis. Je höher der Korrelationskoeffizient, desto trennschärfer ist ein Beispiel. Man könnte eventuell sogar Beispiele mit geringer Trennschärfe (ev. Item 01) aus dem Test entfernen, weil sie keine neuen Erkenntnisse einbringen.

Mit diversen Tests [etwa U-Test von MANN und WHITNEY] bzw. der Effektstärkenberechnung z.B. nach John HATTIE werden nun die Unterschiede zwischen den Gruppen nach SCHULART, SCHULSTUFE und GESCHLECHT bestimmt und deren Zentralwerte (m=AM und SD) berechnet.

Die Normierung erfolgt nun analog zur STANNINE-Methode [vgl. BÜHNER 2011, S.262f, auch Abb. 5.43] mit einer Normierung in nur 5 Klassen, also im Sinne einer STANFIVE. Dabei werden folgende Klassen gebildet:

Die Raumvorstellung bezogen auf den Faktor Mentale Rotation ist

auffällig unterdurchschnittlich	[0 %, m-SA-14%[
leicht unterdurchschnittlich	]m-SA-14%, m-SA[
liegt im Durchschnitt	[m-SA, m+SA]
leicht überdurchschnittlich	]m+SA, m+SA+14%]
auffällig überdurchschnittlich	]m+SA+14%, 100%]

Diese obigen Überlegungen und die Erfahrungen aus dem beschriebenen Vorabprojekt werden bei RIF-3D, einer Initiative für freie Raumvorstellungstests zu den Faktoren *Orientierungsfähigkeit, Mentale Rotation, räumliche Beziehungen* und *Visualisierung* eine Rolle spielen.
Zu weiteren Infos über den analysierten Test kommt man unter http://geometrie.muel.at/raumvorstellungstest. Hier können auch die weiteren Entwicklungen des Projekts RIF-3D verfolgt werden.

Literatur

Bühner, M. (2011). Einführung in die Test- und Fragebogenkonstruktion, 2. Aufl., Pearson, München

Maresch, Günter: Erfolgreiche Strategien zur Lösung von Raumvorstellungsaufgaben, (Forschungsprojekt GeodiKon). In Roth J. u. Ames J. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014: Vorträge auf der 48. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 10.03.2014 bis 14.03.2014 in Koblenz)*, Münster: Waxmann.

Stefanie MÜLLER-HEISE, MLU Halle-Wittenberg

Grundschüler reflektieren ihren eigenen Problembearbeitungsprozess

1. Theoretische Grundlagen

In den letzten Jahren hat sich Problemlösen als ein wichtiger Bestandteil des Mathematikunterrichts in der Grundschule erwiesen. Damit verbunden stellt sich u.a. die Frage, wie Problemlösen bei Grundschülern abläuft. Dabei ist festzustellen, dass sich Schüler häufig für einen Lösungsweg entscheiden und diesen bis zu einem Ergebnis (richtig oder falsch spielt keine Rolle) verfolgen. Die Sinnhaftigkeit des eingeschlagenen Lösungsweges wird dabei meist nicht hinterfragt. Doch gerade dieses Hinterfragen oder Reflektieren ist hilfreich, um ein mathematisches Problem erfolgreich zu bearbeiten. Schoenfeld (2011) benennt dies in seinem Komponentenmodell zum mathematischen Problemlösen als „monitoring“ oder auch „metacognition“, also eine Überwachung des Lösungsprozesses und ein Nachdenken über das eigene kognitive Handeln.

Der von Schoenfeld aufgegriffene Begriff der Metakognition stammt aus der Psychologie. Hierunter werden deklaratives und prozedurales Wissen zusammengefasst, welches ein Denken über das eigene kognitive Handeln meint. Auf den zeitlichen Verlauf einer Problembearbeitung bezogen werden Planungs-, Überwachungs- und Überprüfungsaktivitäten unterschieden (vgl. Brown 1984). Kluwe unterscheidet die „on-line“-Prozesse der Überwachung noch einmal in Kontroll- und Steuerungsaktivitäten. „Kontrollprozesse führen zu Informationen über das "Was" des eigenen Denkens. Steuervorgänge führen zu Modifikationen des Verlaufs eigenen Denkens.“ (Kluwe 1982, S. 126) Aus Kluwes Sicht ermöglicht auch eine nachträgliche, rückblickende Kontrolle dem Problemlöser einen tieferen Einblick in sein eigenes Handeln und er gewinnt somit neue Erkenntnisse über sein eigenes Problemlöseverhalten.
Nach Schoenfeld (1987) ermöglicht eine Präsentation eines videografierten Lösungsweges einer fremden Person einen Anlass, um sich im Nachhinein mit dem eigenen Problembearbeitungsprozess auseinanderzusetzen. Dieses Verfahren führt er mit Studierenden durch und stellt fest: „It‘s a lot easier to analyze behaviour when it‘s someone else‘s, and then to see that the analysis applies to yourselve.“ (Schoenfeld 1987, S.199) Somit scheint es möglich zu sein, dass man durch das Betrachten eines fremden Bearbeitungsprozesses Rückschlüsse auf den eigenen Prozess ziehen kann und somit durch eine nachträgliche Auseinandersetzung neues Wissen gewinnt.
Aus meiner Sicht macht es Sinn die beiden Ansätze von Kluwe (1982) und Schoenfeld (1987) miteinander zu verbinden. Beide haben das Ziel, sich mit

dem eigenen Problembearbeitungsprozess im Nachhinein auseinanderzusetzen. Da meine Untersuchung im Bereich der Grundschule und nicht mit Studierenden an der Universität durchgeführt wird, nutze ich die Fragen hinsichtlich der Kontrolle nach Kluwe (1982) als Anlass für die Schüler, sich vertiefend mit dem eigenen und dem fremden Problembearbeitungsprozess auseinanderzusetzen.
In dem Projekt möchte ich folgenden Fragen auf den Grund gehen:

- Wie reflektieren Grundschulkinder ihren eigenen Problembearbeitungsprozess nachdem sie ein Video mit einem fremden Problembearbeitungsprozess gesehen haben?
- Inwiefern gehen sie dabei auf den eigenen, den fremden oder vergleichend auf beide Problembearbeitungsprozesse ein?
- Auf welchen (mathematischen) Inhalt beziehen sich die Schülerinnen und Schüler in ihren Aussagen?
- Verändert sich dies im Laufe der Zeit?

2. Forschungsdesign

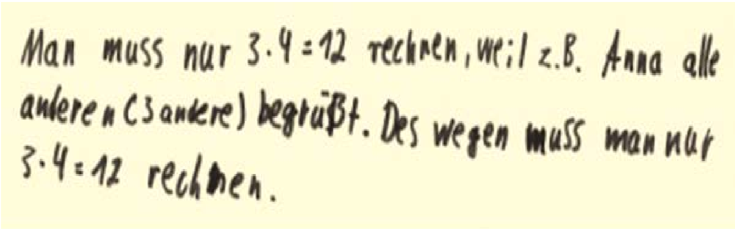
Zunächst wurden die Schüler aufgefordert ein Problem selbständig zu bearbeiten bis sie der Meinung sind, dass sie ein Ergebnis erhalten haben. Im Anschluss wurde ihnen ein Video gezeigt, in dem ein fremder Schüler die gleiche Problemstellung bearbeitet und zu einem anderen Ergebnis kommt. Anschließend wurden die Schüler gebeten, ihre ersten Eindrücke zu äußern und anschließend wurden Fragen hinsichtlich der Beschreibung, Bewertung, des Vergleichs und der Vorausschau gestellt.
Insgesamt wurden 10 Grundschüler der vierten Jahrgangsstufe am Ende ihrer Grundschulzeit interviewt. Jeder Schüler bearbeitete mindestens drei verschiedene Probleme, wobei der Ablauf immer der gleiche war.
Der gesamte Interviewtermin wurde aus zwei Perspektiven videografiert. Eine Kamera nahm die Schüler frontal auf, während die zweite Kamera über die Schulter der Schüler filmte. Somit kann der Lösungsweg des Schülers im Nachgang rekonstruiert werden und es ist z.T. sichtbar, worauf die Schüler im Interview zeigen.
Da die beiden Lösungswege bei der nachträglichen Auseinandersetzung eine wichtige Rolle spielen, werden diese rekonstruiert, beschrieben und miteinander verglichen. Die Interviewsequenz, welche im Anschluss an das Video folgte, wurde transkribiert und interpretativ analysiert. Hierbei wurde immer wieder auf die Analyse der beiden Lösungswege Bezug genommen, da beide Prozesse dem Schüler als Bezugspunkte zur Verfügung stehen. Um mit den gewonnenen Erkenntnissen über die Schüleraussagen die Fragestellungen zu beantworten, wird die Interpretation hinsichtlich der einzelnen Fragestellungen zusammengefasst. Somit erhält man einen Einblick, wie sich Schüler zu dem eigenen und dem fremden Lösungsweg äußern und inwiefern der von

mir geplante Ansatz zu Reflexionen hinsichtlich des Problembearbeitungsprozesses führt.

3. Fallanalyse Felicitas

Felicitas bearbeitete insgesamt drei Problemstellungen, wobei für diesen Artikel der erste Untersuchungstermin ausgewählt wird, um erste Ergebnisse darzustellen.

Anna, Paul, Max, Emma und Lisa sehen sich am ersten Schultag nach den Ferien wieder. Jedes Kind begrüßt jedes mit einem Handschlag.
Wie viele Handschläge sind es?



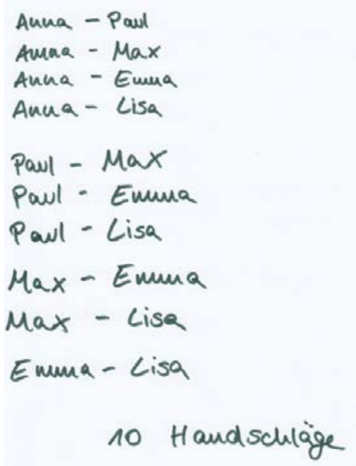


Abb.1: Problemstellung (oben links), Lösungsweg Felicitas (unten links), Lösungsweg Clara (Video-Prozess) (rechts)

Beide Kinder gehen systematisch vor und begründen ihren Weg bzw. ihre Lösung. Während Felicitas ihr Ergebnis durch Tippen auf die Namen, Zählen und Rechnen ermittelt, schreibt Clara die von ihr gebildeten Kinderpaare auf und zählt diese am Ende ab. In Claras Lösung begrüßen sich die Kinder jeweils nur einmal, während sich die Kinder in Felicitas‘ Lösung alle zweimal begrüßen.

Nachdem Felicitas das Video gesehen hat, stellt sie zuerst fest, dass Clara etwas anders gemacht hat. Dabei bezieht sie sich in den folgenden Äußerungen zum einen auf das Aufschreiben der Paare und zum anderen darauf, dass Clara beachtet hat, dass sich die Handschläge nicht doppeln. Sie zieht schlussfolgernd aus dieser letzten Feststellung, dass Clara deshalb auf zehn Handschläge kommt.
In dieser ersten Äußerung kann hinsichtlich des mathematischen Inhalts gesagt werden, dass sich Felicitas zunächst auf den Bearbeitungsprozess und dessen Gestaltung bezieht, die Regel mit den Handschlägen erkennt und davon ausgehend begründet, wodurch der Unterschied in den beiden Ergebnissen zustande kommt. Für Felicitas steht also nicht das Ergebnis im Mittelpunkt ihrer ersten Betrachtung, sondern der Weg, wie dieses entstanden ist. Ihre Reflexion ist also stärker prozessorientiert als produktorientiert.

Bezüglich des Prozesses, welcher von Felicitas in den Blick genommen wird, kann festgestellt werden, dass sie beide Prozesse miteinander vergleicht und Unterschiede erkennt und benennt. Dabei geht sie in dieser ersten Äußerung auf Claras Bearbeitung ein.
Insgesamt beschreibt Felicitas Unterschiede und bewertet weder das eigene Vorgehen als falsch noch das von Clara als besser oder ähnliches.

Im Verlauf des Interviews wird Felicitas von der Interviewerin zu einem Vergleich der beiden Lösungswege aufgefordert. Ähnlich wie bei den ersten Äußerungen beginnt Felicitas mit der Feststellung, dass etwas anders gemacht wurde. Sie geht anschließend differenziert auf ihr eigenes Vorgehen ein und erklärt, was sie mit anders meint. Zum einen sagt sie, dass sie gerechnet hat und zum anderen, dass sie nicht beachtet hat, dass sich die Kinder doppelt begrüßen. Auch hier kommt erst am Ende der Schluss, dass es daran liegt, dass sie selbst nun 12 Handschläge als Ergebnis erhält.
Die Struktur dieser Aussage ist ähnlich ihrer ersten Aussage. Allerdings bezieht sich Felicitas nun auf ihren eigenen Lösungsprozess und nicht mehr auf Claras. Inhaltlich betrachtet sie das Vorgehen und die Regelbeachtung (prozessorientiert) und lediglich am Schluss den Ergebnisunterschied (produktorientiert). Auch hier beschreibt Felicitas, was sie erkannt hat und bewertet keine der beiden Vorgehensweisen.

4. Fazit

Anhand der kurzen Darstellung von Felictas‘ erstem Interview zeigt sich bereits, dass Grundschüler durch das Betrachten eines fremden Lösungsweges im Anschluss an die eigene Bearbeitung eines mathematischen Problems angeregt werden, über ihren eigenen Lösungsweg nachzudenken und diesen zu reflektieren. Dabei gelingt es Unterschiede in den Vorgehensweisen zu erkennen und diese zu beschreiben (prozessorientiert). Das Ergebnis spielt in diesem Fall eine eher untergeordnete Rolle (produktorientiert).
Wie sich diese Tendenzen im Laufe des Projekts verändern, wird sich im Laufe weiterer Analysen zeigen.

Die Liste der verwendeten Literatur kann bei der Autorin erfragt werden.

Sebastian MUNGENAST, Würzburg

Metakognition bei Studienanfängern im Bereich Mathematik – Entwicklung eines Kategoriensystems anhand qualitativer Interviews

1. Überblick

Im laufenden Promotionsprojekt werden Fähigkeiten und Aktivitäten im Bereich Metakognition bei Mathematiklernenden am Übergang Schule/ Hochschule dokumentiert. Die mit Hilfe einer qualitativen Studie gewonnen Ergebnisse sollen im Folgenden dazu verwendet werden, bestehende Modelle zum Metakognitionsbegriff zu erweitern und speziell für den Bereich der Analysis auszuschärfen.

2. Metakognition

Metakognition wird gemeinhin als „Kognition über Kognition“ oder „Kognition zweiter Ordnung“ verstanden, also als kognitive Prozesse, die wiederum eigene Denkvorgänge und eigenes Wissen zum Inhalt haben (vgl. Flavell 1976).

Eine mögliche Unterteilung des Begriffs ist hierbei die in deklaratives Metawissen und prozedurale Metakognition, wobei zu beachten bleibt, dass mit entsprechenden Begrifflichkeiten in der Literatur unterschiedlich oder mitunter nicht trennscharf umgegangen wird. Deklaratives Metawissen lässt sich wiederum in die drei Unterbegriffe Personenwissen (person knowledge), Aufgabenwissen (task knowledge) und Strategiewissen (strategy knowledge) unterteilen (vgl. Schneider 2010). Für Mathematiklernende bedeutet deklaratives Metawissen also artikulierbares Wissen über eigene, personenspezifische (kognitive) Merkmale (z.B. Kenntnisstand) in Bezug auf Mathematik, Wissen über aufgabenspezifische Informationen bei der Analyse mathematischer Sachverhalte und Aufgabenstellungen, sowie Wissen über mögliche Strategien bei der Bearbeitung und Lösung solcher Aufgaben und über deren Auswahl und Beurteilung. Prozedurale Metakognition umfasst Prozesse wie die Planung und Überwachung kognitiver Vorgänge, sowie deren (anschließende) Reflexion (vgl. Sjuts 1999). Bezogen auf die Mathematik können dies also bspw. planerische Überlegungen zu Beginn einer Aufgabenbearbeitung, der Abgleich laufender Denk- und Arbeitsprozesse mit gesetzten Zielen und mathematischem Vorwissen, sowie die anschließende Reflexion der eigenen Vorgehensweise und das Ziehen von Konsequenzen für den zukünftigen Umgang mit (ähnlichen) Problemstellungen sein (vgl. Mungenast 2015).

3. Fachlicher Rahmen und Zielgruppe

Als fachlicher Bezugsrahmen für das Projekt wurde das Gebiet der Analysis gewählt, da sich hier Ansatzpunkte zu metakognitiver Aktivität zeigen. So erfordert bspw. die gedankliche Integration dynamischer und statischer Aspekte des Grenzwertes (vgl. Ableitinger & Heitzer 2013, Weigand 1993) hin zu einer tragfähigen Vorstellung dieses Begriffs ein hohes Maß an Reflexion, um den erforderlichen Perspektivwechsel zu ermöglichen. Insbesondere, da – in Bayern – der Grenzwertbegriff im aktuellen Lehrplan für die Sekundarstufe II nur noch auf einer intuitiven Ebene eingeführt wird, stellt die Einführung der statischen Sichtweise mittels ε-δ-Definition zu Beginn einer Analysis-Vorlesung an der Hochschule unter Umständen eine große Hürde beim Übergang Schule-Hochschule dar. Auch die Verlagerung des Unterrichtsgeschehens von einer Betonung stärker algorithmischen Arbeitens hin zu einem Fokus auf Tätigkeiten wie Argumentation und Modellierung, die durch den Einsatz von Technologien ermöglicht wird, lässt den Einsatz von Metakognition als besonders nützlich erscheinen.

Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, wurden als Zielgruppe für eine Studie innerhalb des laufenden Projekts Studienanfänger in mathematischen Studiengängen (Bachelor, Lehramt) ausgewählt, die kurz vor Beginn des eigentlichen Studiums standen.

Diese Wahl der Zielgruppe gibt der durchgeführten Studie einen Bezug sowohl zur Didaktik der Sekundarstufe II, als auch zur Hochschuldidaktik und lässt sich damit auch in den Themenbereich der Übergangsproblematik einordnen.

4. Forschungsvorhaben

Während sich viele Forschungsprojekte im Bereich Metakognition und Mathematik auf jüngere Zielgruppen konzentrieren (vgl. allerdings etwa Schoenfeld 1991), stellt sich die Frage, welche metakognitiven Aktivitäten gerade bei Schülerinnen und Schülern, bzw. Absolventen der Sekundarstufe II und bei Studierenden tatsächlich vorkommen, bzw. inwieweit diese von ihnen verbalisiert und beschrieben werden können. Des Weiteren soll untersucht werden, ob beim Umgang mit mathematischen Inhalten aus dem Bereich Analysis, die – explizit – erst mit Beginn der Sekundarstufe eingeführt werden, bereichs- oder domänenspezifische Metakognition nachgewiesen werden kann und wie diese in bestehende Modelle eingeordnet werden kann.

Diesen Überlegungen folgend, lässt sich das Forschungsvorhaben des laufenden Projekts folgendermaßen zusammenfassen:

1. Welche metakognitiven Aktivitäten können bei Schülerinnen und Schülern nach Abschluss der Sek. II beim Umgang mit Mathematik nachgewiesen werden?

2. Lassen sich diese Aktivitäten durch bestehende Modelle/ Kategorisierungen vollständig beschreiben?
3. Lässt sich – vor allem für den Bereich der Analysis in der Sek II. – ein Modell entwickeln, das den Begriff der Metakognition klassifiziert und bestehende – allgemeinere – Modelle erweitert und spezifiziert?
4. Überprüfung dieses Modells
5. Deutet sich ein Zusammenhang zwischen „guten“ Fähigkeiten im Bereich Metakognition und „Erfolg“ in Mathematik an?
6. Interpretation im Hinblick auf Unterrichts- und Vorlesungspraxis

5. Durchführung der Studie

Zur Beantwortung obiger Fragestellungen wurden kurz vor Beginn des Wintersemesters 2015/16 qualitative Interviews mit Studienanfängern durchgeführt. Hierzu wurden (zukünftige) Studierende auf freiwilliger Basis in den am Institut für Mathematik der Universität Würzburg stattfindenden Mathematik-Vorkursen um Teilnahme an der laufenden Studie gebeten, was in einer Gruppe von 11 Teilnehmern resultierte. Diese wurden im Folgenden teils einzeln (fünf Teilnehmer), teils in Zweier-Gruppen (sechs Teilnehmer) zum Interview eingeladen. Um eine Beeinflussung durch den Interviewleiter so gering wie möglich zu halten, wurde ein halbstrukturiertes Interview-Design gewählt. Dem Interviewleiter lag hierbei zur Orientierung ein Leitfaden vor, der theoriegeleitet entwickelte Fragen, bzw. Themenbereiche zu metakognitiven Überlegungen und Aktivitäten beim Umgang mit Mathematik enthielt, die sich vor allem rückblickend auf die Schulzeit der Teilnehmer bezogen. Die Entwicklung des Interview-Gesprächs wurde jedoch weitgehend den jeweiligen Interview-Teilnehmern überlassen. Nach einer – als motivierend und „das Eis brechend“ intendierten – Einstiegsfrage zur Studien-Entscheidung entwickelte sich das Gespräch individuell und wurde vom Interviewleiter durch Themenvorschläge gesteuert. Direkte Fragen wurden hierbei zu Beginn eines neuen Themas vermieden, um den Teilnehmern keine bestimmte Richtung vorzugeben. Erst im zweiten Schritt wurden durch gezielte Nachfrage die Aussagen der Teilnehmer konkretisiert. Im zweiten Teil des Interviews wurde den Teilnehmern eine Aufgabe aus dem Bereich Analysis vorgelegt, die hinsichtlich ihres Schwierigkeitsgrades zu beurteilen und auf Lösungsansätze hin zu untersuchen war. Die dabei ablaufenden Denkprozesse wurden durch die Aufforderung zu „lautem Denken“ möglichst ausführlich zu dokumentieren versucht.

Nach Abschluss der laufenden Transkription sollen die in den Interviews erhobenen Video- und Audiodaten nach Methoden der Qualitativen Inhaltsanalyse (vgl. Mayring 2010) codiert und ausgewertet werden.

Literatur

Ableitinger, C., Heitzer, J. (2013). Grenzwerte unterrichten. Propädeutische Erfahrungen und Präzisierungen. In *Mathematik lehren 30*, 180, S. 2-10

Cohors-Fresenborg, E., Kaune, C. (2007). Kategorisierung von Diskursen im Mathematikunterricht bezüglich metakognitiver und diskursiver Anteile. In Peter-Koop, A., Bikner-Ahsbahs, A. (Hrsg.): *Mathematische Bildung – Mathematische Leistung*, (S.233 – 248). Hildesheim: Franzbecker.

Flavell, J.H. (1976). Metacognitive Aspects of problem solving. In Resnick, L.B. (Hrsg.). *The nature of intelligence* (S. 231-235). Hillsdale: Erlbaum

Mayring, Ph. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken.* Weinheim und Basel: Beltz

Mungenast, S. (2015). Zur Bedeutung von Metakognition beim Lehren und Lernen von Mathematik – Entwicklung eines Kategoriensystems. In:Linneweber-Lammerskitten, H. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* 2015. Münster: WTM-Verlag

Schneider, W., Ardelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. In *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 42, 149–161

Schoenfeld, A. H. (1991). What's all the fuss about problem solving, In *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 23, 4-8

Sjuts, J. (1999). Metakognition im Mathematikunterricht. In *Beiträge zum Mathematikunterricht*. 497-500. Hildesheim. Franzbecker

Veenman, M.V.J. (2012). Metacognition in Science Education: Definitions, Constituents, and Their Intricate Relation with Cognition. In Zohar, A., Dori, Y.J. (Hrsg.). *Metacognition in Science education: Trends in Current Research*, 21-36, Contemporary Trends and Issues in Science Education 40. Dordrecht Heidelberg London New York: Springer

Weigand, H.-G. (1993). *Zur Didaktik des Folgenbegriffs*, Überarbeitete Habilitationsschrift. Mannheim: BI

Dmitri NEDRENCO, Würzburg

Axiomatisieren lernen mit Papierfalten

Dieser Beitrag handelt von einer theoretischen Begründung und Gestaltung sowie praktischen Durchführung und Auswertung eines universitären Kurses zu mathematischem Papierfalten und Axiomatik der euklidischen Ebene für gymnasiales Lehramt.

Es gibt einen Konsens darüber, dass Studierende bis zum Ende des Studiums einer Axiomatisierung einer mathematischen Theorie begegnet sein sollten (Freudenthal 1973). Ferner glauben wir, dass Studierende zu irgendeinem Zeitpunkt ihres Studiums Grundlagen der Axiomatik der euklidischen Ebene gesehen haben müssen, da euklidische Geometrie ein wesentlicher Teil des Lehrplans ist. Sie sollten eine solide Grundlage in diesem Thema haben und diese Überlegung wird auch von den »Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik« (DMV u.a. 2008) unterstützt. Nach Freudenthal gibt es in der Lehrerbildung keinen Platz für »präfabrizierte Mathematik«, somit ist eine Axiomatisierung einer Axiomatik vorzuziehen. Bedauerlicherweise ist eine Axiomatisierung der euklidischen Ebene schwer, wobei es auch gute, aber langwierige Wege gibt (Martin 1998, Schnabel 1981). Mehr noch, zu dem Problem, euklidische Geometrie deduktiv zu unterrichten, gesellt sich das Problem, dass Studierende schwer davon zu überzeugen sind, wozu so etwas überhaupt nötig ist (Yanotta 2013). Überhaupt kann man sagen, dass Studierende erst einmal eine gewisse mathematische Abstraktionsreife erreicht haben müssen, um über diese Fragen erfolgreich nachzudenken. Besitzen Studierende diese Reife nicht – erreichen sie die höchsten Niveaus 3 und 4 der van-Hiele-Messskala (Burger&Shaughnessy 1986, Hoffer 1983) nicht –, was häufig der Fall ist (Mayberry 1983), dann werden sie Axiome und Axiomatisierung als »meaningless and incomprehensible« wahrnehmen (de Villiers 1986). Wir suchen also einen durchführbaren Weg, um Studierenden einen Abstaktionsaufstieg zu ermöglichen.

Aus eigenen Erfahrungen und aktuellen Studien (vgl. Literatur in Arslan 2012) glauben wir, in mathematischem Papierfalten einen solchen Weg gefunden zu haben.

Mathematisches Papierfalten

Papierfalten wir von vielen Forschungsgruppen als eine – für Lehrer wie für Schüler – sehr motivierende Beschäftigung mit einem hohen Bildungspotenzial und einer reichhaltigen Mathematik angesehen. Es gibt eine Vielzahl an Studien über alle Schulformen hinweg (von Grund- und Mittelschulen über Gymnasien bis zu Universitäten), die positive Effekte des Papierfaltens herausstellen. In diesen Studien werden Effekte auf räumliches Vorstellungsvermögen, logische Argumentation, geometrische Kompetenzen uvm. untersucht (Arıcı&Aslan-Tutak 2013, Boakes 2011, Golan 2011). Die Erforschung didaktischer Aspekte des Papierfaltens ist vorwiegend auf Grund- und Mittelschulen konzentriert und es besteht Bedarf nach Studien aus dem universitären Umfeld (Arıcı&Aslan-Tutak, S.2).

Mathematisches Papierfalten ist inzwischen eine reichhaltige Wissenschaft, die unter anderem eine natürliche Fortsetzung der Theorie der euklidischen Konstruktionen darstellt. Wenn wir uns etwa darauf beschränken, dass in einem Faltschritt genau ein Falz entstehen darf (diese Art des Faltens nennen wir 1-fach Origami), dann kann man zeigen, dass man hiermit alle mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte konstruieren kann. Mehr noch, solche mit Zirkel und Lineal unlösbare Aufgaben wir das Delische Problem oder Winkeldrittelung sind mit 1-fach Origami möglich. Sogar Lösungen allgemeiner kubischer Gleichungen sind damit konstruierbar (Hull 2013, Alperin&Lang 2009).

Wie bei allen komplizierten Prozessen kann man Axiomatisieren erst an leichteren Theorien lernen. Wir glauben, dass 1-fach Origami ein solcher geeigneter Übungsplatz wäre, denn es lässt sich leicht axiomatisieren (Alperin&Lang 2009).

Ziele und Forschungsfragen

Meine Lehrziele sind zweierlei. Erstens will ich einen universitären Kurs für zukünftige gymnasiale Mathematiklehrerinnen und -lehrer gestalten, in dem theoretische, praktische und didaktische Aspekte des Papierfaltens mit starker Anbindung am Schulunterricht behandelt werden. Konkret kann man dieses Ziel so fassen: Studierende können charakteristische Konstruktionen des Papierfaltens wie Winkeldreiteilung, Lösen von kubischen Gleichungen, Konstruktionen von Vielecken sowie Konstuktionen von wichtigen Verhältnissen (etwa 1/3, 1/5, etc.) durchführen und erklären. Sie verstehen den Unterschied zwischen Konstruktionen mit Zirkel&Lineal und 1-fach Origami. Außerdem wissen sie, welche didaktische Schwierigkeiten im Unterricht entstehen können und kennen mögliche Lösungen.

Zweitens wissen Studierende, was Axiome und Axiomensysteme im modernen Sinne sind, welche Eigenschaften ein Axiomensystem haben sollte und warum. Ferner kennen sie didaktische Schwierigkeiten der Axiomatik; sie kennen Unterschiede zwischen Axiomensystemen der euklidischen Geometrie nach Euklid bzw. Hilbert und Nachfolgern. Kurzum, Studierende sollen ein ausreichendes Verständnis der modernen Diskussion über Axiomensysteme besitzen.

Meine Forschung konzentriert sich also auf der einen Seite auf das Lehren des mathematischen Papierfaltens; darauf, wie ein sinnvoller Kurs zu mathematischem Papierfalten gestaltet werden könnte. Auf der anderen Seite möchte ich Prozesse des Axiomatisierens aus studentischer Sicht besser verstehen und untersuchen, ob und welchen Unterschied es für Studierende macht, mit Axiomen des Papierfaltens und Axiomen der euklidischen Ebene zu arbeiten. Ferner will ich verstehen, welchen Problemen und Schwierigkeiten Studierende im Umgang mit Axiomen und Axiomensystemen begegnen (Yannotta 2013); wann und warum sie einen Bedarf nach Axiomen verspüren. Zusammengefasst ist die Frage: Wie kann Axiomatisierung des 1-fach Origami zum besseren Verständnis der Axiomatik der euklidischen Ebene beitragen? Eine weitere wesentliche Forschungsfrage ist: Wie kann man eine Veränderung im Denken der Studierenden messen?

Design der Forschung

Es ist davon auszugehen, dass ein durchschnittlicher Studierender nichts über mathematisches Papierfalten weiß. Deswegen können wir nicht direkt mit lokalem Ordnen der Theorie nach Freudenthal anfangen, sondern müssen erst einige naheliegende Aussagen, wie etwa »es ist möglich, eindeutig einen Punkt auf einen anderen zu falten« entdecken, daraus Theoreme ableiten, diese wiederum sortieren und weitere Aussagen entdecken. Das machen wir so lange, bis alle Axiome des 1-fach Origami gefunden wurden (das ist in der Tat möglich), ordnen also die Theorie letztlich global. Danach geht es zur euklidischen Ebene, verschiedenen Axiomensystem ebendieser und damit verbundenen logischen und didaktischen Problemen.

Am Ende des Kurses werden alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer in Doppelinterviews befragt und die Transkripte mit einer angepassten Grounded Theory Maschinerie (vgl. Kelle&Kluge 2010) analysiert. Die Ergebnisse der Auswertung des Kurses werden dazu genutzt, den Kurs zu verbessern und Interviewfragen anzupassen. Danach wird der ganze Zyklus (mit anderen Studierenden) wiederholt. Insgesamt soll diese Prozedur drei Mal durchlaufen werden. Nach dem dritten Mal hoffe ich, so viele Ergebnisse und Erfahrungen gesammelt zu haben, dass fundierte Aussagen zu obigen Problemstellungen gemacht werden können.

Aktuelle Lage

Der erste Kurs fand im Sommersemester 2015 mit zwölf Teilnehmerinnen und Teilnehmern, durchschnittliche Semesterzahl 8,25, statt. Davon wurden insgesamt zehn am Ende des Kurses interviewt. Es gab 17 Fragen, wie etwa »Kannst du mit 1-fach-Origami eine Strecke in fünf gleiche Teile teilen?«, »Kannst du Axiome des 1-fach-Origami benennen?«, »Was denkst du, wie würdest du jemandem erklären, was ein Axiom ist?«.

Der zweite Kurs fand im Wintersemester 2015-16 mit vierzehn Teilnehmerinnen und Teilnehmern (durchschnittliche Semesterzahl 6,25) statt, alle wurden am Ende des Kurses interviewt. Der dritte Kurs wird im Wintersemester 2016-17 stattfinden.

Literatur

Alperin, R. C., & Lang, R. J. (2006). One-, two, and multi-fold origami axioms. *Origami 4*. A K Peters.

Arıcı, S., & Aslan-Tutak, F. (2013). The effect of Origami-based instruction on spatial visualization, geometry achievement, and geometric reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(1), 179-200.

Arslan, O. (2012). *Investigating beliefs and perceived self-efficacy beliefs of prospective elementary mathematics teachers towards using origami in mathematics education* (Doctoral dissertation, Middle East Technical University).

Boakes, N. (2011). Origami and Spatial Thinking of College-Age Students. In *Origami 5*. CRC Press.

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for research in mathematics education,* 31-48.

De Villiers, M. D. (1986). The role of axiomatization in mathematics and mathematics teaching. *University of Stellenbosch.*

DMV, GDM, MNU (2008). Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik. Empfehlungen von DMV, GDM und MNU, Juni 2008. *Mitteilungen der DMV, 16*, 149-159.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe.* Klett.

Golan, M. (2011, June). Origametria and the van Hiele Theory of Teaching Geometry. In *Origami 5*. CRC Press.

Hoffer, A. (1983). Van Hiele-based research. In: *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 205-227.

Hull, T. (2013). *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics*. CRC Press.

Kelle, U., & Kluge, S. (2010). Vom Einzelfall zum Typus. Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung (2., überarbeitete Aufl.). Wiesbaden.

Martin, G. E. (1975). *The foundations of geometry and the non-Euclidean plane*. Springer.

Mayberry, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for research in Mathematics Education*, 58-69.

Schnabel, R. (1981). *Euklidische Geometrie* (Habilitationsschrift). Kiel.

Yannotta, M. (2013). Students' Axiomatizing in a Classroom Setting. In *Proceedings of the 16th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education.*

Inga NIEDERMEYER[1], Ann-Katrin VAN DEN HAM[1], Aiso HEINZE[1], Meike GRÜSSING[2], [1]Kiel / [2]Vechta

Welche Rolle spielt das Schulbuch für die Kompetenzentwicklung im arithmetischen Anfangsunterricht?

Empirische Studien zeigen, dass das Schulbuch für viele Mathematiklehrkräfte der Grundschule die wichtigste Grundlage für die Unterrichtsvorbereitung darstellt (z. B. Mullis, Martin, Foy & Arora 2012). Auch konnte eine positive Korrelation zwischen dem Umfang eines Inhalts im Schulbuch und der dafür verwendeten Unterrichtszeit nachgewiesen werden (Schmidt et al. 2001). Bezüglich des Einflusses von Lehrkraft-Variablen (Beliefs, Kompetenzen etc.) auf den Zusammenhang von Schulbuch und Unterrichtsangebot zeigen sich widersprüchliche Ergebnisse. Es erscheint jedoch sinnvoll die Lehrkraft als Mittler zwischen Schulbuch und Unterricht zu berücksichtigen.

Bezüglich des Einflusses des Schulbuchs auf die Schülerleistungen gibt es nur wenige Studien und dort ebenfalls uneinheitliche Ergebnisse: Van Steenbrugge, Valcke und Desoete (2013) konnten keinen Unterschied in den Schülerleistungen zwischen Klassen mit verschiedenen Schulbüchern feststellen, während Törnroos (2005) eine signifikante Korrelation zwischen den Lerngelegenheiten im Schulbuch und den dazugehörigen Schülerleistungen fand. Hinsichtlich dieses Zusammenhangs wurden jedoch keine Lehrkraft-Variablen berücksichtigt.

Während es viele Fallstudien oder kleinere Studien zum Schulbucheinfluss auf den Unterricht gibt, fehlen vor allem größere quantitative Studien zu Effekten des Schulbuchs auf Schülerleistungen, Längsschnittstudien sowie Studien, die in der Grundschule angesiedelt sind. Wir verfolgen deshalb mit unseren Analysen folgende Forschungsfragen:

- Lässt sich ein Einfluss des Mathematikschulbuchs auf das Unterrichtsangebot in der Grundschule nachweisen?
- Welchen Einfluss hat das Schulbuch auf die Schülerleistungen am Ende der 1. Klasse bzw. der 2. Klasse?
- Wird der Einfluss des Schulbuchs auf die Schülerleistungen durch den Unterricht mediiert?
- Wird der Schulbucheinfluss durch die Lehrerqualifikation moderiert?

Methode

Um diese Forschungsfragen zu beantworten, haben wir Daten aus einer zweijährigen Längsschnittstudie reanalysiert, die im 1. und 2. Schuljahr mit

75 Klassen aus Schleswig-Holstein durchgeführt wurde. In den Klassen wurden vier verschiedene Schulbuchreihen benutzt, die wie folgt beschrieben werden können:

Schulbücher A und B sind klassische, weit verbreitete Schulbuchreihen, die schon seit mehr als zehn Jahren vertrieben werden. Für jedes Schuljahr gibt es dabei ein Schulbuch für die Schülerinnen und Schüler sowie begleitende Materialien für die Lehrkräfte. Die Schulbücher C und D dagegen sind pro Schuljahr in mehrere einzelne Hefte gegliedert. Bei Schulbuch C unterscheiden sich die Hefte dabei thematisch (Zahlen und Operationen, Geometrie, Sachrechnen und Größen), müssen nicht der Reihe nach bearbeitet werden und sind damit wie die Schulbücher A und B flexibel einsetzbar. Bei Schulbuch D ist dagegen eine lineare Bearbeitung der Hefte vorgesehen (das erste Heft behandelt die Zahlen von 1 bis 6, im zweiten Heft wird mit diesen Zahlen gerechnet bevor im dritten Heft die Zahlen von 7-13 eingeführt werden usw.). Dieses Werk wirbt damit, dass die Kinder mit den Heften individualisiert im eigenen Tempo lernen können.

In den nachfolgenden zwei Analysen haben wir die Schulbücher nach zwei Aspekten gruppiert:

1. die didaktisch-methodische Strukturierung des Schulbuchs für den Unterrichtseinsatz: Schulbuch D vs. Schulbücher A, B und C
2. die Verwendung der klassischen Darstellung „Zahlenstrahl" für den ordinalen Zahlaspekt im ersten Schuljahr: Schulbücher A und C führen den Zahlenstrahl in Klasse 1 nicht ein, Schulbücher B und D behandeln den Zahlenstrahl explizit.

Bezüglich des ersten Aspekts haben wir Mehrebenenanalysen gerechnet, um der Tatsache Rechnung zu tragen, dass die Kinder der geklumpten Stichprobe nicht unabhängig voneinander sind, sondern in Klassen gemeinsam unterrichtet werden. Neben dem Effekt der didaktisch-methodischen Strukturierung des Schulbuchs auf die Schülerleistung wurde der Effekt der Lehrerqualifikation (fachfremd unterrichtend oder nicht) sowie die Interaktion dieser beiden Effekte analysiert. Als abhängige Variablen sind hier Rasch-skalierte Werte aus Tests zum prozeduralen und konzeptuellen arithmetischen Wissen (jeweils zum Ende der Schuljahre 1 und 2) zum Einsatz gekommen. Als Kontrollvariablen wurden sowohl auf Level 1 (Schülerinnen und Schüler) als auch aggregiert auf Level 2 (Klasse) das mathematische Vorwissen, die Lernvoraussetzungen im Bereich Sprache sowie die Intelligenz (jeweils gemessen zu Beginn der 1. Klasse) berücksichtigt.

Bezüglich des zweiten Aspekts (Zahlenstrahl als Darstellung des ordinalen Zahlaspekts) haben wir als abhängige Variable Rasch-skalierte Werte aus einem Test verwendet, der in der zweiten Hälfte des ersten Schuljahres durchgeführt wurde. Der Test bestand aus vier Items zur Identifizierung von

Zahlen am vollständig strukturierten Zahlenstrahl sowie vier Items zur Lokalisation von Zahlen auf dem unstrukturierten Zahlenstrahl. Zusätzlich lagen uns Angaben der Lehrkräfte vor, wie häufig sie derartige Aufgaben zum Zahlenstrahl zum Zeitpunkt des Tests bereits im Unterricht behandelt hatten, so dass wir die Mediation *Schulbuch* → *Unterrichtsangebot* → *Schülerleistungen* überprüfen konnten. Dafür haben wir ein 2-2-1-Mehrebenen-Mediations-Strukturgleichungsmodell gerechnet (Preacher, Zyphur & Zhang 2010). Auch hier wurden die oben genannten Kontrollvariablen und die Qualifikation der Lehrkraft einbezogen.

Ergebnisse

Es zeigte sich, dass im ersten Schuljahr die Lehrerqualifikation sowie die didaktisch-methodische Strukturierung des Schulbuchs keinen signifikanten Einfluss auf das prozedurale und konzeptuelle arithmetische Wissen der Schülerinnen und Schüler hatten. Eine Interaktion der beiden Variablen wurde signifikant: Die Kombination fachfremd unterrichtende Lehrkräfte mit Schulbuch D wirkte sich negativ auf das prozedurale Wissen aus.

Im zweiten Schuljahr dagegen hatte das Schulbuch D (unabhängig von der Lehrerqualifikation) einen signifikant negativen Einfluss sowohl auf das prozedurale als auch auf das konzeptuelle Wissen der Schülerinnen und Schüler. Der Einfluss ist stärker für das konzeptuelle Wissen. Ein Einfluss der Lehrerqualifikation oder ein Interaktionseffekt zeigten sich hier nicht.

Im Mediationsmodell zum Umgang mit dem Zahlenstrahl sind sowohl die direkten Effekte *Schulbuch* → *Unterrichtsangebot* und *Unterrichtsangebot* → *Schülerleistungen* signifikant geworden als auch der indirekte Effekt *Schulbuch* → *Unterrichtsangebot* → *Schülerleistungen* (siehe Abb. 1). Auch hier zeigte sich kein Einfluss der Lehrerqualifikation.

Zusammenfassung und Ausblick

Mit unseren Analysen konnten wir nachweisen, dass ein Zusammenhang besteht zwischen der didaktisch-methodischen Strukturierung des Schulbuchs und dem prozeduralen und konzeptuellen Wissen von Schülerinnen und Schülern am Ende der 2. Klasse. Dass der Einfluss für das konzeptuelle Wissen stärker ist als für das prozedurale Wissen, liegt vermutlich daran, dass bei der von Schulbuch D nahegelegten Vorgehensweise vor allem Rechenfertigkeiten geübt werden und weniger das Verständnis. Aber selbst beim prozeduralen Wissen hatte das Schulbuch D einen negativen Effekt auf die Schülerleistungen.

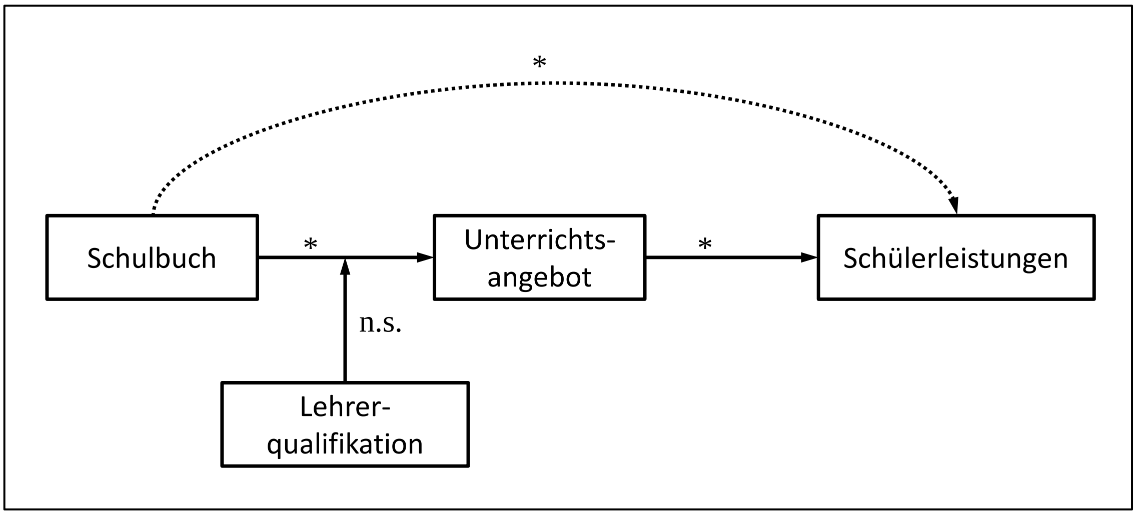


Abbildung 17: Mediationsmodell; der gestrichelte Pfeil repräsentiert den indirekten Effekt

Am Beispiel des Zahlenstrahls konnten wir die Mediation *Schulbuch* → *Unterrichtsangebot* → *Schülerleistungen* nachweisen (siehe Abb. 1). Ein Einfluss der Lehrerqualifikation zeigte sich hier jedoch nicht.

Ergänzend zur bisherigen Forschung konnten wir den Einfluss des Schulbuchs längsschnittlich nachweisen und die in Fallstudien aufgezeigte Mediation auch auf quantitativer Ebene belegen. Wünschenswert wäre, die betrachteten Merkmale feiner aufzulösen, etwa durch eine mathematikdidaktische Bewertung von Schulbüchern, den Umgang von Lehrkräften mit den Schulbüchern oder den Einbezug des Professionswissen der Lehrkräfte.

Literatur

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 International Results in Mathematics*. Chestnut Hill (USA): Boston College.

Preacher, K. J., Zyphur, M. J., & Zhang, Z. (2010). A general multilevel SEM framework for assessing multilevel mediation. *Psychological Methods*, *15*, 209-233.

Schmidt, W. H., Curtis, C. M., Houang, R. T., Wang, H. C., Wiley, D. E., Cogen, L. S., et al. (2001). *Why schools matter: A crossnational comparison of curriculum and learning*. San Francisco (USA): Jossey-Bass.

Törnroos, J. (2005). Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Studies in Educational Evaluation*, 31, 315-327.

Van Steenbrugge, H., Valcke, M. & Desoete, A. (2013). Teachers' views of mathematics textbook series in Flanders: Does it (not) matter which mathematics textbook series schools choose? *Journal of Curriculum Studies*, *45*(3), 322-353.

Engelbert NIEHAUS, Melanie PLATZ, Miriam KRIEGER, Kathrin WINTER; Landau , Flensburg

Elektronische Beweise in der Lehre

In der Mathematikdidaktik spielt die Vermittlung von Argumentationskompetenzen eine große Rolle. Diese bilden die Basis für das in höheren Klassenstufen in unterschiedlichen Kontexten thematisierte Beweisen mathematischer Aussagen und Zusammenhänge. Um einerseits Lehramtsstudierende beim Erwerb von Argumentationskompetenzen zu unterstützen und um andererseits Schüler/innen altersadäquate Argumentationskompetenzen vermitteln zu können, werden webbasierte Ansätze zur Umsetzung von Distraktoren in E-Beweis-Systemen analysiert.

1. Zielsetzung der elektronischen Beweise

Ausgehend von ersten Tests in Übungen und e-Klausuren auf Basis von ILIAS im Masterstudiengang Lehramt Mathematik wurde die Beweisumgebung weiterentwickelt, damit diese sowohl offline ohne Server im Browser als auch online in iMathAS lauffähig ist (iMathAS 2016). iMathAS wurde dabei für den Übungsbetrieb und die e-Klausuren verwendet. Das zunächst eingesetzte elektronische Prüfungssystem ILIAS an der Universität Koblenz-Landau hatte Schwächen (IWM Koblenz 2011) im Bereich der Darstellung von mathematischen Formeln und der automatisierten Bewertung von algebraischen Termen, die nicht in beliebiger Form präsentierte Terme als korrekt interpretiert. Ferner bezog sich die Nutzung von Beweispuzzlen lediglich auf eine Standard-e-Klausurumgebung ohne verfügbare Methoden zur automatischen Beweisüberprüfung im Sinne von Adams u. a. (1999). Die allgemeine Motivation zum Einsatz von e-Klausuren findet man z.B. bei Wetter (2010). Um auch die diagnostischen Möglichkeiten und Grenzen einer e-Beweisumgebung untersuchen zu können, wurde die Offline-Version implementiert (Platz et al. 2016), sodass die im Browser generierten Daten unabhängig von iMathAS gespeichert und gezielt mit Nutzereinverständnis an einen ausgewählten Server zur Analyse gesendet werden können. Ein e-Beweis wird als Zwischenstufe zwischen der reinen Beweisrezeption aus einem Lehrbuch und einem eigenständigen Papier&Bleistift-Beweis betrachtet. Zielsetzung war es, die Implementierung von elektronischen Beweisen über die e-Klausuren und Online-Übungen hinaus zu einem Analyseinstrument für Argumentationskompetenzen in der Lehre einsetzen zu können .

2. Umsetzung der e-Beweis-Systeme als Analyseinstrument

Durch die Erweiterung kann man nun die vollständige Struktur des Beweisprozesses der Lernenden zu jedem Zeitpunkt vollständig als Zustand in einer

XML-Datei speichern (XML-eXtensible Markup Language) und jeder gespeicherte Zustand kann wieder in der Beweisumgebung rekonstruiert werden. Dies liefert die Grundvoraussetzung um Sackgassen und Zwischenschritte bei der Beweisentwicklung der Lernenden einer fachdidaktischen Analyse unterziehen zu können. Die Umsetzung der e-Beweis-Systeme ist ein Beweispuzzle, dem eine fachdidaktische Fehleranalyse vorausgeht. Im Allgemeinen müssen die Lernenden m Fragmente eines Beweises auf p Positionen mit$p \leq m$verteilen und jede Verbindung von je zwei Fragmenten(s_k, s_{k+1})aus einer Menge von gültigen Gesetzen und bereits bewiesenen Sätzen begründen. Aus dieser Menge der Begründungen $B := \{b_1, \dots, b_g\}$müssen die Lernenden für jeden Beweisschritt(s_k, s_{k+1})also die Begründung auswählen, die einen einzelnen Beweisschritt erklären. Die Begründungen der Lernenden (z.B.$\{b_1, b_{3,} b_7\}$) für einen Beweisschritt(s_k, s_{k+1})werden mit den korrekten Begründungen zu (s_k, s_{k+1})verglichen. Begründungen, die der Lernende fälschlicherweise nicht angegeben oder falsche Begründungen, die der Lernende angegeben hat, werden für die Analyse der Beweiskompetenzen des Lerners und zur Bewertung von Distraktoren verwendet. Aus der fachdidaktischen Analyse der Beweiskompetenzen von Lernenden auf Papier werden die Distraktoren entwickelt, die typische Fehler in der Argumentation als Beweisoptionen aufgreifen. Distraktoren dienen als Analysewerkzeug von Argumentationskompetenzen und zur späteren Entwicklung eines Hilfesystems für die Verbesserung von Argumentationskompetenzen. Ferner kann durch die Distraktoren der Aufbau der Beweissequenz durch das reine "Aussehen" der Beweisfragmente ohne inhaltliches und logisches Verständnis für den Lerner erschwert werden um so tatsächlich Beweiskompetenzen zu schulen. Im einfachsten Fall bestehen die zur Auswahl angebotenen *n* Beweisschritte$S := \{s_1, \dots, s_n\}$lediglich aus den Beweisfragmenten eines korrekten Beweisweges (ohne Distraktoren). Die Beweisfragmente können auch die Möglichkeit von Beweisalternativen vorsehen. Dann werden die Lösungen der Lernenden mit einem Lösungsgraphen aus unterschiedlichen Beweisalternativen verglichen und automatisch analysiert. Des weiteren besteht die Möglichkeit, dass man Lücken in einem Beweis lässt, die als editierbare Beweisfragmente angeboten werden. Damit werden die Freiheitsgrade in Richtung eines reinen Papierbeweises ohne Angabe von Beweisfragmenten erhöht. Diese editierbaren Beweisfragmente müssen nicht leer sein, sondern können bereits Textelemente in ASCII-Math (ASCII-Math 2016) enthalten, die Eingabe der mathematischen Formeln in der Syntax erleichtern.

3. Testumgebung für Argumentationskompetenzen

Der Unterschied zwischen elektronischen Beweisen und Arbeitsblättern, die ausgedruckte Beweisfragmente enthalten, ist die Möglichkeit der Randomisierung von Beweisfragmenten in der Aufgabenstellung, die das e-Beweis-

System ermöglicht. Diese Randomisierung der Beweisfragmente war bereits in der ersten verwendeten e-Klausurumgebungen ILIAS möglich (ILIAS Society 2013). Allerdings lässt eine e-Klausuraufgabe in ILIAS nur eine korrekte Überprüfung der Reihenfolge der Beweisfragmente zu und nicht die jeweilige Begründung der Beweisschritte aus einer Menge von gegebenen Begründungen. Ferner war die Mischung von gegebenen Beweisfragmenten und editierbaren Beweisfragmenten nicht möglich. Bei längeren Beweissequenzen konnten auch keine Vorschläge als Hilfen für den nächsten Beweisschritt angeboten werden, um die Komplexität der Beweise und die Auswahl der Distraktoren zu steuern. Diese Optionen konnten nur nach Wechsel zu dem speziell für die Mathematik entwickelten Übungssystem iMathAS implementiert werden (Lipmann, 2013). Dieses Vorgehen war auch notwendig, damit während der Entstehung eines Beweises nicht nur die Lösungen abgespeichert und bewerteten werden können, sondern auch die Beweisheuristik selbst ggf. durch das Speichern von Zwischenzuständen mit Sackgassen und Revision von Beweisfragmenten durch die Lernenden einer späteren fachdidaktischen Analyse unterzogen werden können. Im Wesentlichen werden durch die aktuelle Implementierung erst die Voraussetzungen für die Kontrolle der Freiheitsgrade für die e-Beweisumgebungen und die fachdidaktische Argumentationskompetenzen mit semi-automatischer Bewertung gegeben. Die fachdidaktische Qualität von technischen Lösungen ist natürlich nicht vergleichbar mit einer manuellen Bewertung und Kommentierung eines Papierbeweises. Eine technische Lösung ermöglicht ein größeres n für die fachdidaktische Analyse der Beweiskompetenzen in kontrollierbaren technischen Umgebungen. Auf die fachdidaktische Analyse von Papierbeweisen wird man insbesondere für die Entwicklung von Distraktoren nicht verzichten können.

4. Arbeitsweise mit elektronischen Beweispuzzles

Durch die oben genannten Erweiterungen der Zuordnung zu Begründungen zu einzelnen Beweisschritten kann man das Problem als reine graphentheoretische Anordnungsaufgabe verstehen, bei der nicht nur eine Teilmenge der Beweisfragmente in eine logisch sinnvoll Abfolge gebracht werden muss, sondern die Verbindungen in einem Graphen werden mit Begründungen versehen (Attribuierung von gerichteten Kanten mit Begründungen). Ausgehend von einem *Startzustand* ist mit den gegebenen Voraussetzungen eine Beweislücke zu einem in der Aufgabenstellung genannten Zielzustand zu schließen (Interpolationsbeweis). Beweisfragmente sind dabei die möglichen Zustände in einem Beweisgraphen. Eine Verknüpfung zwischen Beweisfragmenten kann eine Äquivalenz oder Implikation zwischen Aussagen oder auch die Gleichheit oder Ungleichheit zwischen Termen sein. Jeder Verknüpfung zwischen Beweisfragmenten werden Begründungen zugeordnet, wie z.B. die Anwendung des Distributivgesetzes oder der Dreiecksungleichung als Begründung für eine Abschätzung eines Terms nach oben. Beweisschritte können einzeln auf den logischen Zusammenhang zwischen den Beweisschritten beurteilt werden und auf die Korrektheit bzgl. Begründungen überprüft werden. Ferner können optional weitere korrekte Begründungen von den Beweisautoren angegeben werden, die aber bei einem Fehlen im Beweis des Lerners nicht zu einem Punktabzug führen. Damit besteht die Möglichkeit für die Lehrenden, entsprechend zu den kommunizierten Konventionen für die Beweisdarstellung zwischen notwendigen und optionalen Begründungen zu unterscheiden und in der automatischen Bewertung diese zu berücksichtigen. Damit können die Kompetenzen bei der Begründung von Beweisschritten zusammen mit der Korrektheit der Beweisschritte automatisch identifiziert werden. In der graphentheoretischen Abbildung des Lösungsraumes kann ferner die Lücke zwischen Beweisschritten automatisch für die Bewertung der Beweisqualität berücksichtigt werden. Dies ist sowohl beim *Vorwärtsarbeiten* von dem Startzustand, als auch bei einem *Rückwärtsarbeiten*, in der e-Beweisumgebung implementiert (Stein 1986). Die aktuelle Version (Platz 2016) ist in einer Offline-Version verfügbar, die nur einen Webbrowser (z.B. Firefox) benötigt und dennoch eine automatische Bewertung und Unterstützung von elektronischen Beweispuzzeln für die Lernenden ermöglicht. Mit einem Offline-Autorensystem ist zugleich die Erstellung und Anpassung der e-Beweise an die Konventionen in der Lehre möglich, sowie die Einbeziehung von typischen Fehlern in der Fachdidaktik.

5. Literatur

Adams, A.A. u. a., 1999. Automated theorem proving in support of computer algebra: symbolic definite integration as a case study. In *Proceedings of the 1999 international symposium on Symbolic and algebraic computation*. S. 253–260.

Lipmann, David, 2013, Internet Mathematics Assessment System), Online-Portal für IMathAS Available at: http://www.imathas.com.

Platz, M., Krieger, M. Winter K., Niehaus, E. 2016. Online Portal zu Nutzung von e-Beweisen Available at: http://e-beweis.weebly.com.

ILIAS Society, 2013. ILIAS Open Source e-Learning. Available at: http://www.ilias.de.

Stein, M., 1986. *Beweisen. Eine Analyse des Beweisprozesses*.

Wetter, G., 2010. Unterstützung von E-Klausuren durch das Zentrum für Datenverarbeitung der Universität Mainz. *PIK - Praxis der Informationsverarbeitung und Kommunikation*, 33(1), S.45–55.

Renate NITSCH, Felix JOHLKE, Darmstadt

Stabilität von Fehlermustern bei funktionalen Zusammenhängen

Im Projekt CODI (COnceptual DIfficulties in the field of functional relationships) wurden konzeptuelle Lernschwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern im Bereich funktionaler Zusammenhänge erforscht. Hierzu wurde ein Diagnoseinstrument entwickelt, das typische Fehlermuster bei Darstellungswechseln zu linearen und quadratischen Funktionen erfasst. Dabei wurden der graphisch-algebraische (GA), der situativ-algebraische (SA) und der graphisch-situative (GS) Darstellungswechsel mit einbezogen. Im Haupttest konnten neun Fehlermuster identifiziert werden, die bei jeweils über 10% der Lernenden aufgetreten sind (Nitsch, 2015). Um die Stabilität dieser Fehlermuster zu überprüfen, wurde nach einem halben Jahr in einem Nachtest das Diagnoseinstrument erneut eingesetzt.

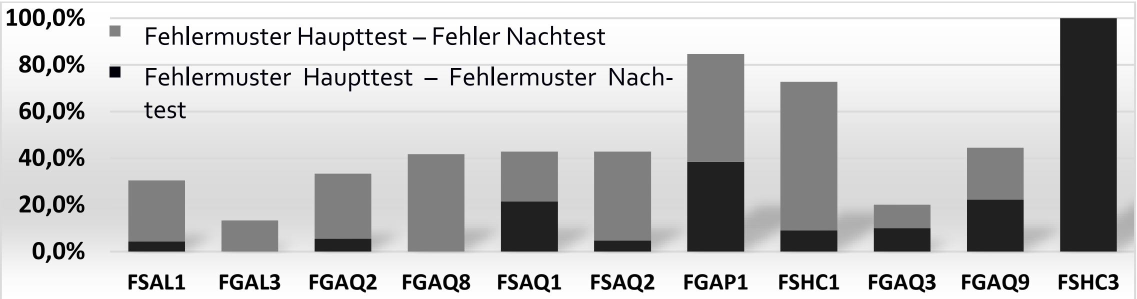
Design

Das Diagnoseinstrument wurde als Online-Tool entwickelt mit dem Ziel einer automatischen Auswertung, um es flexibel im Unterricht einsetzen zu können. Es kamen vor allem Multiple-Choice-Aufgaben zum Einsatz. Diese haben das Format „1 von 4“, wobei möglichst viele Distraktoren für typische systematische Fehler stehen. Es wurden mehrere strukturell gleiche Aufgaben entwickelt, um Fehlermuster aufdecken zu können. Nur dann, wenn sich ein systematischer Fehler über mehrere Aufgaben hinweg in einem konsistenten Fehlermuster zeigt, wird eine dahinterliegende Fehlvorstellung vermutet. Im Nachtest kamen 24 Aufgaben zum Einsatz. Die Stichprobe bestand aus 11 Klassen aus drei südhessischen Gymnasien mit insgesamt N=168 Schülerinnen und Schülern. Zwischen dem Haupttest und dem Nachtest fand ein Schuljahreswechsel statt. In beinahe allen Klassen wurden die Themen lineare und quadratische Funktionen kurz vor der Durchführung des Nachtests wiederholt.

Ergebnisse

Insgesamt haben sich die Lernenden bezüglich der Lösungshäufigkeiten der Aufgaben erwartungsgemäß stark verbessert. Lediglich im Bereich des graphisch-situativen Darstellungswechsels zeigt sich keine Verbesserung. Die Aufgaben zu diesem Darstellungswechsel fokussieren zwei typische Fehlvorstellungen in diesem Bereich, die sich als besonders stabil erweisen.

Eine Auswertung der Fehlermuster auf Schülerebene ergab, dass zwei Fehlermuster bei über 20% der Lernenden, die das Fehlermuster im Haupttest gezeigt haben, erneut auftraten. Wird ein weniger strenges Kriterium angelegt, indem der Anteil derjenigen Lernenden betrachtet wird, die das Fehlermuster im Haupttest gezeigt haben und den Fehler noch mindestens einmal im Nachtest zeigten, steigen die Prozentzahlen noch einmal deutlich an (siehe hellgrauer Bereich in Abb. 1). Drei Fehlermuster sind dabei besonders auffällig.



Darstellungswechsel	**Code**	**Fehlermuster**
SA - lineare Funktionen	FSAL1	Verwechslung von Steigung und y-Achsenabschnitt
GA - lineare Funktionen	FGAL3	Fokus auf Schnittpunkte mit den Achsen
GA - quadratische Funktionen	FGAQ2	Vorzeichenfehler bei Verschiebung in x-Richtung
GA - quadratische Funktionen	FGAQ8	Stauch- bzw. Streckfaktor a nicht berücksichtigt
SA - quadratische Funktionen	FSAQ1	Falsches Einsetzen der Koordinaten des Scheitelpunkts
SA - quadratische Funktionen	FSAQ2	Vorzeichenfehler bei Verschiebung in x-Richtung
GS - Fokus Fehlvorstellung	FGAP1	Graph-als-Bild-Fehler
GS - Fokus Fehlvorstellung	FSHC1	Slope-height-Fehler
GA - quadratische Funktionen	FGAQ3	Falsche Verwendung der Scheitelpunktskoordinaten
GA - quadratische Funktionen	FGAQ9	Vorzeichenfehler bei Verschiebung in x-Richtung
GS - Fokus Fehlvorstellung	FSHC3	Alternative Form des Graph-als-Bild-Fehlers

Abb. 1: Auswertung der Fehlermuster3

Der „Slope-height-Fehler“ (FSHC1) besteht darin, dass die Lernenden beim Vergleich verschiedener Geraden in einem Weg-Zeit-Diagramm zu einem bestimmten Zeitpunkt diejenige Gerade auswählen, die an der Stelle den maximalen Funktionswert besitzt (Fahrzeug 2 in Abb. 2). Auf die Steigung der Geraden achten die Lernenden dabei nicht, weshalb man auch von einer Verwechslung von Steigung und Höhe spricht. Im Haupttest des Projekts CODI hat sich gezeigt, dass in einer weiteren Aufgabe, in welcher nicht nach einem Zeitpunkt, sondern einem Zeitraum gefragt wurde, die meisten Lernenden die korrekte Antwort geben können. Die globale Unterscheidung zwischen der Höhe (also des Funktionswerts) und der Steigung einer (hier: linearen)

[3] Bei den ersten acht Fehlermustern handelt es sich um diejenigen Fehlermuster, die im Haupttest besonders häufig aufgetreten sind, bei den anderen drei Fehlermustern handelt es sich um Fehlermuster, die zwar im Haupttest nicht besonders häufig aufgetreten sind, sich aber im Nachtest dennoch als besonders stabil erwiesen.

Funktion scheint den meisten Lernenden möglich. Problematisch scheint allerdings die Bestimmung der Steigung an einem Punkt. Es handelt sich hierbei um eine epistemologische Hürde, die ein Großteil der Schülerinnen und Schüler im Laufe des Lernprozesses überwinden muss. Dies wird auch durch den Nachtest bestätigt. Während 43% der Schülerinnen und Schüler, die den Slope-height-Fehler im Haupttest gezeigt haben, ihn im Nachtest erneut zeigen, haben 45% der Schülerinnen und Schüler im Nachtest das korrekte Ergebnis angeben können und damit die Hürde überwunden.

Welches der vier Fahrzeuge ist zum Zeitpunkt $t = 5$ am schnellsten?

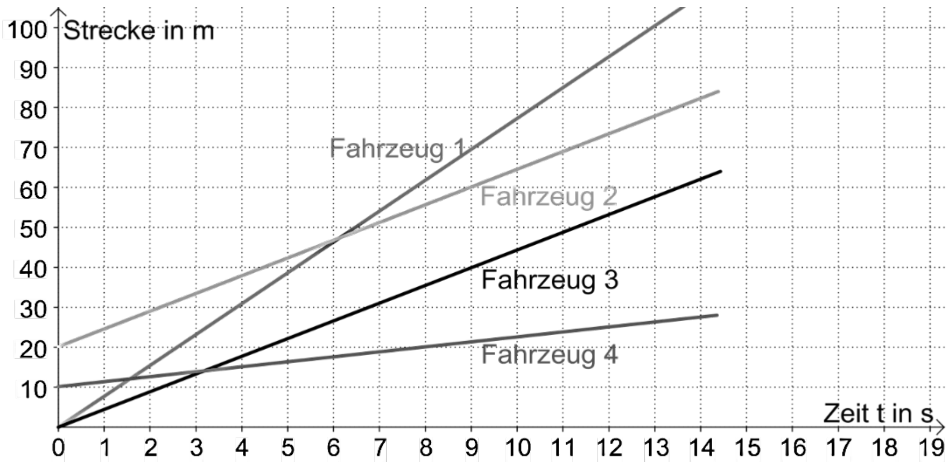


Abb. 2: Aufgabe zum Slope-height-Fehler

Der Graph-als-Bild-Fehler (FGAP1) entsteht aus der Interpretation eines Graphen als reales Situationsabbild. So wird beispielsweise in der Skifahreraufgabe (Nitsch, 2015), in welcher nach dem Geschwindigkeitsverlauf eines Skifahrers gefragt ist, derjenige Graph ausgewählt, der dem Höhenprofil des Hangs am ähnlichsten ist. Durch die Auswertung der diagnostischen Interviews wurde deutlich, dass das Fehlermuster FSHC3, das 100% der Lernenden, die es im Haupttest zeigten, auch im Nachtest gezeigt haben, auch auf diese Fehlvorstellung zurückführbar ist. In der Aufgabe zum Slope-height-Fehler entspricht dieses Fehlermuster der Antwort Fahrzeug 4. Diejenigen Lernenden, die diese Antwortalternative gewählt haben, deuteten die Situation folgendermaßen: „Ich denke Läufer 4 ist am schnellsten, da er am ebensten ist und somit die schnellste Geschwindigkeit laufen kann, da es bergauf einfach langsamer geht.“ Beim Graph-als-Bild-Fehler handelt es sich demnach um ein besonders stabiles Phänomen.

Neben der Stabilität der Fehlermuster wurde das Antwortverhalten derjenigen Schülerinnen und Schüler analysiert, die im Haupttest korrekt antworteten und im Nachtest ein Fehlermuster zeigten (sich also demnach verschlechterten). Dies war besonders häufig im Bereich des situativ-algebraischen Darstellungswechsels bei linearen Funktionen (64,6%) und beim graphisch-situativen Darstellungswechsel bei den Aufgaben zum Graph-als-Bild-Fehler (43,4%) der Fall. In diesen Bereichen handelt es sich um eine besonders intuitive Form der Fehlermuster (Wittmann, 2009). Einen Erklärungsansatz liefert die Conceptual Change Theorie (Vosniadou, 2008). Demnach werden die intuitiven Vorstellungen nicht von den mathematisch korrekten Vorstellungen abgelöst, sondern bestehen simultan. Die Schülerinnen und Schüler müssen lernen, wann sie welche Vorstellung aktivieren. Hier liegt die Vermutung nahe, dass die Lernenden die Vorstellungen nicht ausreichend miteinander verknüpft haben und sich die intuitiven Vorstellungen nach einem längeren Zeitraum als robuster erweist.

Die Auswertung der Fehlermuster hat neben der Identifikation besonders stabiler Fehlermuster auch ergeben, dass einige Fehlermuster nicht erneut auftraten. Beispielsweise bestand ein im Haupttest besonders typisches Fehlermuster (FGAL3) darin, dass die Lernenden statt der Steigung den x-Achsenabschnitt als Parameter m in die Funktionsgleichung der linearen Funktion y=mx+b einsetzten (26%). Dieser Fehler ist als Fehlermuster im Nachtest nicht mehr aufgetreten, sodass hier eine Strategie zugrunde zu liegen scheint, die sich nicht als stabil erweist.

Ausblick

In einem nächsten Schritt sollen unter Berücksichtigung des Conceptual Change Ansatzes Interventionsmaßnahmen entwickelt und erprobt werden, die eine individuelle Förderung und Überwindung der diagnostizierten Fehlvorstellungen zum Ziel haben. Das entwickelte Diagnoseinstrument inkl. einer vorläufigen Feedbackversion lässt sich unter www.codi-test.de abrufen.

Literatur

Nitsch, Renate (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge. Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Vosniadou, Stella (2008), Hrsg. *International Handbook of Resarch von Conceptual Change.* 1. Aufl. Educational Psychology Handbook Series. New York und London: Routledge, Taylor & Francis.

Wittmann, Gerald (2012). Zur Konsistenz von Fehlermustern in der Bruchrechnung. Ergebnisse einer empirischen Studie. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012 Digital. Vorträge auf der 46. Tagung für Didaktik der Mathematik 2*. S. 945-948. URL: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2012/files/BzMU12_0027_Wittmann.pdf

Anna NOLL, Jürgen ROTH, Markus SCHOLZ, Landau in der Pfalz

Wie sollten Lernmaterialien in Inklusionsklassen gestaltet sein? – Instruktionsmaterialien und Arbeitsprozesse

Inklusion ist aktuell in der Bildungsadministration in aller Munde und Forschungsdesiderate sind in diesem Umfeld vielfältig. Das Dissertationsprojekt, das hier vorgestellt wird, versucht einen Beitrag zur Aufklärung der Frage zu leisten, wie Lernmaterialien in Inklusionsklassen gestaltet sein sollten. Konkret geht es um die Frage wie Aufgaben mit Hilfe von Methoden der Textvereinfachung so gestaltet werden können, dass möglichst alle Lernenden die Aufgaben erfassen und mit der Bearbeitung beginnen können. Die Aufgaben der geplanten empirischen Studie beziehen sich inhaltlich auf die Einführung von Bruchzahlen mit Hilfe des Flächenmodells. Gegenständliche Materialien in Form von Puzzleteilen werden dabei unterstützend zum Einsatz kommen. Da die Studie in Rheinland-Pfalz durchgeführt wird, wird zunächst die Umsetzung von Inklusion in rheinland-pfälzischen Schulen erläutert. Eine überblicksartige Darstellung des theoretischen Hintergrunds sowie des geplanten methodischen Vorgehens folgt. Anhand der oben genannten Aufgaben werden schließlich bestimmte Methoden der Textvereinfachung exemplarische verdeutlicht.

Inklusion in Rheinland-Pfalz

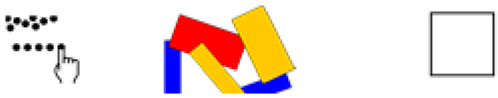
Die Überzeugung, dass die Inklusion von Kindern mit Beeinträchtigung in Regelschulen eine Bereicherung darstellt, wächst in unserer Gesellschaft. Eltern, Pädagogen und Bildungspolitiker begründen dies u.a. damit, dass Kinder mit und ohne Beeinträchtigung so auf ein gemeinsames Leben vorbereitet werden können (vgl. Bundschuh 2012). Die Möglichkeit des gemeinsamen Unterrichts von Kindern und Jugendlichen mit und ohne sonderpädagogischen Förderbedarf ist in Rheinland-Pfalz im Schulgesetz verankert (Gesetzesnovellierung vom 23. Juli 2014 zit. n. Laubenstein et al. 2015). Sie wird weitestgehend durch Schwerpunktschulen realisiert (Laubenstein et al. 2015). Der Anstieg der Schwerpunktschulen von 30 im Jahre 2001/2002 auf 262 im Jahre 2013/2014 zeigt, dass die Möglichkeit der gemeinsamen Unterrichtung immer häufiger genutzt wird (ebd.). Von den 3303 SchülerInnen mit sonderpädagogischem Förderbedarf, die im Jahr 2011/2012 eine Schwerpunktschule besuchten, wiesen 2826 SchülerInnen, das sind 85%, einen sonderpädagogischen Förderbedarf im Schwerpunkt Lernen auf. Aus diesem Grund werden SchülerInnen mit dem Förderschwerpunkt Lernen bei der geplanten Studie im Mittelpunkt stehen.

Theoretischer Hintergrund

Ein Leitprinzip von Inklusion besagt, dass „Schulen alle Kinder, unabhängig von ihren physischen, intellektuellen, sozialen, emotionalen, sprachlichen oder anderen Fähigkeiten aufnehmen sollen“ (Salamanca-Erklärung zit. n. Bundschuh 2012). Um diese Zielsetzung verwirklichen zu können müssen jedoch zunächst die pädagogischen Rahmenbedingungen angepasst werden. Ein wesentlicher Schritt in diese Richtung besteht darin möglichst vielen SchülerInnen die Lesbarkeit der Arbeitsaufträge zu ermöglichen. Dies kann z. B. durch Textvereinfachungen im Sinne der *Regeln leichter Sprache* (vgl. http://www.leichtesprache.org/) geschehen. Die Regeln leichter Sprache beziehen sich auf die Wort-, Satz-, Text- und Gestaltungsebene und besagen beispielsweise, dass bei Aufgabenstellungen eine persönliche Ansprache angestrebt und Fragen vermieden werden sollten. Die Arbeitsanweisung „Umkreise die größere Bruchzahl“ würde dementsprechend der Frage „Welche Bruchzahl ist größer?“ vorgezogen werden. Die Verknüpfung von Texten mit Piktogrammen stellt eine andere Option dar, um den SchülerInnen das Lesen der Arbeitsaufträge zu erleichtern. Ein Piktogramm kann als ein graphisches Bild, das ein bestimmtes Konzept vermittelt, definiert werden (vgl. Detheridge & Detheridge 2002). Es gibt verschiedene Kategorien von Piktogrammen. Während transparente und transluzente Piktogramme Verbindungen zu dem darzustellenden Objekt besitzen, die sich lediglich in ihrer Offensichtlichkeit unterscheiden, weisen abstrakte Piktogramme keine Beziehung zum dargestellten Objekt auf (vgl. Poncelas & Murphy 2007). In der vorliegenden Studie werden die Schlüsselworte der Arbeitsaufträge mit transparenten und transluzenten Piktogrammen versehen, da diese als besonders lernförderlich gelten. Bezüglich des Einflusses von Piktogrammen auf das Textverständnis gibt es nur wenige empirisch belastbare Befunde. Dennoch wird eine positive Wirkung angenommen. Einerseits sprechen dafür theoretische Überlegungen, da man davon ausgeht, dass Piktogramme die Leseflüssigkeit von komplexen und unbekannten Wörtern erhöhen (vgl. Poncelas & Murphy 2007). Andererseits zeigt eine empirische Untersuchung von Frenkel & Bourdin (2009), dass viele Menschen mit Down Syndrom ein besser ausgeprägtes visuelles als auditives Gedächtnis besitzen. Die wenigen vorhandenen Studien, welche die Wirkung von Piktogrammen auf das Textverständnis untersuchen, sind jedoch nicht eindeutig (vgl. Poncelas & Murphy 2007; Jones, Long & Finley 2007).

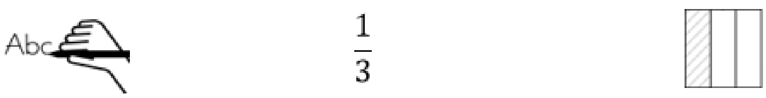
Methodisches Vorgehen

Die Durchführung einer qualitativen Vorstudie (September 2016) sowie einer quantitativen Hauptstudie (August/September 2017) ist geplant. Im Rahmen der Vorstudie werden die bereits erwähnten Aufgaben von einzelnen SchülerInnen bearbeitet werden. Zur Erleichterung der Analyse der Aufgaben werden die SchülerInnen während der Bearbeitung videographiert. An die Bearbeitungsphase wird sich ein Interview-Setting anschließen, mit dessen Hilfe das Vorgehen der SchülerInnen genauer untersucht werden soll. Mögliche Schwierigkeiten bei der Bearbeitung der Aufgaben sollen so deutlich werden. Mit Hilfe der Vorstudie soll analysiert werden, ob die Anwendung der Regeln leichter Sprache zu einem angemessenen Sprachniveau führt oder ob sich die SchülerInnen dadurch möglichweise irritiert fühlen. Des Weiteren wird untersucht, inwiefern der gewählte Piktogrammeinsatz, d.h. die Verwendung von Schlüsselwort-Piktogrammen sowie transparenten und transluzenten Piktogrammen, die Performanz der SchülerInnen beeinflusst. Im Rahmen der Vorstudie soll darüber hinaus die Notwendigkeit einer Schulung vor der Durchführung der Hauptstudie analysiert werden. Es besteht die Möglichkeit, dass die SchülerInnen über den Bedeutungsinhalt von Piktogramme informiert werden müssen, um diese effizient nutzen zu können (vgl. Jones, Long & Finley 2007). Im Rahmen der Vorstudien soll auch die Angemessenheit der Aufgaben genauer betrachtet werden. Diese werden folgendermaßen strukturiert sein: Es wird einen ersten Aufgabenkomplex geben, welcher sich auf die Handlungsebene bezieht und die Grundvorstellung *Teil eines Ganzen* (vgl. Malle 2004) fördert. Eine Aufgabe dieses Aufgabenkomplexes könnte wie folgt lauten:



Zähle die Puzzle-Teile in Quadrat A.

Nach der Bearbeitung dieses Aufgabenkomplexes schauen die SchülerInnen ein Video über Bruchzahlen, wodurch sie eine Einführung in das Thema Bruchzahlen erhalten. In diesem Video werden u.a. ausgearbeitete Lösungsbeispiele genutzt, die sich auf den zweiten Aufgabenkomplex beziehen. Eine Simulation wird ebenfalls zum Einsatz kommen. Es folgt die Bearbeitung des zweiten Aufgabenkomplexes in dem die SchülerInnen die Informationen aus dem Video nutzen, um komplexere Überlegungen zu Bruchzahlen anzustellen. Eine mögliche Aufgabe aus diesem Aufgabenkomplex könnte so aussehen:



Schreibe die fehlenden Bruchzahlen wie in Quadrat B auf.

Weitere Aufgaben dieses Aufgabenkomplexes beziehen sich auf das Vergleichen und Ordnen von Brüchen nach ihrer Größe. Durch dieses Aufgabendesign wird eine Analyse des Übergangs von Aufgabenkomplex 1 zu Aufgabenkomplex 2 möglich sein. Diese Schlüsselstelle soll Aufschluss darüber geben, ob die durchgeführten Vereinfachungen den Lernenden sowohl den Zugriff auf der Handlungsebene, als auch auf einer Ebene des Verständnisses ermöglichen.

Auf die Durchführung der Vorstudie wird eine Hauptstudie mit Experimental- und Kontrollgruppendesign folgen. Während sich die Experimentalgruppe mit einer vereinfachten Variante des ersten und zweiten Aufgabenkomplexes beschäftigen wird, wird die Kontrollgruppe die Aufgaben in einer nicht vereinfachten Variante bearbeiten. Es werden 100 SchülerInnen an der Hauptstudie teilnehmen. Diese Stichprobe wird sich, wie bereits erwähnt, aus SchülerInnen mit dem Förderschwerpunkt Lernen sowie SchülerInnen an Realschulen Plus zusammensetzen. Um vergleichbare Gruppen von SchülerInnen der Experimental- und der Kontrollgruppe zuzuweisen zu können, werden die Lesekompetenz, die Mathematikkompetenz sowie der IQ der SchülerInnen als Kontrollvariablen erhoben. Die Bearbeitung der Aufgaben (richtig/falsch) wird als Messgröße der Hauptstudie dienen.

Literatur

Bundschuh, K. (2012). System – Inklusion – Betroffene. Grenzen und Möglichkeiten. In C. Breyer et al. (Hrsg.), *Sonderpädagogik und Inklusion* (S. 101-114). Oberhausen: Athena-Verlag.

Detheridge, T., & Detheridge, M. (2013). *Literacy through symbols: Improving access for children and adults* (Second edition). London: Routledge

Frenkel, S. & Bourdin, B. (2009). Verbal, visual, and spatio-sequential short-term memory: assessment of the storage capacities of children and teenagers with Down's syndrome. *Journal of Intellectual Disability Research*, 53 (2), 152–160.

Jones, F. W., Long, K., & Finlay, W. M. L. (2007). Symbols can improve the reading comprehension of adults with learning disabilities. *Journal of Intellectual Disability Research*, 51(7), 545–550.

Laubenstein, D., Lindmeier, C., Guthöhrlein, K., & Scheer, D. (2015). *Auf dem Weg zur schulischen Inklusion: Empirische Befunde zum gemeinsamen Unterricht in rheinland-pfälzischen Schwerpunktschulen. Perspektiven sonderpädagogischer Forschung*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Mathematiklehren, 123*, 4-8

Poncelas, A. & Murphy, G. (2007). Accessible Information for People with Intellectual Disabilities. Do Symbols Really Help? *Journal of Applied Research in Intellectual Disabilities*, 20 (5), 466-474.

Edyta NOWINSKA, Osnabrück

Entwicklung eines schulfachübergreifenden hoch inferenten Ratingsystems zur reliablen Beurteilung metakognitiv diskursiver Unterrichtsqualität

Metastudien (u. a. Hattie, 2009) und Ergebnisse von Trainingsprogrammen zur Förderung metakognitiven Verhaltens (u.a. Mevarech et al., 2010) belegen positive Zusammenhänge zwischen Metakognition und Lernleistung. Doch die Frage, mit welchen Wirkmechanismen metakognitive Aktivitäten in Unterrichtsgesprächen das Lernverhalten und die Lernleistung beeinflussen, ist bisher zu wenig systematisch erforscht worden. Für diese Untersuchung bedarf es Beobachtungssysteme, mit denen sich Unterrichtsgespräche hinsichtlich ihres metakognitiven Gehalts analysieren und reliabel beurteilen lassen (Lingel et al., 2014, S. 73). Hier setzt das Forschungsvorhaben des DFG Projekts an, an dem die Universitäten Osnabrück und Kassel sowie das Deutsche Institut für Internationale Pädagogische Forschung beteiligt sind. Das Ziel des Projekts ist die Entwicklung eines fachübergreifend einsetzbaren, reliablen, hoch inferenten Ratingsystems zur *Erfassung* metakognitiver und diskursiver Aktivitäten der Lernenden und der Lehrkraft im Unterrichtsgespräch und darauf aufsetzend zur *Beurteilung* der metakognitiv diskursiven Qualität des gesamten Unterrichtsgesprächs. Es soll herausgearbeitet werden, wie viele Stunden und wie viele Rater notwendig wären, um die metakognitiv diskursive Unterrichtsqualität in einer Lehr-Lerngruppe reliabel beurteilen zu können. In einem späteren Schritt kann mit diesem Instrument der Zusammenhang zwischen metakognitiv diskursiver Unterrichtsqualität und Schülerleistung untersucht werden.

Im Folgenden werden Leitideen beschrieben, die der Entwicklung des Ratingsystems und der Organisation des Ratingverfahrens zugrunde liegen und sich bereits in der Raterschulung als nützlich erwiesen haben.

1. Zwei Schritte des Ratingverfahrens

Mit hoch inferenten Ratingsystemen ist es möglich, mehrere zu beurteilende Aspekte komplementär zu betrachten und in einem Urteil zu integrieren. Dadurch kann die Tiefenstruktur des Unterrichts besser erfasst werden. Der hohe Grad an den dafür notwendigen Schlussfolgerungen führt aber zu Schwierigkeiten hinsichtlich der Reliabilität (z. B. Praetorius et al., 2012). Um trotz dieser Komplexität reliable Urteile zu erhalten, wird der Beurteilung einer Unterrichtsszene ein *Kodierungsschritt* vorgeschaltet, bei dem der Rater sich für jeden Gesprächsbeitrag durch das Nennen eines Kodes aus einem Kategoriensystem (vgl. Cohors-Fresenborg et al., 2014) festlegen muss, wie er diesen lokalen Ausschnitt aus dem Unterricht bezüglich metakognitiver und diskursiver Aktivitäten interpretiert. Für die im zweiten

Schritt folgende Beurteilung der gesamten Szene steht dem Rater eine graphische Darstellung (gen. Kategorienstrahl) mit den gesetzten Kodes zur Verfügung. Der Kategorienstrahl kann als eine abstrakte (vom Inhalt der Unterrichtsszene abgelöste) Darstellung des metakognitiven und diskursiven Gehalts des Unterrichtsgesprächs aufgefasst werden. Trotzdem erlaubt er einen Überblick über die Art (z. B. Argumentationskontrolle) und Qualität (Präzision, Bezug auf das zur Diskussion Stehende, aber auch unkommentierter Wechsel von Bezugspunkten oder nur vordergründig verstehbare Sätze) dieser Aktivitäten. Diese abstrakte Darstellung der Diskursprozesse hat sich als nützlich für die Analyse interaktiver Muster im Praktizieren metakognitiver und diskursiver Aktivitäten erwiesen. Davon ausgehend kann u. a. beurteilt werden, inwieweit eine Förderung dieser Aktivitäten der Lernenden im Fokus der Handlungen der Lehrperson ist. Der Kategorienstrahl, quantitative Aspekte der erfassten Aktivitäten und das Video mit der Interpretation des Raters bilden die Grundlage für seine anschließende Beurteilung der metakognitiv diskursiven Qualität des Unterrichtsgesprächs.

2. Leitfragen zur Beurteilung der metakognitiv diskursiven Unterrichtsqualität

Die Beurteilung erfolgt in sieben Dimensionen. Jede ist mit einer *Leitfrage* angeleitet, um die Aufmerksamkeit des Raters auf die zentralen Merkmale des Unterrichtsgesprächs zu fokussieren. Zu jeder Leitfrage wurde eine Skala mit ausführlich dargelegten Antwortmöglichkeiten formuliert. Aus diesen muss der Rater die auswählen, die die Merkmale der analysierten Szene am besten beschreibt. Die Auswahl muss er schriftlich begründen.

Die 1. Leitfrage betrifft das Ausmaß, in dem von den Lernenden und von der Lehrkraft metakognitive Aktivitäten mit erkennbarem Bemühen um eine elaborierte Auseinandersetzung mit den anstehenden Inhalten praktiziert werden. Die Abstufung der Antwortmöglichkeiten orientiert sich daran, inwieweit die Lernenden selbstständig (ohne direkte Aufforderung seitens der Lehrkraft) solche Aktivitäten praktizieren bzw. dazu angeleitet werden. Die ausgewählte Antwort gibt Hinweise bezüglich des Potenzials der ausgeübten metakognitiven Aktivitäten für die Förderung der metakognitiven *Kompetenzen* der Lernenden.

Die 2. Leitfrage bezieht sich auf die mit den metakognitiven Aktivitäten erfassten Begründungen. Im Fokus steht nicht die Anzahl von Begründungen, sondern das Bemühen um eine argumentative Auseinandersetzung. Die Abstufung der Antwortmöglichkeiten orientiert sich daran, inwieweit es erkennbar ist, dass Begründungen in Kombination mit metakognitiven Aktivitäten zu der etablierten Unterrichtskultur gehören. Es wird beurteilt, ob das Formulieren elaborierter, präziser und argumentativ weiterführender Äußerungen angestrebt, wertgeschätzt oder aber vernachlässigt wird. Dazu gehört auch ein Urteil darüber, ob *scheinbare Begründungen* – die ein Indiz für Verständnisschwierigkeiten oder fehlenden Willen zum vertieften Nachdenken sein können – geahndet und korrigiert oder ignoriert werden.

Mit der 3. Leitfrage wird der Stellenwert der metakognitiven Schüler- und Lehreraktivitäten für Erkenntnisprozesse und Einsichten bezüglich eines verständigen Umgangs mit den anstehenden fachspezifischen Inhalten fokussiert. Die Abstufung der Antwortmöglichkeiten orientiert sich danach, in welchem Ausmaß solche Erkenntnisse bei Einzelnen oder im Diskurs mit mehreren Beteiligen erkennbar sind. Anders als in den Leitfragen 1 und 2 wird hier das Lernpotenzial der erfassten Aktivitäten für das Verstehen der anstehenden Inhalte beurteilt.

Ein Lernprozess kann nur dann zum verständigen Umgang mit Begriffen, Vorgehensweisen und Methoden beitragen, wenn über diese präzise reflektiert wird und wenn ihre Benutzung präzise kontrolliert wird (Cohors-Fresenborg und Kaune, 2007, S.11). Diese Präzision ist für den Aufbau tragfähiger Vorstellungen notwendig und dafür muss sie sich nicht nur in einzelnen Beiträgen zeigen, sondern auch auf der Ebene des gesamten Unterrichtsgesprächs, z. B. durch das Herausarbeiten von Gemeinsamkeiten und Unterschieden in den genannten Argumenten, nahegelegten (Fehl-)-Vorstellungen, angenommenen Positionen und Perspektiven. Die 4. Leitfrage nimmt diese Präzision in den Fokus. Es soll beurteilt werden, inwieweit eine diskursive, an den Denkprozessen der Lernenden orientierte Auseinandersetzung angestrebt wird. Dazu gehört auch ein Urteil über Konsequenzen aus dem Fehlen diskursiver Aktivitäten, die notwendig wären, um Vorstellungen der Lernenden oder Unterschiede zwischen Dargestelltem und Gemeintem einer Analyse zugänglich zu machen. Komplementär dazu wird in der 5. Leitfrage beurteilt, inwieweit negative Diskursivität (d.h. Verstöße gegen die Diskursivität) sich negativ auf das Unterrichtsgespräch, das Verstehen der anstehenden Inhalte und die adäquate Benutzung der Fachsprache auswirkt und inwieweit versucht wird, solchen Konsequenzen entgegenzuwirken.

Der soziale Kontext des Unterrichts, der durch eine Vielfalt von Lernenden, ihres Vorwissens, ihrer Vorstellungen, Erfahrungen und Überzeugungen mitbestimmt ist, ist für den Prozess der gemeinsamen Wissenskonstruktion von Bedeutung. Diese Vielfalt trägt nicht automatisch zum kumulativen Aufbau von Wissen des Einzelnen bei und kann erst dann für Lernprozesse konstruktiv genutzt werden, wenn die daraus resultierenden Unterschiede in den Denkweisen einzelner Schüler in einem diskursiven Austausch von Argumenten wahrnehmbar gemacht und ausdiskutiert werden. Inwieweit dies gelingt, wird in den Dimensionen 6 und 7 beurteilt. Mithilfe der 6. Leitfrage wird beurteilt, ob im Unterrichtsgespräch diskursive, argumentativ stringent geführte „Debatten“ angestrebt werden, die in der Abstufung von sehr kurzen Gesprächen unter den Lernenden (ohne Einbringung seitens der Lehrkraft) bis hin zu längerer Auseinandersetzung unter ihnen variieren können. Eine Zwischenstufe stellt eine von der Lehrkraft geleitete „Debatte“ dar, in der die Lehrperson mit ihren Beiträgen und Interventionen zur argumentativen und gedanklichen Klarheit des Unterrichtsgesprächs beiträgt. In der 7. Leitfrage wird hingegen beurteilt, inwieweit sich im Unterrichtsgespräch metakognitive und diskursive Aktivitäten erkennen lassen, die zumindest Ansätze für eine gedankliche oder sprachliche Präzisierung (insbesondere unter Einbezug einer Metaebene) bei der Auseinandersetzung mit einer anspruchsvollen Fragestellung zeigen.

Die ersten Einsätze des Ratingsystems belegen, dass der Kodierungsschritt eine präzise und reliable Beurteilung der Tiefenstruktur des Unterrichts ermöglicht. Die Beurteilungen zeigen, dass Gespräche mit einem hohen Gehalt an Metakognition und Diskursivität diese nur selten als Basis für eine gemeinsame Wissenskonstruktion nutzen. Oft ist der hohe Gehalt ein Ausdruck einer nur scheinbaren „Schülerorientierung“ und fehlender diskursiver Orientierung an den Denkprozessen der Lernenden. Diese Beobachtung kann zur Klärung der mangelnden nachhaltigen Wirksamkeit von Trainingsprogrammen zur Förderung metakognitiven Lernverhaltens beitragen.

Literatur

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2007). *Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten beim schrittweise kontrollierten Argumentieren im Mathematikunterricht*. Arbeitsbericht Nr. 44. 2. überarbeitete Auflage. Osnabrück: FMD.

Cohors-Fresenborg, E., Kaune, C. & Zülsdorf-Kersting, M. (2014). *Klassifikation von metakognitiven und diskursiven Aktivitäten im Mathematik- und Geschichtsunterricht mit einem gemeinsamen Kategoriensystem*. Osnabrück: FMD.

Hattie, J. (2009): *Visible learning. Asynthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. New York: Routledge.

Lingel, K., Neuenhaus, N., Artelt, C. & Schneider, W. (2014). Der Einfluss des metakognitiven Wissens auf die Entwicklung der Mathematikleistung am Beginn der Sekundarstufe I. *Journal für Mathematikdidaktik*, 35(1), 49-77.

Mevarech, Z. R., Terkieltaub, S., Vinberger, T. & Nevet, V. (2010). The effects of metacognitive instruction on third and sixth graders solving word problems. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 42*(2), 195-203.

Praetorius, A.-K., Lenske, G. & Helmke, A. (2012). Observer ratings of instructional quality: Do they fulfill what they promise? *Learning and Instruction*, *22*(6), 387-400.

Hans Peter NUTZINGER, Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd

Wie viel Kreativität sehen Studierende in ihrem mathematischen Tun? – Nutzen der Interdisziplinarität zwischen Musik und Mathematik

Der in mehreren Studien belegte Zusammenhang zwischen den Einstellungen einer Lehrperson zu ihrem Fach und den Einstellungen der von dieser Person lernenden Schülerinnen und Schülern (unter vielen anderen TALIS 2009, Philipp 2007) veranlasste uns im Mai des Jahres 2015 zu einer eigenen Studie (Nutzinger 2016 i.P.) zu diesem Thema. Dabei war es vor allem das Forschungsergebnis von Lynn Newton (2013) von der Universität Durham, das uns dazu anregte, ihre Forschungsideen weiterzuverfolgen. Sie zeigte unter anderem, dass in der Wahrnehmung ihrer Studierenden eine Kluft zwischen den Einstellungen zu künstlerisch-musischen Fächern und mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern klafft. Die Mehrzahl der befragten Studierenden hielten Mathematik für ein völlig unkreatives Fach (Skalenwert 1 auf einer Skala von 0 bis 12). Musik hingegen hielten sie für sehr kreativ (Skalenwert 9). Das mag auf den ersten Blick kaum verwundern, auf den Zweiten drängt sich dem mathematikdidaktisch Schaffenden die Frage nach den Ursachen dieser Fehlvorstellungen auf. Warum wird eine in ihrer Genese durch und durch kreative Wissenschaft nicht als eine solche wahrgenommen?

Einstellungen verändern

In ihrer Studie aus dem Jahr 2013 beschreibt Lynn Newton die oben erwähnten Einstellungen der von ihr untersuchten Lehramtsstudierenden, Lehrerinnen und Lehren (n=49) wie folgt:

> *“The major conclusion is that these teachers hold the general notion that the arts (subjects like music and art) are creative while other ‘non-arts’ (subjects like science, mathematics or ICT) are not.” (Newton 2013, p.37)*

Im vergangenen Jahr konnte ich ähnliche Einstellungen bei Studierenden unserer Hochschule feststellen (Nutzinger 2016 i.p.).

So wenig dies überraschen mag, so unabdingbar wichtig ist es m.E. jedoch, diese Missvorstellungen sehr ernst zu nehmen und sie möglichst zu verändern oder zumindest positiv zu beeinflussen. Lehrerinnen und Lehrer, die ihrer Tätigkeit in der Überzeugung nachgehen ein starres und unkreatives Fach zu unterrichten, werden dies auf viele Lernenden übertragen. (vgl. Beilock 2009)

Einschlägige Forschung gibt uns bereits Auskunft über mögliche Wege um Einstellungen zu verändern. So schlägt z.B. Pajares hierzu folgendes vor:

“Beliefs are unlikely to be replaced unless they prove unsatisfactory, and they are unlikely to prove unsatisfactory unless they are challenged and one is unable to assimilate them into existing conceptions. […] A number of conditions must exist before students find anomalies uncomfortable enough to accommodate the conflicting information.” (Pajares 1992, p.321)

Es gilt demnach verfestigte Einstellungen beim Lernenden immer neu auf den Prüfstand zu stellen. Um eine tatsächliche Veränderung zu bewirken, ist es nötig die Kluft zwischen der eigenen Überzeugung und der neu gewonnenen Information möglichst groß zu gestalten. Genau an diesem Punkt sehe ich ein Potential in Newtons o.g. Forschungsergebnis. Die Kluft zwischen den Einstellungen zum Fach Musik und der Mathematik ist riesig. Gleichwohl können wir in vielen, teils historischen Quellen sehen, dass beide Disziplinen sehr eng miteinander verknüpft sind.

> Musik ist die versteckte arithmetische Tätigkeit der Seele, die sich nicht dessen bewusst ist, dass sie rechnet.”

(Gottfried Wilhelm Leibniz in einem Brief vom 27. April 1712 an Goldbach)

> “May not music be described as the mathematics of the sense, mathematics as music of the reason?“
>
> (J.J. Sylvester in Dieudonné 1998, S.VI)

Die Kreativität betreffend bringt Coxeter es m.E. auf den Punkt.

> „I believe the resemblance between music and mathematics begins at the creative stage: the act of composing music seems to have some affinity with the discovery of mathematical facts. Both arts are essentially abstract [...]“ (Coxeter 1962, S.13)

Ich sehe daher in diesem Feld eine große Möglichkeit das nötige Spannungsfeld aufzubauen, um eine Einstellungsveränderung zu bewirken und stelle im Folgenden nun drei kleine Beispiele vor, die meine Idee skizzenhaft verdeutlichen sollen.

Kreativität zwischen Mathematik und Musik

1. Beispiel: Stimmung und Bruchrechnung

Schon die altbekannten Experimente von Pythagoras am Monochord (z.B. Critchley 2008), erlauben es kreativ tätig zu werden. Teilt man eine Seite, die hier beispielsweise auf den Ton C gestimmt sei, in einem der der Tabelle zu entnehmenden Bruch, erklingt der jeweilige Ton.

C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B	C’

$\frac{1}{1}$	$\frac{243}{256}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{512}{729}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$

Lassen wir Lernende dies ausprobieren und entdecken, ergibt sich nicht nur Raum für Kreativität, sondern gleichzeitig auch eine Wiederholung von Bruchteilen aus mathematischer Sicht bzw. den Aufbau des Tonsystems aus musikalischer Sicht.

1. Beispiel: Kompatible Fachsprache

Musikalische Phänomene lassen sich treffend in mathematischer Sprache ausdrücken. Beispielsweise steckt in der harmonischen Reihe

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, n \to \infty$$

das Schwingungsverhältnis der Obertonreihe eines Geigentons (s. Sautoy 2003, S.79). Ein weiteres Beispiel zeigt die folgende mathematische Definition:

- Ein **Tonsystem** ist ein geordnetes Paar (T,h) , wobei T eine Menge und h eine injektive Abbildung von T in die Menge R+ aller positiven reellen Zahlen ist. Die Elemente von T heißen **Töne**, und für $t \in T$ wird h(t) die **Tonhöhe** von t genannt.

Wählen wir die folgende Menge und Abbildung, so definieren wir hiermit die Frequenzen der gleichstufigen Stimmung.

$$T := \{-48, -47, ..., 35, 36\}, h(t) := 440 \times 2^{\frac{t}{12}}$$

(vgl. Wille, 1976, S. 239)

Kreativ werden lässt sich nun leicht, indem entweder die mathematische Information verändert wird und auf die Auswirkungen hinsichtlich der Musik untersucht wird, oder die musikalische Seite gezielt durch Eingreifen in die dahinterliegende Mathematik verändert wird. Damit könnten wir erreichen, dass der von Pajares geforderte Konflikt in der Information des Lernenden entsteht.

Literatur

Beilock, S., Gunderson, E., Ramirez, G., & Levine, S. (2010). Female teachers' math anxiety affects girls' math achievement. Proceedings of the National Academy of Sciences, 107(5), 1860-1863

Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften (2007). Jahrbuch 2007, Akademie Verlag, Berlin

Coxeter, H. S. M. (1962). Mathematics and music, in Canadian Music Journal VI

Critchley, S. (2009). The book of dead philosophers, Vintage Books, New York

Dieudonné, J. (1998). Mathematics – The music of reason, Springer, Berlin

Nutzinger, Hans Peter. (2016). The connection of mathematic and music as an opportunity to change beliefs, in Beckmann, A., Michelsen, C. & Freiman, V. (2016). MACAS – Proceedings of the MACAS-2015 Symposium, Hildesheim, Berlin (in preparation)

Newton, L. (2013). From Teaching for Creative Thinking to Teaching for Productive Thought: An Approach for Elementary School teachers, ICIE, Ulm

Pajares, M. F. (1992). Teachers beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 62,* 307-332

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 257-315). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sautoy du, M. (2003). The Music of the Primes, Harper Collins, New York

Speer, N. (2005). Educational Studies in Mathematics, 2005, Volume 58, Number 3, Page 361, Springer, Berlin

TALIS - TEACHING AND LEARNING INTERNATIONAL SURVEY (2009). Creating effective teaching and learning environments first results from TALIS. Paris, OECD, Teaching and Learning International Survey. http://public.eblib.com/choice/publicfullrecord.aspx?p=457339.

Tymoczko, D. (2011). A geometry of music, Oxford University Press, Oxford

Wille, R. (1976). Mathematik und Musiktheorie, In: Schnitzler, G. (ed.) (1976). Musik und Zahl, Interdisziplinäre Beitrage zum Grenzbereich zwischen Musik und Mathematik, Verlag für systematische Musikwissenschaft GmbH, Bonn

Rolf OECHSLER, Jürgen ROTH, Landau

Qualitative Analyse von Fachkommunikation in einem Schülerlabor Mathematik

Fachkommunikation und Fachsprache

Das fachsprachliche Kommunikationsmodell nach Roelcke 2010 (vgl. Abb. 1) umfasst neben der schriftlichen und mündlichen Produktion und Rezeption von Fachtexten auch die (fach-)sprachlichen Systeme der Teilnehmer/innen sowie deren individuelles Hintergrundwissen (den Kontext) und spezifisches Textwissen (den Kotext). Auf der Grundlage dieses Modells kann Fachkommunikation gekennzeichnet werden als differenzierter Gebrauch fachsprachlicher Mittel und Strukturen, der die Verständigung in einem fachlich bestimmten Kommunikationsbereich sichert. Die mündliche Fachkommunikation ist dadurch gekennzeichnet, dass sie eine unmittelbare Verständigung anstrebt. Sie enthält deshalb implizite Äußerungen und wirkt dadurch weniger vollständig als schriftliche Formulierungen. Neben den (fach-)sprachlichen Mitteln umfasst sie auch Mimik und Gestik. Eine Besonderheit der mathematischen mündlichen Fachkommunikation stellt das Verweisen auf schriftliche Notationen dar, die vorliegen oder synchron zum Kommunikationsprozess erstellt werden (vgl. Jörissen & Schmidt-Thieme 2015).

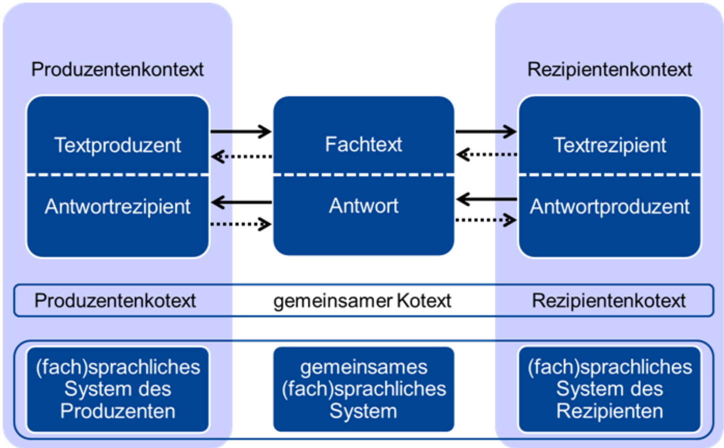


Abb. 1: Fachsprachliches Kommunikationsmodell in Anlehnung an Roelcke 2010

Mündliche Fachkommunikation erfolgt durch den Gebrauch von Fachsprache, die eine Varietät einer natürlichen Sprache darstellt. Es gibt keine klare Trennlinie zwischen Alltags- und Fachsprache, vielmehr stellen diese beiden die Pole einer stufenlosen Skala unterschiedlicher Fachlichkeitsgrade dar (Schubert 2009; Schmidt-Thieme 2010). Neben den funktionalen Eigenschaften von Fachsprachen wie Deutlichkeit, Verständlichkeit oder Ökonomie sind die verschiedenen Rollen von Fachsprache im Unterricht zu berücksichtigen: als Lerngegenstand, den es zu erwerben gilt, als Lernmedium der Lehr-Lern-Prozesse und als Lernvoraussetzung, die hemmend oder fördernd auf diese Prozesse wirken kann (Prediger 2013). Zu den auffälligsten Merkmalen der mathematischen Fachsprache gehört die hohe Anzahl an Fachbegriffen, deren Bedeutung stets kontext- und situationsabhängig ist (Jörissen & Schmidt-Thieme 2015).

Fachkommunikation im Schülerlabor Mathematik

Die Konzeption des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr" der Universität in Landau sieht vor, dass die Labor-Lernumgebungen in Kleingruppen selbstständig bearbeitet werden. Jede Lernumgebung wird in drei Doppelstunden durchlaufen, wobei jeweils eine Schülergruppe bei der Bearbeitung aus der Vogelperspektive videographiert wird. Insbesondere die aufgaben- und fachbezogenen mündlichen Interaktions- und Argumentationsprozesse stellen eine Form der Fachkommunikation dar, die z. B. im Rahmen von Gruppenarbeitsphasen in vergleichbarer Form auch im schulischen Mathematikunterricht vorkommt.

Abb. 2: Lernumgebung „Figurierte Zahlen" des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr"

Die Lernumgebung „Figurierte Zahlen" (vgl. Abb. 2) dient der Festigung und Vertiefung des Themenbereiches „Aufstellen und Umformen von Termen mit einer Variablen". Legebretter ermöglichen ebene und räumliche Anordnungen von Holzkugeln zur Darstellung unterschiedlicher figurierter Zahlen. Ausgehend von diesen Veranschaulichungen werden Terme zur algebraischen Darstellung und zur Bestimmung figurierter Zahlen genutzt. Mit Hilfe von GeoGebra-Simulationen können die geometrischen Darstellungen leicht verändert und Zusammenhänge zwischen figurierten Zahlen adäquat visualisiert werden. Dieser Material- und Medieneinsatz begünstigt die (fach-)sprachliche Auseinandersetzung mit dem mathematischen Thema, wie im Folgenden gezeigt wird.

Datenerhebung und Materialkorpus

Eine der untersuchten Schülergruppen besteht aus vier Realschülern einer 8. Klasse. Sie sind Deutsch-Muttersprachler ohne Migrationshintergrund und sind laut Auskunft ihrer Mathematiklehrkraft dem mittleren Leistungsniveau zuzuordnen. Die gesamte Dauer der drei Videoaufnahmen beträgt 3 Stunden 50 Minuten und umfasst ca. 4300 Gesprächs-Turns. Zur Transkription der Videoaufnahmen wurde das Programm f4 eingesetzt, die verwendeten Zeichnen entstammen dem „Gesprächsanalytischen Transkriptionssystem 2" nach Selting u. a. 2009. Zur Kodierung des Datenmaterials wurde die

Analysesoftware MAXQDA verwendet auf der Grundlage einer vornehmlich deduktiven Kategorienanwendung. Das verwendete Kategoriensystem umfasst fünf Hauptkategorien:

- Die „**Art/Form der Äußerung**“ beschreibt die oberflächliche grammatische Form einer Äußerung in Anlehnung an die sprachwissenschaftliche Typologie der Satzarten (vgl. Roelcke 2010).
- Die „**Absicht des Sprechers**“ bezieht sich auf die kommunikative Intention einer Äußerung (vgl. Illokution in der Sprechakttheorie und in der linguistischen Pragmatik).
- Der „**Material- /Medieneinsatz**“ betrifft Äußerungen, die den Umgang mit Legebrettern, Simulationen oder Heftvorlagen begleiten (vgl. Konzeption des Mathematik-Labors in Oechsler 2013; Roth 2013).
- Der „**Einsatz von Fachsprache**“ umfasst fachsprachliche Elemente aus den induktiv bestimmten Unterkategorien Lexik und Syntax (vgl. Maier & Schweiger 1999; Hußmann 2003).
- Der „**Arbeitsorganisation**“ werden Äußerungen im Rahmen der aufgabenbezogenen Koordination zugeordnet, z. B. Absprachen darüber, wer einen Hefteintrag diktiert oder die Maus bedient.

Beobachtungen und vorläufige Ergebnisse

Insgesamt dominiert in den analysierten Kommunikationsprozessen die Alltagssprache, teilweise dialektal eingefärbt. Daneben werden sehr häufig Bezeichnungen von den Schülern gebraucht, die der „elementaren Zahlen- und Formensprache“ (um eine Formulierung von Wittmann & Müller aufzugreifen) und der algebraischen Formelsprache zuzuordnen sind.

Insgesamt werden von den vier Schülern verhältnismäßig wenige Fachbegriffe aktiv verwendet (im Sinne von lexikalischen Einheiten), wobei anzumerken ist, dass Zahlen- und Operationsbezeichnungen dabei unberücksichtigt bleiben. Die meisten der 51 identifizierten Fachbegriffe werden jedoch sehr häufig von den Schülern verwendet (im Sinne von Token), insbesondere solche Nomen, die sich auf geometrische Objekte beziehen. Arithmetisch-algebraische Fachbegriffe werden teilweise eigenständig realisiert, in den meisten Fällen jedoch den Aufgabenstellungen und Informationstexten der Arbeits- oder Hilfehefte entnommen. Fachbegriffe werden häufiger beim Umgehen mit den Legebrettern und beim Betrachten von Abbildungen als beim Einsatz der Computersimulationen aktiv verwendet, insbesondere im Zusammenhang mit fachlichen Erklärungen und beim Signalisieren von Unverständnis. Fachsprachliche syntaktische Konstruktionen kommen nur vereinzelt vor. Der folgende Ausschnitt belegt den adäquaten Gebrauch des Allquantors „für alle … gilt …“:

(1) S1: Fünf mal sechs durch zwei gleich …

(2) S2: Ah! Und als Term … a mal b geteilt durch zwei.

(3) S4: Ja, genau.

(4) S2: Das gilt dann für alle.

(5) S3: Jetzt hab´m wir dann ´ne Formel, oder? Wenn´s für alle gilt?

(6) S2: Nee, das is´n Term.

Die Satzkonstruktionen in den Zeilen (4) und (5) weisen zwei Charakteristika der mündlichen Fachkommunikation auf: Die Verwendung deiktischer Formen und die Unvollständigkeit, denn es wird nicht ausdrücklich erwähnt, worauf sich die vermeintliche oder festgestellte Allgemeingültigkeit beziehen soll. Aus dem Kontext der Kommunikationssituation wird jedoch deutlich, dass ein Term zur Berechnung von Dreieckszahlen gemeint ist.

Literatur

Hußmann, S. (2003). Umgangssprache – Fachsprache. In T. Leuders (Hrsg.), *Mathematikdidaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II* (S. 60-74). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Jörissen, S., Schmidt-Thieme, B. (2015). Darstellen und Kommunizieren. In R. Bruder et al. (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 385–408). Heidelberg: Springer.

Maier, H., Schweiger, F. (1999). *Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht*. Wien: öbv & hpt.

Oechsler, R. (2013). Figurierte Zahlen – Von Figuren über Zahlen zu Termen. *MU*, 59/5, 42–49.

Prediger, S. (2013). Darstellungen, Register und mentale Konstruktion von Bedeutungen und Beziehungen – Mathematikspezifische sprachliche Herausforderungen identifizieren und bearbeiten. In M. Becker-Mrotzek et al. (Hrsg.), *Sprache im Fach – Sprachlichkeit und fachliches Lernen* (S. 167–183). Münster: Waxmann.

Roelcke, T. (2010). *Fachsprachen*. Berlin: Schmidt.

Roth, J. (2013). Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ – Forschendes Lernen im Schülerlabor mit dem Mathematikunterricht vernetzen. *MU*, 59/5, 12–20.

Schmidt-Thieme, B. (2010). Fachsprache oder: Form und Funktion fachlicher Varietäten im Mathematikunterricht. In G. Kadunz (Hrsg.), *Sprache und Zeichen. Zur Verwendung von Linguistik und Semiotik in der Mathematikdidaktik* (S. 271–304) Hildesheim: Franzbecker.

Schubert, K. (2009). Kommunikationsoptimierung: Vorüberlegungen zu einem fachkommunikativen Forschungsfeld. *trans-kom*, 2,109–150.

Barbara OTT, St. Gallen

Textaufgaben grafisch darstellen – Entwicklung eines Analyseinstruments, Intervention und Evaluation

Darstellungen sind wesentlich für mathematische Erkenntnisprozesse. Spätestens seit der Veröffentlichung der Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (KMK, 2005) ist das Darstellen auch als ein ‚Ziel' schulischer Lehr-Lern-Prozesse im Sinne der Ausbildung und Förderung allgemeiner Kompetenzen formuliert und normativ gesetzt. Als einer von fünf prozessbezogenen Kompetenzen wird dem Darstellen entsprechend seiner Bedeutung für die Mathematik auch im Mathematikunterricht ein hoher Stellenwert eingeräumt. Im Kontext des Sachrechnens sind grafische Darstellungen von besonderer Bedeutung: Die in Textaufgaben verbal dargestellten mathematischen Strukturen können von den Schülerinnen und Schülern grafisch repräsentiert und so zur Bearbeitung der Aufgaben verwendet werden. Lernende haben jedoch immer wieder Schwierigkeiten, Grafiken als Bearbeitungshilfen zu nutzen (z.B. Franke & Ruwisch, 2010).

Ungeklärt ist bisher, ob von Kindern selbstgenerierte grafische Darstellungen zu Textaufgaben mathematische Aufgabenelemente geeignet abbilden sowie ob und wie die Entwicklung einer Darstellungskompetenz gefördert werden kann. Zur Klärung dieser Fragen wird in meinem an der Universität Bamberg durchgeführten Dissertationsprojekt ein Beitrag geleistet.

Entwicklung eines Analyseinstruments

Das Projekt widmet sich zunächst der Frage, inwieweit in Textaufgaben inhärente mathematische Strukturen in selbstgenerierten grafischen Darstellungen von Schülerinnen und Schülern wiedererkennbar sind. Da bislang kein entsprechendes Analysewerkzeug vorlag, wurde mittels Qualitativer Inhaltsanalyse (Mayring, 2010) und theoretischem Kodieren (Strauss & Corbin, 1996) auf der Basis von 438 Kinderdokumenten eines hierfür entwickelten Paper-Pencil-Tests ein kategorienbasiertes und theoriebezogenes Instrument neu entwickelt. Es ermöglicht die Analyse grafischer Darstellungen hinsichtlich der Abbildung mathematischer Strukturen, der mathematischen Passung und des Abstraktionsgrads in Forschung und Praxis (Ott, 2015).

Hinsichtlich der Abbildung mathematischer Strukturen in grafischen Darstellungen zu Textaufgaben wurden im Analyseprozess sechs Kategorien identifiziert: nicht grafische, textferne, illustrative, objektbezogene, implizit diagrammatische und explizit diagrammatische Darstellungen. Im Instrument sind diese Kategorien in einem Entscheidungsbaum angeordnet und durch an den Kategoriendefinitionen orientierte Leitfragen miteinander verbunden. Durch das schrittweise dichotome und streng kompetenzorientierte

Vorgehen in der Analyse kann so jedes Kinderdokument eindeutig einer Kategorie zugeordnet werden (Ott, 2015).

Für die Analyse der mathematischen Passung und des Abstraktionsgrads wurden jeweils Matrizen als Analysefolien entwickelt, die durch ihren Aufbau ebenfalls eindeutige Kategorienzuordnungen jedes Kinderdokuments ermöglichen (Ott, 2014).

Das Instrument wurde mit sehr guten Interkoderreliabilitäten zwischen K=0.81 und K=0.99 für die einzelnen Analyseaspekte erprobt und kann somit in weiteren Forschungen und im eigenen Projekt eingesetzt werden.

Intervention

Die im Rahmen des Projekts entwickelte Intervention verfolgt das Ziel, die grafischen Darstellungsfähigkeiten der Schülerinnen und Schüler weiterzuentwickeln, indem durch Reflexionseinheiten auf ihre Bewusstheit (Mason, 1987) bezüglich grafischer Darstellungen Einfluss genommen wird. Die Intervention orientiert sich dabei an von Steinweg (2002) für den Arithmetikunterricht identifizierten Stationen auf dem Weg zur Rechenkompetenz. Ausgangspunkt und Gegenstand der Reflexionsprozesse zum grafischen Darstellen bilden in der Intervention von den Lernenden selbstgenerierte grafische Darstellungen zu Textaufgaben. Die Intervention ist in einem zweiphasigen Unterrichtsaufbau angelegt.

In einer ersten Phase entwickeln die Schülerinnen und Schüler zu einer Textaufgabe selbstständig in der Freiarbeit grafische Darstellungen mit den ihnen zur Verfügung stehenden informellen Strategien. In der darauffolgenden zweiten Phase werden einige dieser Kinderprodukte in den Mittelpunkt gestellt und in Gesprächen reflektiert. Den Lernenden wird somit eine aktive Erweiterung ihres Darstellungswissens und ihrer Darstellungsfähigkeiten in diesen sozialen Aushandlungsprozessen ermöglicht. Dabei fokussieren die Reflexionsgespräche darauf, die fremden Kinderdokumente zu erklären und zu verstehen.

Die Phasen finden im wöchentlichen Wechsel statt. Insgesamt wurden im Projekt zwischen September 2012 und März 2013 neun Interventionseinheiten in zwei Klassen der Jahrgangsstufe 3 durchgeführt.

Evaluation

Die zweite wesentliche Frage des Projekts evaluiert, inwieweit sich diese auf grafische Darstellungsbewusstheit ausgerichtete Intervention auf Darstellungsfähigkeiten der Schülerinnen und Schüler auswirkt. Dazu wurde die Längsschnittstudie in einem Drei-Gruppen-Design (Interventionsgruppe, Kontrollgruppe 1 mit Interventionsaufgaben, Kontrollgruppe 2 mit alltäglichem Unterricht) mit drei Testzeitpunkten (Pretest Juli 2012, Posttest März

2013, Follow-up Juni 2013) angelegt und sowohl qualitativ mittels des bereits vorgestellten Analyseinstruments als auch quantitativ ausgewertet. Grundlage für die Analyse bildeten die 2780 Kinderdokumente des hierfür entwickelten Paper-Pencil-Tests. Die quantitative Auswertung wurde mittels zweifaktorieller Varianzanalyse aufgrund der Daten der zu allen Testzeitpunkten anwesenden Kinder (33 pro Gruppe) durchgeführt. Es wurde die Hypothese getestet, dass Kinder der Interventionsgruppe nach der Intervention häufiger konstituierende Merkmale (mathematische Struktur, mathematische Passung, Abstraktionsgrad) grafischer Darstellungen in ihren Dokumenten beachten als Kinder der Kontrollgruppen.

Hinsichtlich der mathematischen Struktur (strukturrelevante Objekte und Verknüpfungen) kann die Hypothese angenommen werden. Es zeigt sich ein signifikanter Interaktionseffekt zwischen der mathematischen Strukturdarstellung und der Gruppenzugehörigkeit ($F(3.690, 177.119) = 11.591$; $p < .001$; $\eta_p^2 = 0.195$). Die Paarvergleiche zeigen die signifikanten Unterschiede zwischen der Interventionsgruppe und den Kontrollgruppen im Posttest und Follow-up genauer (vgl. Abb. 1). Die Dokumente wurden dichotom kodiert. Ein Gruppenmittelwert von 8 würde bedeuten, dass alle Kinder in allen acht Items mathematische Strukturelemente beachtet haben.

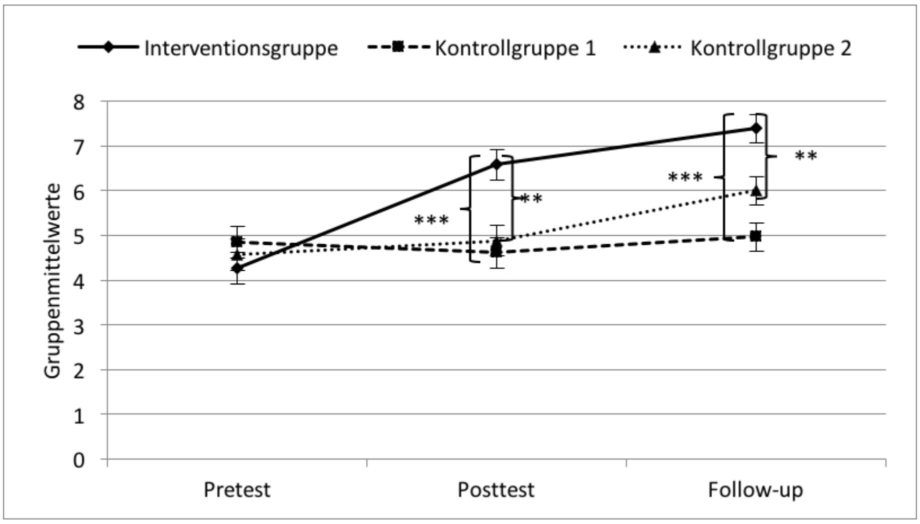


Abb. 1: Interaktion der Gruppen bzgl. der mathematischen Struktur
(** p < .01, *** p < .001)

Auch hinsichtlich der mathematischen Passung kann die Hypothese angenommen werden. Erstaunlicherweise folgt die Beachtung des Abstraktionsgrads nicht diesem Muster. Die Hypothese muss hier verworfen werden. Der Abstraktionsgrad hat demnach keine Auswirkung auf die Abbildung der mathematischen Struktur und die Beachtung der Passung. Ebenso muss die weiterhin aufgestellte Hypothese verworfen werden, dass Kinder der Interventionsgruppe nach der Intervention Textaufgaben häufiger richtiger lösen als Kinder der Kontrollgruppen. Allerding zeigt hier die Häufigkeitsverteilung, dass - im Gegensatz zu den Kontrollgruppen - in der Interventionsgruppe die richtigen Lösungen kontinuierlich zunehmen, bei gleichzeitiger Abnahme der falschen Lösungen bzw. der Dokumente ohne Lösung.

Die qualitative Analyse der Kinderdokumente verdeutlicht, dass die Entwicklung der grafischen Darstellungen höchst individuell und vielfältig geschieht und die Kinder im Verlauf der Intervention ihre Art der grafischen Darstellung jeweils weiterentwickeln.

Fazit

Das Erstellen einer grafischen Darstellung ist ein komplexer, individueller Prozess. Um diesem gerecht zu werden, scheint eine kriterienbasierte Betrachtung der Darstellungen notwendig. Ein Unterricht, der grafische Darstellungen als Gegenstände ins Zentrum rückt und mit Reflexionsgesprächen arbeitet, erscheint hilfreich für die Entwicklung von Darstellungskompetenzen. Dabei sollte der Unterricht auf die Abbildung der mathematischen Strukturen der Textaufgaben fokussieren und weniger auf deren Abstraktionsgrad. Insgesamt ist die Befähigung zum grafischen Darstellen nicht hinreichend für die Nutzung grafischer Darstellungen als Bearbeitungshilfen, jedoch notwendige Bedingung.

Literatur

Franke, M., & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule* (2. Aufl.) Heidelberg: Spektrum.

KMK (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. München u.a.: Luchterhand.

Mason, J. (1987). "Erziehung kann nur auf die Bewußtheit Einfluß nehmen". *mathematik lehren*, 21, 4–5.

Mayring, Ph. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken* (11. Aufl.). Weinheim: Beltz.

Ott, B. (2014). Kinder zeichnen zu Textaufgaben. In J. Roth, & J. Ames (Hg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 879-882). Münster u.a.: WTM.

Ott, B. (2015). Qualitative Analyse grafischer Darstellungen zu Textaufgaben. In G. Kadunz (Hg.), *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik* (S. 163-182). Heidelberg: Springer.

Steinweg, A. S. (2002). „Ich freu' mich so, dass ich 1.-Schuljahr-Aufgaben rechnen darf". *Grundschulunterricht*, 10, 17-20.

Strauss, A. L., & Corbin, J. M. (1996). *Grounded theory: Grundlagen qualitativer Sozialforschung*. Weinheim: Beltz.

Lena PANKOW, Kirsten BENECKE, Hamburg

Wahrnehmung von Schülerfehlern unter Zeitdruck - Ergebnisse aus TEDS-FU

Im Rahmen der Studie TEDS-FU wurde bei Mathematiklehrkräften mit durchschnittlich vier Jahren Berufserfahrung die Kompetenz, typische Schülerfehler innerhalb einer begrenzten Zeit zu erkennen, erhoben. In dieser erfahrungshomogenen Gruppe konnten deutliche Leistungsunterschiede festgestellt werden. Die im Rahmen von TEDS-FU (Blömeke et al. 2014) durchgeführte Studie, konnte neben den richtigen und falschen Antworten auch die Diskrepanz der Zeitnutzung, die für die thematische Antizipation typischer Schülerfehler genutzt wurde, aufzeigen. Jene Lehrkräfte, die richtig geantwortet hatten, hatten bei zunehmender Komplexität auch längere Zeit antizipiert. Diejenigen, die nicht innerhalb der vorgegebenen Zeit den typischen Schülerfehler benannten, antizipierten eine kurze Zeit, auch wenn die Komplexität des Items zunahm. Die Ergebnisse des Fehlererkennungstests der TEDS Follow-Up Studie sind in Einklang mit den Ergebnissen der COACTIV Studie (Krauss & Brunner 2011). Beide Studien zeigen einen hohen Zusammenhang des Fehlererkennungstests und der mathematischen Kompetenz (MCK) (nach Shulman 1987) der Mathematiklehrkräfte.

Theoretischer Rahmen und Ziel der Studie

Aktuelle Forschungen der Expertiseforschung weisen darauf hin, dass Expertenlehrkräfte in der Lage sind, Situationen ganzheitlich und schneller zu erfassen als Novizen. Darüber hinaus wissen Expertenlehrkräfte, wann es notwendig ist, sich auf bestimmte Ereignisse oder Aktivitäten zu konzentrieren (Chi 2011). Auf dieser Literaturgrundlage kann angenommen werden, dass eine Expertenlehrkraft ein vielseitigeres Wissen besitzt als eine Novizenlehrkraft. Ein Indikator von Lehrerexpertise ist neben dem Erkennen von Schülerfehlern deren Interpretation und das Entwickeln adäquater Folgerungen für den Unterricht (Sherin et al. 2011). Trotz des Zeitdrucks, der in Unterrichtssituationen vorhanden ist, wird von Lehrkräften erwartet, dass sie Fehler in kurzer Zeit identifizieren, so dass auf diese angemessen (Seifried & Wuttke 2013, 116) und konsequent (Prediger & Wittmann 2009, 7) reagiert werden kann.

Um Schülerfehler zu erkennen, ist es von grundlegender Bedeutung, diagnostische Expertise (Reiss & Hammer 2013, 116-118) zu besitzen. Insbesondere ist die diagnostische Kompetenz Voraussetzung, individuelle Betreuung (Streber et al. 2011, 344) zu ermöglichen.

Zielsetzung und Fragestellung

Das Ziel der hier beschriebenen Ergänzungsstudie ist, die Beziehung zwischen MCK und dem Test zur schnellen Fehlererkennung (eine Facette von MPCK) im Detail zu untersuchen, d.h. die Frage zu untersuchen, wie erfolgreich andere Untersuchungsgruppen mit weniger mathematischen und mathematikdidaktischen Kenntnissen bei der schnellen Fehlererkennung sind. Dabei wurde davon ausgegangen, dass die untersuchten Schülerinnen und Schüler der Oberstufe weder vertieftes Wissen hinsichtlich mathematikdidaktischer noch hinsichtlich mathematischer Inhalte haben. Allerdings ist diese Untersuchungsgruppe mit dem Inhalt der Testung vertraut.

Innerhalb dieser Stichprobe gibt es Schülerinnen und Schüler, die Erfahrungen mit Nachhilfeunterricht haben. Von daher wird die Frage untersucht, ob es dieser Subgruppe möglich ist, den Test besser zu bewältigen, da sich Nachhilfeunterricht meist mit Fehlern und Missverständnissen beschäftigt?

Der Test zur schnellen Fehlererkennung hat aufgrund der inhaltlichen Konzeption (Pankow et al. 2016) eine mathematikdidaktische Konzeption, zeigt allerdings einen starken Zusammenhang mit MCK. Daher stellt sich die Frage, welche Ergebnisse Teilnehmerinnen und Teilnehmer erzielen, die keine Ausbildung in MCK oder MPCK haben, allerdings mit dem Gebiet der mathematischen Inhalte des Tests vertraut sind?

Methode

171 Mathematiklehrkräfte mit durchschnittlich vier Jahren Berufserfahrung der Sekundarstufe 1 wurden in der Follow-UP-Studie von TEDS-M untersucht. Die TEDS-FU Teilnehmerinnen und Teilnehmer waren im Durchschnitt 32 Jahre alt (SD = 5,9; min = 26; max = 53). 58,9% der Probanden waren weiblich, die Stichprobe bestand aus 55,8% aus Gymnasiallehrkräften und 43,6% Haupt- und Realschullehrkräften.

Die Ergänzungsstudie bestand aus 62 Oberstufenschülerinnen und -schülern eines Gymnasiums in Hamburg, 37,1% der Probanden waren weiblich. Die Hälfte der Schülerinnen und Schülern befanden sich in einem erhöhten Kursniveau, während die andere Hälfte einen Grundkurs besuchte. Sie waren zwischen 17-21 Jahren alt und standen sechs Wochen vor ihrer Abiturprüfung.

Design

Der zeitbeschränkte Test zur Fehlererkennung besteht aus 16 Items, die aus dem Inhaltsgebiet der Sekundarstufe I stammen und unter anderem auch diese Themen umfassen: Umgang mit Brüchen, Prozentrechnung, Satz des Pythagoras, Trigonometrie, Wahrscheinlichkeit. Da die Items typische Inhaltsbereiche der Schulmathematik enthalten, könnten im Prinzip alle Fehler von beiden Gruppen zu identifizieren sein, wenn genügend Zeit zur Verfügung gestellt würde. Die Ergebnisse einer Expertenbefragung zeigten, dass die Aufgaben nach ca. fünf Sekunden nachgerechnet werden, dies galt es durch die beschränkte Zeit zu verhindern. Im zeitbeschränkten Test zur Fehlererkennung werden die Teilnehmerinnen und Teilnehmer gebeten, den typischen Schülerfehler innerhalb von drei Schülerantworten zu identifizieren. Die drei Schülerantworten bestehen aus zwei korrekten Antworten und eine, die den typischen Schülerfehler enthält.

Neben dem zeitbeschränkten Test zur Fehlererkennung wurden die Schülerinnen und Schüler gefragt, ob sie Erfahrungen im Nachhilfesektor hätten, sie konnten hinsichtlich mathematischer Inhaltsbereiche wählen, ob sie in diesem Bereich „noch nie“, „einmal“ oder „mehrfach“ Nachhilfe gegeben hatten.

Datenanalyse

Für eine Analyse wurden die Daten innerhalb des Tests zur Fehlererkennung als korrekt oder falsch codiert. Fehlende Daten wurden ebenfalls als falsch codiert, da angenommen wurde, dass die Teilnehmerinnen und Teilnehmer nicht in der Lage waren, die falsche Antwort innerhalb der vorgegebenen Zeit zu identifizieren. Auf der Basis von Analysen zum Mittelwert, der Standardabweichung und Korrelationen innerhalb und zwischen den Gruppen konnten Vergleiche angestellt werden.

Ergebnisse

Lehrkräfte zu Beginn ihrer Karriere erzielen deutlich bessere Ergebnisse im Test zur schnellen Fehlererkennung als die Oberstufenschülerinnen und -schüler. Die Gruppe der Oberstufenschülerinnen und -schüler erreicht durchschnittlich 3,6 richtige Antworten (min=0; max=8). In der Gruppe der Lehrerkräfte sind es durchschnittlich 7,9 richtige Antworten (min=0; max=14). Allerdings gab es ein Ausreißeritem, das Item „Lösen quadratische Gleichungen“ wurde von den Schülerinnen und Schülern häufiger richtig gelöst als seitens der Lehrkräfte. Eine mögliche Erklärung wäre, dass die Junglehrkräfte aus der Sekundarstufe 1 diese Inhalte bisher seltener gelehrt hatten und daher diesbezüglich wenig Erfahrung hinsichtlich typischer Schülerfehler hatten. Zusätzlich könnte der Vorsprung in diesem Item durch die Abiturvorbereitung der Oberstufenschülerinnen und Schüler erklärt werden, in dem genau diese Aspekte eine große Rolle spielen. Die Ergebnisse machen deutlich, dass die Schülerinnen und Schüler, die Nachhilfe erteilt haben, signifikant besser abschnitten als ihre Mitschülerinnen und Mitschüler.

Die Ergänzungsstudie zur schnellen Fehlererkennung verdeutlicht, dass beim direkten Vergleich der Probandengruppen MPCK ein Prädiktor zu sein scheint, um den Test erfolgreich abschließend zu können. Eine weitere Ergänzungsstudie soll, in Anlehnung an COACTIV (Krauss & Brunner 2011), die Chemiestudierende und Studierende der Mathematik befragt haben, durchgeführt werden und Studierende des Faches Mathematik befragen. Diese Studierenden haben voraussichtlich hohe Fähigkeiten in MCK, aber vermutlich kaum Kenntnisse in MPCK. Die Fähigkeiten der Studierenden im zeitbeschränkten Test gilt es zu erfassen. Eine Korrelation des Testerfolgs und MCK wird vermutet.

Literatur

Blömeke, S., König, J., Busse, A., Suhl, U., Benthien, J., Döhrmann, M., & Kaiser, G. (2014). Von der Lehrerausbildung in den Beruf – Fachbezogenes Wissen als Voraussetzung für Wahrnehmung, Interpretation und Handeln im Unterricht. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, *17*, 509–542.

Chi, M. T. H. (2011). Theoretical perspectives, methodological approaches, and trends in the study of expertise. In Y. Li & G. Kaiser (Eds.), *Expertise in mathematics instruction: An international perspective* (pp. 17-39). Heidelberg: Springer.

Krauss, S., & Brunner, M. (2011). Professionelles Reagieren auf Schülerantworten: Ein Reaktionszeittest für Mathematiklehrer/innen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *32*, 233-251.

Pankow, L., Kaiser, G., Busse, A., König, J., Blömeke, S., Hoth, J., & Döhrmann, M. (2016). Early Career Teachers' ability to focus on typical students errors in relation to the complexity of a mathematical topic. *ZDM Mathematics Education*, DOI 10.1007/s11858-016-0763-2

Prediger, S., & Wittmann, G. (2009). Aus Fehlern lernen - (wie) ist das möglich? *PM*, *27*(51), 1-8.

Reiss, K., & Hammer, Ch. (2013). *Grundlagen der Mathematikdidaktik. Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe*. Basel: Springer, Birkhäuser.

Seifried, J., & Wuttke, E. (2010). „Professionelle Fehlerkompetenz“ – Operationalisierung einer vernachlässigten Kompetenzfacette von (angehenden) Lehrkräften. *Wirtschaftspsychologie*, *4*(12), 17-28.

Sherin, M. G., Jacobs, V. R., & Philipp, R. A. (Eds.). (2011). *Mathematics teacher noticing. Seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-21.

Streber, D., Haag, L., & Götz, T. (2011). Erfolgreiche Nachhilfe – Kann das jeder oder bedarf es besonderer Qualifikationen? *Empirische Pädagogik*, *3*(25), 342- 357.

Pelagia PAPADOPOULOU, Christine BESCHERER, Ludwigsburg

Einsicht in das Sprachhandeln angehender Mathematiklehrkräfte mit Hilfe von Podcasts

Die Forderung nach einer fachspezifischen Sprachförderung ist in der mathematikdidaktischen Diskussion inzwischen umfangreich vertreten. Im Rahmen des vom Mercator Institut geförderten FörBis-Projektes werden Möglichkeiten eines sprachsensiblen Mathematikförderunterrichts, den Studierende der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg in der Sekundarstufe I durchführen, erprobt und evaluiert. In diesem Beitrag wird vorgestellt, wie mit Hilfe von Podcasts das Sprachhandeln der Studierenden sowie entsprechende Entwicklungen dokumentiert werden sollen. Das Ziel ist, mögliche Veränderungen im Sprachhandeln und Sprachbewusstsein der Studierenden, vor und nach den Theorie und Praxis Erfahrungen, zu analysieren.

1. Theoretischer Hintergrund

Der Zusammenhang der Sprachkompetenz und der Mathematikleistung wurde in den letzten Jahren, sowohl für den Primar- als auch für den Sekundarstufenbereich, mehrfach belegt (vgl. Gebhardt, Rauch, Mang, Sälzer & Stanat (2013); Heinze, Herwartz-Emden, Braun & Reiss (2011); Prediger & Özdil (2011)). In der Literatur werden fächerübergreifende und fachspezifische Maßnahmen vorgestellt, die integrative Sprachfördermöglichkeiten für den Fachunterricht aufzeigen (vgl. Goglin, Lange, Hawighorst, Bainski, Heintze, Rutten & Saalmann (2011); Leisen (2011); Schmölzer-Eibinger, Dorner, Langer, & Helten-Pacher (o.D. online); Feilke (2012)). Diese Möglichkeiten zeigen einerseits den facettenreichen Einsatz im Fachunterricht auf, andererseits erfordert deren Umsetzung im Unterricht von den Lehrkräften Kenntnisse in Hinblick auf die sprachlichen Anforderungen des Fachunterrichts. In einer Studie konnte gezeigt werden, dass Lehrkräfte Sprachförderung auch für nicht-sprachliche Fächer befürworten. Eine aktive Beteiligung findet jedoch nach Angaben der Lehrkräfte, aufgrund der als fehlend empfundenen Qualifizierung im Bereich Sprachförderung und Deutsch als Zweitsprache, nicht statt (vgl. Becker-Mrotzek, Hentschel, Hippmann & Linnemann (2012)).

Das FörBis-Projekt

Im Rahmen des vom Mercator-Institut geförderten Projekts: „Förderung der Bildungssprache Deutsch im Deutschunterricht und im Fachunterricht an der Sekundarstufe I auf der Grundlage förderdiagnostischer Verfahren“ (FörBis) werden im Teilprojekt Mathematik beide Akteure des sprachsensiblen Mathematikförderunterrichts in den Blick genommen. Das Forschungsinteresse richtet sich einerseits auf die angenommen Veränderungen in den sprachlichen und mathematischen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I. Andererseits werden die Veränderungen bei den Studierenden der pädagogischen Hochschule Ludwigsburg untersucht, die den Förderunterricht über ein Schuljahr hinweg durchführen und von den Mitarbeitern des Projekts fachlich unterstützt werden. Es interessiert hierbei v.a. ob und wenn ja welche Veränderungen sich im Sprachgebrauch der Förderlehrkräfte zeigen, die im Rahmen der sprachsensiblen Mathematikförderung auch ihr eigenes sprachliches Handeln im Unterricht reflektieren.

Methodisches Vorgehen

Mit den Podcasts wird die rein sprachliche Vermittlung mathematischer Inhalte zentralisiert (Schreiber & Klose, 2014). In einem Pre-Post-Testdesign erstellen Studierende, die den Förderunterricht im Schuljahr 2015/16 durchführen, Podcasts in Kleingruppen (N=2 und N=3). Darin werden mathematische Sachverhalte adressatenorientiert erklärt, die für die entsprechenden Fördergruppen relevant sind. Am Ende des Schuljahres werden von den jeweiligen Studierenden ihre eigenen Podcasts überarbeitet. In einem leitfadengestützten Interview werden die Begründungen der Studierenden zum Aufbau sowie zu Bedeutungsmerkmalen ihrer Podcasts erhoben. Durch eine qualitative Auswertung wird bei der Gegenüberstellung beider Endprodukte herausgearbeitet, ob sich Veränderungen auf der Wort- und Satzebene sowie Unterschiede im Sprachgebrauch der Förderlehrkräfte, nach den Praxiserfahrungen im sprachsensiblen Mathematikförderunterricht und der fachlichen Begleitung, zeigen. Es soll geprüft werden, ob der Einsatz von Podcasts im Rahmen des FörBis-Projektes als Instrument geeignet ist, um Veränderungen im Sprachgebrauch der Förderlehrkräfte zu untersuchen.

Erste Einsichten in das Material

Die Erstellung der Podcasts richtet sich an das Vorgehen der „PrimaPodcasts“ von Schreiber und Klose (2014). Da die Sprache das einzige Mittel ist, das für die Erstellung der Podcasts verwendet werden kann, wird dieser eine besondere Bedeutung beigemessen. In mehreren Überarbeitungsprozessen haben die Studierenden die Möglichkeit, sowohl über didaktische Reduktionen als auch über die sprachliche Darstellung ihrer Erklärungen zu reflektieren um ihre Podcasts sukzessive zu erstellen. Aus den Drehbüchern können erste Änderungen im Überarbeitungsprozess der Studierenden festgehalten und analysiert werden. Die Analyse der Drehbücher, die als Grundlage für die Aufnahme der Podcasts dienen, erfolgt auf sprachlicher Ebene.

In einer ersten Pilotierung zeigte sich, dass Studierende (N=5) die über ein Semester ein Seminar zu „Mathematik und (Zweit)Sprache“ besuchten, bei der Erstellung ihres Podcasts auch bildungssprachliche Merkmale (vgl.

Feilke 2012) in den Blick nahmen, die für manche Schülerinnen und Schüler schwierigkeitsgenerierend sein können. Diese Änderungen zeigten sich einerseits in den schriftlich vorliegenden Drehbüchern (Abb.1).

Michael: Hallo. *Weißt du eigentlich noch, was Division ist? Division bedeutet, dass* ***man*** *etwas teilt. […]* *Maren: […]* ***Kreise*** *auf deinem Arbeitsblatt immer vier Schüler* ***ein****. […]*	*Michael: Hallo.* *Weißt du eigentlich noch, was Division ist? Division* ***bedeutet teilen****. […]* *Maren: […]* ***Umkreise*** *auf deinem Arbeitsblatt immer vier Schüler. […]*

rung; N=5

Nach der Überarbeitung des ersten Drehbuches (Abb.1, links) wurden beispielsweise unpersönliche Ausdrucksweisen (man), Verbklammern (Kreise…ein) und längere Satzkonstruktionen vermieden (Abb.1, rechts). Die Annahme, dass bei dieser Überarbeitung der Fokus auf den sprachlichen Merkmalen lag, wurde in dem Interview von den Studierenden bestätigt.
Bei den Podcasts der Förderlehrkräfte zeigt die erste Analyse der Drehbücher (Pre-Test) (N=3 und N=2), dass viele bildungssprachliche Merkmale sowohl auf der Wort- als auch auf der Satzebene analysiert werden können. Eine sprachliche Überarbeitung in Hinblick darauf ist nicht zu beobachten.

„[…] Du machst einen kleinen waagerechten Strich. Unter dem Strich schreibst du in wie viele gleichgroße Teile du die Pizza zerschnitten hast und über den Strich, wie viele Teile du gegessen hast. Den Strich nennen wir Bruchstrich. Die Zahl darunter heißt Nenner, die Zahl darüber Zähler.“

Abbildung 19: Auszug aus dem Drehbuch 2 zu Brüchen (Pre-Erhebung)

In den Podcasts werden besonders fachsprachliche Merkmale fokussiert. Aus den Interviews geht hervor, dass die Verwendung bildungssprachlicher Merkmale, exemplarisch am Beispiel der Adverbien „darunter und darüber“ (Abb. 2), zur Unterstützung des Verständnisses der fachsprachlichen Begriffe eingebunden werden. Dass aber auch diese sprachlichen Merkmale für manche Schülerinnen und Schüler schwierigkeitsgenerierend sein können, wird nicht thematisiert. Ein Ziel der Begleitveranstaltung ist, unter Berücksichtigung der fachlichen Inhalte, auch bildungssprachliche Merkmale zu fokussieren, um diese ebenfalls bei der Unterrichtsplanung und –gestaltung zu berücksichtigen.

Reflexion und Ausblick

Der Einsatz von Podcasts zeigt erste positive Aspekte die im Rahmen des FörBis-Projektes weitergedacht werden können. Die Sprache als einziges Medium zur Erklärung mathematischer Sachverhalte führte dazu, dass die Studierenden nicht nur über die fachlichen Inhalte, sondern auch über die sprachliche Darstellung dieser reflektieren mussten. Mit dem Einsatz der Podcasts soll nicht die rein sprachliche Vermittlung im Mathematikförderunterricht zentralisiert werden, vielmehr geht es darum, die Sprachreflexion und das Sprachbewusstsein der angehenden Lehrkräfte anzuregen. Es bleibt abzuwarten, ob die Gegenüberstellung der Drehbücher sowie die Analyse der Interviews aus dem Pre- und Post Erhebungen Änderungen im Sprachverhalten und Sprachbewusstsein der Studierenden aufzeigen.

Literatur

Becker-Mrotzek, M.; Hentschel, B.; Hippmann, K.; Linnemann, M. (2012): Sprachförderung in deutschen Schulen-die Sicht der Lehrerinnen und Lehrer. Ergebnisse einer Umfrage unter Lehrerinnen und Lehrern. Online: http://www.mercator-institut-sprachfoerderung.de/fileadmin/user_upload/Lehrerumfrage_Langfassung_final_30_05_03.pdf. Zuletzt geprüft: 18.03.2016.

Feilke, H. (2012): Bildungssprachliche Kompetenzen-fördern und entwickeln. Online: http://www.uni-giessen.de/fbz/fb05/germanistik/absprache/sprachdidaktik/aufsaetzelinks/pdbabildungssprache. Zuletzt geprüft: 18.03.2016

Gebhardt, M.; Rauch, D.; Mang, J.; Sälzer, C.; Stanat, P. (2013): Mathematische Kompetenz von Schülerinnen und Schülern mit Zuwanderungshintergrund. In: Manfred Prenzel (Hrsg.): PISA 2012. Fortschritte und Herausforderungen in Deutschland. Münster: Waxmann, 275–308.

Gogolin, I.; Lange, I.; Hawighorst, B.; Bainski, C.; Heintze, A.; Rutten, S.; Saalmann, W. (2011): Durchgängige Sprachbildung - Qualitätsmerkmale für den Unterricht. Münster [u.a.]: Waxmann (FörMig-Material, 3).

Heinze, A.; Herwartz-Emden, L.; Braun, C.; Reiss, K. (2011): Die Rolle von Kenntnissen der Unterrichtssprache beim Mathematiklernen. Ergebnisse einer qualitativen Längsschnittstudie in der Grundschule. In: Susanne Prediger und Erkan Özdil (Hrsg.): Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit. Bd. 32. Münster, New York, München, Berlin: Waxmann (Bd. 32), 11–33.

Leisen, J. (2011): Praktische Ansätze schulischer Sprachförderung –Der sprachsensible Fachunterricht. Online unter: www.hss.de/download/111027_RM_Leisen.pdf. Zuletzt geprüft: 03.03.2016

Prediger, S.; Özdil, E. (Hg.) (2011): Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit. Münster, New York, München, Berlin: Waxmann (Bd. 32).

Schmölzer-Eibinger, S.; Dorner, M.; Langer, E.; Helten-Pacher, M.-R. (o.D.): Handbuch: Sprachförderung im Fachunterricht in sprachlich heterogenen Klassen. Online unter https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/ba/dic_bericht_lang_24484.pdf?4dzgm2, zuletzt geprüft am 30.10.2015.

Schreiber, Chr., Klose, R. (2014): Audio-Podcasts zu mathematischen Themen-Begriffsbildung mit digitalen Medien. In: Ladel, Silke; Schreiber, Christof (Hg.) (2014): Von Audiopodcast bis Zahlensinn. Münster: WTM, Verl., 31-60.

Walther PARAVICINI, Münster, Anja PANSE, Paderborn

Leseverhalten und Rationalität von Studienanfängerinnen und -anfängern

Einhergehend mit der Bologna-Reform wird seit dem Wintersemester 2011/12 an der Universität Paderborn für Studierende des gymnasialen Lehramts im ersten Semester anstelle der vierstündigen Vorlesung „Analysis I" die zweistündige Veranstaltung „Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten" angeboten. In einem *Design-Based-Research*-Experiment wurden seit dem Wintersemester 2012/13 in dieser Veranstaltung Lehrinnovationen und -konzepte implementiert und erprobt ([HHP14], [HHP15a]). Bereits nach der ersten Iteration gelangten [HHP] zu der Vermutung, dass bei vielen Studierenden Schwierigkeiten beim Lesen mathematischer Texte vorhanden sind und gewählte Arbeitsstrategien nicht ausreichen, um wissenschaftliche Texte sinnentnehmend zu lesen.

In diesem Bericht stellen wir eine allgemeine Konzeptualisierung von Leseverhalten als Teil einer laufenden empirischen Untersuchung vor.

Theoretischer Hintergrund

Ziehen wir etwa die Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife heran [KMK14], so dürfen wir davon ausgehen, dass Studienanfänger aus der Schule im Lesen auch komplexer pragmatischer Texte geübt sind, wir vermuten aber, dass das sinnentnehmende Lesen speziell mathematischer Fachtexte für sie meist keine zentrale Rolle gespielt hat (es tritt in den Bildungsstandards auch nur unter Anforderungsbereich III im Kompetenzbereich K6 auf). Die Literatur zeigt aber, dass sich Kompetenzen beim Lesen von Texten bestimmter Genres nicht ohne weiteres auf andere Genres übertragen lassen (siehe etwa [SSS12]). Und Lehrbuchtexte in der Hochschulmathematik oder, spezieller noch, typische Beweisführungen aus dem universitären Kontext unterscheiden sich offenkundig deutlich von denjenigen Genres, welche aus der Schule vertraut sind.

Dementsprechend ist es nicht verwunderlich, dass Studienanfänger mathematische Texte anders lesen als fortgeschrittene Studierende (und die wiederum anders als Dozentinnen und Dozenten) [SvdS14, SSS12].

Die für uns zentralen Beobachtungen, welche das Lesen von Anfängern charakterisieren, sind die folgenden:

- Anfänger lesen tendenziell linear, wohingegen Experten tendenziell nicht-linear lesen und häufiger zwischen Zeilen vor und zurückspringen.
- Anfänger lesen Formeln Zeichen für Zeichen und konzentrieren sich beim Lesen tendenziell mehr auf die Formeln als auf den Text, der den

Sinnzusammenhang herstellt – Experten können (substantielle Teile von) Formeln als Sinneinheiten lesen und achten tendenziell mehr auf den ausformulierten Text, vgl. [SvdS14].

- Anfänger bemerken Ungenauigkeiten und Unstimmigkeiten im Text seltener und, selbst wenn sie etwas feststellen, ist es deutlich weniger wahrscheinlich, dass sie deshalb aktiv werden und einen eigenständigen Versuch unternehmen, diese Unstimmigkeiten auszuräumen oder die Ungenauigkeiten zu klären, vgl. [SSS12].

Wir konzentrieren uns im folgenden auf die dritte dieser Beobachtungen, denn die erste Beobachtung gibt wohl eher ein Symptom wider, als dass sie direkt auf eine falsche Strategiewahl hindeutet: [HAI14] weisen nach, dass sich dieses Verhalten schon dann deutlich ändert, wenn Anfänger dazu aufgerufen werden, sich jede Aussage im Text im Zusammenhang zu erklären.

Die zweite Beobachtung ist offenbar typisch für Experten-Novizen-Vergleiche: Auch auf anderen Gebieten muss sich der Anfänger erst mühsam erarbeiten, wie man kleinere Einheiten zu größeren Sinneinheiten (*chunks*, vgl. [CS73]) zusammenfasst. Hier scheinen lediglich Übung und Erfahrung zu helfen.

Das im letzten der drei Punkte angesprochene Phänomen könnte zum Teil darauf beruhen, dass die Strategie, sich nicht an jeder kleinen Unstimmigkeit in einem Text aufzuhalten, sondern zügig weiterzulesen und in einer Gesamt- oder Rückschau einen Eindruck vom Sinn eines Textes zu erhalten, für andere Textformate durchaus zielführend ist (z.B. beim Lesen fremdsprachiger Zeitungsartikel). Eine extreme Variante dieser Strategie ist das sogenannte *skimming*, bei dem man einen Text bloß linear nach Schlüsselbegriffen und Strukturmarkern durchsucht, etwa um sich zu orientieren.

Leser haben generell einen Vorrat an eingeübten, automatisierten Strategien, und es bedarf eines *triggers*, damit sie aus ihrem automatisierten Lesemodus in einen langsamen, analytischen, bewussten Modus übergehen, siehe [PB84].

Eine offenkundige Parallele besteht hier zur kognitionswissenschaftlichen Unterscheidung zwischen dem schnellen, automatischen, assoziativ arbeitenden und unbewussten „System 1“ und dem langsamen, anstrengenden, selten arbeitenden, logischen und bewussten „System 2“. System 1 wäre etwa durchaus bereit, eine schwierige Frage (z.B. „Ist das hier ein valider, logischer Schluss?“) durch eine einfache, ähnliche Frage (z.B. „Sieht dies aus wie die andere Mathematik im Lehrbuch?“) zu substituieren und diese dann zu beantworten, siehe [K12].

Manche Kognitionswissenschaftler postulieren ein Konstrukt „Rationalität“ als die Tendenz, eine sich anbietende, aber inkorrekte Antwort noch einmal überdenken zu können – also, grob gesagt, als die generelle Bereitschaft, System 2 zum richtigen Zeitpunkt aktiv werden zu lassen [S12]. Hierzu existieren bewährte Testinstrumente, und es wäre interessant, zu untersuchen, inwieweit die Lesefähigkeit in Bezug auf mathematische Texte mit dem Konstrukt „Rationalität“ korreliert und ob sich dementsprechend die „Rationalität“ im Laufe eines Mathematikstudiums erhöht.

Mögliche Interventionen

Für Interventionen sehen wir deshalb drei Ansatzpunkte:

- Die Bereitschaft des Lesers zu stärken, im Sinne des fachwissenschaftlichen Diskurses verständnisorientiert zu lesen, sowie den Glauben, dies auch leisten zu können (vgl. [SSS12], p. 243, [SvdS14], p. 85).
- Eine „Entschleunigung“, das heißt: es wird geübt, einen Text langsamer und sorgfältiger zu lesen, mit besonderem Augenmerk darauf, die Stellen zu identifizieren, an denen es nötig ist innezuhalten (*trigger*) und aktiv selbst zu arbeiten.
- Strategien bereitzustellen, welche helfen, Verständnisprobleme zu überwinden und nach dem Innehalten wieder weiterzumachen.

Wenn wir nun versuchen, beispielhaft bisherige Interventionsansätze auf diese Aspekte hin zu untersuchen, so fällt auf, dass das self-explanation-Training nach [HAI14] am ehesten auf den zweiten Aspekt fokussiert, da es besonders darauf abzielt, Verständnislücken im Text und insbesondere in mathematischen Beweisen offenzulegen – der Schwerpunkt liegt dabei auf der Verständnisebene 3 nach [CS80], also auf den Zusammenhängen zwischen einzelnen Sätzen, wobei dies natürlich ein Verständnis der ersten beiden Ebenen (Wort und Satz) voraussetzt.

[HHP] zeigen mit der sogenannten Stolperstein-Methode, bei der sie ganz konkret an mathematischen Texten vorführen [HHP15b], auf welche Art und Weise man mit verschiedenen Verständnislücken umgehen kann und somit mathematische Texte mit Papier und Stift sinnentnehmend liest – die (weitgehend positiven) Evaluationsergebnisse dazu und die gewonnenen Erfahrungen sollen noch andernorts in einer A-posteriori-Analyse veröffentlicht werden. Festzuhalten ist, dass der Fokus bei dieser Methode auf dem dritten der genannten Aspekte und implizit auch auf dem ersten liegt.

Der Ansatz von [SS16], mit hermeneutischen Methoden das Lesen auch mathematischen Texte zu unterstützen, scheint wiederum eher den zweiten Aspekt in den Blick zu nehmen, wenngleich hier wie auch bei den anderen Ansätzen die anderen Aspekte immer mindestens implizit mitgedacht sind.

Wir vermuten, dass eine Kombination dieser Interventionen, die dann alle Aspekte gleichermaßen berücksichtigt, eine pragmatische und wirksame Hilfestellung für Anfänger beim Lesen wissenschaftlicher mathematischer Texte sein könnte.

Literatur

[CS73] Chase, W., Simon, H. *Perception in Chess*. Cogn. Psychology 4, 55-81, 1973.

[CS80] Collins, A., Smith, E. *Teaching the Process of Reading Comprehension*. BBN Report 4393, Cambridge, Massachusetts, 1980.

[HH12] Hilgert, I., Hilgert, J. *Mathematik - ein Reiseführer*. Springer, 2012.

[HHP14] Hilgert, J., Hoffmann, M. & Panse, A. *Handlungsbedarf in fachmathematischen Veranstaltungen?–Spezielle Maßnahmen an der Universität Paderborn*. Beiträge zum Mathematikunterricht, Münster: WTM-Verlag, 2014)

[HHP15a] Hilgert, J., Hoffmann, M. & Panse, A. *Kann professorale Lehre tutoriell sein? Ein Modellversuch zur „Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten*. In W. Paravicini, J. Schnieder (Hrsg.), Hansekolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik (pp. 23–36). Münster: WTM Verlag, 2015.

[HHP15b] Hilgert, J., Hoffmann, M. & Panse, A. *Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten: tutoriell und transparent*. Springer-Verlag, 2015.

[HAI14] Hodds, M., Alcock, L. & Inglis, M. Self-Explanation Training Improves Proof Comprehension. Journal for Research in Math. Education, 45 (1), 62-101, 2014.

[H09] Houston, K. *How to Think Like a Mathematician - A Companion to Undergraduate Mathematics*. Cambridge University Press, 2009.

[K12] Kahneman, D. *Thinking, Fast and Slow.* Penguin, 2012.

[KMK14] Beschlüsse der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012. *Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife.* Köln: Wolters Kluwer, 2014.

[PB84] Palincsar, A., Brown, A. *Reciprocal Teaching of Comprehension-Fostering and Comprehension-Monitoring Activities*. Cogn. and Instr., 1 (2), 117-175, 1984.

[SS16] Scharlau, I., Schnieder, J. *Reading Mathematical Texts with Philosophical Methods.* Vortrag auf der ICME 13, Hamburg, 2016

[SSS12] Shepherd, M., Selden, A. & Selden, J. *University students' reading of their first-year mathematics textbooks.* Math. Thinking and Learning 14.3, 226-256, 2012.

[SvdS14] Shepherd, M., van de Sande, C. *Reading mathematics for understanding – From novice to expert*. Journal of Mathematical Behavior, 35, 74-86, 2014.

[S12] Stanovich, K. *On the Distinction Between Rationality and Intelligence: Implications for Understanding Individual Differences in Reasoning*. In K. Holyoak, R. Morrison (Hrsg.), The Oxford Handbook of Thinking and Reasoning. Oxford University Press, 2012.

Tobias PEFFER, Siegen

Schreiben im Mathematikunterricht der Grundschule: Anlässe, Einschätzungen, Produkte

Das Potenzial des Schreibens von Texten in den Sachfächern ist vielfach nachgewiesen worden: Es ermöglicht durch Aufbau (bildungs-)sprachlicher Kompetenzen den eigenständigen Zugang zu den Inhalten und Erkenntnissen der verschiedenen Fächer und fördert fachliches Lernen (Thürmann, Pertzel & Schütte, 2015). Dies gilt insbesondere, wenn der Fokus auf adressatenbezogene, kommunikativ-strukturierte Textproduktion gesetzt wird.

In der literalen Didaktik wird die Förderung schriftsprachlicher Kompetenzen in jedem Fach als Verbindung von sprachlichem und fachlichem Lernen in den Vordergrund gerückt, wozu das Schreiben längerer, kohärenter Texte unter Berücksichtigung sowohl der kommunikativen als auch der epistemischen Funktion von Sprache eine wesentliche Rolle einnimmt. Kommunikativ-epistemische Schreibsettings, die sowohl einen Austausch von Gedanken, Ansichten und Fakten anregen, als auch gleichzeitig den Aufbau und die Strukturierung von Wissen ermöglichen, sind aus schreibdidaktischer Perspektive als Brücke zwischen Sprache und Fach anzustreben (Schmölzer-Eibinger et al., 2013).

Eine Verbindung von Mathematik- und Schreibdidaktik könnte durch geeignete Schreibanlässe sowohl die Schreibkompetenzen, als auch durch Reflexion über Vorgehensweisen inhalts- und prozessbezogene mathematische Kompetenzen fördern. Schriftliche Produkte binden dabei sämtliche Schülerinnen und Schüler ein und ermöglichen eine Reflexion, Strukturierung, Sammlung und Vernetzung von Wissen, welches die Flüchtigkeit der mündlichen Kommunikation so nicht realisieren lässt. Gleichwohl werden Schreibaufgaben im Mathematikunterricht sehr wenig genutzt, besonders in Form längerer und adressatenorientierter Texte (Selter, 1994; Maier, 2000).

Brief und Sammelbucheintrag als profilierte kommunikativ-epistemische Schreibanlässe im Mathematikunterricht

Profilierte Schreibaufgaben gelten als besonders lernförderlich, da sie gleichermaßen die Realisierung formal-basaler und funktional-pragmatischer Schreibfähigkeiten unterstützen. Folgende Merkmale profilieren Schreibaufgaben: Den Schülerinnen und Schülern sollte die Funktion des zu schreibenden Textes transparent sein, das erforderliche fachliche und sprachliche Wissen verfügbar gemacht werden. Das Schreiben sollte zudem im Kontext sozialer Interaktion stattfinden und den Schreibenden die Möglichkeit gegeben werden, die Wirkung ihrer Texte auf Leser zu überprüfen (Bachmann & Becker-Mrotzek, 2010).

Profilierte Schreibaufgaben, die darüber hinaus die kommunikative und epistemische Sprachfunktion verbinden, finden im Mathematikunterricht der Grundschule kaum Anwendung und sind noch wenig erforscht. Textformen mit Potenzial sind der Mathebrief (Schmidt-Thieme, 2006) und der Sammelbucheintrag (Gubler-Beck, 2009). Der Mathebrief motiviert sowohl zur quantitativ als auch qualitativ hohen Textproduktion, regt Reflexionen über Mathematik und mathematische Objekte an und motiviert zudem aufgrund der Adressatenorientierung die Verwendung von Fachsprache intrinsisch. Kinder anderer Klassen oder ein neugieriger Experte sind als Kommunikationsempfänger geeignet (Schmidt-Thieme, 2006). Weniger konkretisiert sind die Leser der Einträge in das Sammelbuch, in denen ebenfalls Vorgehensweisen und Begriffe der Mathematik durch Schülerinnen und Schüler dargestellt werden. Diese Einträge können als Nachschlagewerk den Schreibenden selbst oder anderen Rezipienten als Unterstützung und Erinnerungshilfe dienen. Nach Gubler-Beck (2009) bietet das Sammelbuch ebenfalls die Möglichkeit der Reflexion, eine hohe Motivation der Textproduktion und Überarbeitung, sowie diagnostisches Potenzial. Aufgrund der offenen Gestaltungsart bietet die Textform einen geeigneten Einstieg in die Produktion informierender Textsorten in der Grundschule.

Beide Schreibanlässe erfüllen die Kriterien der Profilierung: Den Kindern ist die kommunikative Funktion der jeweiligen Textform transparent, sowohl die Beantwortung konkreter Fragen der Briefkontaktinitiatoren, als auch die Nachschlagefunktion der Sammelbucheinträge. Die Auswahl der Aufgaben und die vorangehende Arbeitsphase sollen Sorge tragen, dass das notwendige mathematische Wissen zur Realisierung der Schreibaufgabe zur Verfügung steht. Es gibt Leserinnen und Leser der Texte, auch wenn diese nicht aktiv in die Interaktion eintreten. Zur Berücksichtigen des Prozesscharakters des Schreibens wird die Phase der Überarbeitung durch die Durchführung von Schreibkonferenzen realisiert. Somit ist sowohl die Einbettung in soziale Interaktion gewährleistet, als auch die Überprüfung der Wirkung des Textes für den Schreibenden. Gleichwohl eröffnet die Orientierung am Schreibprozess die Überprüfung der Wirkung des Textes und Eintritt in soziale Interaktion mittels der Durchführung von Schreibkonferenzen.

Design des Forschungsprojekts

In einem explorativen Forschungsprojekt soll das Potential des Schreibens im Mathematikunterricht der Grundschule untersucht werden. Das Interesse liegt dabei darauf, mathematische wie auch sprachliche Kompetenzen zu erfassen, die Kinder bei der Umsetzung eines Schreibziels zeigen. Folgende Forschungsfragen ergeben sich dadurch:

Welche Kompetenzen zeigen die Schülerinnen und Schüler sprachlich und mathematisch in verschiedenen Schreibprodukten? Lässt sich mathematische Schreibkompetenz näher bestimmen und welche sprachlichen Register, welche Textprozeduren werden von den Schülerinnen und Schülern zur Erreichung des Schreibziels in verschiedenen Schreibanlässen im Mathematikunterricht der Grundschule genutzt? Inwieweit gibt es Unterschiede in Abhängigkeit von Textform und Adressat?

Den aufgeworfenen Forschungsfragen wird sich aus zwei Richtungen genähert: aus der Perspektive der Kinder und der Lehrpersonen.

In insgesamt vier 4. Klassen werden Schreibaufgaben zu den Textformen Mathebrief und Sammelbucheintrag gestellt. Jedes Kind schreibt dabei sowohl einen Sammelbucheintrag als auch einen Mathebrief. Um den Adressatenbezug zu berücksichtigen, gibt es zwei unterschiedliche Initiationen: ein Brief eines Kindes aus einem dritten Schuljahr und ein Brief eines Experte von der Universität. Ein erster Entwurf jedes Kindes wird jeweils in einer Schreibkonferenz besprochen und ggf. überarbeitet. Als geeignete mathematische Aufgaben haben sich in Vorstudien der Vergleich von Flächeninhalten zweier Formen sowie die Überprüfung von Großbuchstaben auf (Achsen-)symmetrie herausgestellt.

Die Schülerprodukte werden mithilfe der qualitativen Inhaltsanalyse ausgewertet, indem sowohl mathematikdidaktische, als auch schreibdidaktische Merkmale kategorisiert werden: aus mathematikdidaktischer Perspektive die geschilderten Strategien und Vorgehensweisen zur Lösung der Aufgaben, die Erklärungen mit Bezug auf die prozessbezogenen Kompetenzen und hinsichtlich der Frage, ob mathematisches Verständnis nachgewiesen werden kann. Aus Sicht der Schreibdidaktik sind die textformspezifischen Merkmale, die zur Erreichung des Schreibziels genutzt werden und die Textprozeduren, die durch das Kind angewandt werden herauszustellen und damit verbunden die gezeigten Schreibkompetenzen. In dieser explorativen Untersuchung sollen dabei mögliche Verbindungen der fachlichen und der sprachlichen Kategorien aufgedeckt werden.

In einer zweiten Blickrichtung werden die Einschätzungen und Einstellungen bezüglich Schreibkompetenzen im Mathematikunterricht der Grundschule durch leitfadengestützte Interviews mit 12 Lehrerinnen erfragt.

Erste Eindrücke und Ausblick

Ein erster Blick auf Schülerdokumente (s. Abb. 1.) zeigt, dass die Verschriftlichung einerseits Einblicke in den Gebrauch sprachlicher Mittel und der verwendeten Merkmale der Textform gibt, andererseits Aufschluss über die mathematische Vorstellung erlaubt und auch im Rahmen von Schreibaufgaben unterschiedliche Darstellungsformen der Mathematik Verwendung finden, z.B. um Achsensymmetrie zu exemplifizieren. Der Schüler benutzt unpersönliche Formulierungen mit „man“ und den Passiv. Zudem erläutert er explanativ („Wenn….“) und nutzt Fachwörter wie „horizontal“, „vertikal“, „symmetrisch“ oder „abgespiegelten“. Die deduktive und induktive Kategorienbildung als Grundlage für die Auswertung der erhobenen Daten soll in der Folge ermöglichen, die Beziehung von gezeigten sprachlichen und mathematischen Kompetenzen näher zu untersuchen.

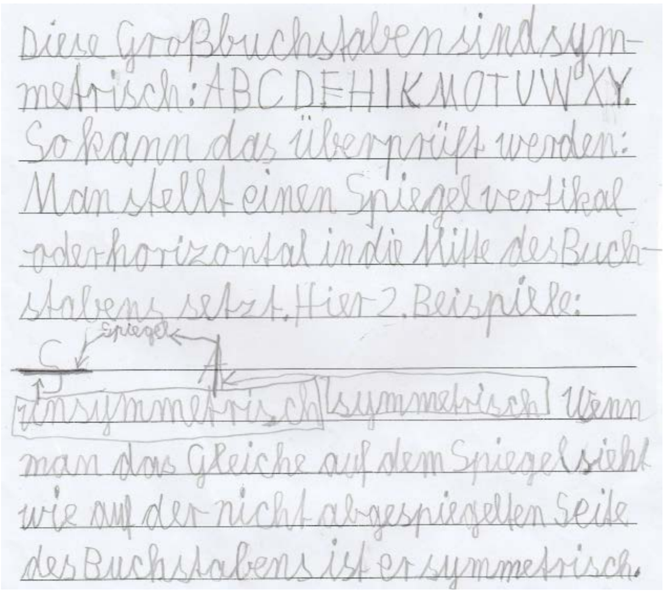


Abbildung 1: Beispiel eines Sammelbucheintrags zur Symmetrie von Großbuchstaben

Literatur

Bachmann, T. & Becker-Mrotzek, M. (2010). Schreibaufgaben situieren und profilieren. In: T. Pohl & T. Steinhoff (Hrsg.), *Textformen als Lernformen.* (S. 191-209). Duisburg: Gilles & Francke.

Gubler-Beck, A. (2009). Lernjournale im Mathematikunterricht. *Mathematischer und naturwissenschaftlicher Unterricht. Primar, 1*, 13-16.

Maier, H. (2000). Schreiben im Mathematikunterricht. *Mathematik lehren*, *99,* 10-13.

Schmidt-Thieme, B. (2006). "Lieber Squarry" - Schüler reflektieren über Mathematik in Briefen. In: E. Rathgeb-Schnierer (Hrsg.), *Wie rechnen Matheprofis?* (S. 211-224). München: Oldenbourg.

Schmölzer-Eibinger, S. et al. (2013). *Sprachförderung im Fachunterricht in sprachlich heterogenen Klassen.* Stuttgart: Fillibach bei Klett.

Selter, C. (1994). *Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe.* Wiesbaden: Deutscher Universitäts-Verlag.

Thürmann, E., Pertzel, E. & Schütte, A. U. (2015). Der schlafende Riese: Versuch eines Weckrufs zum Schreiben im Fachunterricht. In: S. Schmölzer-Eibinger & E. Thürmann (Hrsg.), *Schreiben als Medium des Lernens. Kompetenzentwicklung durch Schreiben im Fachunterricht.* (S. 17-45). Münster: Waxmann.

Kristina PENAVA, Dortmund

„Zufall und Wahrscheinlichkeit – das sind doch so was wie Gegenteile“ - eine qualitative Studie zu Vorstellungen bei Grundschulkindern

Dieser Beitrag gibt Einblicke in ein Forschungsprojekt, das sich mit Begründungen von Grundschulkindern für das Eintreten zufälliger Ereignisse beschäftigt. Was meinen Lernende, wenn sie äußern: „Zufall und Wahrscheinlichkeit – das sind doch so was wie Gegenteile“? Zuerst einmal lassen sich dahinter folgende Gedanken vermuten: *Zufällig* sei etwas Unberechenbares oder etwas das selten vorkomme – *wahrscheinlich* dagegen sei etwas, mit dem mit hoher Sicherheit gerechnet werden könne. Offen bleibt die Frage, welche Vorstellungen sich tatsächlich dahinter verbergen.

Fachliche Perspektive: Zugänge zur Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit als Grad der Sicherheit, mit dem ein zufälliges Ereignis eintreten kann, lässt sich über verschiedene Zugänge modellieren. Klassisch wird Wahrscheinlichkeit (in Gleichverteilungssituationen) aufgrund theoretischer Überlegungen, über das Verhältnis günstiger zu möglichen Fällen, angenommen. Das frequentistische Modell nähert die Wahrscheinlichkeit als Schätzwert über die Stabilisierung relativer Häufigkeiten bei hoher Versuchszahl an. Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen, die nicht wiederholbar sind, lassen sich durch subjektivistische Zugänge modellieren (vgl. z.B. Eichler & Vogel 2009).

Auch unter exakt gleichen Bedingungen treten in Zufallsversuchen unterschiedliche Ergebnisse auf. Diese Variabilität ist bei wenigen Versuchswiederholungen besonders hoch, nimmt jedoch bei wachsender Versuchsanzahl ab. Gleichzeitig nähern sich die relativen Häufigkeiten der theoretischen Wahrscheinlichkeit an. Dieses Phänomen wird als empirisches Gesetz der großen Zahlen beschrieben. Dabei bleibt ein Teil der Variabilität ungeklärt (vgl. Eichler & Vogel 2009, S. 173).

Lernendenperspektive: Begründungszugänge zur Wahrscheinlichkeit

Studien, die Lernprozesse in den Blick nehmen, nähern sich dem Wahrscheinlichkeitsverständnis über verschiedene Begründungszugänge. Diese lassen sich in drei Kategorien unterteilen: theoretisch, empirisch und alternativ (vgl. Hawkins & Kapadia 1984; Wollring 1994; Schnell 2014). Weitere Verständnisvarianten, wie Vorstellungen zur stochastischen Abhängigkeit, animistische Vorstellungen (vgl. Wollring 1994) und Ursachenzuschreibungen durch persönliche Bedeutsamkeit eines Ereignisses, findet man zwar vor allem bei jüngeren Kindern, sind jedoch auch noch bei Erwachsenen zu beobachten (vgl. z.B. Tversky & Kahneman 1982).

Eine zentrale Grundlage für den Aufbau tragfähiger Vorstellungen ist die Beziehung zwischen relativen Häufigkeiten und theoretischen Wahrscheinlichkeiten (vgl. Schnell 2014, S.160). Weitere zentrale Faktoren für den Aufbau tragfähiger Vorstellungen werden hier als Forderungen an Lernumgebungen formuliert:

Tatsächliche Erfahrung: experimentelles Untersuchen zufälliger Vorgänge (vgl. z.B. Fischbein 1975, Wollring 1994, Schnell 2014)

Systematisieren: Frequentistische Lernumgebungen mit Artikulationsunterstützung (vgl. Hawkins & Kapadia 1984, Wollring 1994)

Stochastischen Kontext thematisieren: Beziehung zwischen Mustern und Variabilität über Vergleiche von kurzer und langer Sicht (vgl. Schnell 2014)

Forschungsinteresse und Untersuchungsdesign

In diesem Beitrag liegt der Fokus auf der Frage, wann die Lernenden welche der beschriebenen Begründungszugänge nutzen. Dazu wurden in einer Hauptstudie insgesamt 27 Kinder im Alter von 8–9 Jahren in je drei leitfadengestützten Trio-Interviews befragt. Neben einem Interviewleitfaden ist die Erkundungssituation: *Wer gewinnt?* Interviewgrundlage.

Erkundungssituation: Wer gewinnt?

Die Erkundungssituation soll hier kurz anhand der oben genannten Forderungen an Lernumgebungen vorgestellt werden:

Abb. 20 Spielplan, Ergebnisliste, Einzelspielliste, Punktediagramm

Tatsächliche Erfahrung wird ermöglicht durch eine Spielsituation, in der vier farbige Spielfiguren, angetrieben von einem unfairen Farbwürfel, auf einem Spielfeld (vgl. Abb. 1) um die Wette laufen. Die grüne Spielfigur ist mit drei Feldern im klaren Vorteil. Vor jedem Spiel müssen die Lernenden einen begründeten Tipp abgeben, wer gewinnen wird. Diese Tipps werden in einer Gewinnerliste protokolliert.

Systematisieren wird dadurch ermöglicht, dass die Kinder neben der Gewinnerliste, während des Spiels weitere Ergebnisprotokolle führen (vgl. Abb.1). Die Ergebnisliste dokumentiert als Urliste die Reihenfolge der Würfelausgänge. In der Einzelspielliste werden die Ergebnisse nach Farbe sortiert. Das Punktediagramm zeigt die kumulierten Häufigkeiten aller Spiele.

Stochastischen Kontext thematisieren wird ermöglicht durch (1) das Vergleichen der unterschiedlichen Protokollinstrumente, d.h. Unterschiede zwischen Einzelwurf und längere Sicht (kumulierte Häufigkeiten), und (2) das Vergleichen der Protokolle mit Säulendiagrammen zu je 6000 Würfen.

Ergebnisse: Erste Einblicke in Begründungen von Lernenden

Für den Erstzugriff auf die Daten dienen die oben genannten Begründungszugänge als Kategoriensystem. Äußerungen, die den Vorteil von grün über die Farbverteilung bestimmen, wurden dem theoretischen Zugang und Äußerungen, die den Vorteil von grün über die Anzahl der Siege begründen, dem empirischen Zugang zugeordnet. Äußerungen zur Stochastischen Abhängigkeit, Animistische Vorstellungen und Ursachenzuschreibungen durch persönliche Bedeutsamkeit, wurden dem alternativen Zugang zugeordnet. Dabei wurden noch keine Bewertungen hinsichtlich der Tragfähigkeit der Aussagen vorgenommen.

Im Vergleich aller ersten (von drei) Interviews, fällt auf, dass die Gruppen sich in der Wahl der Begründungszugänge unterscheiden. Einige Trios wählen hauptsächlich den theoretischen Zugang, andere Trios begründen eher alternativ. Alle Lernenden nutzen die verschiedenen Begründungszugänge sehr variabel und wechseln zwischen den verschiedenen Zugängen hin und her. Es stellt sich die Frage, warum die Wahl der Begründungszugänge so variabel ist und welche Faktoren die Wahl beeinflussen.

Bei genauerer Betrachtung der einzelnen Interviews lassen sich Situationen finden, in denen die Lernenden bevorzugt einen Zugang wählen. Zu Beginn des Interviews, vor Entdeckung der Farbverteilung, begründen die Kinder vornehmlich alternativ.

94	F	Etwas stimmt nicht. *(schaut sich den Würfel an)* Es gibt dreimal Grün.
95	A	Darf ich mal gucken?
97	F	Deswegen gewinnt immer Grün. Also ist das so, dass Grün immer gewinnt.

Sobald die Lernenden die Farbverteilung entdeckt haben, ist über alle Interviews hinweg die erste Begründung dem theoretischen Zugang zuzuordnen.

42	B	Weil- erstens, weil Grün am meisten ähm Farben hat
45	M	(…) weil Grün hat die meisten Gewinnchance.
48	M	Weil es einmal 3 Grün gibt und von den anderen Farbe nur einen.
50	M	Und dann ist glaube ich die Gewinnchance größer, dass Grün gewinnt.

Bei mathematisch erwarteten Ereignissen (grün gewinnt/grün wird getippt) begründen die Lernenden ihre Entscheidung oder das Eintreten des Ereignisses eher theoretisch.

32	IV	Gut, warum hat Gelb trotzdem Mal gewonnen?
34	D	Weil wir, wir haben Hoffnung dafür. Wir haben dafür wirklich Hoffnung.

36	D	Und weil wir hier in Dortmund leben und das ist halt *(schlägt sich auf die Brust)*

Bei mathematisch unerwarteten Ereignissen (gelb gewinnt/gelb wird getippt) begründen die Kinder vornehmlich alternativ, oder nennen Glück als Begründung.

Fazit und Ausblick

Die Lernenden nutzen unterschiedliche Begründungszugänge abhängig von verschiedenen Situationen. Dabei spielt z.B. der letzte Gewinner eine entscheidende Rolle. Aber auch Aussagen anderer Kinder, der Spielstand oder Einzelergebnisse nehmen Einfluss auf die Wahl des Begründungszugangs. Unterschiede in der Wahl der Begründungszugänge zwischen Vorschauperspektive (Prognose) und Rückschauperspektive (eingetretenes Ereignis) herauszustellen, ist anknüpfender Untersuchungsschritt. Spannend sind insbesondere die Äußerungen der Lernenden, in denen sie mit *Glück* begründen. Welche Vorstellungen sich hinter diesem Begriff verbergen wird Gegenstand weiterer Analysen sein.

Literatur

Eichler, A., Vogel, M. (2013). *Leitidee Daten und Zufall*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht: Reidel.

Hawkins, A. S., Kapadia, R. (1984). Children's conceptions of probability—a psychological and pedagogical review. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(4), 349-377.

Horvath, J., Lehrer, R. (1998). A model-based perspective on the development of children’s understanding of chance and uncertainty. *Reflections on statistics: Agendas for learning, teaching, and assessment in K-12*, 121-148.

Schnell, S. (2014). *Muster und Variabilität erkunden*. Wiesbaden: Springer.

Tversky, A., Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. *science*, *185*(4157), 1124-1131.

Wollring, B. (1994). *Qualitative empirische Untersuchungen zum Wahrscheinlichkeitsverständnis bei Vor- und Grundschulkindern.* Habilitation, Westfälische Wilhelms-Universität Münster.

Roland PILOUS, Timo LEUDERS, Christian Rüede, Basel und Freiburg

Untersuchung des Zusammenhangs mathematikbezogener fachlicher und fachdidaktischer Wissensfacetten bei angehenden Primarlehrpersonen

Bisherige Konzeptualisierungen des mathematikbezogenen fachlichen Wissens (CK) und des fachdidaktischen Wissens (PCK) zeigen große Unterschiede, aber auch Gemeinsamkeiten auf (Depaepe et al., 2013): Grob gesprochen umfasst CK substantielles und syntaktisches mathematisches Wissen, während PCK mindestens Wissen über Schülerkognitionen, Unterrichtsstrategien und verschiedene Repräsentationen mathematischer Sachverhalte umfasst. Eine viel diskutierte Frage ist, ob CK und PCK als Wissensbereiche sinnvoll unterschieden werden können. Zum Beispiel argumentieren McEwan & Bull (1991), dass jedes Fachwissen eine pädagogische Dimension hat und eine Unterscheidung daher nicht angemessen ist. Im Gegensatz dazu wurde in der COACTIV-Studie (Krauss et al., 2008) gezeigt, dass eine empirische Trennung der Wissensbereiche auf der Basis statistischer Auswertungen von Wissenstests möglich ist. Allerdings zeigen die Ergebnisse auch, dass CK und PCK sehr stark korrelieren, was auf eine hohe "Vernetzung" hindeutet.

Darüber hinaus gibt es Hinweise darauf, dass CK als eine notwendige Bedingung für PCK aufgefasst werden kann (Even, 1992). Betrachtet man aber die Streudiagramme aus der COACTIV-Studie (Krauss et al., 2008), so zeigt sich hier, dass es auch Lehrpersonen mit wenig CK gelungen ist, hohe Werte bei den PCK-Items zu erlangen. Dies spricht gegen eine notwendige Voraussetzung von CK in einem strengen logischen Sinn.

Ein weiteres Ergebnis der COACTIV-Studie ist, dass Lehrpersonen mit gutem Fachwissen stets auch hohe Werte bei den PCK-Items erzielten. Insbesondere fällt auf, dass gymnasiale Lehrpersonen trotz ihres geringeren Anteils an fachdidaktischen Veranstaltungen im Studium im Vergleich zu GHR-Lehrpersonen besser bei der Bearbeitung der PCK-Items abgeschnitten haben. Dies kann als Hinweis dafür gedeutet werden, dass CK gar eine hinreichende Bedingung für fachdidaktisches Wissen darstellt. Andererseits konnten Capraro et al. (2005) Belege dafür liefern, dass CK nicht hinreichend für PCK (bei angehenden Primarlehrpersonen) ist.

Aus den Ergebnissen der zitierten Studien wird deutlich, dass bisher noch kein einheitliches Verständnis des Zusammenhangs von CK und PCK existiert. Darüber hinaus ist es Gegenstand von Diskussionen, wie sehr die Ergebnisse durch die Wahl der Items beeinflusst werden. Des Weiteren ist klar, dass die genannten korrelativen Zusammenhänge auf der Basis quantitativer Studien nicht kausal interpretiert werden dürfen.

Um unsere Kenntnisse über die Zusammenhänge zwischen den Wissensbereichen zu erweitern, ist es sinnvoll, diese auf der Ebene kognitiver Prozesse zu untersuchen. Bei der Entwicklung einer Theorie kognitiver Prozesse, welche die Zusammenhänge zwischen den Wissensbereichen und ihren Facetten beschreiben und erklären, können qualitative Studien eine wichtige Rolle spielen.

In bisherigen qualitativen Studien geht es jedoch schwerpunktmäßig um eine Untersuchung der Bedeutung bzw. des Einsatzes verschiedener Wissensbereiche im Mathematikunterricht, oder um eine Untersuchung positiver unterrichtsbezogener Effekte des Fachwissens (vgl. Ball, 2001, Depaepe et al., 2013).

Eine Untersuchung der Bezüge zwischen Wissensbereichen, wie sie sich in den Argumentationen angehender Primarlehrpersonen bei ihrer Bearbeitung von typischen Handlungsanforderungen zeigen, gibt es bisher nicht. Die Betrachtung der ersten Phase der Ausbildung von Lehrpersonen ist dabei von besonderem Interesse, da hier die Wissensbereiche zunächst entstehen und sich vernetzen.

Forschungsfrage

Unser Ziel ist das Generieren von Hypothesen zum Zusammenhang mathematikbezogener fachlicher und fachdidaktischer Wissensbereiche bzw. -facetten bei angehenden Primarlehrpersonen in der ersten Phase ihrer Ausbildung. Eine notwendige Voraussetzung dafür ist eine vorgängige Beschreibung dieser Wissensbereiche und -Facetten. Die Forschungsfragen lauten genauer:

- Auf welches Wissen greifen angehende Primarlehrpersonen beim Bearbeiten unterrichtsbezogener Aufgaben zurück? Welche Wissensbereiche lassen sich empirisch unterscheiden?
- Welche Bezüge fachlicher und fachdidaktischer Wissensbereiche werden von angehenden Primarlehrpersonen in den Argumentationsprozessen hergestellt?

Dabei ist es wichtig zu betonen, dass der Wissensbegriff bewusst weit gefasst wird. Es genügt nicht, das Wissen unter einem normativen Gesichtspunkt zu betrachten (professionelles Wissen). Stattdessen sind wir auch an nicht korrektem, unvollständigen, subjektivem oder erfahrungsbasiertem Wissen interessiert, insofern es sich bestimmten Facetten des fachlichen und fachdidaktischen Wissens zuweisen lässt. Dies ist wichtig, da die Wissensbereiche in der ersten Phase der Ausbildung von Lehrpersonen noch nicht vollständig entwickelt sind.

Design der Erfassungssituation

Um das Wissen einerseits in einem situationsspezifischen Kontext zu erfassen und dabei andererseits möglichst umfangreiches wie auch präzise Informationen (auch durch die Möglichkeit des Nachfragens) zu erheben, wurden halbstrukturierte Interviews auf der Grundlage von Handlungssituationen geführt. Unter einer Handlungssituation verstehen wir typische Szenarien des Mathematikunterrichts, die durch Auszüge aus Lehrmitteln oder Schülerdokumente repräsentiert sind und mit Handlungsanforderungen („Tasks") verbunden sind (vgl. Biza et al., 2007). Die gewählten Handlungsanforderungen sind typisch für das Unterrichten von Mathematik in der Primarschule, werden in der Ausbildung von Lehrpersonen thematisiert und sind theoretisch fundiert (z. B. in Anlehnung an Bass & Ball, 2004).

Zum Beispiel wurde die gefärbte rautenförmige Maltafel (aus dem Zahlenbuch) als Repräsentation eines ganzheitlichen Zugangs zum Einmalseins gewählt und mit dem folgenden Szenario verbunden: „Stellen Sie sich vor, sie möchten den Einsatz der Maltafel zur Vertiefung des Einmaleins mit ihrer zweiten Klasse planen. Wie gehen Sie vor und worauf achten Sie?". In Abhängigkeit der Antworten wurden Nachfragen gestellt, wie zum Beispiel „Worum geht es bei der Maltafel?, Welche Schwierigkeiten erwarten Sie bei den Schülern?" oder „Welche Lernziele würden Sie formulieren?".

Stichprobe und Auswertung[4]

Das Sammeln der Daten (theoretisches Sampling) und die Auswertung folgt dem Ansatz der Grounded Theory (vgl. Corbin & Strauss, 1996), welcher ein induktives und deduktives Vorgehen verbindet und für die Entwicklung von Elementen einer Theorie aus empirischen Daten geeignet ist. Codes und Kategorien werden in vivo, aus den Daten und auf der Grundlage bestehender Konzeptualisierungen von CK und PCK entwickelt.

Die erste Stichprobe umfasst 6 Studierende der PH Nordwestschweiz im 2.-4. Semester, sowie 3 Experten, die hinzugenommen wurden, um die Varianz der Stichprobe gezielt zu erhöhen.

Alle Interviews wurden transkribiert. Das offene und axiale Kodieren ist noch nicht abgeschlossen. Dennoch können einige vorläufige Ergebnisse präsentiert werden. Die Wissenscodes wurden in der Phase des offenen Kodierens vergeben und in den folgenden (Sub-) Kategorien organisiert: Schülerbezogenes Wissen, curriculares bzw. unterrichtsbezogenes Wissen, Fachwissen und pädagogisches Wissen. Das schülerbezogene Wissen umfasst

[4] Für eine ausführlichere Beschreibung der Erfassungssituation, Stichprobe, Auswertung und vorläufigen Ergebnisse anhand von Beispielen sei auf das bei der ICME 13 eingereichte Paper der Autoren verwiesen: http://www.fhnw.ch/personen/roland-pilous/publikationen

zum Beispiel Wissen über (typische) Fehler, (Fehl-)Vorstellungen, Vorgehensweisen oder Denkweisen von Schülern. Bezüglich der zweiten Forschungsfrage wurden im Rahmen des axialen Kodierens bisher folgende Typen von Bezügen zwischen den (Sub-) Kategorien benannt:

- Fachwissen ist an curriculares bzw. unterrichtsbezogenes Wissen angeschlossen (und wird in der Funktion der Illustrierung aktiviert),
- Fachwissen ist mit pädagogischem Wissen assoziiert (und wird in der Funktion der Illustrierung aktiviert),
- Annahmen über den Lernprozess werden durch mathematische Analysen generiert
- Annahmen über den Lernprozess werden durch curriculare Analysen generiert

Literatur

Ball, D. L., Lubiensiki, S., & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In Richardson (Hrsg.), *Handbook of Research on teaching*. New York: Macmillan.

Bass, H. & Ball, D. L. (2004). A practice-based theory of mathematical knowledge for teaching: The case of mathematical reasoning. In Jianpan & Binyan (Hrsg.), *Trends and challenges in mathematics education*. Shanghai : East China Normal University Press.

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. *JMTE*, 10, 201-309.

Capraro, R., Capraro, M.; Parker, D., Kulm, G., & Raulerson, T. (2005). The Mathematics Content Role in Developing Preservice Teachers Pedagogical Content Knowledge. *J Res Child Educ*, 20, 102-118.

Depaepe, F. Verschaffel, L., & Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teach Teach Educ,* 34, 12-25.

Even, R. (1992). Subject-Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge: Prospective Secondary Teachers and the Function Concept. *J Res Math Educ,* 24, 94-116.

Krauss, S., Neubrand, M., Blum, W., Baumert, J., Brunner, M., Kunter, M., & Jordan, A. (2008). Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. *JMD,* 29, 223-258.

McEwan, H., & Bull, B. (1991). The Pedagogic Nature of Subject Matter Knowledge. *Am Educ Res J*, 28(2), 316-34.

Strauss, A., & Corbin, J. (1996). *Grounded Theory*. *Grundlagen qualitativer Sozialforschung*. Weinheim: Beltz.

Jennifer PLATH, Leuphana Universität Lüneburg

Auswirkung von sprachlicher und situationaler Komplexität auf den Bearbeitungsprozess von mathematischen Textaufgaben

Um Textaufgaben adäquat verstehen und erfolgreich am Mathematikunterricht teilhaben zu können, sind die Fähigkeit des Textverständnisses sowie die kompetente Verwendung von (Bildungs-)Sprache verstärkt zu einer zentralen Voraussetzung der Aufgabenbearbeitung geworden (vgl. Duarte et al. 2011). Inwiefern sich jedoch die Aufgabenmerkmale der sprachlichen und situationalen Komplexität auf diesen Verstehensprozess auswirken, ist bisher weitestgehend ungeklärt.

1. Theoretischer Hintergrund

Durch internationale Vergleichsstudien ins Bewusstsein gerückt, beschäftigen sich verschiedene Studien empirisch mit dem Zusammenhang zwischen sprachlichen Fähigkeiten und Mathematikleistungen. In der aktuellen Literatur wird angenommen, dass insbesondere der Sprachstand in der Unterrichtssprache benachteiligend sein kann. So zeigt eine Untersuchung der Zentralen Prüfung 10 Mathematik in Nordrhein-Westfalen, dass die Sprachkompetenz von Schülerinnen und Schülern einen deutlich stärkeren Zusammenhang zu ihrer Mathematikleistung aufweist, als Faktoren zum sozialen Hintergrund (Prediger et al. 2015). Erste qualitative Annäherungen zeigen Hürden, die sich insbesondere für sprachlich schwache Lernende bei der Bearbeitung von Mathematikaufgaben ergeben können. Wilhelm (2015) und Prediger et al. (2015) unterscheiden hierbei zwischen Lesehürden, prozessualen Hürden und konzeptuellen Hürden.

Da sich das vorliegende Dissertationsvorhaben mit der Bearbeitung von mathematischen Textaufgaben beschäftigt, wird zur Rekonstruktion des Bearbeitungsprozess der siebenschrittige Modellierungskreislauf nach Blum & Leiss (2007) herangezogen, in welchem als theoretisch zweistufiger Verstehensprozess die Bildung eines Situationsmodells und die Bildung eines Realmodells differenziert werden. Für diese beiden Teilkompetenzen des mathematischen Modellierens sind nicht nur mathematische, sondern insbesondere auch Komponenten des Textverstehens relevant (Leiss et al. 2007). Im ersten Schritt des Modellierungsprozesses muss die reale Situation durch Lesen des Aufgabentextes bzw. der grafischen Elemente verstanden werden. Dabei wird unter lesebasiertem Textverstehen „[…] eine kognitiv-aktive (Re-) Konstruktion von Information […], in der die im Text enthaltene ‚Botschaft‘ aktiv mit dem Vor- und Weltwissen der Rezipienten/innen verbunden wird“ verstanden (Christmann; Groeben 2006, S.146). Textverstehen kann demnach als interaktiver Prozess von Bottom-Up- und Top-Down-Prozessen verstanden werden. Bottom-Up-Prozesse umfassen textgeleitete Verarbeitungsprozesse, die durch semantische, syntaktische und stilistische Textmerkmale gesteuert werden. Unter Top-Down-Prozessen hingegen werden wissensgeleitete Verarbeitungsprozesse verstanden, welche durch Lesermerkmale wie Vorwissen, Zielsetzungen oder Interessen beeinflusst werden. Das Produkt des Leseverstehensprozesses wird als Situationsmodell bezeichnet und wird von jeder Leserin und jedem Leser individuell konstruiert (vgl. Schmid-Barkow 2010). Das Situationsmodell wird zum einen von den Aufgabenmerkmalen (mathematische und semantische Struktur, Kontext, Format, Informationsdichte und grafische Elemente) (Leiss 2007) und zum anderen von den intrapersonellen Aspekten (Lesekompetenz, Kontextwissen, kognitive Grundfähigkeit, mathematische Leistungsfähigkeit, Einstellungen gegenüber Mathematik bzw. dem Kontext und affektive Dispositionen) (Artelt et al. 2001) beeinflusst. Das entstandene Situationsmodell wird im nächsten Schritt vereinfacht und strukturiert, woraus das Realmodell resultiert.

2. Forschungsfragen und Untersuchungsdesign

Das Forschungsanliegen der Arbeit besteht darin zu untersuchen, welche Verstehenshürden bei der Bearbeitung von mathematischen Textaufgaben auftreten und wie sich der strategische Umgang der Schülerinnen und Schülern mit diesen Hürden gestaltet. Bezüglich dieses Anliegens wurden 4 Forschungsfragen formuliert:

1) Welche (erfolgreichen) Strategien zum Verstehen der Aufgabe lassen sich identifizieren?
2) An welchen Stellen des Bearbeitungsprozesses treten Hürden auf?
3) Inwiefern beeinflussen die situationale und die sprachliche Komplexität den Bearbeitungsprozess von mathematischen Textaufgaben?
4) Inwiefern beeinflussen die allgemeine Mathematikkompetenz und die Sprachkompetenz den Verstehensprozess?

Zur Beantwortung der Forschungsfragen wurde eine Laborstudie mit 16 Schülerinnen und Schülern des 9. Jahrgangs durchgeführt.

Durchführung. Die Einzelsitzungen mit den Lernenden dauerten jeweils 90 Minuten. Um die Frage zu beantworten, welche mentalen Prozesse beim Verstehen einer Textaufgabe tatsächlich generiert werden, wurde die Methode des Lauten Denkens eingesetzt (Stark 2010). Nach einer videogestützten methodischen Einführung bearbeiteten die Schülerinnen und Schüler vier Textaufgaben. Anschließend an die Phase der Aufgabenbearbeitung wurden die Sprachkompetenz mithilfe eines C-Tests und die inhaltsspezifische Mathematikkompetenz erhoben.

Aufgaben. In der Erhebung soll sowohl die Auswirkung von sprachlicher als auch von situationaler Komplexität untersucht werden, weshalb 4 Aufgabenkontexte systematisch bezüglich verschiedener Aspekte variiert wurden. Aspekte zur Variation der sprachlichen Komplexität stellen hierbei Komposita, komplexe Attribute, Passivformen, Satzgefüge, Nominalisierungen sowie Adjektivderivate dar. Die situationale Komplexität wurde mithilfe der Reihenfolge der Zahlen, der Struktur der Informationen sowie der Anzahl der überflüssigen Zahlen und der zusätzlichen Informationen variiert.

Datenanalyse. Nach der Transkription des Datenmaterials wurde mithilfe der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring ein erstes Kodiermanual auf der Grundlage der Lernstrategieforschung von Weinstein & Mayer (1986) entwickelt. Hierbei wurden die kognitiven Strategien in Organisations-, Elaborations- und Wiederholungsstrategien differenziert und im Datenmaterial kodiert.

3. Erste Datenanalyse und Ausblick

In einer ersten Datenanalyse wurden die Häufigkeiten der kognitiven Strategien in den Bearbeitungsprozessen der Schülerinnen und Schüler in einem der vier Aufgabenkontexte betrachtet. In den 16 Bearbeitungsprozessen lassen sich insgesamt 127 Strategieeinsätze erkennen, die sich unter Bezug auf die Klassifikation nach Weinstein & Mayer (1986) in 11 verschiedene Unterstrategien differenzieren lassen. Betrachtet man die kognitiven Strategien, lässt sich feststellen, dass in mindestens 75% aller Bearbeitungen mindestens eine Organisationsstrategie und/oder mindestens eine Wiederholungsstrategie auftritt und in 56% aller Bearbeitungen mindestens eine Elaborationsstrategie.

Zusammenfassend lassen sich in den Daten vielfältige verstehensbezogene Schwierigkeiten sowie Strategien der Schülerinnen und Schüler erkennen. Für eine adäquate Auswertung muss im nächsten Schritt ein Auswertungsmanual entwickelt werden, dass eine detaillierte Analyse der einzelnen Strategien ermöglicht. Interessant wären hierbei sowohl die Adaptivität der eingesetzten Strategie als auch der Zusammenhang zwischen auftretender Schwierigkeit und eingesetzter Strategie.

Literatur

Artelt, C., Schiefele, U., Schneider, W. & Stanat, P. (2001). Lesekompetenz: Testkonzeption und Ergebnisse. In J. Baumert et al. (Hrsg.): *PISA 2000 - Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich.* (S. 69 – 137). Opladen: Leske + Budrich.

Blum, W. & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical Modeling Problems? The example Sugarloaf and the DISUM Project. In C. Haines (Hrsg.): *Mathematical Modeling: Education, Engineering and Economics ICTMA 12* (S. 222-231). Chicbester: Horwood.

Christmann, U.; Groeben, N. (2006). Psychologie des Lesens. In B. Franzmann et al. (Hrsg.): *Handbuch Lesen*. (S. 135 – 223). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Duarte, J., Gogolin, I. & Kaiser, G. (2011). Sprachlich bedingte Schwierigkeiten von mehrsprachigen Schülerinnen und Schülern bei Textaufgaben. In E. Özdil & S. Prediger (Hrsg.), *Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit. Stand und Perspektive der Forschung und Entwicklung in Deutschland* (S. 35-54). Münster u.a. : Waxmann.

Leiss, D. (2007). *"Hilf mir es selbst zu tun". Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Prediger, S., Wilhelm, N., Büchter, A., Benholz, C., Gürsoy, E. (2015). Sprachkompetenz und Mathematikleistung – Empirische Untersuchung sprachlich bedingter Hürden in den Zentralen Prüfungen 10. *Journal für Mathematik-Didaktik* 36(1), S. 77-104.

Schmid-Barkow, I. (2010). Lesen: Lesen als Textverstehen. In H.-W. Huneke (Hrsg.): *Sprach- und Mediendidaktik (Taschenbuch des Deutschunterrichts, Band 1)* (S. 218-231). Baltmannsweiler: Schneider.

Stark, T. (2001). Lautes Denken in der Leseprozessforschung. In: *Didaktik Deutsch* 16 (29), S. 58 – 83.

Weinstein, C. E., Mayer, R.E. (1986). The teaching of learning strategies. In M. C. Wittstock (Hrsg.), *Handbook of researcg on teaching* (S. 315 – 327). New York: Macmillan

Wilhelm, N. (2015). *Hürden in Lösungsprozessen von mathematischen Prüfungsaufgaben durch sprachlich schwache Lernende – quantitative und qualitative Analysen.* TU Dortmund.

Melanie PLATZ, Engelbert NIEHAUS, Landau

What can we derive from South Africa in the field of Mobile Learning?

Through several studies which included Information and communication technology (ICT) in education it became obvious, that the teacher may not be replaced by technology, but has to play a major role in the education process. As mobile phones are widely spread in South Africa, concepts for teaching with mobile devices and teacher training have been developed and attempted in South Africa in the manner of ICT for Development (ICT4D). A comparative study of such concepts applied in South Africa and Germany is conducted and synergy effects shall be identified. Remark: In this article, the term *ICTs* will be used in the sense of *new media*, *digital media* and *mobile media*.

Introduction

ICTs are new media, which could have the potential to transform education and student learning in developed countries, but especially also in developing countries, (cf. Dutta et al., 2015). But should learning with ICT and media education already start in school or even before school? From teachers and parents we hear concerns: In family and the environment appeared an overabundance of impressions and risks on the child. The media of our society which is technology-determined were complicit in this over-stimulation and risks. Especially visual stimuli, messages of the moving image may cause restlessness, lack of concentration, learning and behavioral disorders. Furthermore - not to forget - the risks of the internet. Should the school not be a protected space where children are shielded from the disturbing influences of the ICTs to be able to develop permanent learning attitudes and undisturbed creativity? (cf. Maier et al., 1997). Schools should be aware that children are exposed to ICTs in their everyday family lives and should consequently support children with ICTs. Pavlik mentioned already in 1998 the fact that *„Today's children and youth are the heaviest users of new media technology.“*, (Pavlik, 1998). This citation is still valid and can be verified by several studies like the KIM-studies in Germany, (MFS, 2000-2015). Thus, since children are exposed in a young age to ICTs and use it, the teaching of media skills cannot start too early. Through media education in school, we can prepare the young children to a future that will be shaped in all areas of life by ICTs and create also risk awareness of the usage of this. Nowadays, ICTs are in a position to access various information and content via the internet and also control communication processes that can take place almost everywhere in the world, (cf. Bertow, 2008). Many ICT in school initiatives based their concepts on the idea that learning will happen if learners are provided direct access to ICTs. However, there is little evidence of the value of such approaches despite years of research, (cf. Dutta et al., 2015). *"The main reason for the lack of success of these highly promoted projects is that they have ignored the single most important person in the education and learning experience of the child: the teacher. Decades of research have shown us that the most important contributor to raising educational outcomes in schools is clear: we need better educators."*, (Dutta et. al., 2015). Among others, Herselman & Botha (2014) state, that the teacher professional development component of the ICT4RED initiative (http://www.ict4red.co.za/) implemented in South Africa made this initiative a success. *"Attendance was high and teachers started their own co-creation of content, lessons plans and sharing this in communities of practice with similar teachers in their area."* (Herselman & Botha, 2014). The main task of (digital) media in education is mainly to support the teacher and his/her teaching. It can provide a positive learning effect, if active learners are created (cf. Bachmair, 1979).

What is the situation in Germany and in South Africa?

In scholastic standards in Germany, the use of ICTs in teaching is only explicitly mentioned in the standards for Secondary Education I. Nevertheless, both the use of traditional and ICTs can be found in numerous framework curricula. For example in the primary school framework curriculum of Rhineland-Palatinate, ICTs are seen as one quality indicator for good teaching (Ministerium für Bildung Wissenschaft, Weiterbildung und Kultur). According to the Kultusministerkonferenz modern education in school is unthinkable without media education, (vgl. Schwarzenberg, 2012). In the framework curriculum of Rhineland-Palatinate for special needs schools and Secondary Education, especially the work on computers is promoted. The 2005 curriculum of South Africa does not exclude the integration of ICTs, but *"welcomes their use where they may be appropriate to achieving educational outcomes. However, it does not make special provision for the use of ICTs, nor does it offer specific guidelines on the use of ICTs in the core curriculum."* (Holcroft, 2004). In 2004, the White Paper on e-education, which represents a new framework for the collaboration of Government and the private sector in the provision of ICTs in education, was published. *"Through this initiative, we hope that we will be able to turn our schools into centres of quality learning and teaching for the twenty-first century."* (DoE, 2004). Going on with the question what projects on ICT in education exist, *"reputable ICT4D collections focused on Sub-Saharan Africa exist but a platform where these silos of excellence can be aligned and shared for open access is not a reality yet."*(Platz & Biljon, 2015). Consequently, the amount of existing projects using ICT for teaching can not be determined yet, as well es their success. The same is valid for Germany: there are a lot of projects on teaching with ICT (or mobile learning), but there is no overview over all the existing projects. As already mentioned, one successful project implemented in South Africa is the ICT4RED initiative. The ICT4RED initiative was part of The Technology for Rural Education Development (TECH4RED) research programme which aimed to contribute to the improvement of rural education via technology-led innovation in South Africa. Herselman & Botha (2014) derived from the most significant results and challenges in the ICT4RED initiative, among others, the following recommendations for implementing ICTs in a successful way into teaching: Empowering teachers through professional development training courses before deploying technology; Use of the earn-as-you-learn reward-based badge system; Support by the Department of Basic Education, together with the local provincial department; Budget for mobile tablet upgrades, teacher professional development training (TPD) courses, extra staff, and maintenance of infrastructure.

What lessons learnt in South Africa can be transferred to Germany?

A small survey has been performed with 29 teachers in Germany. Teacher education and training for the use of ICTs in teaching was indicated as being an important issue: 37,9% of the probands stated, that their school never offers teacher education and training. In the context of the ICT4RED project, 11 South African teachers, who participated in the TPD, were interviewed. All of them would recommend to other teachers to attend such a training. The benefits they saw in the TPD were the following: The use of new teaching methods and the motivation increase in the pupils; ICT can help to make teaching easier.; The communication quality and trust between the pupils (enabling group work), but as well between the teacher and the pupils increased; The discipline in the classroom improved; To become more confident with the use of ICT and, at the same time, to learn to be open to learn from the pupils. Consequently, the implementation of a TPD in the manner of ICT4RED in schools and during teacher education can contribute to enhancing teaching with ICT in Germany. Of course, such a TPD needs to be adjusted to German requirements and constraints. Differences between Germany and South Africa exist, among others, in politics, language, culture, access to ICTs, the socio-economic situation, the school system and the equipment of schools. These differences have to be addressed. Furthermore, collaboration and the sharing of ideas and lessons learnt is essential to make such a project a success. Specifically for teaching with ICT, guidelines for the use of ICT and concrete teaching material in this context should be transferred to the German context to enable access to useful material and thus improve the teaching practices with ICTs and the use of ICTs in schools. Vise versa, the developed TPD training for German conditions can then be adjusted to South African conditions and applied there, as well.

Conclusions and Next Steps

One main issue for ICT in education projects that work is identified by Dutta et. al. (2015) as *“delivering quality digital educational content, which must provide in-depth focus on the quality and availability in multiple languages, especially targeted at educators.”* This issue will be addressed by developing a TPD based on the ICT4RED principles adjusted to German conditions. This can only be a success, if collaboration, co-creation and sharing takes place amongst teachers and learners in the form of communities of practice between schools, teachers and learners in Germany.

References

Bachmair, B. (1979): *Medienverwendung in der Schule. Analyse- und Planungsbeispiele für den Unterricht mit audiovisuellen Medien.* Berlin: Volker Spiess.

Bertow, A. (2008): *Schüler, Lehrer und neue Medien in der Grundschule. Mediennutzung im Kontext von Entwicklungstendenzen sowie technischer Voraussetzungen.* Hamburg: Kovač (Schriftenreihe Medienpädagogik und Mediendidaktik, Bd. 14).

Department of Education (DoE) (2004): *White Paper on e-Education. Transforming Learning and Teaching through Information and Communication Technologies (ICTs).*

Dutta, S., Geiger, T. & Lanvin, B. (2015). The global information technology report 2015. In *Living in a Hyperconnected World. Geneve: World Economic Forum & INSEAD*.

Herselman, M. & Botha, A. (2014). *Designing and implementing an Information Communication Technology for Rural Education Development (ICT4RED) initiative in a resource constrained environment: Cofimvaba school district, Eastern Cape, South Africa.* Pretoria, South Africa: CSIR Meraka.

Holcroft, E. (2004): SchoolNet South Africa, in: *Information and Communication Techonologies for Development in Africa, Volume 3, Networking Institutions of Learning – SchoolNet.* International Development Research Centre, Council for the Development of Social Science Research in Africa.

Maier, R.; Mikat, C.; & Zeitter, E.: *Medienerziehung in Kindergarten und Grundschule*. München: kopaed, 1997.

Medienpädagogischer Forschungsverbund Südwest (MFS) (2000-2015): *KIM-Studie 1999-2014. Kinder und Medien, Computer und Internet.*

Pavlik, J. V. (1998): *New media technology. Cultural and commercial perspectives.* 2nd [rev.] ed. Boston: Allyn and Bacon.

Platz, M. and Van Biljon, J., 2015, May. Design of an open ICT4D knowledge repository. In *IST-Africa Conference, 2015* (pp. 1-11). IEEE.

Schwarzenberg (2012): *Medienbildung in der Schule. Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (KMK).*

Cornelia PLUNGER, Klagenfurt

Modell- und kontextorientierte Reflexion – Anregungen für den Mathematikunterricht

In Konzepten mathematischer Bildung, wie etwa in jenen von Roland Fischer, Ole Skovsmose und Katja Lengnink spielt Reflexion eine wichtige Rolle. Reflexion nimmt dabei unterschiedliche Aspekte in den Blick. Fischer erachtet zB die Entwicklung zu einer Urteils- und Entscheidungsfähigkeit als essentielles Ziel allgemeiner Bildung. Das beinhaltet auch Urteile, Bewertungen und Einschätzungen bezüglich der Verwendung von Mathematik in Modellen (für Beschreibungen, Prognosen etc.) (Fischer, 2012). Für Skovsmose ist es bedeutsam, demokratische Fähigkeiten in einer Gesellschaft sicherzustellen, in der Technologie (etwa im Gegensatz zum klassischen Handwerk) eine bedeutende Rolle spielt. Verschiedene Arten der Reflexion und darunter auch modell- und kontextorientierte Reflexion sollen dazu beitragen (Skovsmose, 1998). In Lengninks Konzept liegt der Fokus auf *Mündigkeit*, ein mündiger Umgang mit Mathematik zielt auf die Reflexion und Bewertung mathematischer Prozesse ab. Dazu seien auch modell- und kontextorientierte Reflexionen, wie Skovsmose sie aufführt, bedeutsam (Lengnink, 2005).

Die prominente Rolle von modell- und kontextorientierter Reflexion in den genannten Konzepten motiviert eine intensivere Auseinandersetzung mit diesen Kategorien und den Versuch, Schüler(innen) im Mathematikunterricht zu solchen Reflexionen anzuregen. Diese Arbeiten sollen im Rahmen meines Dissertationsprojekts durchgeführt werden, in dem die zentrale Forschungsfrage lautet: *Wie und in welchem Ausmaß kann modell- und kontextorientierte Reflexion im Mathematikunterricht angeregt werden?* Damit ergeben sich weitere Fragen, zB jene nach geeigneten Reflexionsanlässen oder nach Reaktionen von Schüler(inne)n auf solche Anlässe. Für die Erstellung von Reflexionsanlässen werden die beiden Reflexionskategorien in Arbeitsdefinitionen spezifiziert. Modellorientierte Reflexion meint *ein Nachdenken über Eigenheiten von mathematischen Modellen, die nicht unmittelbar (durch die mathematische Beschreibung bzw. Darstellung des Modells) gegeben sind*. Wesentliche Gegenstände des Nachdenkens sind die Passung zwischen Modell und modellierter Situation, Annahmen und Idealisierungen, die getroffen wurden und inwiefern der Zweck erfüllt wird, für den das Modell geschaffen wird. Kontextorientierte Reflexion meint *ein Nachdenken über die Rolle der Mathematik im spezifischen Kontext, in dem sie verwendet wird*, zB was durch ihre Verwendung gewonnen wird oder was verloren geht. Es geht aber auch darum, über Gründe oder Zwecke für die Schaffung oder Verwendung eines mathematischen Modells nachzudenken.

Eine erste Voruntersuchung – Wie reagieren Schüler(innen) auf Reflexionsanlässe?

In einer ersten empirischen Erhebung werden ausgewählte Reflexionsanlässe in Form von Arbeitsaufträgen mit einer Gymnasialklasse der 8. Schulstufe getestet. Intention dieser Untersuchung ist zum einen, die Aufgabenstellungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit zu testen und zum anderen, Erfahrungen zu sammeln, wie Schüler(innen) auf solche Aufgabenstellungen reagieren (insbesondere welche Aspekte sie aufgreifen). Die Schüler(innen) diskutierten die Aufträge in Gruppen zu viert oder zu fünft für etwa 30 – 40 Minuten, anschließend gab es eine Phase im Plenum, wo die Ergebnisse vorgetragen und diskutiert wurden. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf die Plenumsphase.

Im Arbeitsauftrag „Wachstum eines Ameisenstaates“ sollten drei Fragen zu modellorientierter Reflexion anregen:

Wachstum eines Ameisenstaates (veränderte Aufgabe nach Lergenmüller & Schmidt 2005, S. 47, Aufgabe 11)

In einem Ameisenstaat legt nur eine Ameise Eier, die Ameisenkönigin. Ein Biologe überlegt, wie ein Ameisenstaat wachsen könnte. Er stellt zwei verschiedene Modellrechnungen an:

Zeit (Monat)	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Anzahl der Ameisen	100	200	300	400	500	600	700

Zeit (Monat)	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Anzahl der Ameisen	100	200	400	800	1 600	3 200	6 400

- Welche Annahmen werden in den beiden Modellen jeweils getroffen?
- Was wird in diesen Modellen über einen Ameisenstaat berücksichtigt, was nicht?
- Welches der beiden Modelle passt eurer Meinung nach besser und warum?

Die Frage nach den Annahmen sollte darauf abzielen, dass im 1. Modell immer 100 Ameisen dazukommen, unabhängig davon, wie viele Ameisen vorher schon da waren, während sich im 2. Modell die Anzahl der Ameisen verdoppelt und somit davon abhängt, wie viele Ameisen vorher da waren. Die Frage bezüglich der Berücksichtigungen zielte darauf ab, ob bzw. inwiefern Abnahmen in der Population berücksichtigt sind und auf weitere Aspekte die nicht berücksichtigt scheinen, zB Umweltbedingungen. Die Schüler(innen) haben zwischen diesen beiden Fragen nicht klar unterschieden, was aus jetziger Perspektive nachvollziehbar ist. Beide Gruppen nannten Aspekte der Zunahme um 100 und der Verdoppelung, thematisierten aber nicht, wie die Zunahmen jeweils von den bereits vorhandenen Individuen abhängen. Weiters hat sich gezeigt, dass beide Gruppen davon ausgingen, dass die Abnahme in der Population hier nicht berücksichtigt wird.

Eine Schülerin: „Bei der, also wir haben bei der ersten Tabelle steigt die Anzahl der Ameisen immer um 100 und bei der zweiten verdoppelt es sich und es wurde angenommen, dass es keine Verluste in der Bevölkerung gibt.“

Als weitere nicht-berücksichtige Aspekte wurden das *„Alter der Königin*“ und *„manchmal verliert der Ameisenstaat sehr viel, so zum Beispiel im Winter*“ angesprochen. Bezüglich der Passung der Modelle (Frage 3) gab es nicht allzu differenzierte Antworten, zum einen wurde das 1. Modell als passend gesehen, weil *„die ähm die Anzahl der Eier wird sich [...] nicht genau verdoppeln können*“ und zum anderen das 2. Modell, weil nach sechs Monaten eine Anzahl von 6.400 Ameisen realistischer schien, als eine Anzahl von 700 Ameisen.

Auch zur kontextorientierten Reflexion wurden den Schüler(innen) einige Aufgabenstellungen vorgelegt, beispielsweise zum “Wachstum eines Ameisenstaates“:

Was bringt es, solche Entwicklungen mit mathematischen Modellen zu beschreiben?

Bei den Antworten fällt auf, dass sich die Schüler(innen) recht allgemein ausdrücken:

Ein Schüler: „Ja, es ist eigentlich sehr gut, dass man es beschreiben kann, weil man dann wissen kann wie diese Kolonie halt wächst, im normalen Zustand [bezieht sich auf unvorhergesehene Ereignisse] halt. Ich weiß nicht, wie viel man das jetzt braucht aber.“

Hier wird nicht klar, was es bedeutet, über das Wachstum *genau* Bescheid zu wissen. An dieser Stelle könnte die Aufzeichnung der Gruppendiskussion Hinweise geben, woran die Schüler(innen) hier gedacht haben.

Eine weitere Aufgabenstellung zu kontextorientierter Reflexion gab es aus dem Bereich *Prozente*:

Warum wird % im Handel und in den Geschäften so gerne verwendet, wenn es um Preisnachlässe geht?

Hier sprechen die Schüler(innen) an, dass Prozente dazu verleiten, Produkte zu einem höheren Grundpreis zu kaufen, weil es dann mehr Rabatt gibt, dass 20% nach mehr wirken, als der begünstigte Betrag tatsächlich ausmacht oder, dass es einfacher ist, einmal den Preisnachlass für alle Produkte anzugeben.

Ein Schüler: „Was zum Beispiel noch sein könnte, wenn man jetzt vor dem Geschäft steht, sind ja meistens draußen, also so Sticker drauf minus 20%, minus 30% und so weiter. Ähm, dass einfach leichter ist, einmal minus 20% auf alles hinzuschreiben, anstatt ah, was weiß ich, so eine lange Liste zu haben, wo bei jedem einzelnen Punkt steht minus 10 Cent, minus 20 Cent und so (.) es ist einfach übersichtlicher.“

Es fällt auf, dass im Gegensatz zur Frage nach Gründen für die Verwendung von mathematischen Modellen beim „Wachstum eines Ameisenstaates“, hier auf einer sehr konkreten Ebene argumentiert wird. Das könnte damit zu erklären sein, dass der Kontext „Handel/Prozente“ der Lebenswelt der Schüler(innen) näher liegt.

Fazit

Die Schüler(innen) haben sich in ihren Diskussionen auf die Arbeitsaufträge eingelassen, wobei dies sicher auch mit der Unterrichtskultur zusammenhängt, die die Mathematiklehrerin in dieser Klasse fördert. Es wurden zum Teil wesentliche und interessante Aspekte genannt, offen ist, wie zu tieferen und differenzierteren Reflexionen angeregt werden kann. Diese Untersuchung war für die Schüler(innen) ein einmaliger Reflexionsanlass, so ist es nicht überraschend, dass die Ergebnisse (noch) nicht auf tiefere oder differenziertere Reflexionen hindeuten, reflektieren *auf Knopfdruck* wird nicht funktionieren. Reflexionen sollten vielmehr permanenter Gegenstand des Unterrichts sein, bei allen math. Inhalten, wo dies sinnvoll möglich ist. In der Hauptuntersuchung soll darauf hingearbeitet werden und mit Blick darauf scheinen die Antworten der Schüler(innen) in dieser Untersuchung vielversprechend.

Literatur

Fischer, R. (2012). Fächerorientierte Allgemeinbildung: Entscheidungskompetenz und Kommunikationsfähigkeit mit Expertinnen. In R. Fischer et al. (Hrsg.), *Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung* (S. 9–17). Linz: Trauner.

Lengnink, K. (2005). Mathematik reflektieren und beurteilen – Ein diskursiver Prozess zur mathematischen Mündigkeit. In K. Lengnink & F. Siebel (Hrsg.), *Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen* (S. 21-36). Mühltal: Verlag Allgemeine Wissenschaft – HRW.

Lergenmüller, A. & Schmidt, G. (2005). *Mathematik – Neue Wege 7. Arbeitsbuch für Gymnasien*. Braunschweig: Schroedel.

Skovsmose, O. (1998). Linking Mathematics Education and Democracy: Citizenship, Mathematical Archaeology, Mathemacy and Deliberative Interaction. *ZDM, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 30 (6)*, 195-203.

Jennifer POSTUPA, Erlangen-Nürnberg

Schulbuchaufgaben – gestern und heute

Veränderungen von Mathematikschulbüchern lassen sich auf unterschiedlichen Ebenen erfassen. Neben der reinen Beschreibung offensichtlicher Veränderungen, wie eine zunehmende Anzahl an Abbildungen (vgl. u.a. Franke 2001) oder die Einführung neuer Themengebiete wie die Stochastik, finden sich vereinzelte Untersuchungen, die derartige Aspekte von Schulbüchern auch quantitativ erfassen (vgl. u.a. Reichmann 2008). Dabei handelt es sich in der Regel um die Erhebung von „leicht zu quantifizierenden“ (Reichmann 2008, 331), isolierten Einzelaspekten. Weiterhin finden sich Untersuchungen zu speziellen Detailfragen wie beispielsweise Geschlechtsrollenstereotype (Ott 2015) oder Propaganda in Schulbüchern (Ullmann 2008). Eine vertiefte Analyse von zeitlichen Veränderung der in Schulbüchern eingesetzten Aufgaben, Abbildungen und Erklärungen fehlt bisher. Um diese Lücke zu schließen wurde ein Analyseinstrument entwickelt, das die Veränderung von Schulbüchern unabhängig von konkreten Inhalten oder Lehrgängen erfasst und einer quantitativen Auswertung zugänglich macht (vgl. Postupa 2014). Am Beispiel des Schulbuchelements „Aufgabe“ soll zunächst der Aufbau des Analyseinstruments beschrieben und anschließend die weitreichenden Anwendungsmöglichkeiten des Instruments näher erläutert werden.

Das Analyseinstrument

Unabhängig von der Analyse von Schulbüchern liegt eine Vielzahl an möglichen Aufgabenklassifikationen vor (vgl. u.a. Renkl 1991, Knoll 2003, Jordan et al. 2006). Die darin erfassten Merkmale von Aufgaben zeigen immer wieder Überschneidungen. So konnten für das vorliegende Analyseinstrument zur quantitativen Erfassung der Veränderung von Schulbuchaufgaben vier Hauptmerkmale von Aufgaben deduktiv abgeleitet werden:

- Der *Aufgabentyp* stellt eine Einteilung nach Aufgabenpräsentation (rein formal vs. in Textform gegebene Aufgaben) und Kontext (inner- beziehungsweise außermathematisch) dar.
- Die *Aufgabenfunktion* ermöglicht die Erfassung der erwarteten kognitiven Handlungen der Lernenden, also zum Beispiel das schematische Lösen von Aufgaben im Gegensatz zu Problemlöseprozessen oder dem Erkennen mathematischer Zusammenhänge.
- Die *Handlungsanforderung* beschreibt die von den Lernenden zu nutzenden Repräsentationsebenen, also enaktive Handlungen, ikonische Darstellungen sowie symbolisch-sprachliche (Beschreibungen) und symbolisch-formale (Rechnen) Aufgabenbearbeitungen.

– Die *Offenheit* von Aufgaben gibt an, inwiefern „die Ausgangsbedingungen, der Lösungsweg oder die Lösungen … unbekannt sind“ (Obersteiner & Reiss & Martel 2011, 305).

Die Durchsicht von Mathematikschulbüchern führte zu einem weiteren, induktiv entwickelten Aufgabenmerkmal:

– Der *Informationsgehalt* einer Aufgabe erfasst, ob und in welcher Form innerhalb der Aufgabe explizit Informationen zu einem inner- oder außermathematischen Sachverhalt gegeben werden, ob also beispielsweise Lösungswege vorgegeben werden.

Die Einordnung sei exemplarisch für die folgende Aufgabe beschrieben:

„Warum führen alle Aufgaben zum gleichen Ergebnis?
a) 44,44 · 9,09 b) 4,444 · 90,9 c) 444,4 · 0,909 d) 4444 · 0,0909“
(Sailer 2011, 23)

Bei dem Beispiel handelt es ich um den Aufgabentyp der *verbalisierten Aufgabe,* da die Aufforderung in verbaler Form gegeben ist und kein außermathematischer Kontext vorliegt. Weiterhin dient die Aufgabe durch die verlangte Begründung der Funktion des *Erfassens von Zusammenhängen*. Diese Begründung wird üblicherweise sprachlich erfolgen, was zur Einordnung als *symbolisch-verbale* Handlungsanforderung führt. Die unterschiedlichen Begründungsmöglichkeiten, vom reinen Nachrechnen bis zu einer allgemeingültigen Begründung über die Anzahl der Nachkommastellen, öffnet die Aufgabe hinsichtlich des *Lösungsweges*. Eine explizite Erklärung, wie begründet werden kann oder wovon die Gleichheit der Ergebnisse abhängt, wird in der Aufgabenstellung nicht gegeben, so dass *kein expliziter Informationsgehalt* vorliegt.

Analog wird mit allen, in den analysierten Schulbüchern enthaltenen, Aufgaben verfahren. Damit erhält man die absoluten Häufigkeiten der einzelnen Merkmalsausprägungen pro Buch oder pro Epoche. Insgesamt liegen die Datensätze von rund 12.000 erfassten Aufgaben aus zwölf Mathematikschulbücher für die 7. Jahrgangsstufe der bayerischen Hauptschule vor. Erfasst wurden jeweils zwei Bücher aus den folgenden Epochen: NS-Zeit (1933-1945); Nachkriegszeit (1946-1953); Wirtschaftswunder (1954-1968); Neue Mathematik (1969-1980); 80er und 90er Jahre (1981-2000); vor Bildungsstandards (2000-2006).

Anwendungsmöglichkeiten

Im Sinne einer explorativen Datenanalyse ermöglicht das Instrument Einblicke in die Veränderung von Schulbuchaufgaben auf drei unterschiedlichen Niveaus.

Zunächst sind eher *globale Abfragen* möglich. So kann über die Anzahl aller in einem Schulbuch vorkommenden Aufgaben, Abbildungen und Erklärungen der relative Anteil der Aufgaben bestimmt werden. Hier kann das Instrument vorliegende Befunde bestätigen, die einen sehr hohen Aufgabenanteil in der NS-Zeit von über 85 % belegen (vgl. Reichmann 2008 für Gymnasialbücher).

Weiterhin können mit Hilfe des Analyseinstruments *detaillierte Informationen über die Verteilung der einzelnen Merkmalsausprägungen* erfasst und Vermutungen zu deren Veränderung von der NS-Zeit bis heute aufgestellt werden. Betrachtet man beispielsweise die untersuchten Aufgabentypen (formal, innermathematische Aufgaben – formal Aufgaben mit Größen – verbal, innermathematische Aufgaben – verbal, sachbezogene Aufgaben), deutet sich ein Bruch im Umgang mit sachbezogenen Aufgaben zu Beginn der Neuen Mathematik an. Während bis in die späten 60er Jahre sachbezogene Aufgaben mit über 70 % den Hauptteil der Aufgaben in den untersuchten Mathematikschulbüchern ausmachen, pendelt deren Anteil in den folgenden Epochen um 40 %.

Eine Veränderung ab der Zeit der Neuen Mathematik zeichnet sich auch bei den Aufgabenfunktionen, also den erwarteten kognitiven Handlungen der Lernenden, ab. So treten Aufgaben, welche das Erfassen von Zusammenhängen erfordern (vgl. Beispielaufgabe), erst ab der Zeit der neuen Mathematik in größerem Umfang (ca. 15% aller Aufgaben) auf (vorher um 3%).

Weiterhin zeigt die Analyse der Aufgabenfunktion, dass Aufgaben, die das Umrechnen der erhaltenen Größen auf leichter vorstellbare Größeneinheiten (beispielsweise Ladungen von Eisenbahnwaggons) erfordern, nahezu ausschließlich in der NS-Zeit (3% aller Aufgaben in diesen Büchern) und in der Zeit des Wirtschaftswunders (9%) auftreten. Damit liefert das Instrument erste Hinweise auf ein epochentypisches Merkmal von Aufgaben.

Zuletzt ermöglicht es das Analyseinstrument durch Kombination verschiedener Merkmale, *Zusammenhänge zwischen* den untersuchten *Merkmalen* näher zu beleuchten. So kann beispielsweise gefragt werden, inwiefern ein Zusammenhang zwischen den Aufgabenfunktionen und dem Aufgabentyp besteht. Betrachtet man dazu beispielsweise diejenigen Aufgaben genauer, die das Erfassen von Zusammenhängen erfordern, so sind dies ab der Zeit der neuen Mathematik gleichbleibend rund 17 % aller im Schulbuch enthaltenen Aufgaben. Ein Unterschied zwischen den Epochen wird erkennbar, wenn man zusätzlich berücksichtigt, welche Aufgabentypen zum Erkennen von Zusammenhängen auffordern. In der Zeit der Neuen Mathematik ist diese Aufgabenfunktion deutlich an verbalisierte, innermathematische Aufgaben geknüpft (75 % der Aufgaben zum Erfassen von Zusammenhängen). In den beiden darauffolgenden Epochen sind dies nur noch 54 % beziehungsweise 49 % aller Aufgaben zum Erkennen von zusammenhängen. Dafür sollen Zusammenhänge stärker auch bei verbalisierten, sachbezogenen Aufgaben erkannt werden (34 % und 35 %).

Betrachtet man die Offenheit von Aufgaben, so deutet sich in den vorliegenden Daten ein besonders hoher Anteil offener Aufgaben (25 %) in der Zeit der Neuen Mathematik an. Dieser hohe Anteil geht in den folgenden Epochen wieder zurück (22 % und 14 %). Genauere Informationen liefert das Analyseinstrument auch hier erst durch die zusätzliche Berücksichtigung eines weiteren Merkmals, den Aufgabentyp. So treten nur zur Zeit der Neuen Mathematik offene Aufgaben am häufigsten in Verbindung mit verbalisierten-innermathematischen Aufgaben auf (17 % aller Aufgaben). Zuvor und danach sind offene Aufgaben stärker an sachbezogene Aufgaben gebunden.

Ausblick

Die vorgestellten Beispiele können lediglich einen knappen Einblick in die Anwendungsmöglichkeiten des Analyseinstruments andeuten. Ähnliche Fragestellungen lassen sich auch bezogen auf die übrigen Merkmale wie Offenheit oder Handlungsanforderung untersuchen. Weiterhin werden neben den Schulbuchaufgaben auch Merkmale von Abbildungen und Erklärungen erhoben, die ebenfalls eine Vielzahl an Auswertungsmöglichkeiten bieten.

Literatur

Franke (2001): Verlaufsformen der Entwicklung des Rechenbuchs der deutschen Volksschule. Dissertation. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Jordan et al. (2006): Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben: Dokumentation der Aufgabenkategorisierung im COACTIV-Projekt. Berlin: Max-Plack-Institut für Bildungsforschung

Knoll (2003): Verwendung von Aufgaben in Einführungsphasen des Mathematikunterrichts. Marburg: Tectum

Obersteiner et al. (2011): Offene Aufgaben in Schulbüchern und ihr Einsatz im Mathematikunterricht. In: Mathes (Hrsg.): Aufgaben im Schulbuch: Bad Heilbrunn: Klinkhardt. 303-316

Ott (2015): Bildungsmedien als Gegenstand linguistischer Forschung. Thesen, Methoden, Perspektiven. In: Kiesendahl & Ott: Linguistik und Schulbuchforschung. Gegenstände – Methoden – Perspektiven. Göttingen: V & R Unipress. 19-38

Reichmann (2008): Das Schulbuch im Mathematikunterricht - Entwicklungstendenzen zwischen 1870 und 2000. In: MNU 61. 326-332

Renkl (1991): Die Bedeutung der Aufgaben- und Rückmeldungsgestaltung für die Leistungsentwicklung im Fach Mathematik. Dissertation Universität Heidelberg

Sailer (Hrsg.) (2011): Formel 7. Ausgabe Bayern. Bamberg: C. C. Buchner

Ullmann (2008): Mathematik. Moderne. Ideologie. Konstanz: UVK Verlagsgesellschaft Renate RASCH, Kerstin SITTER, Landau

Module für den Geometrieunterricht der Jahrgangsstufen 1-6

Grundlegendes

Bei der Entwicklung der Module orientierten wir uns zum einen an den Untersuchungen von Piaget und Inhelder zur Konstruktion des geometrischen Raumes und zum anderen an den Niveaustufen des geometrischen Denkens, die von Pierre und Dina van Hiele Ende der 1950er Jahre empirisch erarbeitet wurden. Von Piaget nahmen wir Hinweise zur Komplexität geometrischer Figuren in Abhängigkeit vom Alter der Kinder auf. Die Denkebenen der van Hieles waren grundlegend für das Erfassen und Beschreiben der Entwicklung der Schülerinnen und Schüler. Bei der Erarbeitung von Testaufgaben orientierten wir uns an den ersten drei Niveaus: dem geometrisch-anschauungsgebunden Denken, dem geometrisch-analysierenden Denken und dem geometrisch- abstrahierenden Denken. Dabei stand insbesondere die Frage im Fokus, inwieweit es durch einen modulartigen Aufbau eines Geometrielehrgangs möglich ist, das zuletzt genannte Denkniveau, das die Fähigkeit beschreibt, Beziehungen innerhalb und zwischen Figuren zu erfassen, schon in der Grundschule zu erreichen. In den Ansatz flossen darüber hinaus zahlreiche Beobachtungen aus dem Geometrieunterricht, die bspw. zu folgenden Fragen führten: Wie gelingt es, die Vorerfahrungen der Kinder zu Viereck, Dreieck, Kreis, Würfel weiterzuentwickeln oder wie können Figuren wie der Quader besser eingeordnet werden, damit sie keine schwer durchschaubaren Einzelstücke bleiben.

Konzept

Im Zentrum des Konzepts stehen Module, in denen die jeweiligen Inhalte so zusammengestellt wurden, dass zahlreiche Beziehungen Berücksichtigung finden. Wir orientierten uns zum Teil an bewährten geometrischen Kernideen wie dem Achsenkreuz oder dem „Streifen“, bei denen die Beziehungen „senkrecht bzw. parallel zueinander“ schon immanent sind. Durch die Module soll das Durchdringen geometrischer Inhalte ausgehend von zugrunde liegenden Strukturen angeregt werden. Auf dieser Basis kann Geometrie, die in der Umwelt steckt, entdeckt und bewusst werden. Im Zusammenhang mit der Umsetzung der Module im Unterricht entstanden offene Aufgaben, kopfgeometrische Aufgabenstellungen und Aufgaben zum Erklären und Argumentieren. Mit den offenen Arbeitsaufträgen wollen wir der Heterogenität der Schülerschaft Rechnung tragen. Mit den Aufgaben zur Kopfgeometrie soll das gedankliche Arbeiten gefördert und Erarbeitetes bewusster werden. Das Anwenden der Fachsprache im Zusammenhang mit inhaltlichen Überlegungen kann durch Aufgaben zum Erklären und Argumentieren vorangebracht werden. Ein dritter Baustein sind Aktivitäten wie das Falten und Skizzieren.

Die Module sind klassenstufenübergreifend angelegt. Die Lehrkräfte können das gesamte Modul nutzen oder nur einzelne Sequenzen entnehmen. In den ersten Modulen (M1, M2 -Faltwinkel und Achsenkreuz) sind vor allem Grundbegriffe wie Gerade, Punkt, Strecke aber auch Relationsbegriffe wie „senkrecht und parallel zueinander“ enthalten. Wenn es möglich ist, wird auch auf Gemeinsamkeiten in der Sprache verwiesen (rechter Winkel – Rechteck; parallel zueinander – Parallelogramm). Drei Module (M3, M7, M8) stellen die Dreiecke in den Mittelpunkt. Im Modul M3 werden die Vorerfahrungen der Kinder zu Dreiecken aufgegriffen und unterschiedliche Dreiecksformen bewusst gemacht. Die späteren Module verweisen auf die Dreiecksform, die den Kindern im Quadrat begegnet und dem Zeichengerät „Geometriedreick“ entspricht bzw. stellen das gleichseitige Dreieck in den Mittelpunkt. In den Modulen M4 und M5 stehen die Vierecke im Zentrum. Ausgehend vom unregelmäßigen Viereck wird in die Figurengruppe eingeführt. Die teilweise aus den ersten Modulen schon bekannten Vierecke werden wieder aufgegriffen, weitere Vierecksarten dazugewonnen und zum „Haus der Vierecke“ zusammengestellt. Im Modul M5 wird die Kernidee „Streifen“ genutzt, um zunächst zu den Trapezen und im Anschluss zu schon bekannten Vierecken durch das Übereinanderlegen von Streifen zu führen. Im Modul M6 sind Inhalte zum Kreis und zur Geometrie im Kreis enthalten. In den Modulen M9 bis M11 werden die geometrischen Körper thematisiert. Diese spielen in den vorangegangenen Modulen im Zusammenhang mit den Flächen auch schon eine Rolle und werden in diesen Modulen ausgehend von ihren Eigenschaften Körpergruppen (M10 Spitzkörper, M11 Säulen,) zugeordnet. Im Zentrum des Moduls M12 steht die Vorlage für das Legespiel „Tangram“, die sich gut für das Entdecken weiterer Strukturen im Zusammenhang mit der Ähnlichkeit und Teil-Ganzes-Beziehungen eignet. Ausgehend von den unregelmäßigen Vielecken werden im Modul M13 Vielecke wie Sechseck und Achteck betrachtet. Im Modul M14 werden Symmetrieeigenschaften zusammengefasst und durch die Symmetrie im Raum erweitert.

Evaluierung

Die Möglichkeit zur Evaluierung des Konzeptes hatten wir im Rahmen des SINUS-Saarland Fortsetzungsprojektes, das insgesamt über eineinhalb Schuljahre (November 2013 – März 2015) gelaufen ist. Am Projekt beteiligt waren 17 SINUS-Grundschulen sowie zwei weiterführende Schulen des Saarlandes (N = 413 Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 1-5). Um die Wirksamkeit des modular angelegten Unterrichtkonzeptes hinsichtlich der Entwicklung geometrischen Wissens und Könnens untersuchen zu können, wurde ein Pre-Post-Test-Kontrollgruppen-Design mit 23 Experimental- und 4 Kontrollgruppen gewählt. Während die Experimentalgruppen (EG) durch eine an der modularen Ausbildung teilnehmenden Lehrkraft unterrichtet wurden (vierzehntägig eine Unterrichtsstunde), erweiterten die Kontrollgruppen (KG) ihr geometrischen Wissen und Können nach dem „klassischen Unterrichtsstil“ mit einer regulären Lehrkraft. Eine konkrete Vorgabe bezüglich zu entwickelnder Fähigkeiten und Fertigkeiten erhielten die Lehrerinnen und Lehrer der KG dabei in Form eines adaptierten Kernlehrplanes des Saarlandes, bei dem u. a. wichtige Begrifflichkeiten und Figuren, die im Rahmen des Unterrichts in den EG eine Rolle spielten, ergänzt wurden. Bezüglich des Verhältnisses von EG und KG sei angemerkt, dass dieses als nicht ausgewogen betrachtet werden kann. Die im Folgenden dargestellten Ergebnisse können folglich also auch nicht als repräsentativ, sondern vielmehr als Tendenzen angesehen werden. Zur Datenerhebung herangezogen wurde zweierlei: zum einen eigens entwickelte Testaufgaben zur Erfassung geometrischer Fähigkeiten und Fertigkeiten, zum anderen ein Lehrerfragebogen zur Gewinnung einer Momentaufnahme zur gegenwärtigen und durch die modulare Ausbildung beeinflussten Unterrichtspraxis des Geometrieunterrichts bei den Experimentallehrkräften. Um in allen Klassenstufen identische Aufgaben stellen zu können, wurden sieben offene Aufgaben gewählt, die auf der Grundlage des van Hiele-Modells entstanden sind, jedoch auch weitere theoretische Grundlagen miteinbeziehen. Welche Figuren die Schülerinnen und Schüler so ganzheitlich, ohne dass dabei erste Eigenschaften eine nachweisbare Rolle spielen, darstellen und benennen können (Niveau 0), wurde mit den ersten beiden Aufgaben erfasst. Die Entwicklung zu Kenntnissen von Eigenschaften zu Figuren (Niveau 1) wurde mit den Aufgaben 3 und 4 genauer untersucht, indem ausgewählte Flächen bzw. Körper von den Lernenden skizziert und beschrieben werden sollten. Inwiefern die Schülerinnen und Schüler gezielte, sich auf Niveau 2 des van Hiele-Modells beziehende Aussagen treffen können, sollte mit den drei abschließenden Aufgaben genauer analysiert werden: zum einen sollten hier die Verwandtschaft zweier Flächen (Aufgabe 5), zum anderen die höchste Anzahl der Symmetrieachsen des Quadrates unter den Vierecken (Aufgabe 6) begründet werden. Im Mittelpunkt von Aufgabe 7 stand das Tangram. Im Folgenden dargestellt werden ausgewählte Ergebnisse zu den Aufgaben 3 und 5. Für eine detaillierte Darstellung der Ergebnisse (sowie des gesamten Konzeptes) siehe Rasch & Sitter (ersch. 2016).

Die Beschreibung ausgewählter Flächen *(Aufgabe 3)* gelang im Pretest, unabhängig von EG und KG, nicht allen Lernenden. Zum Teil kam keine oder eine falsche Antwort (12 bis 28 Prozent), zum Teil entsprach die Beschreibung Niveau 0 nach van Hiele (0 bis 33 Prozent). Bei einem Großteil der Kinder (49 bis 85 Prozent) konnten jedoch auch schon im Pretest über ihre

Eigenschaften differenzierte Beschreibungen von Figuren identifiziert werden. Waren diese zum Projektstart jedoch noch vordergründig einfach, einschrittig und anschauungsgebunden, so konnten vor allem in den EG zum Projektende erste Fortschritte hin zu spezifischen, ja sogar beziehungshaltigen Beschreibungen (2 bis 20 Prozent) beobachtet werden. In den KG war dies nicht der Fall. Bezüglich der Begründung der Verwandtschaft zweier Flächen *(Aufgabe 5)* bleibt festzuhalten, dass sich auch hier die EG durch ein über die Projektlaufzeit nicht nur umfassenderes, sondern vor allem auch beziehungshaltigeres Wissen von den KG abhoben. War ein Großteil der Kinder, unabhängig von EG und KG, zum Projektstart noch nicht in der Lange zwei verwandte Flächen zu identifizieren (30 bis 40, in Klasse 5 sogar 67 Prozent), so konnte dieser Anteil vor allem in den EG über die Projektlaufzeit deutlich minimiert und die Anzahl an einfachen, anschauungsgebundenen bis hin zu mehrschrittigen, auf spezielle Eigenschaften bezogenen Begründungen, erhöht werden. In den KG wurde die Stufe der mehrschrittigen, auf spezielle Eigenschaften bezogenen Begründungen zum Post-Test zum Projektende hingegen nur in Klasse 3 erreicht. Der Anteil an nicht bearbeiteten bzw. falsch identifizierten Beziehungen konnte über die Projektlaufzeit hier zudem nicht wesentlich minimiert werden.

Insgesamt betrachtet hat sich das Konzept des modular angelegten Unterrichts bewährt. Das geometrische Wissen und Können der Schülerinnen und Schüler aus den EG wurde im Vergleich zu den KG in der Projektlaufzeit nicht nur umfassender, sondern entsprechend der van Hiele-Niveaustufen spezifischer, vor allem auch beziehungshaltiger. Wird der vorgestellte Zugang, der zielgerichtet den Erwerb geometrischen Wissens anstrebt und von Anfang an auf Zusammenhänge aufmerksam macht, über einen längeren Zeitraum verfolgt, so kann folglich von nachhaltigen Lerneffekten im Geometrieunterricht ausgegangen werden.

Literatur

Rasch, R. & Sitter, K. (ersch. 2016). Module für den Geometrieunterricht in der Grundschule: Geometrie handlungsorientiert unterrichten und beziehungshaltig entdecken. Klett/Kallmeyer.

van Hiele, P.M. (1984). The Child’s Thought and Geometry. In D. Fuys, D. Geddes & R. Tischler (Hrsg.), English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldorf and Pierre M. van Hiele. Brooklyn, NY: Brooklyn College, School of Education.

Wittmann, B.(2010). Jean Piaget und die spontane Geometrie des Kindes. In: Spuren erzeugen. Diophanes.

Xenia-Rosemarie REIT, Matthias LUDWIG, Goethe-Universität Frankfurt

Winkeldetektivaufgabe: Mit Hilfslinien zur Lösung

Schon Polya erkannte das Potential von Problemlöseaufgaben die Neugierde abseits von Routineaufgaben weckten und unabhängiges Denken förderten (Polya, 1957, S. V). Problemlöseaufgaben im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I verbinden Schülerinnen und Schüler oft mit einem Griff in die mathematische Trickkiste. Dahinter verbergen sich Heurismen und Vorgehensweisen, um eine Konstruktions- oder geometrische Berechnungsaufgabe mit Hilfe des eigentlich bekannten mathematischen Werkzeugkastens zu lösen. Aber gerade die Verbindung des mathematischen Werkzeugkastens mit dem gestellten geometrischen Problem, ist für Schülerinnen und Schüler meist eine große Hürde. Im vorliegenden Beitrag wird anhand einer kurzen Unterrichtssequenz erläutert, wie Schülerinnen und Schüler mit sogenannten Winkeldetektivaufgaben umgehen. Dieser Typ von Geometrieaufgaben stammt ursprünglich von Paul Eigenmann und hat gemein, dass die Aufgaben ohne Aufgabentext auskommen (siehe Abb. 3, links). Alle relevanten Informationen sind in einer Konstruktionsabbildung enthalten und die gesuchte Größe (ein Winkel oder eine Strecke) ist in der Abbildung markiert. In der durchgeführten Unterrichtssequenz wird deutlich, welche Schwierigkeiten Schülerinnen und Schüler bei der Lösung solcher Aufgaben haben und wie diese durch geschicktes Einzeichnen von Hilfslinien überwunden werden können.

Die Unterrichtssequenz

Die Unterrichtssequenz zu Hilfslinien in Winkeldetektivaufgaben wurde in einer 8. Jahrgangsstufe eines Frankfurter Gymnasiums durchgeführt.

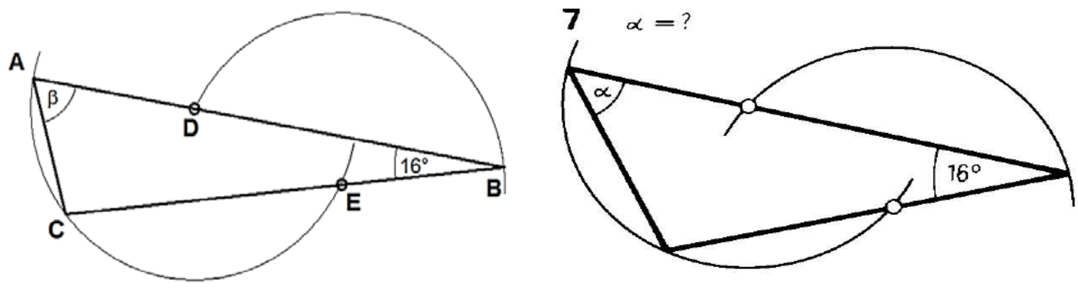


Abb. 3 Links: Denksportaufgabe Nr. 7 von Eigenmann (1981), Rechts: für den Unterricht modifizierte Winkeldetektivaufgabe

In einer ersten Phase des Unterrichts ging es zunächst um die Einführung in die Symbolik der Winkeldetektivaufgaben, die Wiederholung relevanter Winkelsätze als auch um die gemeinsame Erarbeitung einer Lösungsstrategie. Als Einführungsbeispiel diente die Winkeldetektivaufgabe in Abb. 3 (rechts), welche im Kern der Denksportaufgabe Nr. 7 aus Eigenmann (1981)

(Abb. 3, links) entspricht. Um im Unterricht zielgerichteter über die Eigenschaften der Figur sprechen zu können, wurden in der ursprünglichen Fassung von Eigenmann (1981) Bezeichnungen relevanter Punkte ergänzt. In einer ersten Heranführung an eine solche Aufgabe, wurde mit den Schülerinnen und Schülern die Symbolik der Winkeldetektivaufgabe und dabei insbesondere die „Kringeldarstellung“ besonderer Punkte thematisiert. Nach kurzer Besprechung war klar, dass diese „Kringelpunkte“ Mittelpunkte der angedeuteten Kreisbögen darstellen. Daraufhin wurde sofort geäußert, dass es sich bei Punkt C um einen rechten Winkel handeln müsse. Wohl aus der vorschnellen Schlussfolgerung heraus, dass es sich um einen Dreieckspunkt auf einem Kreisbogen handelt, so dass der Satz des Thales gelte. Diese kurzzeitige Irrung wurde allerdings mithilfe der Erklärungen von Mitschülerinnen und Mitschülern schnell eingesehen. Im Unterrichtsgespräch wurde gemeinsam nach dem Sinn der in der Zeichnung vorhandenen Kreisbögen gesucht. Mit einem kleinen Impuls der Lehrkraft konnten die Hilfslinien $\overline{CD}$ und $\overline{DE}$ eingezeichnet werden, was dazu führte, dass die Schülerinnen und Schüler die neu entstandenen Figuren analysierten und gleichschenklige Dreiecke benannten. Auch zum erkennen gleicher Winkel (aus der impliziten Anwendung des Basiswinkelsatzes) bedurfte es keines weiteren Impulses und die Aufgabe wurde in der Folge schnell gelöst. Um die angewandte Strategie sichtbar und für weitere Aufgaben verfügbar zu machen, wurde diese an der Tafel schriftlich fixiert:

1. Zeichne Hilfslinien ein. Verbinde dazu noch nicht verbundene Punkte sinnvoll.
2. Analysiere die neue Situation. Finde besondere Figuren, kongruente Strecken oder Winkel.
3. Anwenden der Winkelsätze.

Insbesondere Schritt 3 bedurfte einer langsamen und bewussten Wiederholung der Winkelsätze, wobei auch dies in Bezug auf die Winkeldetektivaufgabe aus Abb. 3 (rechts) geschah. Hierbei war es besonders wichtig für jeden einzelnen Lösungsschritt eine Begründung von den Schülerinnen und Schülern einzufordern.

In einer zweiten Phase waren die Schülerinne und Schüler aufgefordert die erarbeitete Strategie der Hilfslinien in Partnerarbeit auf eine andere Winkeldetektivaufgabe anzuwenden. Die Teilaufgaben in denen es um das Einzeichnen von Hilfslinien und das Auffinden gleichschenkliger bzw. gleichseitiger Dreiecke ging, wurden von den Schülerinnen und Schülern gut gelöst. Die Dokumentation des Lösungswegs zur Berechnung des gesuchten Winkels war mal mehr, mal weniger ausführlich. So begründeten die Wenigsten ihren Lösungsweg so konsequent wie die Schülerlösung aus Abb. 4.

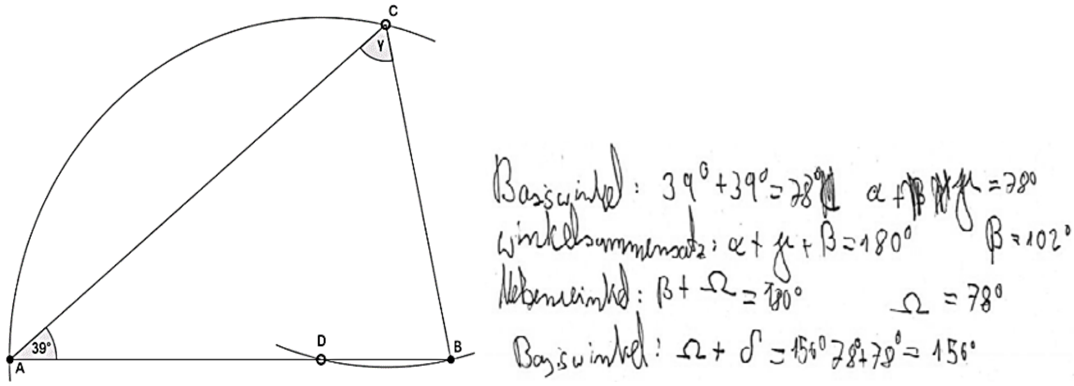


Abb. 4 Schülerlösung einer Winkeldetektivaufgabe (nach Denksportaufgabe Nr. 3 aus Eigenmann (1981))

Bei der anschließenden Besprechung der Winkeldetektivaufgabe wurde deutlich, dass die Anwendung der durch die Winkelsätze vorgegebenen Regeln weitestgehend funktioniert, eine explizite Zuordnung der Winkelsätze zu den Lösungsschritten allerdings schwer fällt. Womöglich weil das zur Lösungsfindung ja auch nicht zwingend notwendig ist.

Am Ende der Unterrichtssequenz stand ein 35-minütiger Kurztest, der drei Winkeldetektivaufgaben umfasste und in Einzelarbeit bearbeitet wurde. Aufgabe 1 fragte hierbei nur nach geeigneten Hilfslinien und sich daraus ergebenden gleichschenkligen bzw. gleichseitigen Dreiecken. Aufgabe 2 verlangte zusätzlich noch das Lösen der Aufgabe und bei Aufgabe 3 sollte der gesuchte Winkel berechnet werden, ohne dass in der Aufgabe explizit die erarbeitete Lösungsstrategie gefordert war (siehe Abb. 5). Die Frage die sich stellte ist, ob die Schülerinnen und Schüler die Lösungsstrategie auch auf andere Aufgaben übertragen bzw. eine Hilfe darin sahen. In den Schülerlösungen wurde deutlich, dass das Einzeichnen von Hilfslinien und Analysieren der neu entstandenen Figuren gut umgesetzt wurde. Allerdings war nicht immer klar, ob die Strategie der Hilfslinien tatsächlich zum Lösen der Aufgabe herangezogen wurde. In der Schülerlösung in Abb. 5 ist die Verwendung des Basiswinkelsatzes explizit benannt und die Hilfslinien die zum zugrundliegenden gleichschenkligen Dreieck führen sind in der Zeichnung eingezeichnet. Auch wenn, wie in vielen Schülerlösungen zu sehen, die zur Lösung nicht notwenige Hilfslinie $\overline{BC}$ eingezeichnet wurde, so ließ sich der betreffende Schüler nur kurz (in Zeile 2 seiner Lösung in Abb. 5) durch nicht zielführende Winkelberechnungen ablenken. Obwohl es nicht explizit gefordert war, hat der Schüler seinen Lösungsweg mit Winkelsätzen begründet. Zwar sind nicht alle Winkelsätze benannt, allerdings kann von einem nachvollziehbaren Lösungsweg gesprochen werden.

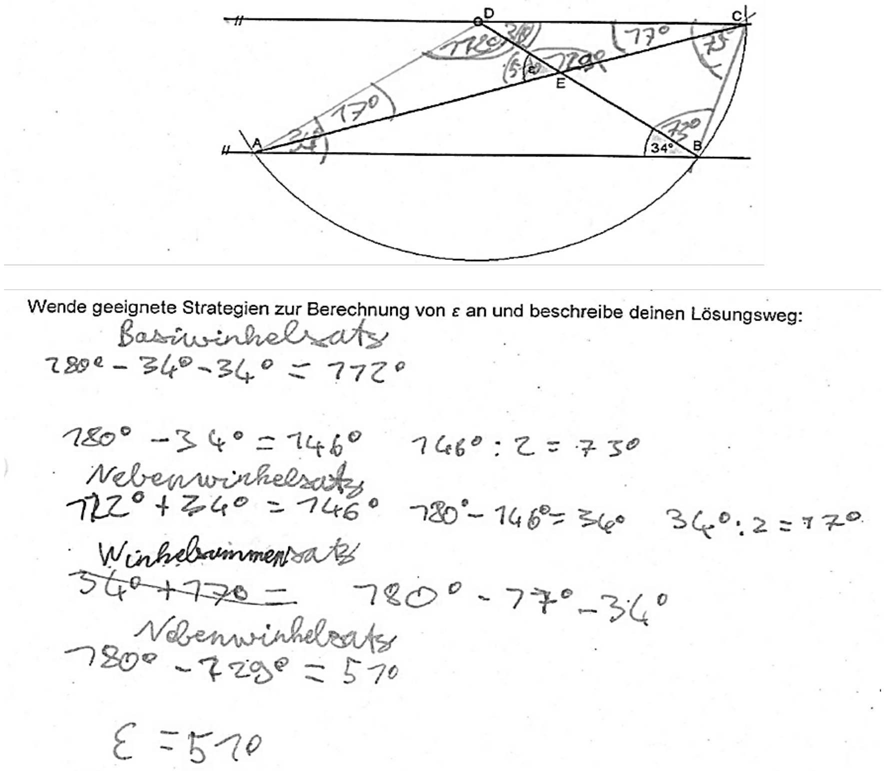


Abb. 5 Schülerlösung zu Winkeldetektivaufgabe 3 des Kurztests

Fazit

Die Unterrichtssequenz hat gezeigt, dass sich Winkeldetektivaufgaben sehr gut eignen, um die Winkelsätze motivierend und anwendungsbezogen zu wiederholen und in einen Zusammenhang zu stellen. Die Strategie der Hilfslinien wurde von den Schülerinnen und Schülern bei entsprechender Aufforderung gut umgesetzt und zu großen Teilen bei freier Bearbeitungsmöglichkeit auch zielführend eingesetzt. Im Unterrichtsgespräch wurde deutlich, dass es einen Unterschied zwischen Hilfslinien und *sinnvollen* Hilfslinien gibt, insofern als dass nicht sinnvolle Hilfslinien zu Umwegen führen. In diesem Fall sind aber im Grunde selbst die Umwege eine Bereicherung für den Unterricht, da sie den Lösungsprozess verlangsamen und die Schülerinnen und Schüler dazu bringen sich umso intensiver mit den Begriffen zu beschäftigen die zur Lösung führen.

Literaturverzeichnis

Eigenmann, P. (1981). *Geometrische Denkaufgaben.* Stuttgart: Klett.

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Andreas RICHARD, Windisch; Markus CSLOVJECSEK, Windisch

Sounding Ways into Mathematics – Ein Entwicklungsprojekt an der Schnittstelle von Mathematik und Musik

Mathematik und Musik stehen seit Jahrtausenden in einer besonderen Beziehung zueinander: Wissenschaftler waren und sind immer neu fasziniert von Zusammenhängen zwischen den beiden Disziplinen. Beispiele solcher Zusammenhänge sind die Erzeugung von reinen Intervallen durch die Einteilung einer Saite in rationalem Verhältnis, oder die Bildung von Takten aus rationalen Puls- und Notenwerten als vorherrschende Basis westlicher Musik. Viele Kompositionen bestehen aus melodischen und rhythmischen Mustern, die sich wiederholen und verändern. Musikalische Experimente können zu einer mathematischen Exploration führen, umgekehrt lassen sich mathematische Gesetzmäßigkeiten durch Töne, Rhythmen und Melodien ausdrücken. Weitere Gemeinsamkeiten finden sich auf verschiedenen Abstraktionsstufen, aber nicht alle sind im Fokus des Europäischen Entwicklungsprojekts «Sounding Ways into Mathematics».

Vielseitige Zugänge zur Mathematik

Es gibt nicht die richtige Methode für das Unterrichten von Mathematik, das Unterrichtsgeschehen ist schlicht zu komplex. Jede Klasse besteht aus Individuen mit unterschiedlichen familiären, sozioökonomischen und kulturellen Hintergründen, Bedürfnissen und Ansprüchen. Heterogenität und Individualisierung beeinflussen die Ausgestaltung des Mathematikunterrichts. Damit idealerweise alle Schüler und Schülerinnen angesprochen werden und sie das Lernangebot nutzen können, sollten deshalb im Unterricht möglichst vielseitige Zugänge bereitgestellt werden. Gleichzeitig müssen die verwendeten Aufgaben kognitiv aktivierend wie auch für alle Kinder bearbeitbar sein. Es besteht der daraus abgeleitete Anspruch an die Praxis, Aufgaben bereitzustellen, die einen niederschwelligen Einstieg ermöglichen, aber nach oben möglichst offen sind: «low threshold, high ceiling» (McClure, 2011), ein Konzept vergleichbar mit den so genannten Blütenaufgaben.

Der Forderung nach vielseitigen Zugängen zur Mathematik wird bisher beispielsweise über aussermathematische, lebensnahe Problemstellungen, Bezüge zur Bildnerischen Kunst oder Natur entsprochen. Auch unterschiedliche Aufgabenformate, enaktive, ikonische und symbolische Darstellungen und die Berücksichtigung verschiedener Lerntypen haben Eingang in den Mathematikunterricht gefunden. Die Bereitstellung der Informationen geschieht jedoch meistens audiovisuell, selten taktil.

Gerade Kleinkinder lernen jedoch ihre Umwelt nur über alle Sinne und über Bewegung kennen, nicht reduziert auf die zwei Sinneskanäle Hören und Sehen, wie dies später im Leben meist der Fall sein wird. Gleichzeitig spielt das Gehör eine besondere Rolle für die Entwicklung kognitiver Fähigkeiten. Ab einer gewissen Altersstufe scheint dies im Unterricht vergessen zu gehen. Diese Zugänge oder Zugangsmöglichkeiten bleiben erhalten, auch wenn Kinder mit der Zeit lernen über Sprache und Bilder Informationen effizient aufzunehmen und ihren Horizont, ihr Wissen und Können zu erweitern.

Werden aktuelle Mathematiklehrmittel untersucht, finden sich praktisch keine Verbindungen zur Musik. Lernumgebungen, die die beiden Fächer interdisziplinär kombinieren würden, gibt es bis dato nicht. Ausnahmen sind Vertonungen von mathematischen Inhalten, die jedoch lediglich dem Auswendiglernen und Verinnerlichen von Reihen, Sätzen oder Prozeduren dienen.

Obwohl der Titel des Projekts dies suggerieren könnte, geht es jedoch nicht darum, Musik als Hilfsmittel für den Mathematikunterricht zu verstehen. Es stehen vor allem grundlegende Gemeinsamkeiten im Vordergrund. Musik und Mathematik haben auf einer basalen Ebene mehr miteinander zu tun als man vielleicht erwarten würde. Diese Gemeinsamkeiten herauszuarbeiten ist ein Aspekt des beschriebenen Projekts und soll sowohl den Mathematik- wie auch den Musikunterricht bereichern.

Es ist kein Anspruch des Projekts, für alle mathematischen Themen der Primarstufe musikalische Zugänge zu entwickeln und Verbindungen zur Musik zu schaffen. Jedoch sollen Aktivitäten bereitgestellt werden, welche über das reine Auswendiglernen von mathematischen Fakten hinausgehen und es ermöglichen, Mathematik jenseits von Regellernen und arithmetischen Kenntnissen zu betreiben.

Polyrhythmik als idealtypisches Beispiel

Musik und Mathematik beschäftigen sich mit Mustern. Solche Muster kann man ordnen, analysieren, in ein grösseres Ganzes verpacken in dem man sie zum Beispiel systematisiert, neu anordnet und abändert.

Am Beispiel eines polyrhythmischen Musters, welches verschiedene Rhythmen gleichzeitig im selben Metrum realisiert und in der Summe zu gegeneinander versetzten Betonungen führt (vgl. Knüsel, o.J.) soll dieses Potential eines fächerübergreifenden Konzepts illustriert werden: Beispielsweise kann in einem 6/8 Takt jeder zweite und jeder dritte Schlag betont werden. Dies ergibt ein polyrhythmisches Muster, wie es in Trommelrhythmen, dem Cellokonzert von Dvorak oder dem Musikstück «Bleed» von Meshuggah in gleicher oder ähnlicher Form vorkommt.

Umgekehrt kann dieses Muster auch mathematisch erzeugt werden. Auf einem Zahlenstrahl werden alle Vielfachen von 2 und 3 beibehalten, die restlichen Zahlen entfernt oder ausgeblendet. Was an Zahlen übrigbleibt, ist im Kern das selbe polyrhythmische Muster wie oben musikalisch beschrieben.

Die Herausforderung in der Praxis besteht aus dem gleichzeitigen Klatschen oder sonstigen Vertonen der beiden Rhythmen durch eine Person.

Neben dem musikalischen Gehalt ist das vorliegende Beispiel auch zahlentheoretisch interessant und greift Themen der Primarschule auf: Beim kleinsten gemeinsamen Vielfachen der beiden Zahlen wird doppelt geklatscht und die durch das Muster generierten Lücken bestehen zu einem großen Teil aus Primzahlen. Auch die Frage nach den Mustern bei Variation der beiden Zahlen ist spannend. Sowohl musikalisch wie auch mathematisch kann ausgehend von einer relativ simplen Aufgabe eine Fülle an Aktivitäten an den Einstieg angeknüpft werden. Weitere Beispiele finden sich bei (Cslovjecsek, Guggisberg & Linneweber-Lammerskitten, 2011; Cslovjecsek, Liechti, Lischer & Utz, 2002; Cslovjecsek & Linneweber-Lammerskitten, 2011).

Im Entwicklungsprojekt ist einerseits eine gemeinsame theoretische Basis erarbeitet worden, andererseits verfolgt das Projekt seit Beginn das Ziel, Spezialisten der beiden Fachgebiete und Generalisten für beide Fächer wie beispielsweise Lehrpersonen zusammenzubringen und Materialien für fächerübergreifenden Unterricht zu erarbeiten.

Angebote für Lehrpersonen, Didaktiker und Didaktikerinnen

«Sounding Ways into Mathematics» ist ein Projekt innerhalb des «European Music Portfolios», welches unter der Leitung der Fachhochschule Nordwestschweiz von neun Institutionen aus ganz Europa mitgestaltet wird.

Das Projekt ist in erster Linie auf die Primarstufe ausgerichtet, die theoretischen Grundlagen haben jedoch auch für die Sekundarstufe I Gültigkeit und viele der Aktivitäten aus dem Projekt eignen sich deshalb ebenfalls für diese Stufe.

Für Lehrpersonen gibt es europäische wie nationale Weiterbildungsangebote, zudem ist eine Austauschplattform im Aufbau. Die Plattform erlaubt sowohl das Teilen von Ideen wie auch den Austausch von konkreten Unterrichtsmaterialien mit anderen Interessierten. Nicht zuletzt können sich Lehrpersonen und Fachspezialisten europaweit verknüpfen.

Die Plattform wird ständig weiterentwickelt. Neben dem öffentlich zugänglichen Teil kann nach der Registrierung auch auf weitere Informationen zugegriffen werden: http://maths.emportfolio.eu

Literatur

Cslovjecsek, M., Guggisberg, M. & Linneweber-Lammerskitten, H. (2011). Mathe macht Musik. *PM : Praxis der Mathematik in der Schule, 42*, 13–18.

Cslovjecsek, M., Liechti, S., Lischer, P. & Utz, J. (2002). *Mathe macht Musik. Impulse zum musikalischen Unterricht mit dem Zahlenbuch 5 und 6*. Zug: Klett und Balmer.

Cslovjecsek, M. & Linneweber-Lammerskitten, H. (2011). Snappings, clappings and the representation of numbers. *New Jersey Math Teacher Journal*, *69* (1), 10–12.

Knüsel, F. (o.J.). Polyrhythmik, Kreuzrhythmik, Polymetrik. Zugriff am 15.1.2016. Verfügbar unter: http://www.felixknuesel.ch/rhythmik-metrik/04.pdf

McClure, L. (2011). Using Low Threshold High Ceiling Tasks in Ordinary Classrooms. *NRICH - enriching mathematics*. Zugriff am 15.1.2016. Verfügbar unter: http://nrich.maths.org/7701

Roland RICHTER, Linz

Darstellungsformen von funktionalen Abhängigkeiten und Funktionen

Eine Funktion als abstraktes mathematisches Modell muss in konkreter Weise dargestellt werden. In der Literatur sind die vier Darstellungsformen Term, Graph, Tabelle und Situation üblich. Unterscheidet man aber präzise zwischen „funktionaler Abhängigkeit“ und „Funktion“, ergeben sich weitere Darstellungen. Ich zeige einige Möglichkeiten anhand konkreter Beispiele zum Thema Winkelfunktionen auf. Diese nicht an Text gebundenen Darstellungsformen erlauben es, Funktionen anschaulich zu vermitteln.

Funktionen und funktionale Abhängigkeiten sind wesentlicher Bestandteil des Mathematikunterrichts. Die Unterscheidung zwischen den beiden Begriffen „Funktion“ und „funktionale Abhängigkeit“ wird gelegentlich vernachlässigt, kann aber sehr wohl präzisiert werden. Ein funktionaler Zusammenhang ist in einen konkreten Kontext der realen Welt eingebettet; dagegen ist „die Funktion ein abstraktes mathematisches Modell, das verschiedene Zusammenhänge in unterschiedlichen Kontexten beschreiben kann“ (Büchter, 2008, S. 5).

Eine Funktion als abstraktes Objekt muss in einer konkreten Weise dargestellt werden. Üblich ist die Unterscheidung von vier Darstellungsformen. Hußmann und Laakmann (2011) etwa sprechen von „Term, Graph, Tabelle und Situation“; Leuders und Naccarella (2011) nennen die vier Darstellungsformen situativ, grafisch, symbolisch/algebraisch und tabellarisch/numerisch; und so weiter.

Während Term, Graph und Tabelle jeweils Darstellungen einer Funktion sind, ist die situative Darstellungsform aber streng genommen die Beschreibung einer funktionalen Abhängigkeit. Wenn man präzise zwischen funktionaler Abhängigkeit und Funktion unterscheidet, müsste man nicht genauso präzise zwischen deren Darstellungen unterscheiden?

Spinnt man diesen Gedanken weiter, ergeben sich sowohl für Funktionen als auch für funktionale Abhängigkeiten mehrere Darstellungsformen. Ich möchte diese Repräsentationsformen im Folgenden am Beispiel von Winkelfunktionen sowie anhand einer konkreten Situation, dem Riesenrad, aufzeigen.

Ein Schulbuch (Mistlbacher, Lechner, Nussbaumer, Dorfmayr & Brand, 2013) entwickelt den Begriff der Polarkoordinaten und in weiterer Folge die Definitionen von Sinus und Cosinus mit folgendem Beispiel: „Das Wiener

Riesenrad: Stell dir vor, du beobachtest eine Gondel dabei, wie sie sich langsam gegen den Uhrzeigersinn dreht. [...] Wo befindet sich die Gondel?“ (Mistlbacher et al., 2013, S. 152). Im Schulbuch wird die Vorstellungskraft zwar auch durch ein Foto unterstützt; im Wesentlichen wird die konkrete Situation Riesenrad hier aber verbal dargestellt.

Die obige Unterscheidung zwischen funktionalem Zusammenhang einerseits und Funktion andererseits führt allerdings dazu, dass auch der Begriff *verbale Darstellung* zweierlei bedeuten kann: einerseits die Beschreibung einer Situation mit eingebetteter funktionaler Abhängigkeit („stell dir vor, du steigst in ein Riesenrad ein ...“); andererseits aber die Beschreibung einer Funktion in einer innermathematischen Sprache („eine Sinusfunktion mit Periode ...“); vgl. etwa Dreher (2013). Ich schlage für ersteres, also die verbale Beschreibung einer Situation, den Begriff *Erzählung* vor.

Dem Gedankenexperiment könnte man hier auch ein ganz reales Experiment gegenüber stellen: Riesenrad-Modelle gibt es etwa aus Holz, aus Metall oder aus Kunststoff. Mehrere Experimente mit dem Modell *Super Fun Park* von Fischertechnik habe ich in (Richter, 2015) beschrieben. Inwieweit es für den Mathematikunterricht sinnvoll ist, den damit verbundenen Aufwand auf sich zu nehmen, sei dahin gestellt. Wichtig für meine Überlegungen hier ist nur, dass es möglich ist, einige derartige Situationen als „angreifbare“ Modelle nachzubauen.

Kann man eine Situation nicht derart nachbauen, ist es eventuell möglich, die Situation zu filmen und einen Videoclip zu erstellen. Als Beispiel erwähne ich hier den Clip „Ferris Wheel“ von Dan Meyer (2013). Dieser Videoclip zeigt ein stilisiertes Riesenrad mit acht Gondeln – eine davon rot –, sowie eine mitlaufende Uhr. Nach etwa 17 Sekunden ist der Clip zu Ende: „How many complete spins do you think the red car will take on its ride?“. Im Wesentlichen wird hier dieselbe Situation wie im oben erwähnten Schulbuch dargestellt, nur in anderen Form: eben als kurzer Videoclip.

Als letzte Art, eine Situation zu repräsentieren, erwähne ich die Möglichkeit, eine Simulation zu erstellen. Hier haben sich durch Werkzeuge wie GeoGebra in den letzten Jahren viele neue Möglichkeiten aufgetan. Eine Suche nach „Riesenrad“ bzw. „ferris wheel“ auf GeoGebraTube ergibt Dutzende Treffer. Als Beispiel führe ich hier das interaktive Arbeitsblatt „Riesenrad“ (Burninger, 2014) an.

Diese Darstellungsart hat gegenüber anderen den Vorteil, dass sie Interaktion ermöglicht. Im erwähnten Arbeitsblatt „Riesenrad“ kann man beispielsweise mit Schiebereglern den Durchmesser des Riesenrads sowie die Höhe des Drehpunkts verstellen. So ist es möglich, die Auswirkung der Änderung dieser Parameter direkt im Graphen zu beobachten – eine Möglichkeit, die sich so in keiner anderen Darstellungsform bietet.

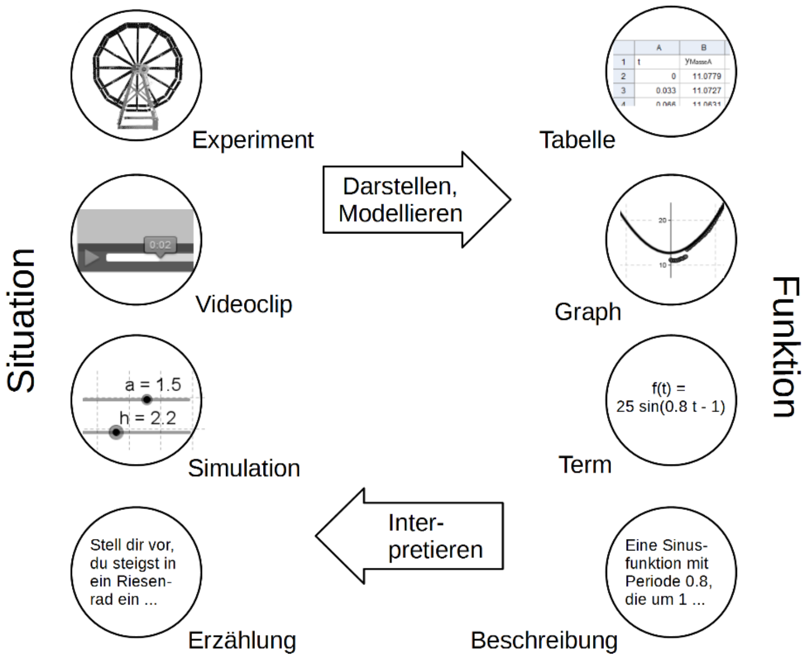


Abbildung 21. Darstellungsformen von Situationen und Funktionen

Eine Situation zusammen mit der darin enthaltenen funktionalen Abhängigkeit lässt sich vielfältig darstellen. Ich habe hier anhand von Beispielen vier grundlegend verschiedene Möglichkeiten beschrieben, nämlich die Darstellung als Experiment, als Videoclip, als Simulation und als Erzählung. Mit etwas Phantasie ließen sich sicher noch weitere Darstellungsformen finden.

Es liegt nahe, diese vier Darstellungsformen von Situationen mit den oben besprochenen und in der Literatur weit verbreiteten vier Repräsentationen von Funktionen zu kombinieren. Das Ergebnis ist das erweiterte Modell in Abbildung 1. Verbunden werden diese zwei mal vier Darstellungsformen durch entsprechende Handlungsformen.

Um eine reale Situation, die durch ein Experiment, einen Videoclip, eine Simulation oder eine Erzählung repräsentiert ist, in eine der vier möglichen mathematischen Darstellungen zu überführen, benötigt es Kompetenzen aus dem Bereich Darstellen und Modellbilden. Umgekehrt müssen diese verschiedenen mathematischen Darstellungsformen auch wieder als Aussagen über eine reale Situation gedeutet werden können, verlangen also nach Kompetenzen aus dem Bereich Interpretieren.

Ich schlage dieses Modell vor, um einerseits die Unterscheidung zwischen funktionaler Abhängigkeit versus Funktion präziser zu fassen; andererseits und vor allem aber auch, um dem Experiment, dem Videoclip und der Simulation einen sichtbareren Platz einzuräumen. Diese drei nicht an Text gebundenen Darstellungsformen erlauben es meiner Meinung nach besser als die Erzählung, von der Anschauung zur Theorie zu gelangen und so funktionale Zusammenhänge erlebbar zu machen.

Literatur

Burninger (2014). Riesenrad. Verfügbar unter: http://tube.geogebra.org/student/m255667.

Büchter, A. (2008). Funktionale Zusammenhänge erkunden. *mathematik lehren*, (148), 4–10.

Dreher, A. (2013). Den Wechsel von Darstellungsformen fördern und fordern oder vermeiden? In J. Sprenger, A. Wagner & M. Zimmermann (Hrsg.), *Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen* (S. 215–225). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hußmann, S. & Laakmann, H. (2011). Eine Funktion – viele Gesichter: Darstellen und Darstellungen wechseln. *Praxis der Mathematik in der Schule*, (38), 2–11.

Leuders, T. & Naccarella, D. (2011). „Zeichne, was du denkst – erkläre, was du zeichnest". *Praxis der Mathematik in der Schule*, (38), 20–26.

Meyer, D. (2013). Ferris wheel. Verfügbar unter: http://www.101qs.com/2450-ferris-wheel.

Mistlbacher, A., Lechner, J., Nussbaumer, A., Dorfmayr, A. & Brand, C. (2013). *Thema Mathematik 5*. Linz: Veritas.

Richter, R. (2015). *Funktionen erlebbar machen* (Diplomarbeit). Johannes Kepler Universität Linz.

Michael BRUNNHUBER, Janina GERTIS, Leonhard RIEDL, München

Problemlöseschule nach Pólya für Studierende

Einleitung

Die Fähigkeit Probleme zu lösen ist eine Kernkompetenz in der Mathematik, in den Naturwissenschaften und den Ingenieurswissenschaften, die im Studium durch selbstständiges Bearbeiten von Übungsaufgaben erworben wird. Problemlösekompetenz als eigenständiges Lernziel steht dabei selten im Blickpunkt. An der Hochschule München wurde im Rahmen des Projektes HD MINT ein Workshop zum Thema Problemlösestrategien für Studierende angeboten (vgl. Riedl & Lermer 2016). Der Konzeption und Gestaltung des Workshops liegt die Methode von Pólya zugrunde (vgl. Pólya 1949). Der Artikel beschreibt die Methode und den Workshop samt Erfahrungen.

Motivation

Ein zentrales Ziel des Projektes ist die Verbesserung und nachhaltige Sicherung der Lernerfolge der Studierende. Gespräche mit Lehrenden und Lernenden deuten darauf hin, dass Studierende oft Schwierigkeiten bei der Lösung von mathematischen Problemen haben und daher Unterstützungsbedarf besteht. Dies hat sich auch in einer Vorevaluation zum Workshop bestätigt. Als Motivation für die freiwillige Teilnahme an diesem Angebot wurde genannt, dass den Studierenden „die systematische Herangehensweise an mathematische und naturwissenschaftliche Probleme“ fehlt.

Methode von Pólya

Einen wichtigen Beitrag zum Thema Problemlösestrategien in der Mathematikdidaktik hat George Pólya mit seinem Buch „Schule des Denkens –Vom Lösen mathematischer Probleme“ geleistet (vgl. Pólya 1949). Es werden sowohl allgemeine Strategien zum Lösen mathematischer Probleme beschrieben als auch die Ausbildung Lernender in der selbständigen Bearbeitung von Problemstellungen. Nach Pólya gibt es vier wichtige Phasen beim Lösen mathematischer Probleme. Diese bestehen aus dem Verstehen der Aufgabe, dem Ausdenken eines Planes, dem Ausführen dieses Planes und einer abschließenden Rückschau. Der durch diese Phasen strukturierte Problemlöseprozess kann von den Lehrenden durch Fragen unterstützt werden, welche dem Lernenden bei der Ideenfindung für die selbstständige Lösung der Aufgabe helfen. In seinem Buch führt Pólya eine Sammlung geeigneter Fragen auf. Diese Kunst, die richtigen Fragen zu stellen, ist bei der erfolgreichen Umsetzung der Methode von zentraler Bedeutung.

Zielsetzung und Konzeption des Workshops

Problemlösekompetenz wird im Wesentlichen durch Anwendung, Nachahmung und Übung in einem fortlaufenden Prozess erworben (vgl. Pólya 1949). Diese Fähigkeit in einer einmaligen Veranstaltung zu vermitteln, ist nicht realistisch. Das Ziel des Workshops ist vielmehr, die Einstellung zum Problemlösen positiv zu beeinflussen und den Studierenden Selbstvertrauen und Freude bei der Bearbeitung mathematischer Probleme zu vermitteln. Für eine erfolgreiche Umsetzung der Veranstaltung im Sinne von Pólya sollte der Unterricht möglichst aktivierend und lernerzentriert sein. Die Studierenden sollen einen „möglichst großen Anteil an der Arbeit" haben (vgl. Pólya 1949). Der Workshop enthält daher hauptsächlich Arbeitsphasen, in denen Problemstellungen von den Studierenden bearbeitet werden. (vgl. Abb. 1). Die sorgfältige Auswahl der gestellten Probleme ist sehr wichtig. Die Aufgaben sollen interessant, herausfordernd aber nicht zu schwer sein.

In der Vorbereitung des Workshops wurden deshalb verschiedene Aufgabentypen aus dem Kontext des Studiums analysiert sowie hilfreiche Fragestellungen identifiziert. Die ausgewählten Problemstellungen wurden nach den Erfahrungen beim Einsatz fortlaufend angepasst. Ziel der Problemstellungen ist ein bewusstes Studieren des Lösungsprozesses und nicht primär die Lösung der jeweiligen Aufgabe.

Der besondere Schwerpunkt des Problemlöseprozesses wurde deshalb schon in der Aufgabenstellung optisch hervorgehoben. Auf der einen Seite sollte der Lösungsweg skizziert werden, während auf der anderen Seite die relevanten Gedankengänge, Fragen und Schlüsselideen notiert werden sollten. Des Weiteren wurden Gruppenarbeitsphasen eingeplant, um den Studierenden zu ermöglichen, unterschiedliche Lösungsansätze und Denkweisen kennenzulernen. Der Einsatz der Methode Think-Pair-Share sicherte eine ausgewogene Mischung von Einzel- und Gruppenarbeit. In der Gruppenarbeit wurden die Studierenden dezent durch Fragen der Dozierenden unterstützt.

Die Präsentation der einzelnen Gruppenergebnisse und eine gemeinsame Rückschau zu jedem Problem festigten das Erlernte durch Anwendung und Wiederholung. Im Anschluss an den Workshop wurden wöchentlich mathematische Rätsel mit ausführlicher Besprechung der Lösungswege und Bezug zu den Methoden von Pólya auf Moodle als Übung zur Verfügung gestellt. Der dreistündige Workshop wurde bisher dreimal für jeweils etwa 20 Studierende fakultäts- und semesterübergreifend angeboten.

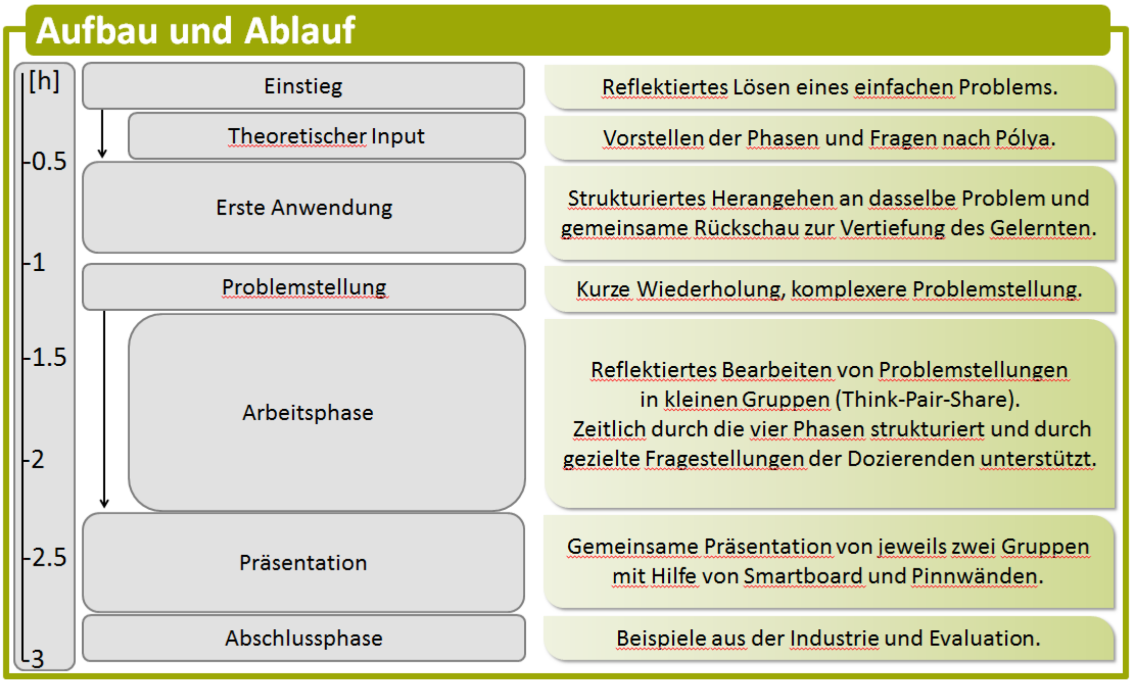


Abb. 1: Zeitlicher und inhaltlicher Aufbau der Veranstaltung

Evaluation und Feedback

Um den Erfolg der Veranstaltung bewerten zu können, wurde vor und nach dem Workshop eine quantitative und qualitative Evaluation durchgeführt. Die Teilnehmenden wurden zur wahrgenommenen Qualität der Veranstaltung und zu ihrer Selbstwirksamkeitserwartung befragt. Alle quantitativen Aspekte der Evaluation wurden mit Hilfe einer sechsstufigen Likert-Skala erhoben (1 = ich stimme gar nicht zu, 6 = ich stimme völlig zu). Die Rückmeldung der Studierenden am Ende des Workshops war überwiegend positiv. Bei der Frage nach der Selbstwirksamkeitserwartung „Ich fühle mich in der Lage, Probleme in angemessener Zeit zu lösen" ist von der ersten zur zweiten Evaluation ein deutlicher Anstieg zu verzeichnen. Vor dem Workshop wurde die Frage durchschnittlich mit $\bar{x}_V = 3{,}18$ bewertet, wohingegen der Mittelwert nach der Veranstaltung bei $\bar{x}_N = 4{,}04$ lag. Abgesehen von der angestiegenen Selbstwirksamkeitserwartung gaben die Studierenden mit $\bar{x}_N = 5{,}15$ an, dass ihnen der Workshop (und damit das Lösen der Probleme) gefallen hat. Auch in den Freitextrückmeldungen spiegelte sich die positive Wahrnehmung der Problemlösung wider. So gaben die Studierenden an, es habe ihnen „gut gefallen, dass durch konkretes Lösen von Aufgaben Methoden für das Problemlösen aufgezeigt wurden. Learning by Doing." Die „aktive Hilfestellung [bewirke] mehr Motivation und weniger Angst, Mathematikaufgaben zu lösen."

Erfahrungen und Fazit

Die Fähigkeit Probleme mathematisch zu lösen, ist eine der allgemeinen Kompetenzen im Rahmen der Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (vgl. KMK 2004). Diese Fertigkeit ist ebenso eine Kernkompetenz in Studium und Beruf, die geschult werden muss. Die Methode von Pólya fördert die Fähigkeit, den Problemlöseprozess zu reflektieren und bewusst zu machen. Die Fragen von Pólya können Studierende beim Problemlöseprozess unterstützen, wenn diese sorgfältig ausgewählt und an die Situation des einzelnen Lernenden angepasst werden. Offene Fragen können bei Studierenden Denkprozesse und Diskussionen in Gang setzen, die den Lernprozess fördern. Die Umsetzung der Methode von Pólya erfordert allerdings Zeit und Sorgfalt. Der lernerzentrierte Ansatz im Workshop, bei dem die Studierenden mathematische Problemstellungen aktiv und eigenständig bearbeitet haben, ist bei den Teilnehmenden auf großen Zuspruch gestoßen. Die Dokumentation von wichtigen Gedanken und Schlüsselideen während des Lösungsversuchs hat den Studierenden eine Metaebene ermöglicht, um die Aufgabenstellung zu reflektieren. Eine besondere Bedeutung hatte auch das Einüben der Rückschau, da diese Phase beim Problemlösen oft vernachlässigt wird, aber vor allem für das Transferdenken sehr wichtig ist. Die Evaluation zeigt, dass das gemeinsame Problemlösen den Studierenden geholfen hat, mathematische Aufgabenstellungen in Zukunft systematisch und mit Selbstvertrauen anzugehen. Sowohl den Studierenden als auch den Dozierenden des Kurses hat das Problemlösen sehr viel Freude gemacht. Um Problemlösekompetenz nachhaltig zu fördern, wäre es sinnvoll, den Workshop zu einer eigenen Vorlesung auszubauen.

Literatur

Beschluss der Kultusministerkonferenz (2004*): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss – Beschluss vom 04.12.2003.* München: Luchterhand Verlag.

Pólya, G. (1949): *Schule des Denkens – Vom Lösen mathematischer Probleme.* Francke Verlag. Titel der engl. Originalausgabe: *How to solve it.*

Riedl, L. & Lermer, S. (erscheint 2016): *Aktivierende Methoden für heterogene Lerngruppen - ein Vergleich zweier konzeptioneller Ansätze.* In: Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2016. Münster: WTM-Verlag.

Judith RIEGERT, Humboldt Universität zu Berlin; Roland RINK, TU Braunschweig; Grit WACHTEL, Humboldt Universität zu Berlin

"Wie stark ist eine Ameise?" - Überlegungen zur Gestaltung von mathematischen Lernumgebungen in inklusiven Settings

Die Ausgangslage

Die Entwicklung eines inklusiven Bildungssystems wurde mit der Ratifizierung der UN-Konvention über die Rechte von Menschen mit Behinderungen 2009 in Deutschland rechtsverbindlich und kann gegenwärtig als eines der zentralen bildungspolitischen Reformprojekte bezeichnet werden. Die Zielperspektive schulischer Inklusion ist nicht zuletzt mit grundlegenden didaktischen bzw. fachdidaktischen Fragen verknüpft, die die Planung und Gestaltung von Lernumgebungen in inklusiven Settings betreffen. Gerade in inklusiven Klassen, in denen auch Kinder mit Lernschwierigkeiten oder geistiger Behinderung zieldifferent lernen, berühren diese didaktischen Fragen ganz wesentlich auch Gegenstand und fachliche Zielsetzung des Unterrichts (vgl. Sturm 2013, S. 147; Musenberg & Riegert 2015, S. 10): Wie kann eine Lernumgebung so gestaltet werden, dass auch Schülerinnen und Schüler mit den Förderschwerpunkten Lernen oder geistige Entwicklung fachdidaktisch fundierte und subjektiv sinnvolle Lernangebote erhalten? Was bedeutet beispielsweise Mathematik für Kinder mit schwerer und mehrfacher Behinderung, die über basale kognitive, kommunikative und motorische Kompetenzen verfügen? Wie können auch sie sich gemeinsam mit ihren Mitschülerinnen und Mitschülern mit mathematischen Fragestellungen auseinandersetzen? Und wie können Lernangebote – didaktisch, methodisch, medial – so differenziert gestaltet werden, dass sie einerseits den individuellen Lernvoraussetzungen gerecht werden, andererseits aber auch kooperative und kommunikative Lernsituationen schaffen und Gemeinsamkeit in heterogenen Lerngruppen stiften? Diesen Fragestellungen einer inklusiven Schul- und Unterrichtspraxis widmet sich das im Folgenden beschriebene Kooperationsprojekt. Im Mittelpunkt steht dabei die mathematische Leitidee "Größen und Messen".

Das Konzept

Das Seminar *Mathematik mit heterogenen Lerngruppen am Beispiel der Leitidee Größen und Messen* wurde gemeinsam von Dozentinnen und Dozenten der Sonderpädagogik und Mathematikdidaktik konzipiert und durchgeführt. In der ersten Phase des Seminars haben sich die Studierenden getrennt mit den Themenfeldern ‚Größen und Messen' sowie ‚Differenzierung in heterogenen Lerngruppen' aus ihrer spezifischen Fachperspektive beschäftigt. Anschließend fanden sich die Studierenden beider Fächer in gemischten Kleingruppen zusammen mit dem Ziel, gemeinsam eine Lernumgebung für inklusive Lerngruppen zu entwickeln.

Die Gestaltung der Lernangebote orientiert sich zum einen an dem Konzept der substanziellen Lernumgebungen (vgl. Wittmann 1998), zum anderen an einem erweiterten Mathematikbegriff, der auch Kinder berücksichtigt, die (noch) nicht über einen grundlegenden Zahlen- oder Größenbegriff verfügen. Für Kinder mit schwerer und mehrfacher Behinderung bedeutet mathematisches Lernen dann beispielsweise, durch körpernahe Erfahrungen (z. B. unterschiedliche Gewichte auf oder mit dem Körper zu spüren, Längen zu ‚er-fahren', Volumina als Raum zu erkunden etc.) ein basales Konzept von Gleichheit und Verschiedenheit als Grundidee der Mathematik zu entwickeln (vgl. Kornmann 2014). Für andere Schülerinnen und Schüler bedeutet es, sich (auch) auf einer abstrakt-symbolischen Ebene mit der Leitidee "Größen und Messen" auseinanderzusetzen. Für alle Schülerinnen und Schüler wird dabei der Aufbau von *Stützpunktvorstellungen* in den unterschiedlichen Größenbereichen als gemeinsame Zielperspektive verfolgt und durch vielfältige konkrete Erfahrungen und eigenes Experimentieren im Rahmen einer interaktiven Mathematikausstellung gefördert. Die Ausstellung mit dem Titel "Tiere in Zahlen" fand in der letzten Semesterwoche statt. Über 250 Kinder aus Berliner ´inklusiven´ Grundschulen (Klasse 1 bis 6) und Förderschulen besuchten diese Ausstellung.

Nach Abschluss der Ausstellung wurden die entstandenen Lernumgebungen in Kisten verpackt, mit einer didaktischen Handreichung versehen und somit als „Exponat auf Reisen" für Schulen ausleihbar. Die Kisten enthalten die für die jeweilige Lernumgebung benötigten Materialien sowie detaillierte didaktisch-methodische Handreichungen (Ziel der Arbeit mit dem Exponat, ggf. Besonderheiten des Größenbereiches, detaillierte Beschreibung der Umsetzung, Foto zum Aufbau, ggf. weitere benötige Materialien und Kommentare).

Potenziale des Konzepts

Ziel des Projekts ist die (Weiter-)Entwicklung mathematischer Lernangebote für inklusive Grundschulklassen unter besonderer Berücksichtigung von Kindern mit Beeinträchtigungen im Lernen, mit geistiger Behinderung und körperlich-motorischen Beeinträchtigungen. Das Projekt ist dabei mehrdimensional verortet und gewinnt sein didaktisches Innovationspotenzial durch die Zusammenarbeit unterschiedlicher Akteurinnen und Akteure und die Verknüpfung verschiedener Handlungs- und Aufgabenfelder:

1. … durch die Verknüpfung von fachdidaktischer und sonderpädagogischer Expertise im Rahmen einer institutsübergreifenden Kooperation zwischen der Grundschulpädagogik, Didaktik der Mathematik und verschiedenen sonderpädagogischen Fachrichtungen des Instituts für Rehabilitationswissenschaften. Interprofessionelle Kooperation stellt die beteiligten Lehrpersonen vor vielfältige Herausforderungen, insbesondere wenn es um Fragen der gemeinsamen Unterrichtsplanung geht (vgl. Kolbe & Reh 2008: 801) und verlangt Kompetenzen, die bereits im universitären Rahmen der Ausbildung angebahnt werden müssen.

2. … durch eine Zusammenarbeit zwischen Wissenschaft und Praxis: In Verbindung mit der Gestaltung interaktiver Mathematikausstellungen entsteht Raum für einen regelmäßigen fachlichen Austausch zwischen Universität und Schulpraxis. In begleitenden Gesprächen unterbreiteten die Lehrerinnen und Lehrer darüber hinaus vor dem Hintergrund ihrer eigenen Praxiserfahrungen Anregungen zur Weiterentwicklung der Lernangebote und Einsatzmöglichkeiten im Unterricht, können aber auch selbst von den Anregungen der Studierenden für ihre eigene Unterrichtspraxis profitieren.

3. … durch die Verknüpfung von Forschung und Lehre, indem die Mathematikausstellungen von Lehramtsstudierenden mit und ohne sonderpädagogischem Schwerpunkt im Rahmen von Seminarkooperationen gemeinsam geplant und durchgeführt werden. Damit leistet das Projekt auch einen wesentlichen Beitrag zur Professionalisierung angehender Lehrerinnen und Lehrer für eine inklusive Schul- und Unterrichtspraxis. Die Ausstellungsphasen werden mit Hilfe von Videoaufnahmen dokumentiert und – auch gemeinsam mit den Studierenden – didaktisch reflektiert. Darüber hinaus werden schriftliche Befragungen der beteiligten Lehrkräfte sowie Interviews mit Schülerinnen und Schülern durchgeführt. Die Ergebnisse dieser empirischen Begleitung des Projekts fließen in die Weiterentwicklung des didaktischen Konzepts ein.

Eine besondere didaktische Herausforderung besteht in der fachdidaktisch fundierten Gestaltung von Zugängen für *alle* Kinder zu mathematischen Lerngegenständen. Hier ist perspektivisch auch genauer zu beleuchten, ob und wie sich die beschriebenen konzeptionellen Überlegungen zur Differenzierung auch auf andere mathematische Leitideen und Themenbereiche übertragen lassen. In diesem Zusammenhang wäre auch zu fragen, was genau die jeweilige spezifische Fachlichkeit der beteiligten Grundschul- und Sonderpädagoginnen und -pädagogen im Rahmen

der gemeinsamen Planung solcher differenzierten Lernangebote ausmacht. So stellen auch Heinrich, Urban und Werning (2013, 85) fest, dass hinsichtlich der Verknüpfung von fachwissenschaftlichem fachdidaktischem und sonderpädagogischem Wissen für die Planung und Umsetzung eines qualitativ hochwertigen Unterrichts in inklusiven Lerngruppen bislang kaum fundierte Forschungsergebnisse vorliegen (vgl. hierzu auch Idel, Baum & Bondorf 2012, 143)
An diesen exemplarisch formulierten Forschungsperspektiven zeigt sich, wie wichtig eine zukünftig stärkere Vernetzung zwischen Fachdidaktik und Sonderpädagogik in Forschung und Lehre ist.

Literatur

Hirt, U. & Wälti, B. (2008). Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte. Seelze-Velber: Klett & Kallmeyer, S. 6–20.

Heinrich, Martin/Urban, Michael/Werning, Rolf (2013): Grundlagen, Handlungsstrategien und Forschungsperspektiven für die Ausbildung und Professionalisierung von Fachkräften für inklusive Schulen. In: Hans Döbert/Horst Weishaupt (Hg.): Inklusive Bildung professionell gestalten. Situationsanalyse und Handlungsempfehlungen. Münster: Waxmann, 69-133.

Idel, Till-Sebastian; Baum, Elisabeth & Bondorf, Nadine (2012): Wie Lehrkräfte kollegiale Kooperation gestalten. Potenziale einer fallorientierten Prozessforschung in Lehrergruppen. In: Huber, Stephan Gerhard & Ahlgrimm, Frederik (Hrsg.): Kooperation. Aktuelle Forschung zur Kooperation in und zwischen Schulen sowie mit anderen Partnern. Münster: Waxmann, S. 141-158.

Kolbe, Fritz-Ulrich/Reh, Sabine (2008): Kooperation unter Pädagogen. In: Thomas Coelen/Hans-Uwe Otto (Hg.): Grundbegriffe Ganztagsbildung. Das Handbuch. Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften, 799-808.

Kornmann, R. (2014): Zum Erwerb grundlegender mathematischer Erfahrungen auf elementaren Etappen der Tätigkeitsentwicklung. In: Teilhabe, Jg. 53, H. 1, 11-18.

Musenberg, Oliver; Riegert, Judith (2015): Inklusion als fachdidaktische Herausforderung. In: Riegert, Judith; Musenberg, Oliver (Hrsg.): Inklusiver Fachunterricht in der Sekundarstufe. Stuttgart: Kohlhammer, 13-28.

Sturm, Tanja (2013): Lehrbuch Heterogenität in der Schule. München; Basel: Ernst Reinhardt Verlag.

Wittmann, Erich Ch. (1998): Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikstruktur. In : Beiträge zur Lehrerbildung 16 (3), S. 329-42.

Ulrike RODER, TU Darmstadt

Entwicklung eines Förderkonzepts zu Grundwissen und Grundkönnen am Übergang in die Sekundarstufe II

Förderansätze und -konzepte spielen in der mathematikdidaktischen Diskussion eine zentrale Rolle, denn die Bereitstellung *entwicklungsgemäßer und entwicklungsfördernder Lernangebote* ist eine wesentliche Aufgabe des Mathematikunterrichts (Bruder 2008). Insgesamt gibt es bereits eine Vielzahl an Fördermaterialien und Förderangeboten, doch der konzeptuelle und theoretische Rahmen dieser Ansätze ist oftmals nicht transparent. Die Entwicklung theoretisch fundierter Konzepte zur gezielten Diagnose und Förderung von mathematischen Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten stellt somit einen wesentlichen Forschungsbereich in der Fachdidaktik dar (vgl. Moser Opitz & Nührenbörger 2015). Zur Verortung bestehender Ansätze und als Orientierungsmöglichkeit bei einer Konzepterarbeitung, wird zunächst ein Rahmenmodell zu Förderprozessen entwickelt. Einen Ausgangspunkt können dabei folgende Fragen bilden:

- Welches *Verständnis von Förderung* wird zugrunde gelegt?
- Was ist das *Ziel der Förderung* (didaktische Zielperspektive)?
- Welche *Wissens- und Könnensbereiche* sollen gefördert werden?
- Wie kann das Förderkonzept auf *inhaltlicher und organisatorischer* Ebene konkret umgesetzt werden?

Entwicklung eines theoretischen Rahmenmodells zu Förderprozessen

Vor allem die Beantwortung der ersten Rahmenfrage erfordert eine begriffliche Präzisierung des semantisch unscharfen Begriffs *Förderung* (vgl. hierzu Wischer 2014). Unter Förderung im weitesten Sinne können alle pädagogischen Handlungen verstanden werden, die auf Erziehung und Bildung von Menschen gerichtet sind (vgl. Ricken 2008). Förderung im engeren Sinne kann beschrieben werden als Zusammenstellung von Handlungen und Maßnahmen, die aus einem individuellen und spezifischen Bedarf heraus resultieren und ein hohes Maß an Adaptivität aufweisen (nach Winkler 2008 und Wischer 2014). Winkler beschreibt in diesem Zusammenhang Förderbedarf als einen Differenzzustand und folglich „Förderung als erhöhte pädagogische Aufmerksamkeit für solche Differenzzustände“ (Winkler 2008, S. 173). Anhand der beschriebenen Facetten des Förderbegriffs wird deutlich, dass dem Begriff keine allgemeingültige und einheitliche Definition im Sinne eines Fachterminus zugrunde liegt, sondern Förderkonzepte immer auch stark von begrifflichen Aushandlungsprozessen innerhalb eines Fachgebiets beeinflusst werden.

Bezüglich der zweiten und dritten Rahmenfrage wurde im Vortrag die Tätigkeitstheorie als eine mögliche Hintergrundtheorie zur differenzierten Beschreibung von *Zielen eines Förderprozesses* und zur Darlegung von *Förderbereichen* vorgestellt, wobei sich dabei insbesondere Modelle zu Merkmalen und Niveaustufen kognitiver Lernprozesse anbieten.

Das auf Grundlage der bisherigen Überlegungen entwickelte theoretische Rahmenmodell zur Förderung von mathematischen Kenntnissen fokussiert Förderbedarf zunächst als einen Differenzzustand. Dabei liegen auf individueller Ebene Kenntnisse mit einer bestimmten Aneignungsqualität vor und weichen im Falle eines Förderbedarfs in einem gewissen Maße von Kenntnissen mit einer geforderten Qualität ab. Vereinfacht lässt sich dies als eine Differenz zwischen einem IST- und einem SOLL-Zustand auffassen, wobei der IST-Zustand mithilfe geeigneter Diagnoseinstrumente erfasst werden kann und der SOLL-Zustand zumeist normativ (beispielsweise über Mindeststandardkataloge) gesetzt wird.

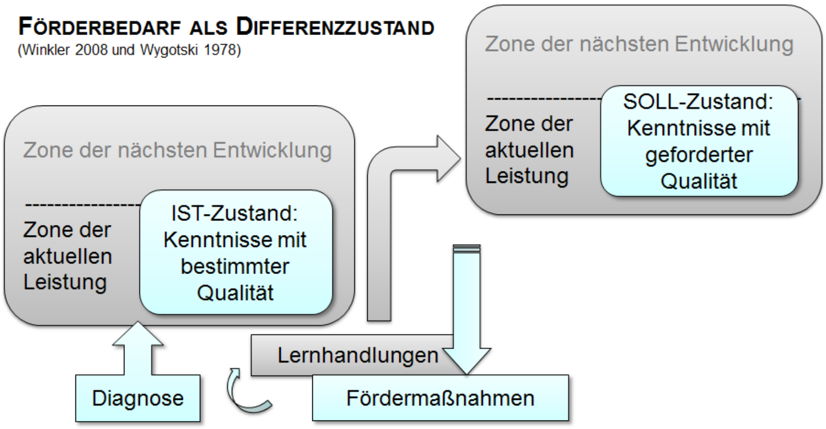


Abbildung 22: Rahmenmodell Förderprozess

Zur differenzierten Beschreibung des IST-Zustandes können vier Qualitätsparameter von Kenntnissen auf individueller Ebene angeführt werden. Dieses tätigkeitstheoretische Begriffssystem geht unter anderem zurück auf Pippig (1988) und wurde von Feldt (2013) adaptiert. Es wird zwischen den vier Qualitätsmerkmalen *Verfügbarkeit, Exaktheit, Allgemeinheit* und *Übertragbarkeit* einer Kenntnis unterschieden. Die *Verfügbarkeit* umfasst die Aspekte der Zeit- und Situationsunabhängigkeit einer Kenntnis und die *Exaktheit* beschreibt das Maß der Übereinstimmung der vorliegenden Kenntnis eines Begriffs, Satzes oder Verfahrens mit der wissenschaftlichen bzw. didaktisch reduzierten Definition (eine ausführliche theoretische Beschreibung der Parameter findet sich bei Feldt 2013). Gerade die Verfügbarkeit und Exaktheit einer Kenntnis sind für den Bereich Förderung von besonderer Bedeutung, da sich über deren Ausprägung der zuvor allgemein beschriebene Differenzzustand konkretisieren lässt. Das Ziel einer Fördermaßnahme kann somit auf einer theoretischen Ebene als eine „Erhöhung“ bestimmter Aneignungsqualitäten von vorliegenden Kenntnissen aufgefasst werden. Auf Ebene des Individuums wird mithilfe entwicklungsgemäßer und entwicklungsförderlicher Lernangebote ein Übergang von der

Zone der aktuellen Leistung in die Zone der nächsten Entwicklung angestrebt (Wygotski 1978). Dabei liegen die zu Beginn diagnostizierten Kenntnisse in der Zone der aktuellen Leistung und adäquate Fördermaßnahmen lassen erwarten, dass solche Lernhandlungen initiiert werden, die in die Zone der nächsten Entwicklung führen (die dann zur Zone der aktuellen Leistung wird).

Dieser direkte Bezug von Förderprozessen und Lernhandlungen liefert weitere Anknüpfungspunkte an tätigkeitstheoretische Modelle, insbesondere an ein Modell zur Beschreibung von Schülertätigkeiten (Bruder & Brückner 1989). Anhand dieser Modelle können Hinweise für die Gestaltung bestimmter Fördermaterialien abgeleitet werden.

Förderkonzept zu „Grundwissen und Grundkönnen am Übergang in die Oberstufe"

Die theoretischen Überlegungen zu Förderprozessen werden derzeit anhand eines Förderkonzepts zu „Grundwissen und Grundkönnen" am Übergang in die Sekundarstufe II konkretisiert.

> Grundwissen und Grundkönnen meint *„jene mathematischen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten, die bei allen Schülerinnen und Schülern am Ende der beiden Sekundarstufen in Form von Begriffen, Zusammenhängen und Verfahren langfristig und situationsunabhängig, das heißt insbesondere ohne den Einsatz von Hilfsmitteln, verfügbar sein sollen"* (Feldt 2013, S. 309).

Eine Förderung zur Überwindung von Differenzzuständen bezüglich „Grundwissen und Grundkönnen" am Übergang in die Sekundarstufe II soll ein erfolgreiches Weiterlernen in der Oberstufe absichern. Damit wird eine fachsystematische Zielperspektive eingenommen und es handelt sich um kompensatorische Maßnahmen, welche die Verfügbarkeit und Exaktheit bestimmter Kenntnisse erhöhen sollen. Dazu soll auf organisatorischer Ebene ein Fördersystem bereit gestellt werden, das ein digitales Diagnoseinstrument[5] sowie flexibel einsetzbare Fördermaterialien beinhaltet. Die Fördermaterialien werden derzeit zu den Inhaltsbereichen funktionale Zusammenhänge und elementare Algebra (Terme, Gleichungen, Gleichungssysteme) erarbeitet. Ein Materialbaustein besteht aus drei Teilen: Im ersten Teil wird eine Einordnung des Themas vorgenommen, Bedeutungserklärungen gegeben, inner- und außermathematische Zugänge dargelegt und verschiedene Darstellungsformen aufgezeigt. Im zweiten Teil eines Fördermaterials finden sich typische gelöste Beispielaufgaben, um (in der Sprache der Tätigkeitstheorie) die Ausbildung einer Musterorientierung zu unterstützen. Im dritten Teil finden sich dann vielfältige und niveaugestufte Übungsaufgaben,

---

[5] Weitere Informationen zu dem Diagnoseinstrument finden sich bei Feldt-Caesar und Roder - Digitale Testinstrumente zur Diagnose von Grundwissen und Grundkönnen für die Sek. II (2016) in diesem Band.

die jeweils verschiedene Teilanforderungen ansprechen. Dabei wurden insbesondere Aufgaben zum Identifizieren und Realisieren (Bruder & Brückner 1989) in Verbindung mit verschiedenen Darstellungen konzipiert, da diese Elementarhandlungen relevant für ein grundlegendes Verständnis sind (Dyrszlag 1972).

Auf einer quantitativen Ebene soll nun untersucht werden, welche (typischen) Lernstände und Lernschwierigkeiten am Beginn der Oberstufe auftreten, um so typische Differenzzustände zu identifizieren. Auf qualitativer Ebene soll mithilfe von Schülerinterviews genauer analysiert werden, welche Förderaufgaben ein (Re-)Aktivieren bestimmter Kenntnisse begünstigen.

Literatur

Bruder, R. (2008). Vielseitig mit Aufgaben arbeiten – Mathematische Kompetenz nachhaltig entwickeln und sichern. In R. Bruder, T. Leuders & A. Büchter (Hrsg.), Mathematikunterricht entwickeln. Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten (S. 18-52). Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Bruder, R. & Brückner, A. (1989). Zur Beschreibung von Schülertätigkeiten im Mathematikunterricht - ein allgemeiner Ansatz. Pädagogische Forschung, 30 (6), 72–82.

Dyrszlag, Z. (1972). Zum Verständnis mathematischer Begriffe, Teil 1. Mathematik in der Schule, 10, 36-44.

Feldt, N. (2013). Konkretisierung und Operationalisierung von Grundwissen und Grundkönnen durch ein theoriegeleitetes Vorgehen. In G. Greefrath et al. (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2013 (S. 308-311). Münster: WTM.

Moser Opitz, E. & Nührenbörger, M. (2015). Diagnostik und Leistungsbeurteilung. In R. Bruder et al. (Hrsg.), Handbuch der Mathematikdidaktik (S. 491-512). Berlin: Springer.

Pippig, G. (1988). Pädagogische Psychologie. Berlin: Volk und Wissen.

Ricken, G. (2008). Förderung aus sonderpädagogischer Sicht. In H.-H. Arnold et al (Hrsg.), Handbuch Förderung. Grundlagen, Bereiche und Methoden der individuellen Förderung von Schülern (S. 74-83). Weinheim, Basel: Beltz.

Winkler, M. (2008). Förderung. In T. Coelen & H.-U. Otto (Hrsg.), Grundbegriffe Ganztagsbildung. Das Handbuch (S. 173-181). Wiesbaden: Springer.

Wischer, B. (2014). Was heißt eigentlich fördern? Zu den Konturen, Facetten und Problemen des Begriffs. Friedrich Jahresheft 2014, 6-9.

Wygotski, L.S. (1987). Ausgewählte Schriften. Band 2. Arbeiten zur psychischen Entwicklung der Persönlichkeit. Köln: Pahl-Rugenstein.

Ulrike RODER, Regina BRUDER, TU Darmstadt

Das hessische Projekt MAKOS zur Implementierung des neuen Kerncurriculums (KC) Oberstufe

Das Projekt MAKOS (Mathematische Kompetenzentwicklung in der Oberstufe) hat das Ziel, die Implementierung des neuen Kerncurriculums (KC) für die gymnasiale Oberstufe durch die Entwicklung von kompetenzorientierten, binnendifferenzierten und technologiegestützen Materialien zu unterstützen. MAKOS wird vom hessischen Kultusministerium finanziert und vom DZLM unterstützt. Es handelt sich um ein Kooperationsprojekt zwischen den Universitäten Darmstadt und Kassel sowie den Studienseminaren für berufliche Schulen und Gymnasien in Darmstadt und Kassel. Das Projekt endet zu Beginn des Schuljahres 16/17 mit Einführung des neuen Kerncurriculums in Hessen. In den insgesamt zwei Jahren Projektlaufzeit wurden in zweitägigen Workshops gemeinsam mit Lehrkräften und Referendaren aus den teilnehmenden Projektschulen Materialbausteine zu einem Großteil der Pflichtmodule und teilweise auch zu den Wahlmodulen des neuen KC entwickelt. Es wurden an den Standorten Darmstadt schwerpunktmäßig die Themen der Einführungsphase (Analysis, Einführung Ableitungsbegriff) und der Lineare Algebra/ Analytische Geometrie (Q2) und in Kassel die Themen Integralrechnung und Stochastik (Q1 und Q3) bearbeitet.

Die Lehrerworkshops wurden von Seiten der Universitäten und der Studienseminare wissenschaftlich begleitet. Die intensive Arbeit in den Workshops wurde durch fachliche und fachdidaktische Inputphasen ergänzt, wobei auch externe Expertise hinzugezogen wurde. Nach dem Erstellen erster Materialentwürfe wurden diese während mehrerer handlungs- und reflexionsorientierter Erprobungsphasen in Oberstufenkursen evaluiert und überarbeitet. Die Evaluation der Materialien erfolgte darüber hinaus auch durch externe Gutachter. Über eine gemeinsame Kommunikationsplattform wurde allen teilnehmenden Lehrkräften und Fachschaften der Zugriff auf die bestehenden Materialien zu Erprobungszwecken ermöglicht.

Den theoretischen Hintergrund für die entwickelten Materialien bildet ein Unterrichtskonzept zur offenen Differenzierung, das bereits für die Sekundarstufe I im niedersächsischen Projekt MABIKOM (Bruder & Reibold 2013) und in einem Pilotprojekt auch an der Fachoberschule (Gründer & Hölzer 2013) erprobt wurde.

Das Konzept basiert im Wesentlichen auf vier Kernelementen mit einer spezifischen didaktischen Funktion (vgl. Roder & Bruder 2015):

Abbildung 1: Didaktische Kernelemente MAKOS

Eine wesentliche Komponente ist die *Sicherstellung der Ziel- und Inhaltstransparenz* für die Lernenden. Dabei soll mithilfe weittragender Unterrichtseinstiege eine Zielorientierung bei den Lernenden ausgebildet werden. In den konzipierten Einstiegen werden unterschiedliche Zugänge zu einem neuen Thema bereitgestellt. Die Differenzierung kann dabei durch verschiedene Kontexte, Darstellungsformen oder Erkenntnisebenen erfolgen. Bereits in den ersten Stunden wird so ein Kernaspekt des Themas herausgearbeitet. Dadurch soll erreicht werden, „dass die Lernenden sich früh eine Grundvorstellung der neuen Inhalte bilden können und diese für den anschließenden Lernprozess als prägnantes Konzept im Gedächtnis behalten“ (Meyer 2014, S. 19).

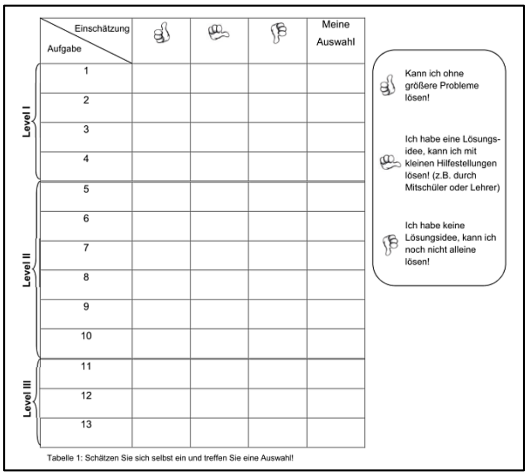
Die Zielklarheit stellt darüber hinaus eine wesentliche Voraussetzung zur *Förderung der Selbstregulation* dar, denn nur mit „klaren Vorstellungen zu den angestrebten Zielen einer Unterrichtseinheit, lassen sich Lernprozesse und –ergebnisse reflektieren, Fortschritte erfassen und Zwischenergebnisse mit den Lernzielen abgleichen“ (Roder & Bruder 2015, S. 286). Die Förderung der Selbstregulation nimmt insbesondere in der Oberstufe mit Blick auf den Übergang zur Hochschule eine bedeutende Rolle ein. Im MAKOS Projekt wurde dieses Kernelement mithilfe der Methoden Diagnoseset (ehemals Lernprotokoll), Checkliste und dem Selbsteinschätzungsbogen (in Verbindung mit Aufgabensets) konkretisiert. Das *Diagnoseset* bietet dabei eine Möglichkeit zur Feststellung des aktuellen Verstehensniveaus zu Beginn einer Unterrichtseinheit. Es wird üblicherweise einige Stunden nach dem Einstieg und den ersten Übungen zu einem neuen Thema eingesetzt. Durch die Konzeption des Diagnosesets wird eine frühzeitige Dokumentation des Lernstandes ermöglicht, Grundwissen diagnostiziert und gleichzeitig gefördert (Bruder & Reibold 2012, Roder & Bruder 2015).

Eine *differenzierte kognitive Aktivierung* der Lernenden durch angepasste Anforderungen wird im Rahmen eines *reichhaltigen Übungskonzepts* angestrebt. Im Rahmen des MAKOS-Projekts wurde die Idee des differenzierten Übens mithilfe der Formate Aufgabenset und Blütenaufgabe umgesetzt. Das Ziel eines Aufgabensets ist die Berücksichtigung unterschiedlicher Lernvoraussetzungen in den ersten vertiefenden Übungen. Ein Aufgabenset besteht aus etwa zehn Aufgaben mit aufsteigender Schwierigkeit. Die ersten Aufgaben bilden dabei einen Mindeststandard ab, die schwierigeren Aufgaben einen Regelstandard und die schwierigsten Aufgaben einen Ideal- bzw. Optimalstandard. Die Differenzierung erfolgt über das offene Einstiegslevel der Aufgabenbearbeitung (freie Auswahl von bspw. sechs aus zwölf Aufgaben).

Im Projekt wurde das Element Aufgabenset um den Selbsteinschätzungsbogen (SEB) ergänzt. Dieser zeigte sich insbesondere bei der Erstbegegnung mit Aufgabensets als sinnvolle Unterstützung, da zunächst eine Einschätzung der aktuellen Kompetenzstufe eingefordert wird und sich die Lernenden so einen Überblick zu allen Aufgaben eines Aufgabensets verschaffen. Im Anschluss an die Aufgabenbearbeitung wird über den SEB zum Abgleich mit den zuvor gesetzten Zielen aufgefordert und ein indirektes Feedback zur Aufgabenauswahl gegeben.

In Erprobungen wurde deutlich, dass die Lernenden durch den SEB bei einer reflektierten Auswahl der Aufgaben unterstützt werden. Die Lernenden wählten bspw. nicht wie zuvor die ersten fünf oder sechs Aufgaben, sondern versuchten Aufgaben aus allen Anforderungsstufen zusammenzustellen.

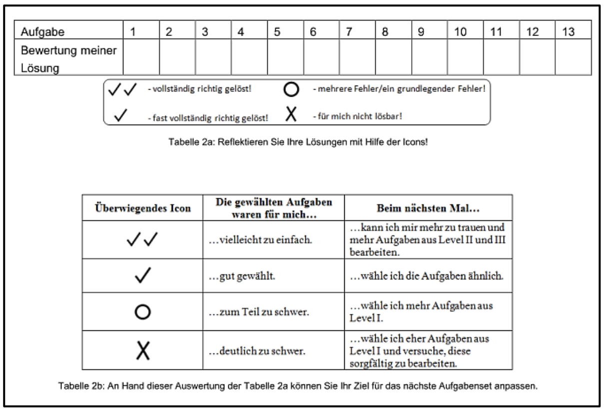
SEB – Vor der Aufgabenbearbeitung:



	Einschätzung / Aufgabe				Meine Auswahl
Level I	1				
	2				
	3				
	4				
Level II	5				
	6				
	7				
	8				
	9				
	10				
Level III	11				
	12				
	13				

Tabelle 1: Schätzen Sie sich selbst ein und treffen Sie eine Auswahl!

SEB – Nach der Aufgabenbearbeitung:



Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Bewertung meiner Lösung													

Tabelle 2a: Reflektieren Sie Ihre Lösungen mit Hilfe der Icons!

Überwiegendes Icon	Die gewählten Aufgaben waren für mich…	Beim nächsten Mal…
✓✓	…vielleicht zu einfach.	…kann ich mir mehr zu trauen und mehr Aufgaben aus Level II und III bearbeiten.
✓	…gut gewählt.	…wähle ich die Aufgaben ähnlich.
O	…zum Teil zu schwer.	…wähle ich mehr Aufgaben aus Level I.
X	…deutlich zu schwer.	…wähle ich eher Aufgaben aus Level I und versuche, diese sorgfältig zu bearbeiten.

Tabelle 2b: An Hand dieser Auswertung der Tabelle 2a können Sie Ihr Ziel für das nächste Aufgabenset anpassen.

Abbildung 2: Selbsteinschätzungsbogen zum Aufgabenset

Ein letztes wesentliches Element des Konzepts stellt die *differenzierte Ausgangsniveausicherung* dar. Hierbei wird eine „prophylaktische“ Sicht auf Binnendifferenzierung eingenommen, da es auch Aufgabe eines differenzierenden Unterrichts ist, das Auftreten neuer lernhinderlicher Unterschiede zu vermeiden und auf bestehende Lücken im *Grundwissen und Grundkönnen* zu reagieren (Roder & Bruder 2015). Umgesetzt wurde dies im Projekt mittels der Methode vermischte Kopfübung bzw. einer Variante für die Berufsschule (5-Minuten Trainings).

Insgesamt bilden die vier Kernelemente einen ganzheitlichen Rahmen zur Planung einer Unterrichtseinheit. Die entwickelten Materialbausteine (siehe Abb. 3) können adaptierbar in den Unterricht integriert werden. Dabei ist herauszustellen, dass es sich nicht um vollständig geplante Unterrichtsstunden, sondern vielmehr um Materialbausteine für typische Unterrichtssituationen handelt.

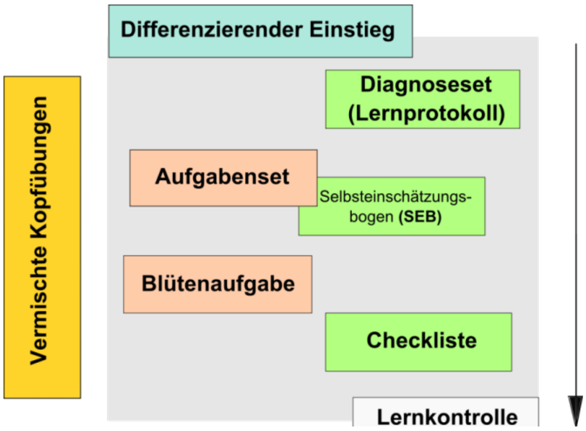


Abbildung 3: MAKOS Materialbausteine

Auf eine ausführliche theoretische Begründung des Konzepts mit Bezügen zur Tätigkeitstheorie und eine detaillierte Beschreibung aller methodischen Bausteine sei an dieser Stelle auf Bruder und Reibold (2012) und Roder und Bruder (2015) verwiesen. Die Materialbausteine werden in Form einer Handreichung im Laufe des kommenden Schuljahres publiziert und ebenfalls online zur Verfügung stehen. Aktuelle und weiterführende Informationen zum Projekt sind auf der Homepage www.makos.info zu finden.

Literatur

Bruder, R. & Reibold, J. (2012). Erfahrungen mit Elementen offener Differenzierung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I im niedersächsischen Modellprojekt MABIKOM. In R. Lazarides, & A. Ittel (Hrsg.), *Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht – Implikationen für Theorie und Praxis* (S. 67-92). Bad Heilbronn: Klinkhardt Verlag.

Bruder, R., Reibold, J. & Wehrse, T. (2013). *Binnendifferenziertes Aufgabenmaterial für den Mathematikunterricht der Sek I*. Braunschweig: Schroedel Schulbuchverlag.

Gründer, K.-F. & Hölzer, D. (2013). Offene Differenzierung im MU oder „Auf den Lehrer kommt es an!“- ein Unterrichtsentwicklungs- und Fortbildungsprojekt an Hessischen Studienseminaren. In I. Bausch, G. Pinkernell & O. Schmitt (Hrsg.), *Unterrichtsentwicklung und Kompetenzorientierung – Festschrift für Regina Bruder* (S. 221-232). Münster: WTM.

Meyer, D. (2014). Differenzierende Einstiege. *Der Mathematikunterricht* – Beiträge zu seiner fachlichen und fachdidaktischen Gestaltung, 60(3), S. 19-27.

Roder, U. & Bruder, R. (2015). MAKOS - Ein Projekt zur Umsetzung der Abiturstandards Mathematik in Hessen. In G. Kaiser H.-W. Henn (Hrsg.*), Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht. Festschrift zum 70. Geburtstag von Werner Blum* (S. 281-295). Wiesbaden: Springer.

Tobias ROLFES, Jürgen ROTH, Wolfgang SCHNOTZ, Landau

Der Einfluss von Repräsentationsformen auf die Lösung von Aufgaben zu funktionalen Zusammenhängen

Ein mathematisches Objekt ist nur über eine Repräsentation zugänglich (Duval, 2006). Diese Erkenntnis induziert die Frage, ob es unterschiedlich „vorteilhafte" Repräsentationsform für den Umgang mit mathematischen Objekten gibt. Nach Larkin und Simon (1987) ist eine Repräsentation *nutzungseffizienter*, wenn die relevanten Informationen schneller und einfacher als einer anderen Repräsentation entnommen werden kann. Die Repräsentation mit der höchsten Nutzungseffizienz ist die „beste" Repräsentationsform für die Aufgabe.

Vergleich der Repräsentationsformen Graph und Wertetabelle

Graphen und Wertetabellen sind zwei übliche Repräsentationsformen von funktionalen Zusammenhängen. Wainer (1992) behauptet, dass Graphen gut verständlich seien, da Menschen gut darin seien, Dinge zu sehen. Beispielsweise könne bereits ein Kind erkennen, dass ein Drittel eines Kuchens größer als ein Viertel eines Kuchens ist, lang bevor es beurteilen könne, dass der Bruch $^1/_3$ größer als $^1/_4$ ist. Allerdings stellen wohlbekannte Beispiele von verzerrten visuellen Wahrnehmungen (z.B. Abb. 1) Wainers Überzeugung zumindest in seiner Allgemeinheit infrage. Die Beurteilung, ob $^{19}/_{60}$ oder $^{20}/_{60}$ eines Kuchens größer ist, lässt sich mit einer Bruchdarstellung schneller und zweifelsfreier beurteilen als anhand der realen Kuchenstücke.

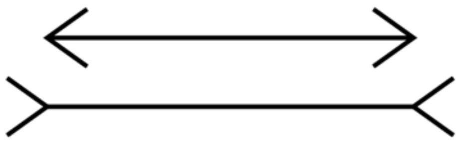


Abbildung 1: Die untere Linie erscheint länger als die obere, obwohl beide Linien die gleiche Länge haben (Müller-Lyer, 1889)

Aufgrund dieser ambivalenten Ergebnisse über die mentale Verarbeitung von visuellen Eindrücken war das Hauptziel der Untersuchung, den Einfluss von Graphen auf das Lösen von Aufgaben zum funktionalen Zusammenhang zu untersuchen. Als kontrastierende Repräsentationsform wurde die Wertetabelle ausgewählt, da sie eine ausschließlich symbolische Repräsentationsform darstellt.

Da die Nutzungseffizienz einer Repräsentationsform von der Anforderung abhängt, wurden unterschiedliche Aufgabenkategorien identifiziert. Zunächst wurde zwischen einer quantitativen und einer qualitative Analyse eines funktionalen Zusammenhangs unterschieden. Eine quantitative Analyse liegt vor, wenn bei Verwendung des Graphen konkrete Funktionswerte entnommen werden müssen, um beispielsweise eine Änderungsrate zu berechnen. Bei Items dieser *Itemkategorie K1* ist anzunehmen, dass die Wertetabelle nutzungseffizienter als ein Graph ist, da die benötigten Funktionswerte in der Tabelle explizit in symbolischer Form dargeboten werden.

Eine qualitative Analyse liegt nach unserer Definition vor, wenn die Aufgabe anhand der Form des Graphen gelöst werden kann, d.h. wenn bei Verwendung des Graphen *keine* konkreten Funktionswerte entnommen werden müssen. Entsprechend der dargestellten Erkenntnissen zur mentalen Verarbeitung von visuellen Eindrücken vermuten wir, dass es einen Unterschied macht, ob bei der qualitativen Analyse die Form des Graphen genau inspiziert werden muss (*Itemkategorie K2*) oder eine grobe Inspektion des Graphen ausreicht (*Itemkategorie K3*). Ist eine genau Inspektion des Graphen zur Lösung der Aufgabe anhand der Form des Graphen notwendig, so kann es zu Wahrnehmungsverzerrung wie in Abb. 1 kommen. In diesem Fall ist die Arbeit mit konkreten Zahlenwerten anhand der Tabelle fehlerfreier und nutzungseffizienter. Wenn dagegen die benötigte visuelle Eigenschaft des Graphen zur Lösung der Aufgabe relativ einfach erkennbar ist, muss die Form des Graphen nur grob inspiziert werden. Daher sollte für diese Itemkategorie K3 der Graph nutzungseffizienter als die Tabelle sein.

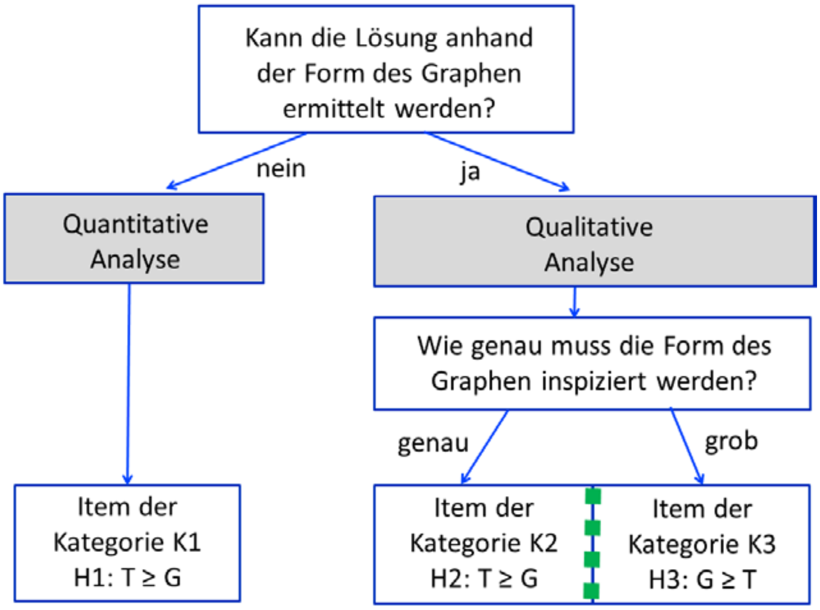


Abbildung 2: Itemkategorien und Hypothesen zu Aufgaben zum funktionalen Zusammenhang

Methode

N = 377 Schülerinnen und Schüler aus zehn sechsten Klassen und fünf siebten Klassen in sechs Schulen (Gymnasium und IGS) in Rheinland-Pfalz nahmen an der Untersuchung teil. Der Papier-Bleistift-Test bestand aus insgesamt 24 Items der drei Itemkategorien zu drei unterschiedlichen funktionalen Zusammenhängen. Jedes Testlet war entweder mit einer Tabelle oder einem Graph begleitet. Die Schülerinnen und Schüler wurden zufällig einer Experimentalgruppe zugeordnet.

Die Zuordnung der qualitativen Items zu den Kategorien K2 und K3 wurde auf der Grundlage eines Ratings mit fünf Experten durchgeführt. Unterschiede in den Itemschwierigkeiten wurden mit Hilfe des linear-logistischen Testmodells (LLTM) nach Fischer (1995) modelliert. Vor Anwendung des LLTM wurde die grundsätzliche Raschskalierbarbeit der Items vor allem durch Untersuchung der Itemtrennschärfe und der INFIT-Werte bestätigt.

Ergebnisse

Bei den zwölf Items der Itemkategorie K1 gab es bei acht Items keine signifikanten Schwierigkeitsunterschiede zwischen Tabellen- und Graph-Items (vgl. Tab. 1). Bei drei Items war entsprechend der Hypothese die Tabelle signifikant leichter als der Graph. Bei einem Item war entgegen der Hypothese der Graph signifikant leichter als die Tabelle. Bei den Items der zweiten Kategorie waren alle Ergebnisse hypothesenkonform, da bei alle sieben Items die Tabelle leichter als der Graph war. Bei den fünf Items der Kategorie K3 gab es bei drei Items hypothesenkonforme signifikante Unterschiede ($G \geq T$) und bei zwei Items keine signifikanten Unterschiede.

Tabelle 1: Ergebnisse des LLTM für den Vergleich von Graph und Tabelle

Item-kategorie	Hypothese	Ergebnis Hypothesentest (H_0: T = G)	Anzahl Items
K1	T ≥ G	Hypothesenkonforme signifikante Unterschiede (T > G)	3
		Keine signifikanten Unterschiede (T ≈ G)	8
		Nicht hypothesenkonforme signifikante Unterschiede (G > T)	1
K2	T ≥ G	hypothesenkonforme signifikante Unterschiede (T > G)	7
		keine signifikanten Unterschiede (T ≈ G)	0
		nicht hypothesenkonforme signifikante Unterschiede (G > T)	0
K3	G ≥ T	hypothesenkonforme signifikante Unterschiede (G > T)	3
		keine signifikanten Unterschiede (G ≈ T)	2
		nicht hypothesenkonforme signifikante Unterschiede (T > G)	0

Anmerkungen: G = Graph, T = Tabelle

Diskussion

Die empirischen Daten verhielten sich konform zu den Hypothesen. Bei qualitativen Analysen ist der Graph nur nutzungseffizienter gegenüber der Tabelle, wenn zur Lösung der Aufgabe der Graph nur grob inspiziert werden muss. Ist eine genaue Inspektion der Form des Graphen notwendig, ist die Tabelle vorteilhafter.

Die Verallgemeinerbarkeit der Ergebnisse ist eingeschränkt, da die Probanden aus den Klassenstufen 6 und 7 stammten. Ältere Schülerinnen und Schüler könnten eine höhere Performanz bei Graph-Items aufweisen. Zum anderen ist unklar, ob die Lernenden bei Items der Kategorie K2 bei Verwendung des Graphen wirklich qualitativ gearbeitet haben. Sollten die Probanden Funktionswerte aus dem Graphen entnommen und damit die Aufgabe gelöst haben, würde die Tabelle ebenfalls nutzungseffizienter sein.

Trotz der Einschränkungen ergibt sich vor dem Hintergrund der dargestellten Ergebnisse die Frage, warum im Schulunterricht bei der Behandlung linearer Funktionen nicht verstärkt mit dem Begriff der *Änderungsrate* neben dem Begriff der *Steigung* gearbeitet wird. Zum einen können Änderungsraten in verschiedenen Repräsentationsformen identifiziert werden, wohingegen der Steigungsbegriff mit der graphischen Repräsentationsform verknüpft ist (Rolfes, Roth und Schnotz, 2013). Zum anderen erfordert die Bestimmung einer Steigung bzw. einer Änderungsrate eine quantitative Analyse, bei der die Tabelle nutzungseffizienter als der Graph ist.

Außerdem erscheint es empfehlenswert, in der Schule Metastrategien für den Umgang mit dem Graphen zu lehren. So kann es hilfreich sein, bei einer quantitativen Analyse entnommene Zahlenwerte an den Graphen zu schreiben oder in eine kleine Wertetabelle ins Heft zu überführen, um das Arbeitsgedächtnis zu entlasten und Fehler zu vermeiden. Außerdem sollten Schülerinnen und Schüler sich auch bei qualitativen Analysen nicht alleine auf den visuellen Eindruck verlassen. Stattdessen empfiehlt es sich, quantitativ zu überprüfen, ob beispielsweise die Zunahme in einem Abschnitt eines Graphen wirklich größer als in einem anderen Abschnitt ist.

Literatur

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1-2), 103–131.

Fischer, G. H. (1995). The linear logistic test model. In G. H. Fischer & I. W. Molenaar (Hrsg.), *Rasch Models. Foundations, recent developments, and applications* (S. 131–155). New York, NY: Springer.

Larkin, J. H. & Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science*, 11 (1), 65–100.

Müller-Lyer, F. C. (1889). Optische Urtheilstäuschungen. *Archiv für Physiologie Suppl*, 263–270.

Rolfes, T., Roth, J. & Schnotz, W. (2013). Der Kovariationsaspekt in der Sekundarstufe I. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 834–837). Münster: WTM

Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational Researcher, 21* (1), 14–23

Katrin ROLKA, Natascha ALBERSMANN, Bochum

„Das einem die Probleme der beiden selbst helfen“ – Das Schreiben von Briefen als bilinguales Projekt im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I

Auch wenn bilinguale Projekte, in denen eine Fremdsprache ganz oder teilweise als Unterrichtssprache eingesetzt wird, im Mathematikunterricht bislang eher selten durchgeführt werden, gibt es mittlerweile bereits einige konkrete und zum Teil auch erprobte Unterrichtsideen diesbezüglich (z.B. Albersmann & Rolka, 2014; Schmerbeck & Rolka, 2011; Szücs, 2011).

Ausgangspunkt für das hier beschriebene bilinguale Projekt ist die Frage, welchen Mehrwert überhaupt der Einsatz einer Fremdsprache für den Mathematikunterricht haben kann. Trotz der oftmals erwähnten Bedenken mit Blick auf geringere fachliche Kompetenzzuwächse bei den Lernenden (z.B. Lipski-Buchholz, 2012), deuten die Ergebnisse bisheriger Forschungsarbeiten im Allgemeinen darauf hin, dass die integrierte Nutzung einer Fremdsprache ein großes Potenzial für fachspezifische Lernprozesse haben kann (Dalton-Puffer, 2008). Dieses Potenzial soll untersucht werden, indem der Fokus auf individuelle Auseinandersetzungen mit der Fremdsprache im Kontext von Mathematik gelegt und hierzu das Schreiben über Mathematik als Herangehensweise genutzt wird.

Schreiben im Mathematikunterricht

Die Bedeutung des Schreibens im Mathematikunterricht ist in den letzten Jahren verstärkt in das Bewusstsein der mathematikdidaktischen Forschung gerückt. Im Schreiben wird der Gedankenfluss verlangsamt, so dass die Lernenden Gelegenheit erhalten, ihre eigenen Aktivitäten der Reflexion zugänglich zu machen (Gallin & Ruf, 1993). Für Kuntze und Prediger (2005) spricht insgesamt viel dafür, dass der Verarbeitungsgrad mathematikbezogenen Wissens durch das Verfassen von Texten intensiviert wird. Textliche Eigenproduktionen im Mathematikunterricht einzufordern, ist aber keine Selbstverständlichkeit. Lernende begegnen dieser Aktivität oftmals mit einer Mischung aus Unverständnis und Zurückhaltung oder sogar Ablehnung (Maier & Schweiger, 1999). Deswegen ist es grundlegend, dass das mathematische Schreiben im Unterricht entsprechend angebahnt wird und nicht nur eine punktuelle Intervention bleibt, sondern zur regelmäßigen Übung wird (Kuntze & Prediger, 2005).

Insbesondere erscheint das Schreiben von Briefen als geeigneter Anlass für individuelle Textproduktionen im Mathematikunterricht, denn hierbei können sich die Lernenden eigenständig der ihnen aktiv verfügbaren Sprachmittel bedienen (Maier & Schweiger, 1999; Shield & Galbraith, 1998). Außerdem kann hier leicht ein „Unwissender“ als Adressat eingeführt werden, für den der mathematische Sachverhalt unbekannt ist und der deshalb explizit, ausführlich und in verständlicher Sprache informiert werden muss (Maier & Schweiger, 1999). In diesem Rahmen kann das Briefeschreiben flexibel zu verschiedenen Themen eingesetzt und immer wieder aufgegriffen werden.

Das Projekt – Bilinguale mathematische Brieffreundschaften

Wie oben erwähnt ist die Akzeptanz hinsichtlich der Verschriftlichung mathematischer Ideen bei den Lernenden eher gering, wobei die Nutzung einer Fremdsprache diese fehlende Akzeptanz eher verschärft. Dennoch wird mit Blick auf den Einsatz einer Fremdsprache im Mathematikunterricht und insbesondere auch in Kombination mit der Idee der Verschriftlichung mathematischer Inhalte unter Verwendung einer Fremdsprache betont, dass die Fremdsprache die Schülerinnen und Schüler dazu anhält, den entsprechenden Sachverhalt möglichst einfach und klar darzulegen, wodurch ein vertiefendes Begriffsverständnis erreicht werden kann (Fahse, 2000).

In dem hier beschriebenen bilingualen Projekt wurde das Schreiben von Briefen als Anlass genommen, dass die Schülerinnen und Schüler mathematische Inhalte wiederholen, reflektieren sowie schriftliche Erklärungen dieser Inhalte verfassen. Der Idee der mathematischen Brieffreundschaft folgend, antworteten die Lernenden in regelmäßigen Abständen den weitestgehend offen gehaltenen mathematischen Fragen und Problemen eines fiktiven englischsprachigen Schülers auf Englisch oder eines deutschsprachigen Schülers auf Deutsch, wodurch die Notwendigkeit der jeweilig zu nutzenden Sprache deutlich wird. Das Briefprojekt wurde jeweils am Ende einer Unterrichtseinheit durchgeführt. Die zu reflektierenden mathematischen Konzepte wurden damit vorab im Unterricht eingeführt und geübt. Der Rückgriff auf die Unterrichtssprache, z.B. für ergänzende Erläuterungen des Gemeinten bei Unsicherheiten im Fremdsprachgebrauch, wurde zugelassen und bestärkt (z.B. Diehr, 2012).

Die Lernenden erhielten von der Lehrperson eine individuelle Rückmeldung zu ihren verfassten Briefen, welche sich auf mathematische Korrektheit sowie Klarheit der mathematischen Argumentation bezogen, weniger aber auf den richtigen Gebrauch der Fremdsprache, um Motivationshürden beim Verfassen der englischsprachigen Texte abzubauen. Das Ziel dieser Rückmeldungen war, die Lernenden zu weiteren Reflexionen auf fachlicher Ebene anzuregen. Die Briefe wurden nicht zur Bewertung der individuellen mathematischen Leistung herangezogen.

Methodisches Vorgehen

Das hier vorgestellte Briefprojekt wurde im Schuljahr 2014/15 mit den Lernenden einer sechsten Klasse eines Kölner Gymnasiums durchgeführt. Es startete zu Beginn des Schuljahres und verlief über das Jahr mit insgesamt sechs verschiedenen Briefen. Während eine Hälfte der Klasse einen Brief auf Deutsch (Taner) beantwortete, schrieb die andere Hälfte der Klasse einen Brief auf Englisch (Peter). Von Brief zu Brief wurde zwischen den beiden Adressaten gewechselt und damit auch die Sprache, in welcher der Brief verfasst wurde. Von den insgesamt sechs Briefen sollten somit von jedem Schüler drei auf Deutsch und drei auf Englisch verfasst werden.

Am Ende des Briefprojekts wurden die Schüler gebeten, in die Rolle eines Unterrichtsforschers zu schlüpfen und ihrerseits eine Einschätzung des Projekts im Rahmen einer schriftlichen Befragung zu verfassen. Das Feedback der Schülerin Ella stellt im Folgenden den Ausgangspunkt dar, um auf einige Potenziale, aber auch Herausforderungen eines solchen bilingualen Briefprojekts einzugehen. Darauf aufbauend erzählen wir die Geschichte von Ella etwas weiter und werden an einem ihrer Briefe einen Moment identifizieren, der auf Unterschiede in der kognitiven Auseinandersetzung mit den fachlichen Inhalten beim Fremdsprachgebrauch hinweist.

Ergebnisse und Diskussion

Ein besonderes Potenzial des Projekts liegt in der Methode des Briefeschreibens an sich. Durch die Offenheit der mathematischen Fragen und Probleme, die Peter und Taner aufwarfen, erhielten die Lernenden Gelegenheit, den mathematischen Fokus, den sie in ihren Erklärungen legen wollen, selbstständig zu wählen. Dadurch wurde nicht nur ein emotionaler Bezug hergestellt, sondern auch die Möglichkeit zur Diagnose und Aufarbeitung eigener Verständnislücken geboten. Dieser Mehrwert wird in der Antwort von Ella auf die Frage „Was hat dir an dem Erklären von Mathematik durch das Briefeschreiben gut gefallen? Warum?“ deutlich:

> „Das einem die Probleme der beiden selbst helfen.“

Inwiefern sich dieser Mehrwert bei der Nutzung der Unterrichtssprache und der Fremdsprache unterscheidet, muss allerdings noch genauer untersucht werden. Verfolgt man die Rückmeldungen von Ella weiter, so wird ein häufig genanntes Hindernis bezüglich der Fremdsprachennutzung im Rahmen dieses Projekts deutlich. Auf die Frage „Was hat dir weniger gut gefallen? Warum?“ antwortet Ella:

> „Ich habe mich denk ich zu sehr auf das Englisch konzentriert und konnte manche Sachen nicht so gut erklären, denn ich wusste die Wörter nicht auf Englisch.“

Eine Grundidee des Projekts war es, die Wahl des Fokus, den die Lernenden in ihren Erklärungen legen, nicht durch die Vorgabe themenspezifischer Fachvokabeln einzuschränken. Zwar wurden den Lernenden Hinweise zur Nutzung von Wörterbüchern gegeben, welche teilweise auch unter Angabe ganzer Beispielsätze den Gebrauch des Fachwortschatzes in englischer Sprache unterstützen. Dennoch scheint diese Unterstützungsmaßnahme den Bedürfnissen der Lernenden nicht gerecht zu werden (vgl. auch Thürmann, 2010; Zydatiß, 2010).

Wirft man nun einen Blick auf Ellas Briefe, so erkennt man, dass sie ihre englischen Erklärungen mit unterschiedlichen Darstellungen anreichert. Auf die Anfrage von Peter, über einen Aspekt der Bruchrechnung zu schreiben, der den Lernenden besonders schwer gefallen ist, antwortet Ella mit dem folgenden Brief:

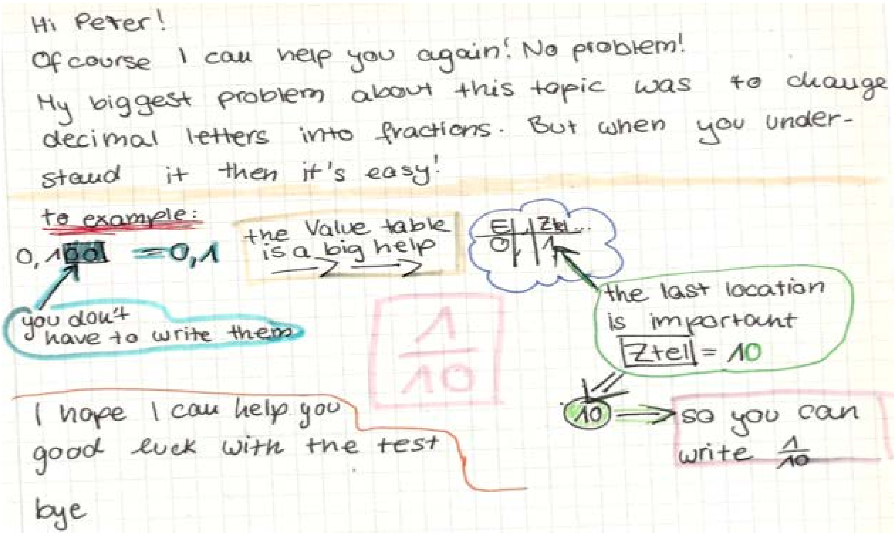


Abb. 1: Brief Nummer 4 von Ella an Peter

Die hier zu beobachtende Nutzung unterschiedlicher Darstellungsweisen wird beispielsweise von Leisen (2005) als ein didaktischer Schlüssel zum fachlichen Verstehen empfohlen. Eine Frage, die sich allerdings stellt, ist, inwiefern dieser Aspekt durch die Verwendung einer Fremdsprache – möglicherweise aufgrund zu überbrückender Sprachhindernisse – von den Lernenden häufiger und adäquater genutzt wird als bei ihren Erklärungen auf Deutsch. Dies müsste systematischer untersucht werden.

Die Liste mit der im Text angeführten Literatur kann per E-Mail angefordert werden: katrin.rolka@rub.de.

Anna-Katharina ROOS, Würzburg

Probleme Studierender mit dem Begriff Extrempunkt

Motivation

Ausgangspunkt der Studie bildet das Themengebiet der reellen Funktionen. Dessen Verständnis ist auf Hochschulniveau ein interessantes Forschungsgebiet, zum einen, da es eine Weiterführung der Schulmathematik darstellt, zum anderen da es in der Hochschulmathematik eine Grundlage bildet für weitere, komplexere mathematische Themen. In dem hier vorgestellten Projekt wurden drei grundlegende Charakteristika reeller Funktionen näher untersucht: Monotonie, Differenzierbarkeit und Extrempunkte.

Dazu sollen Vorstellungen und Verständnis der Studierenden hinsichtlich dieser Begriffe und ihrer Eigenschaften untersucht werden. Insbesondere werden Fehler und Fehlvorstellungen Studierender aufgezeigt, die im Zusammenhang mit diesen Begriffen stehen. Unter einem Fehler verstehen wir dabei die Abweichung von einer Norm (vgl. Hartinger, 1997), wobei die Norm sich bei uns aus der Fachmathematik ergibt (vgl. Prediger & Wittmann, 2009). Unter Fehlvorstellungen verstehen wir stabile Theorien, die ursächlich für Fehler sind (vgl. Schoy-Lutz, 2005).

Hinsichtlich Problemen (und deren Ursachen) mit dem Funktionsbegriff oder bestimmter Eigenschaften wie Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Tangente und auch Wendepunkt, kann bereits auf einigen Studien aufgebaut werden (vgl. Biza & Zachariades, 2010; Dreyfus & Eisenberg, 1983; Orton, 1983; Tall & Bakar, 1992; Tsamir & Ovodenko, 2013; Vinner & Dreyfus, 1989).

Theoretischer Hintergrund

Die Basis dieser Studie sollen zum einen die theoretischen Konstrukte *concept image* und *concept definition* (vgl. Tall und Vinner, 1981) bilden, zum anderen der Begriff der *Grundvorstellungen* (vgl. vom Hofe, 1995; Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016).

Unter der *concept definition* versteht man eine aus Worten bestehende Erklärung, die ein Individuum verwendet, um einen Begriff zu spezifizieren. Dabei wird unterschieden zwischen der persönlichen Rekonstruktion einer Begriffsdefinition (*personal concept definition*) und einer in der Fachwissenschaft akzeptierten Rekonstruktion (*formal concept definition*). Das *concept image* beinhaltet alle gedanklichen Verknüpfungen, die ein Individuum mit einen Begriff verbindet. Dabei müssen verschiedene *concept images* nicht zwangsläufig kohärent sein, sondern können sich inhaltlich auch widersprechen.

Zur Spezifizierung der Begriffe *Aspekt* und *Grundvorstellung* greifen wir auf die Definition von Greefrath et al. (2016) zurück: „ Ein *Aspekt* eines mathematischen Begriffs ist ein Teilbereich des Begriffs, mit dem dieser fachlich charakterisiert werden kann.“, und: „ Eine *Grundvorstellung* zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt.“

Ziele

Das Ziel dieser Studie ist es, Fehler beziehungsweise Fehlvorstellungen hinsichtlich der Begriffe Monotonie, Differenzierbarkeit und Extrempunkte zu finden. Daher lauten die Forschungsfragen wie folgt:

1. Welche Fehler lassen sich im Hinblick auf die Themengebiete Monotonie, Differenzierbarkeit und Extrempunkte bei den Studierenden nachweisen?
2. Welche Ursachen könnten die hinsichtlich des Begriffs Extrempunkt identifizierten Fehler haben?

Obwohl zunächst Fehler für alle drei Themengebiete gesucht wurden, wollen wir uns bei der Ursachenfindung spezialisieren, um ausführlicher und tiefer in den Bereich Extrempunkte einzusteigen. Dieser stellt eine Verbindung der beiden anderen Gebiete dar, da die Begriffe Monotonie und Differenzierbarkeit für den Inhaltsbereich Extrempunkt eine wichtige Rolle spielen.

Offensichtlich gibt es auch andere Ursachen für auftretende Fehler, wie zum Beispiel Schwierigkeiten mit der Aufgabenstellung oder Unaufmerksamkeit. In dieser Untersuchung wollen wir uns aber auf Ursachen, die mit dem Verständnis des Begriffs Extrempunkt zusammenhängen, konzentrieren.

Aufbau und Erste Ergebnisse

Zunächst soll betont werden, dass die nachfolgende Arbeit noch im Entstehen ist und daher noch keine endgültigen Ergebnisse präsentiert werden können.

Um zunächst einen Überblick über mögliche Fehler im Zusammenhang mit den Begriffen Monotonie, Differenzierbarkeit und Extremwerte zu bekommen, wurde ein Fragebogen mit 20 Items konzipiert. Ein Item besteht dabei aus einer mathematischen Aussage die entweder wahr oder falsch ist. Alle Fragestellungen sind auf der symbolischen Ebene gehalten, um der Arbeitsweise an der Universität gerecht zu werden. Die Antworten der Studierenden wurden zwar durch diverse Möglichkeiten zum Ankreuzen gelenkt, allerdings bietet der Fragebogen nach jeder Ankreuzmöglichkeit ausreichend Platz für offene Antworten mit Zeichnungen.

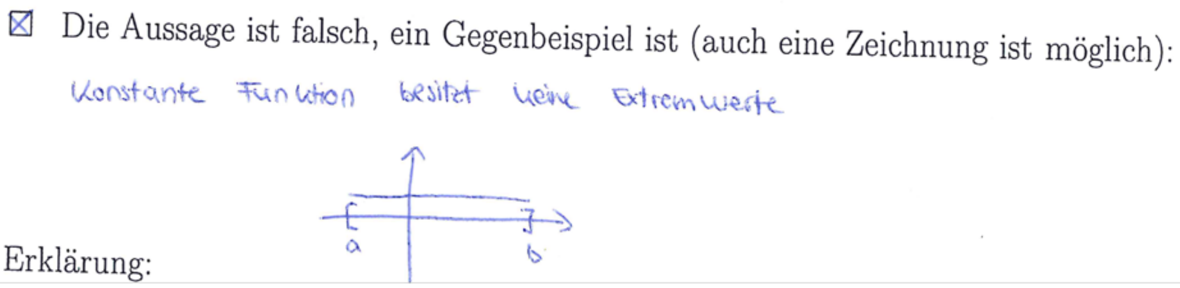
Im Wintersemester 2013/14 wurde zunächst ein Pilot-Versuch durchgeführt und in dessen Anschluss ein vorläufiges Kategoriensystem aufgestellt. Dann wurde die Hauptstudie im Sommersemester 2014 in der Bachelorveranstaltung Analysis II mit circa 75 Studierenden durchgeführt.

Anschließend wurden erste Fehlerkategorien mit Hilfe der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2010) aufgestellt.

An dieser Stelle möchten wir ein kurzes Beispiel geben:

Item 1: Wenn $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf (a, b) ist, dann nimmt f seine Extremwerte auf $[a, b]$ an.

Antworten der Studierenden lauteten beispielsweise:



Eine mögliche Kategorie zu diesem Beispiel heißt:

K1: Konstante Funktionen haben keine Extrema

Aus den einzelnen Kategorien wurde ein Kodierleitfaden erstellt, der die aufgetretenen Fehler kategorisiert.

Prediger und Wittmann (2009) stellen fest: „Die Fehlerursachen erschließen sich […] vielfach erst im Gespräch“. Daher wurden im Februar/März 2016 Interviews durchgeführt, um Ursachen für Fehler aufzudecken und die bisher aufgestellten Kategorien zu überprüfen. Diese wurden durchgeführt bei Studierenden nach dem ersten Analysis Semester. Im Vorfeld bearbeiteten die Studierenden einen Teil des ursprünglichen Fragebogens mit lediglich fünf Items, die den Begriff Extrempunkt mit verschiedenen Aspekten betrafen. Der zuvor bearbeitete Fragebogen wurde genutzt, um das Interview als fokussiertes Interview aufbauen zu können. Unter einem fokussierten Interview versteht man ein Leitfadeninterview über ein fokussiertes Objekt, hier der im Vorfeld beantwortete Fragebogen. Vor dem Interview wird anhand einer genauen Analyse der gegebenen Antworten Vermutungen über deren Bedeutung und damit mögliche Fehlerursachen aufgestellt. Auf Basis der Analyse und der aufgestellten Hypothesen entsteht der Leitfaden für die Interviews. Um auf das Beispiel von oben einzugehen: Eine mögliche Ursache dafür, dass konstante Funktionen nicht als Extrema-besitzend wahrgenommen werden, könnte der möglicherweise vorherrschende Prototyp eines Extremums als Berg oder Tal (Normalparabel) sein.

Auf Grundlage des theoretischen Hintergrunds werden jegliche Vorstellungen, die im Zusammenhang mit dem Begriff Extrempunkt und Aspekten dessen stehen, also auch Fehlvorstellungen, dem *concept image* zugeordnet.

Ausblick

In näherer Zukunft ist die Auswertung der Interviews und eine damit verbundene Überprüfung der Vermutungen möglicher Fehlerursachen beziehungsweise das Entdecken weiterer Fehlerursachen geplant.

Literatur

Biza, I. & Zachariades, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior*, *29*(4), 218-229.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1983). The Function Concept in College Students: Linearity, Smoothness and Periodicity. *Focus on learning problems in mathematics, 5,* 119-132.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. Im Druck (2016*): Didaktik der Analysis.* Heidelberg: Springer-Verlag.

Hartinger, A. (1997): Aus Fehlern wird man klug - nur wie? In: *Grundschule, 10* (1997), 29-30.

Vom Hofe, R. (1995): *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse.* Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 235-250, 1983.

Prediger, S. & Wittmann, G. (2009). Aus Fehlern lernen – (wie) ist das möglich? *Praxis der Mathematik, 51*(3), 1-8.

Radatz, H. (1980). *Fehleranalysen im Mathematikunterricht*. Braunschweig: Vieweg.

Schoy-Lutz, M. (2005). *Fehlerkultur im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franz-Becker Verlag.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 151-169.

Tall, D. & Bakar, M. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 23*(1), 39-50.

Tsamir, P. & Ovodenko, R. (2013). University students’ grasp of inflection points. *Educational Studies in Mathematics, 83*(3), 409-427.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356-366.

Hana RUCHNIEWICZ, Essen

Mehr als richtig oder falsch – Entwicklung eines digitalen Tools zur Selbstdiagnose und -förderung im Bereich Funktionales Denken

Vorgestellt wird die Entwicklung und Erforschung eines digitalen Tools zur Selbstdiagnose und -förderung im Rahmen des EU-Projekts FaSMEd (Raising Achievement through Formative Assessment in Science and Mathematics Education) zum formativen Assessment. Dabei geht es nicht darum, ob eine Aufgabenlösung richtig oder falsch ist. Vielmehr überprüfen Lernende ihre eigenen Kompetenzen anhand einer Check-Liste, die Informationen über typische Fehlvorstellungen im Bereich Funktionales Denken bereitstellt. Ergebnisse einer Fallstudie in Form eines videographierten Einzelinterviews zeigen Chancen und Herausforderungen dieses Zugangs auf.

Theoretischer Hintergrund

Assessment ist formativ, wenn „evidence about student achievement is elicited, interpreted, and used by teachers, [students,] or their peers, to make decisions about the next steps in instruction that are likely to be better, or better founded, than the decisions they would have taken in the absence of the evidence“ (Black & Wiliam 2009, S. 9). Wiliam und Thompson (2007) nennen fünf Schlüsselstrategien zur Konzeptualisierung von formativem Assessment (FA): 1) Klären/Teilen/Verstehen von Lernzielen und Erfolgskriterien, 2) Entwicklung effektiver Klassendiskussionen sowie Lernaufgaben, die das Verständnis der SchülerInnen eruieren, 3) Bereitstellen von unterstützendem Feedback, 4) Aktivierung der Lernenden als Lehrkräfte füreinander, 5) Aktivierung der SchülerInnen als selbstbestimmte Lerner.

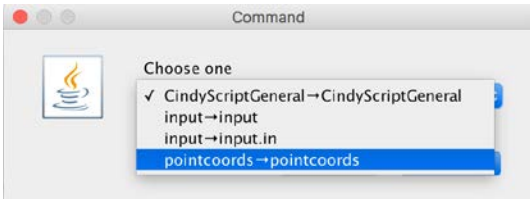


Abb. 1: Der FaSMEd Theorierahmen

Diese Strategien wurden in dem FaSMEd Theorierahmen (Abb. 1) aufgegriffen und um die Dimension „Funktionalitäten von Technologie“ ergänzt, um ein Modell zur Charakterisierung und Analyse von Technologie-gestützten formativen Assessment Prozessen zu generieren. Die neue Dimension unterteilt sich gemäß der Erfahrung der Projektpartner in drei Kategorien: Senden & Anzeigen, Verarbeiten & Analysieren und Bereitstellen einer interaktiven Lernumgebung. „Senden & Anzeigen“ umfasst alle formativen Assessment Prozesse, bei denen die eingesetzte Technologie als Kommunikationsmittel dient, z.B. dadurch, dass die Lehrkraft Fragen an Lernende schickt oder eine Schülerbearbeitung in der Klasse projiziert wird. Verarbeitet die Technologie gesammelte Daten, z.B. durch das Erstellen statistischer Diagramme zu Kurzumfragen, wird deren Funktionalität der Kategorie „Verarbeiten & Analysieren“ zugeordnet. Stellt die Technologie dagegen eine interaktive Lernumgebung bereit, in der Lernende mathematische Inhalte erkunden können, wie bei einer Geogebra Datei oder einem Funktionsplotter, entspricht ihre Funktionalität der dritten Kategorie (Cusi & Ruchniewicz in Vorb.).

Für die Entwicklung des digitalen Tools zum formativen Assessment im Bereich Funktionales Denken sind drei Grundvorstellungen zentral: Zuordnung, Kovariation und Objekt. Diese Konzepte müssen Lernende aufbauen, um den Funktionsbegriff erfassen und damit angemessen umgehen zu können (vom Hofe 2003). Lernende begegnen Funktionen in verschiedenen Darstellungsarten: situativ, numerisch, graphisch oder symbolisch. Daher müssen sie auch die Fähigkeit erwerben, flexibel zwischen diesen zu wechseln (Duval 2002). Das Tool fokussiert den Darstellungswechsel von situativer Beschreibung zum Graphen. Das Lernziel wird dabei durch die Frage: „Kann ich zu einer gegebenen Situation einen Graphen zeichnen?“ formuliert.

Entwicklungszyklen

Die Konzeption und Evaluation des digitalen Tools sind im zyklischen Prozess der fachdidaktischen Entwicklungsforschung verbunden. Die erste pen-&-paper Version (Mai - Nov 14) wurde auf Basis der Übekartei des Projekts KOSIMA entwickelt (Barzel et al. 2011) und besteht aus fünf Komponenten: Lernende bearbeiten die offene *Überprüfen*-Aufgabe und schätzen ihre Lösung mit dem *Check* ein. Dieser enthält Aussagen zu erwarteten Fehlern (z.B. „Mein Graph beginnt nicht im Nullpunkt.“), die durch Ankreuzen identifiziert werden. Bei richtiger Lösung werden weitere *Üben*- und die *Erweitern*-Aufgabe bearbeitet. Wird ein Fehler festgestellt, steht den Lernenden eine *Info* sowie *Übung* zu der entsprechenden Fehlvorstellung zur Verfügung.

Das Tool wurde in einem Design Experiment (Dez 14 - Apr 15) bestehend aus 3 Einzel- (8. Kl., Gymnasium) und 4 Partnerinterviews (8. Kl., Gesamtschule) erprobt und in einer Expertenbefragung im Rahmen des Forschungskolloquiums für Mathematikdidaktik der Universität Duisburg-Essen (n=23) evaluiert. Ersichtlich wurde, dass das Tool individuelle Lernpfade zulässt und sich formative Assessment Prozesse anhand der Interviews rekonstruieren lassen. Zudem zeigten sich Schwachstellen, die weiterentwickelt wurden (Apr - Aug 15). Vor allem wurden die *Check*-Punkte positiv formuliert (z.B. „Ich habe erkannt, dass der Graph drei Mal den Wert Null annimmt.“), da viele Lernende das Ankreuzen der Punkte nicht als Identifizieren von Fehlern erkannten. Nun zeigen sie damit, dass sie keinen Fehler feststellen.

Zur Implementation von Technologie entstanden zwei Prototypen (Sep 14 - Mai 15): in dem serverbasierten Bewertungssystem JACK und in der Software TI-Nspire Navigator. Da in JACK die *Check*-Liste nur punktweise einzubinden und kein Zeichenfeld integrierbar war, wurde nach einer Evaluation beider Prototypen mit drei Lehrkräften nur die TI-Nspire Version weiterentwickelt (Lua-Skript programmiert von Steve Arnold, TI, Mär - Dez 15). Diese wurde in zwei Einzelinterviews (10. Kl, Real- und Gesamtschule) erprobt (Jan 16). Aus dieser Untersuchung wird ein Fallbeispiel vorgestellt.

Fallbeispiel

Im Folgenden wird der Lernweg einer Schülerin (S) der 10. Klasse einer Gesamtschule nachvollzogen. Die diagnostische *Überprüfen-A*ufgabe lautet:

> *Niklas setzt sich auf sein Fahrrad und fährt von zu Hause los.*
> *Dann fährt er mit gleichbleibender Geschwindigkeit die Straße entlang, bevor es einen Hügel hinaufgeht. Oben auf dem Hügel bleibt er ein paar Minuten stehen, um die Aussicht zu genießen. Dann fährt er wieder herunter und bleibt unten am Hügel stehen.*
> *Zeichne einen Graphen aus dem man ablesen kann, wie sich die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit verändert* **.**

S erstellt mithilfe des digitalen Tools den Graphen in Abb. 2. Dann sieht sie sich die Musterlösung an und beginnt mit dem *Check*. Sie kreuzt den Punkt „*Ich habe erkannt, dass der Graph drei Mal den Wert Null annimmt.*“ nicht an. Anschließend liest sie die passende *Info*

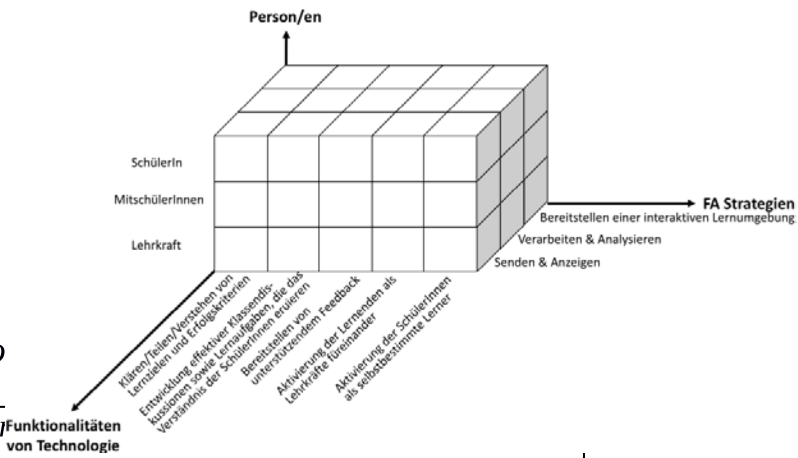


Abb. 2: Schülerlösung

S: *Ach, okay jetzt hab' ich das verstanden*

I: *Und was hast du da verstanden?*

S: *Also, und zwar ich hatte das ja nicht, also ich hab das ja sozusagen hier gemacht, dass Niklas auf der Straße fährt* (zeigt auf der Abbildung zu I1 auf den ersten steigenden Abschnitt des Graphen) *und dann hier* (zeigt auf den folgenden konstanten Abschnitt des Graphen) *den Hügel entlang und dann stoppt er ja, aber ich hab dann halt so, dass er wieder zurückgeht gemacht* (zeigt auf den ersten fallenden Abschnitt des Graphen) *ich hab das nicht mit der zweiten Null gemacht, wenn Niklas oben auf dem Hügel steht, dann hat er ja keine Geschwindigkeit mehr.*

Letztlich löst S die zugehörige *Übung* fehlerlos und hakt den *Check*-Punkt ab. Sie durchläuft also einen formativen Assessment Prozess, der mithilfe des FaSMEd Theorierahmens charakterisiert werden kann (Abb.4). wobei das Tool der Schülerin als interaktive Lernumgebung dient: durch das Bearbeiten der *Überprüfen*-Aufgabe und den *Check* gewinnt S Erkenntnisse über ihr Verständnis und aktiviert somit die zweite Schlüsselstrategie formativen Assessments. Der *Check*-Punkt liefert ihr ein Erfolgskriterium, durch das sie einen Fehler identifiziert (Strategie 1). S entscheidet selbst über ihr weiteres Handeln (Strategie 5), reflektiert anhand der *Info* ihren Fehler im gegebenen Kontext und formuliert ein Feedback (Strategie 3). Schließlich überprüft sie ihren Lernfortschritt durch das Lösen der *Übung* und den Vergleich von eigener und Musterlösung.

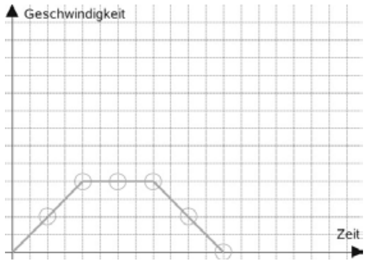


Abb. 3: Abbildung in *Info 1*

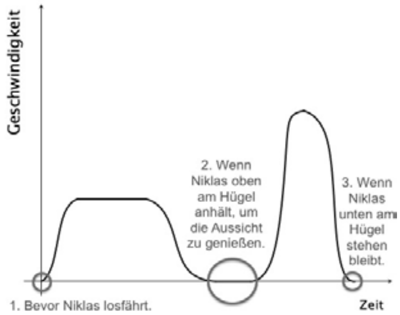


Abb. 4: Charakterisierung des formativen Assessment Prozesses von S mithilfe des FaSMEd Theorierahmens

Literatur

Barzel, B., Prediger, S., Leuders, T., & Hußmann, S. (2011). Kontexte und Kernprozesse – Ein theoriegeleitetes und praxisorientiertes Schulbuchkonzept. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011*, 71-74.

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation, and Accountability*, 21, 5-31.

Cusi, A., & Ruchniewicz, H. (in Vorb.). The FaSMEd Framework – Conceptualizing technology enhanced formative assessment.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of Mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1(2), 1-16.

Wiliam, D., & Thompson, M. (2007). Integrating assessment with learning: what will it take to make it work? In C. A. Dwyer (Ed.), *The Future of Assessment: Shaping Teaching and Learning* (S. 53-82). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik lehren*, 118, 4-8.

Christian RÜEDE, Pädagogische Hochschule Nordwestschweiz

Gleichungen flexibel lösen – und zwar von Anfang an

Flexibles Rechnen ist ein weithin anerkanntes Ziel des Arithmetik-Unterrichts der Grundschule, zumal dadurch die Ablösung von zählendem Rechnen besser gelingt (Rechtsteiner-Merz, 2013). Die Diskussion um die *Flexibilität in der Algebra* (Sekundarstufe) hingegen steht erst in ihren Anfängen, ausgelöst durch die Arbeiten von Rittle-Johnson und Star (2007). Diese Autoren zeigen: a) flexibles Gleichungslösen kann gezielt gefördert werden (durch das Angebot von Gleichungen, bei denen sich unterschiedliche Vorgehensweisen anbieten), b) die Schülerleistung nimmt am meisten zu, wenn die Flexibilität von Anfang an gezielt aufgebaut wird (und nicht zuerst das Standardverfahren geübt wird und erst dann alternative Lösungswege angesprochen werden) (Rittle-Johnson, Star & Durkin, 2012). Auch wenn es sich dabei um laborartige und kurzzeitige Studien handelt, stellt sich die Frage: Wie lässt sich aus Sicht der Theorie erklären, dass der Ansatz „Flexibilität von Anfang an“ effektiver sein kann als der Ansatz „zuerst Standardverfahren, dann Flexibilität“ (traditioneller Unterricht)?

1. Das Gleichungslösen in der Literatur

Die Algebradidaktik fokussierte bis in die 1980-er Jahre auf die Analyse von Verfahren zur Lösung von Gleichungen oder Vereinfachung von Termen: Welche Verfahren verwenden Schülerinnen und Schüler? Wie regulieren sie deren Ausführung? Erst ab den 1990-er Jahren wurden interpretative Prozesse in den Blick genommen. Neben der Frage, wie jemand umformt, wurde zunehmend die Frage gestellt, wie die vorzunehmende Umformung erkannt wird. Kieran (1989) führte den Begriff der *Struktur einer Gleichung* ein zur Beschreibung von Deutungen, die mit dem Erkennen der Umformung verbunden sind. Um die Jahrtausendwende stellte sich die Einsicht ein, dass derartige Strukturen nicht so sehr spontan gesehen als vielmehr aktiv konstruiert werden. Linchevski und Livneh (1999) führen aus diesem Grund den Begriff des *Struktursinns* ein, um die multiplen Strukturen zu betonen, die beim Umgang mit Termen und Gleichungen flexibel gehandhabt und generiert werden müssen. Schließlich wird in Rüede (2015) argumentiert, dass Strukturieren als Handeln begriffen werden kann. Zusammengefasst sind beim Gleichungslösen zwei Typen von Handlungen wichtig: Umformen und Strukturieren. Entsprechend sind beim *Gleichungslösen mit multiplen Lösungswegen* sowohl multiple Verfahren als auch multiple Strukturen verbunden.

2. Flexibilität beim Gleichungslösen

Das in diesem Beitrag verwendete Konzept der Flexibilität orientiert sich an den Arbeiten von Rittle-Johnson, Star und Durkin (2012). Flexibilität beim Gleichungslösen meint daher sowohl ein Wissen über multiple Vorgehensweisen als auch das Können, bei einer gegebenen Gleichung spontan ein optimales Verfahren anzuwenden. Das bedingt, dass bei einer vorgegebenen Gleichung mehrere Verfahren und damit mehrere Strukturen aktiviert werden können. Wesentlich wird das Wechseln zwischen Strukturen und damit das Umstrukturieren. Umformen und Umstrukturieren sind die zentralen Handlungen in punkto Flexibilität beim Gleichungslösen.

Um unterschiedliche Strukturen einer Gleichung darstellen zu können, werden in diesem Beitrag Graufärbungen verwendet. Zur Illustration dieses Ansatzes sei die Gleichung 4 (3*x* + 1) = 100 – 6 (3*x* + 1) aufgegriffen, eine Gleichung, die unterschiedlich strukturiert werden kann. **4** (**3*x*** + 1) = 100 – 6 (3*x* + 1) stelle die Struktur dar, die mit der Ausmultiplikation verbunden ist. In diesem Fall fokussieren viele Schüler einfach auf die ersten Terme links, da sie diese als erstes miteinander multiplizieren. Daher sind die 4 und die 3*x* hier fett dargestellt. Die restlichen Zeichen sind grau, weil diese für sie vorerst uninteressant sind. **4 (**3*x* + 1**)** = 100 **– 6 (**3*x* + 1**)** hingegen stehe für die Zusammenfassung der gleichen Klammerterme 4 (3*x* + 1) und 6 (3*x* + 1), was zu 10 (3*x* + 1) = 100 führt. Für diese Umformung ist die Gleichung 4 (3*x* + 1) = 100 – 6 (3*x* + 1) als dreigliedrig anzuschauen (4 (3*x* + 1) links, 100 rechts, und 6 (3*x* + 1) rechts), was mit den entsprechenden Färbungen ausgedrückt werden soll. Wichtig ist hier nicht, ob die jeweilige Graufärbungen die intendierte Sichtweise tatsächlich optimal zum Ausdruck bringt, sondern vielmehr, dass es sich bei den beiden Strukturen **4** (**3*x*** + 1) = 100 – 6 (3*x* + 1) und **4 (**3*x* + 1**)** = 100 **– 6 (**3*x* + 1**)** um zwei unterschiedliche Sichtweisen auf ein und dieselbe Zeichenreihe handelt. Wer über Flexibilität beim Gleichungslösen verfügt, kann beide Strukturen herstellen und die damit verbundenen Verfahren ausführen.

3. Gleichungslösen als Umformen und Umstrukturieren

Zu klären bleibt, wie die beiden Handlungstypen des Umformens und Umstrukturierens beim Gleichungslösen zusammenspielen. In Abbildung 1 ist ein Vorschlag dargestellt. Jede Umformung verbindet unterschiedliche Ausdrücke, die Umstrukturierung verbindet unterschiedliche Strukturen des gleichen Ausdrucks. Die Abbildung macht deutlich, dass man sich beim Gleichungslösen immer mit den Strukturen der Gleichung beschäftigt. Beginnend bei der Struktur der Ausgangsgleichung kann man eine andere Struktur herstellen (Umstrukturieren) oder einen Verfahrensschritt ausführen (Umformen).

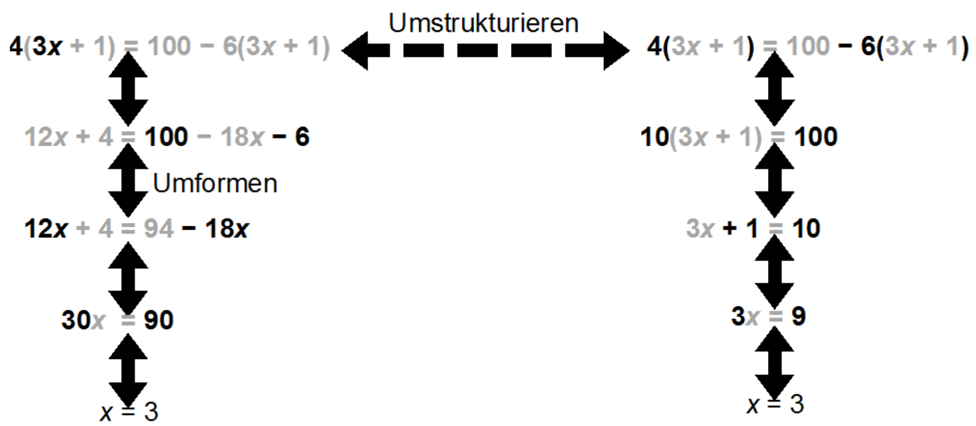


Abb. 1: Modellierung des Gleichungslösens anhand der Gleichung 4 (3*x* + 1) = 100 – 6 (3*x* + 1). Strukturen sind durch Graufärbungen dargestellt. Der gestrichelte Querpfeil stellt das Umstrukturieren dar, die anderen Pfeile stehen für Umformungen.

Das Objekt „Gleichung“ (bezeichnet mit „4 (3*x* + 1) = 100 – 6 (3*x* + 1)“) wird durch die Handlungen des Umformens und Umstrukturierens von den Lernenden erst konstruiert, und seine Generierung gründet wesentlich auf der Handlung des Umstrukturierens (Rüede, 2015). Denn erst durch die Umstrukturierung stellen die Lernenden einen Zusammenhang zwischen den beiden Strukturierungen her, indem sie beispielsweise erfahren, dass beide zum gleichen Resultat führen, oder sie interpretieren die gegebene Struktur Schritt um Schritt zu einer anderen Struktur um (für ein Beispiel vgl. Rüede 2015, S. 145 ff.). Sie realisieren, dass **4** (**3*x*** + 1) = 100 – 6 (3*x* + 1) und **4** (3*x* + 1**)** = 100 **– 6** **(**3*x* + 1**)** beide auf dasselbe referieren. Dieses „dasselbe“ ist die Gleichung als Objekt. Dieses Objekt kann formal als Kombination der beiden Strukturierungen (inklusive der sich daraus je ergebenden Umformungen) aufgefasst werden. In diesem Sinne ermöglichen erst die Handlungen des Umstrukturierens, den Ausdruck 4 (3*x* + 1) = 100 – 6 (3*x* + 1) als Repräsentation eines Objekts zu behandeln.

Die hier vorgestellte Modellierung des Gleichungslösens lässt sich in einen inferentialistischen Rahmen einbetten (Rüede, 2015). Die Umstrukturierungen entsprächen *repräsentationalen* Verbindungen (Inferenzen). Sie verbinden Strukturierungen desselben Ausdrucks. Die Umformungen hingegen würden als *transformationale* Verbindungen bezeichnet, sie verbinden Strukturierungen unterschiedlicher Ausdrücke (Abb. 2).

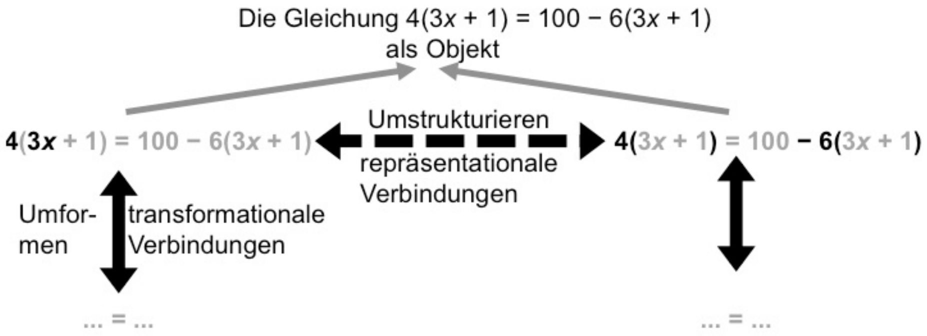


Abb.2: Konstruktion eines Objekts basierend auf Handlungen des Umstrukturierens (und Umformens)

4. Konsequenzen

Obige Modellierung des flexiblen Gleichungslösens zeigt einen Zusammenhang zwischen Unterrichtskonzept und Wissensaufbau beim Gleichungslösen auf. Beim Unterrichtsansatz „Flexibilität von Anfang an" werden ab Beginn Gleichungen angeboten, bei denen sich multiple Verfahren anbieten. Konsequenterweise formen Schülerinnen und Schüler nicht nur um, sondern strukturieren auch um (Herstellung transformationaler und repräsentationaler Verbindungen). Beim Unterrichtsansatz „zuerst Standardverfahren, dann Flexibilität" dominieren Umformungen (transformationale Verbindungen), weil vor allem das Standardverfahren geschult wird. Üblicherweise legen die in diesem Unterrichtsansatz angebotenen Gleichungen auch keine alternativen Verfahren nahe. Die Schülerinnen und Schüler tendieren dazu, die Gleichung im Wesentlichen bloß als ein Verfahren (und zwar als das Standardverfahren) zu begreifen.

Literatur

Kieran, C. (1989). The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Hrsg.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (S. 33–56). Hillsdale: Erlbaum.

Linchevski, L. & Livneh, D. (1999). Structure sense: The Relationship Between Algebraic and Numerical Contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173–199.

Rechtsteiner-Merz, C. (2013). *Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung*. Münster: Waxmann.

Rittle-Johnson, B. & Star, J. R. (2007). Does Comparing Solution Methods Facilitate Conceptual and Procedural Knowledge? An Experimental Study on Learning to Solve Equations. *Journal of Educational Psychology*, *99*(3), 561–574.

Rittle-Johnson, B., Star, J. R. & Durkin, K. (2012). Developing Procedural Flexibility. Are Novices Prepared to Learn form Comparing Procedures? *British Journal of Educational Psychology, 82*, 436–455.

Rüede, C. (2015). *Strukturierungen von Termen und Gleichungen*. Wiesbaden: Springer.

Christian RÜEDE, Christine STREIT, PH Nordwestschweiz

Auswertung schriftlich vorliegender Lernstandeinschätzungen – ein kontrastiver Experten-Novizen Vergleich

Zunehmend wird Diagnostizieren als Verzahnung von Lernstandeinschätzung und Weiterarbeit modelliert (Klug et al., 2013) und das Fachspezifische des diagnostischen Handels betont (Baumert & Kunter, 2006). Allerdings ist die empirische Befundlage zu beiden Aspekten schmal. Vor diesem Hintergrund haben wir Lernstandeinschätzungen und diagnosegestützte Maßnahmenplanungen produzieren lassen. Befragt wurden 7 mathematikdidaktische Experten und 7 Novizen (Studierende des Grundschullehramts) unter Nutzung von 4 Vignetten, die schriftlich zu bearbeiten waren (Streit et al., 2015). Leitend war die Forschungsfrage:

> *Inwiefern unterscheiden sich in ausgewählten arithmetischen Lernbereichen die von Experten und Novizen schriftlich formulierten Lernstandeinschätzungen und die darauf basierenden Vorschläge für die Weiterarbeit?*

1. Zum methodischen Vorgehen

Zur Auswertung der Daten wurde ein mehrschrittiges, induktiv-deduktives inhaltsanalytisches Vorgehen gewählt. Damit versuchten wir inhaltlich begründete Unterschiede zwischen Experten und Novizen auf der Ebene der einzelnen Vignetten (und damit lernbereichsspezifisch), aber auch lernbereichsunabhängige Unterschiede auf der Prozessebene sichtbar zu machen.

Zur Auswertung inhaltlicher Aspekte

Zur Analyse inwiefern Experten und Novizen fachdidaktische Inhalte aufgreifen, zählten wir Verweise auf fachdidaktische Konzepte (Stellenwertverständnis, (An-)Zahlbeziehungen etc.) aus. Dazu eruierten wir für jede Vignette basierend auf den Daten der Experten die relevanten fachdidaktischen Konzepte und bestimmten anschließend im Konsensverfahren basierend auf allen erhobenen schriftlichen Antworten eine Liste von Worten, die auf das jeweilige Konzept verwiesen. So erhielten wir für jedes fachdidaktische Konzept, das relevant für eine der 4 Vignetten war, eine Wortliste. Für das Konzept der (An-)Zahlbeziehungen bestand die Liste aus Worten wie „Struktur“, „strukturieren“, „Muster mit 2 Farben“, „Musterbildung“, „umschieben“, „umlegen“, „umstrukturieren“, „umorganisieren“, „zusammensetzen“, „aufteilen in 5+4“, „Beziehung“ etc. Diese Worte zählten wir in den Antworttexten zur Lernstandeinschätzung und zur Weiterarbeit aus und konnten so auf die Anzahl der Nennungen fachdidaktischer Konzepte schließen.

Zur Auswertung prozessualer Aspekte

Zog sich die Auswertung der inhaltlichen Aspekte über Lernstandeinschätzung und Weiterarbeit hinweg, analysierten wir prozessuale (sich auf den zirkulären Prozess des Diagnostizierens beziehende) Aspekte der Lernstandeinschätzung und der Weiterarbeit je einzeln, da es sich um unterschiedliche Textgattungen handelte. In Streit et al. (2015) ist die Auswertung der Lernstandeinschätzung vorgestellt. Daher schränken wir hier auf die Beschreibung der Analyse der Weiterarbeit ein. Leitend war die Beobachtung, dass sich die Antworttexte bei der Weiterarbeit entlang von unterrichtsbezogenen Elementen gliedern. Entsprechend kategorisierten wir die Sinneinheiten nach Maßnahmen, Zielen und Begründungen. Diese Kategorien teilten wir in Unterkategorien auf, in Tabelle 1 sind als Beispiel jene der Kategorie „Maßnahmen" umschrieben.

Maßnahmen	Konkrete Aufgabe	Formulierung einer konkreten Aufgabenstellung „Wo sieht man die gelegte Zahl besonders gut? Erkläre."
	Inhaltliche Maßnahme	Beschreibung von Aspekten einer inhaltlichen Maßnahme (Beschreibung des Materialeinsatzes, des Aufgabenformats, von möglichen Schülerantworten etc.) „Rechengeschichten visualisieren lassen"
	Methodisches Vorgehen	Beschreibung von Unterrichtsphasen, Sozialformen, methodischen Vorgehensweisen etc. „Daraus könnte man eine Partnerübung gestalten"
	Bezug zu Schülerprodukt	Hinweis auf ein Schülerprodukt, das als Basis einer Aufgabenstellung dient. „... wie Neles 7 und 9"
	Weitere Lernvoraussetzungen abklären	Vorschlag für weitere Abklärungen der Lernvoraussetzungen „Überprüfung des Stellenwertverständnisses"

Tab. 1: Auswertung der Weiterarbeit: Unterkategorien der Kategorie „Maßnahmen"

2. Resultate

Die Häufigkeitsanalyse der fachdidaktischen Konzepte sei anhand von Vignette 1 dargestellt (Abb. 2). Offenbar ist bei den Experten in der Lernstandeinschätzung und in der Weiterarbeit genau ein und dasselbe fachdidaktische Konzept zentral. Bei den Novizen ist dieses Konzept deutlich weniger markant, zudem kommen auch Oberflächenmerkmale sehr oft vor. Dieses Bild zeigt sich bei allen 4 eingesetzten Vignetten.

Die Resultate zu den prozessualen Aspekten bei der Lernstandeinschätzung sind in Streit et al. (2015) dokumentiert. Als wesentliche Erkenntnis ist dort festgehalten: 1.) In den Lernstandeinschätzungen der Experten wird das wissenschaftliche(re) Arbeiten deutlich, sie erkennen Lücken, sie vermuten (in Anbetracht der noch unsicheren Faktenlage) und belegen ihre Hypothesen. 2.) Die Experten geben Hinweise auf die Weiterarbeit schon in den Lernstandeinschätzungen. 3.) Die Novizen bewerten und beschreiben häufiger als die Experten.

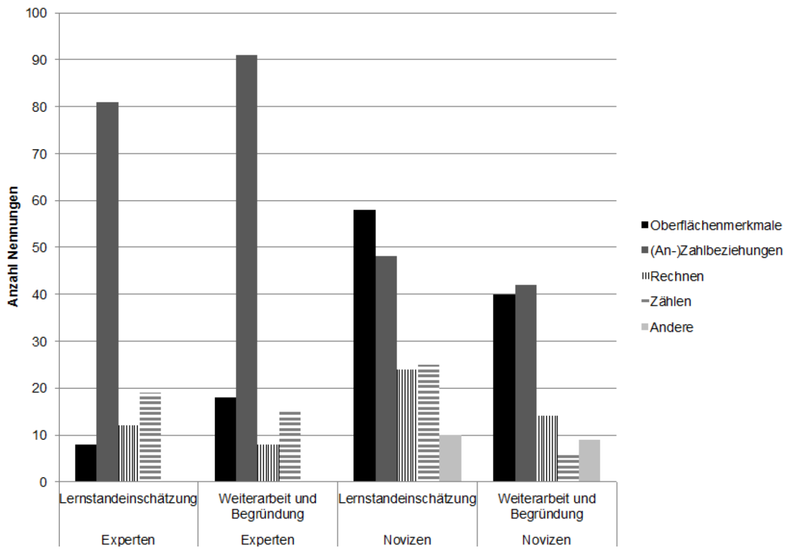


Abb. 2: Anzahl Nennungen der fachdidaktischen Konzepte bei Vignette 1

Bei den Resultaten zu den prozessualen Aspekten bei der Weiterarbeit fallen die Unterschiede zwischen den Experten und Novizen in den Subkategorien „Konkrete Aufgaben“, „Bezug auf Schülerprodukt“ und „Weitere Lernvoraussetzungen abklären“ auf. So formulieren Experten im Gegensatz zu den Novizen deutlich mehr konkrete Aufgaben- und Fragestellungen und beziehen diese deutlich öfter auf die gegebenen Schülerprodukte. Ebenso machen sie markant häufiger als die Novizen Hinweise auf weitere diagnostische Abklärungen. Das ist im Einklang mit der Fähigkeit der Experten Informationslücken zu erkennen.

Interessanterweise haben die Novizen ihre Maßnahmen öfters mit Verweis auf den Lernstand begründet. Unseres Erachtens ist dieser überraschende Befund ein Hinweis darauf, dass für die Experten die Passung zwischen Lernstandeinschätzung und Weiterarbeit in erster Linie durch den Einsatz der relevanten fachdidaktischen Konzepte und durch den Bezug auf die Schülerprodukte hergestellt wird.

4. Diskussion

Wir sehen unsere Resultate als empirische Bestätigung der normativ aufgestellten Forderung von Moser-Opitz (2010, S. 14), nämlich, dass die Grundlage für die Weiterarbeit immer die der Lernstandeinschätzung „zugrundeliegenden Theorien und Konzepte“ sind. Genau so scheinen unsere Experten vorgegangen zu sein. Sie ordneten der in der Vignette formulierten Aufgabenstellung ein fachdidaktisches Konzept zu. Dieses Konzept vermittelt bei den Experten zwischen typischen Ausprägungen von Vorstellungen und Denkprozessen der Kinder und passenden Unterstützungsmaßnahmen für ihre Weiterentwicklung. Bei den Novizen hingegen sind die fachdidaktischen Konzepte erst als lose „Puzzle“-Teile ausgebildet und übernehmen daher keine Vermittlungsfunktion zwischen Lernstandeinschätzung und Weiterarbeit.

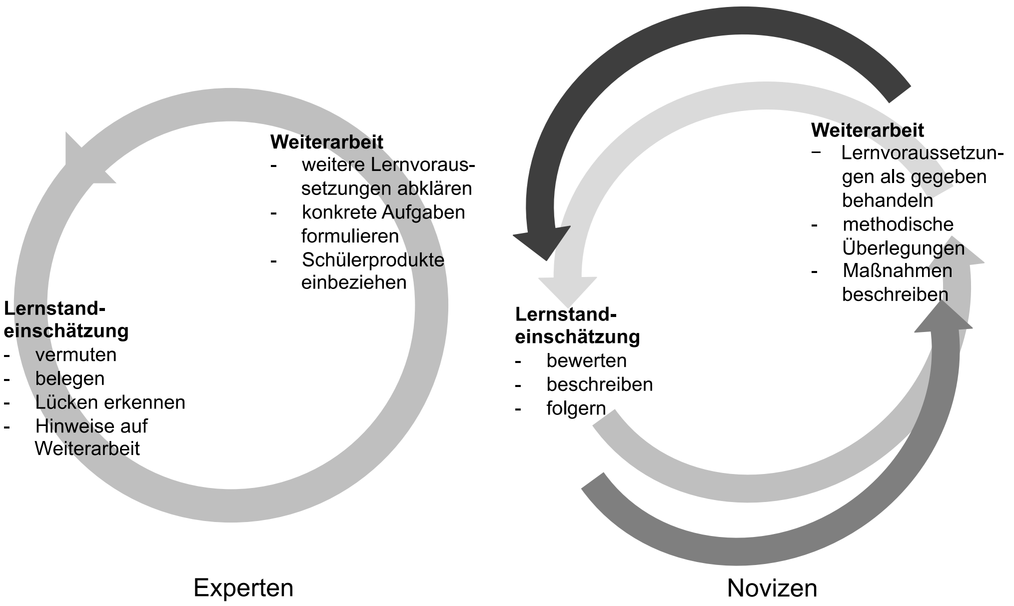


Abb. 3: Prozessmodell des Wechselspiels von Lernstandeinschätzung und Weiterarbeit. Die grau gefärbten Pfeile symbolisieren die fachdidaktischen Konzepte, die bei den Experten zwischen Weiterarbeit und Lernstandeinschätzung vermitteln im Gegensatz zu jenen der Novizen

Abschließend sei bemerkt, dass Expertise immer vielfältig ist, die hier vorgestellte Auswertung jedoch nur bestimmte Ausprägungen der Expertise erfasst. In gewissem Sinne fokussierten wir auf den „durchschnittlichen“ Unterschied zwischen Experten und Novizen und nicht auf die Vielfalt der Unterschiede.

Literatur

Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 9*(4), 469–520.

Klug, J., Bruder, S., Kelava, A., Spiel, C., & Schmitz, B. (2013). Diagnostic competence of teachers: A process model that accounts for diagnosing learning behavior tested by means of a case scenario. *Teaching and Teacher Education, 30*, 38–46.

E. Moser-Opitz (2010). Diagnose und Förderung: Aufgaben und Herausforderungen für die Mathematikdidaktik und die mathematikdidaktische Forschung. In A. Lindmeier & S. Ufer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010* (S. 11–18). Münster: WTM.

Streit, C., Rüede, C. & Weber, C. (2015). Diagnostische Kompetenz – Wie sich Experten und Novizen beim “Lesen” von Schülerdokumenten unterscheiden. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten und C. Streig (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (S. 896–899). Münster: WTM.

Christian RÜTTEN, Essen

„Null ist in Wirklichkeit eine Tausend“ – Sichtweisen von Grundschulkindern auf negative Zahlen

1. Einleitende Bemerkung

Lehrende kennen aus der unterrichtlichen Praxis das Phänomen, dass Lernende bereits vor der unterrichtlichen Thematisierung erste Ideen zu mathematischen Gegenständen und Sachverhalten besitzen. So sind Grundschulkindern z. T. schon negative Zahlen sowie Operationen mit ganzen Zahlen bekannt, obwohl diese gewöhnlich erst in der Sekundarstufe thematisiert werden. Bspw. stellt sich der Viertklässler Viktor negative Zahlen mittels der Metapher „Null ist in Wirklichkeit eine Tausend“ vor, indem er an der Zahlengerade – ähnlich wie links der Tausend – auch links der Null Zahlen verortet (vgl. Rütten 2016). Solche vorunterrichtlichen Vorstellungen über den erweiterten Zahlbereich veranlassen nähere Untersuchungen. Sowohl im deutschen Sprachraum wie international finden sich bereits einige entsprechende Forschungsprojekte. Dabei lässt sich zwischen solchen Projekten unterscheiden, die unter vornehmlich *konstruktiver* Perspektive Unterrichtskonzepte bzw. Lernarrangements zu negativen Zahlen für die Grundschule entwickeln, und solchen, die eher *rekonstruktiv* nach den Lernvoraussetzungen von Grundschulkindern im Hinblick auf den Umgang mit diesen Zahlen fragen. Als zentrale Lernvoraussetzung werden dabei auch die vorunterrichtlichen Vorstellungen der Lernenden in den Blick genommen. Dieses Ziel verfolgte auch eine explorative Studie mit 291 Lernenden der Klassen 3 und 4, die versucht im Forschungsrahmen der didaktischen Rekonstruktion einen Einblick in die Lernerperspektiven bzgl. negativer Zahlen zu geben und so für diese zu sensibilisieren (vgl. Rütten 2016).

2. Lernerperspektiven

Unter der Lernerperspektive können in Verknüpfung der Theorie der *kognitiven Schichtenstruktur* (Petri & Niedderer 2001) und dem *concept-image-Ansatz* (Tall & Vinner 1981) sowie dem *psychologischen Vorwissenskonzept* die meist situationsabhängig aktivierten Schichten einer konzeptuellen Domäne verstanden werden, wobei das in diesen Schichten repräsentierte Wissen lediglich nach seiner individuellen Viabilität, nicht aber nach dem Wahrheitswert im Sinne der Übereinstimmung mit konventionellen, als Norm verstandenen Sichtweisen bewertet werden kann (vgl. Rütten 2016). Die Lernerperspektive äußert sich im Sinne einer *personal concept definition* auf der sprachlichen Ebene und lässt sich folglich auch über diese rekonstruieren. Da sich eine kognitive Schicht auch psychologisch als mentales Modell bzw. mathematikdidaktisch als Grundvorstellung begreifen lässt, eröffnen sich über die entsprechenden Ansätze Perspektiven zur Rekonstruktion von Lernerperspektiven.

3. Systematische Metaphernanalyse

Bspw. sieht Bender (1991) in der Metapher eine Möglichkeit, aus sprachlichen Äußerungen Grundvorstellungen zu rekonstruieren. Die konzeptuelle Metapherntheorie (vgl. z. B. Lakoff & Johnson 1980) bietet einen theoretischen Hintergrund, vor dem sich eine entsprechende Metaphernanalyse entwickeln lässt. Im Verständnis der konzeptuellen Metapherntheorie ist die Metapher weniger ein rein rhetorisches Mittel, sondern vielmehr eine kognitive Struktur, deren Wesen darin besteht, einen (meist weniger konkret erfahrbaren) Gegenstand oder Sachverhalt in Ausdrücken eines anderen (meist erfahrungsgebundenen) zu verstehen und zu erfahren (vgl. Lakoff & Johnson 1980). Als solche ist die Metapher in Sprache und Denken omnipräsent. In der Sprache finden die *konzeptuellen Metaphern* der gedanklichen Ebene in Systemen konsistenter *Lexemmetaphern* ihren Ausdruck, sodass diese Systeme eine Möglichkeit zur Rekonstruktion der dahinterliegenden metaphorischen Konzepte eröffnen. Schmitt (z. B. 1997) stellt eine dementsprechende systematische Metaphernanalyse für die sozialwissenschaftliche Forschung vor. Diese lässt sich unter Berücksichtigung mathematikdidaktischer Überlegungen zur Metapher bzw. metapherntheoretischer Überlegungen zur Mathematik für die Rekonstruktion der Lernerperspektiven von Grundschulkindern auf negative Zahlen adaptieren. Lakoff und Núñez (2000) machen in mathematischen Publikationen im Sinne einer Metapherntypologie sog. *Grundmetaphern* aus, über die elementare mathematische Ideen in Anknüpfung an Alltagserfahrungen verstanden werden. Als arithmetische Grundmetaphern lassen sich dabei OM- und MaP-Metapher (Object Manipulation Metaphor bzw. Motion along a Path Metaphor) nennen. Die OM-Metapher wird von Lakoff und Núñez (2000, S. 54 ff.) phänomenologisch differenziert, wobei im Hinblick auf empirische Befunde eine solche Differenzierung weder notwendig noch sinnvoll erscheint. Mittels OM-Metapher werden Zahlen und Operationen im Zusammenhang mit Objekt Manipulationen, also unter kardinaler Perspektive vorgestellt. Dagegen erfolgt das Verstehen von Zahlen und Operationen mittels MaP-Metapher über Bewegungen entlang eines Weges, also eher räumlich-relational. Eine systematische Metaphernanalyse versucht, die entsprechenden Grundmetaphern zu rekonstruieren, indem sie Lexemmetaphern im in lexikalische Einheiten zergliederten Text identifiziert und daraus konzeptuelle Metaphern synthetisiert (vgl. Rütten 2016).

4. Tiefenstrukturspektrum der Lernerperspektiven

Im Rahmen der oben erwähnten Studie wurden neben einer schriftlichen Befragung mittels eines in Orientierung an niederländischen Testformaten konzipierten Aufgabenbogens mit 47 Lernenden problemzentrierte Interviews geführt, um einen Eindruck von der Tiefenstruktur der Lernerperspektiven bzgl. negativer Zahlen zu erhalten. Ein Teil dieser Interviews wurde vollständig transkribiert und die Transkripte der adaptierten systematischen Metaphernanalyse unterzogen. Als Ergebnis ist zunächst festzustellen, dass sich bei einigen Lernenden keine konzeptuellen Metaphern rekonstruieren lassen und ihre Sprache arm an Lexemmetaphern ist. Diese Lernenden zeigen i. d. R. keine Kenntnisse bzgl. negativer Zahlen. Bei anderen Lernenden lassen sich anhand der Lexemmetaphern entweder OM- oder MaP-Metapher rekonstruieren. Ein solcher Metaphersingularismus kann sich dabei kontextunabhängig über die unterschiedlichen Aufgaben im Interview hinweg zeigen, so dass von einer globalen Monoperspektivität gesprochen werden kann. Dabei hat diese Monoperspektivität unterschiedliche Auswirkungen in Bezug auf die Konzeptualisierung negativer Zahlen. Lernende mit OM-Metaphersingularismus äußern meist keine oder sehr undifferenzierte Kenntnisse bzgl. negativer Zahlen, wohingegen Lernende mit MaP-Metaphersingularismus bereits umfassende Kenntnisse erkennen lassen. Neben dieser globalen Monoperspektivität lässt sich auch eine lokale, kontextabhängige Monoperspektivität ausmachen. Je nach Kontext lässt sich aus den Lexemmetaphern entweder die OM- oder die MaP-Metapher rekonstruieren. Lernende mit einer solchen kontextabhängigen Monoperspektivität haben auch kontextabhängige Kenntnisse bzgl. negativer Zahlen. So können diese bspw. an der Zahlengeraden Verwendung finden, werden aber bei formalen Rechenaufgaben nicht als Ergebnisse genutzt oder akzeptiert. Schließlich zeigen sich auch Lernende, bei denen sich kontextunabhängig beide konzeptuellen Metaphern finden lassen. Hier wird von einer Polyperspektivität gesprochen. Allerdings spielt bei der polyperspektivischen Aktivierung mehrerer Schichten der kognitiven Schichtenstruktur deren Verhältnis eine entscheidende Rolle. Die Schichten können *hierarchisch* oder *heterarchisch* organisiert sein. Bei Polyperspektivität mit Schichtenhierarchie bzgl. der OM-Metapher dient diese i. d. R. der Überprüfung der „practical, behavioral validity“ (Fischbein 1987, S. 89). So geht z. B. Paul (Klasse 3) von der Existenz der negativen Zahlen aus, qualifiziert diese aber – ähnlich wie in der Mathematikgeschichte Cardarno und Stifel (vgl. Rütten 2016) – als ‚unlogisch‘. Eine Polyperspektivität mit Schichtenheterarchie zeigt sich bspw. bei Tabea (Klasse 4), die Bonbonmengen in ihrer Vorstellung entsprechend deren Mächtigkeit räumlich anordnet. Die durch OM- und MaP-Metapher repräsentierten Schichten stehen damit integriert nebeneinander.

5. Unterrichtliche Konsequenzen

Eine Hierarchisierung des vorgestellten Tiefenspektrums der Lernerperspektiven scheint wenig sinnvoll. Überdies zeigt sich ein Metaphernpluralismus für ein Verstehen ganzer Zahlen und ihrer Operationen nicht unbedingt als notwendig. Dennoch erweist sich die MaP-Metapher für das entsprechende Verstehen von zentraler Bedeutung. Als eine wesentliche unterrichtliche Konsequenz aus der Erfassung der Lernerperspektive mittels Rekonstruktion konzeptueller Metaphern kann somit die Förderung des Auf- und Ausbaus der MaP-Metapher betrachtet werden. Dabei lässt sich entsprechend der konzeptuellen Metapherntheorie vermuten, dass ein entsprechender Auf- und Ausbau über entsprechende Lexemmetaphernsysteme initiiert werden kann. Diese Systeme werden neben Sprache auch Gesten und graphische Umsetzungen der MaP-Metapher (z. B. Veranschaulichungen an der Zahlengeraden) integrieren. Ein entsprechender Auf- und Ausbau sollte dabei sinnvollerweise in der Grundschule beginnen.

Literatur

Bender, P. (1991). Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen aus dem Sekundarstufenbereich. In H. Postel, A. Kirsch & W. Blum (Hrsg.), *Mathematik lehren und lernen. Festschrift für Heinz Griesel* (S. 48-60). Hannover: Schroedel

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach.* Dordrecht: Reidel.

Lakoff, G. & Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by. Chicago.* The University of Chicago Press.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from? How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Petri, J., & Niedderer, H. (2001). Kognitive Schichtenstrukturen nach einer UE Atomphysik (Sek II). *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, H. 7, 53-68.

Rütten, C. (2016). *Sichtweisen von Grundschulkindern auf negative Zahlen Metaphernanalytisch orientierte Erkundungen im Rahmen didaktischer Rekonstruktion.* Heidelberg: Springer.

Schmitt, R. (1997). Metaphernanalyse als sozialwissenschaftliche Methode. Mit einigen Bemerkungen zur theoretischen „Fundierung" psychosozialen Handelns. *Psychologie & Gesellschaft, 21*(1), 57-86.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Alexander SALLE, Osnabrück & Christina M. KRAUSE, Essen

Grundvorstellungen und Gesten – eine exemplarische Analyse im Bereich linearer Funktionen

Der deskriptiven Analyse von Schülervorstellungen kommt für die Gestaltung eines Mathematikunterrichts, der bei Lernenden zur Ausbildung tragfähiger Grundvorstellungen führen soll, eine zentrale Rolle zu (vom Hofe, Kleine, Blum & Pekrun 2005). Bisherige deskriptive Untersuchungen zu Grundvorstellungen, die nicht auf schriftlichen Schülerdokumenten basieren, werten lautsprachliche Äußerungen aus und verzichten dabei weitestgehend auf eine systematische Analyse anderer Modalitäten (Wartha 2007, Stölting 2008, Hafner 2011). Für die Rekonstruktion von Lernprozessen wird die Multimodalität von Äußerungen hingegen bereits vielfältig einbezogen. So spielen nonverbalen Äußerungen, insbesondere Gesten, eine wichtige Rolle in der sozialen Interaktion (Arzarello et al. 2009, Krause 2016). Gesten können dabei bildliches, dynamisches und skizzierendes Ausdrucksmittel sein (ebd., Sabena 2007) und mehr verraten, als in Worte gefasst wird (Goldin-Meadow 2003).

In diesem Beitrag wollen wir uns den Möglichkeiten nähern, die diese, zum Teil unbewusste und intuitive, Nutzung von Gesten für die Analyse von Grundvorstellungen bietet und gehen dafür zunächst folgender Frage nach:

Welche Rolle spielen Gesten für die deskriptive Analyse von Grundvorstellungen von funktionalen Zusammenhängen?

Grundvorstellungen

Grundvorstellungen sind mentale Modelle, die mathematischen Objekten, Operationen und Strategien Bedeutung verleihen (vom Hofe & Blum 2016). Die Anknüpfung an alltägliche Kontexte und Handlungen (primäre Grundvorstellungen) oder symbolisch repräsentierte Objekte und Operationen (sekundäre Grundvorstellungen) ist dabei Grundlage für die Ausbildung generalisierter mentaler Modelle, die für die Anwendung von Mathematik eine wichtige Rolle spielen (ebd.).

Für das Verständnis von reellen Funktionen sind drei Grundvorstellungen funktionaler Zusammenhänge zentral (vgl. z.B. Stölting 2008):

1. *Zuordnungsvorstellung:* Bei einer reellen Funktion wird jedem x-Wert eindeutig ein y-Wert zugeordnet. Umgangssprachlich äußert sich diese Vorstellung beispielsweise durch Aussagen wie „zu jedem ... gibt es ein ...“.

2. *Kovariationsvorstellung:* Bei (systematischer) Variation einer Variablen verändert sich die andere Variable entsprechend. Auf der Basis dieser Grundvorstellung lassen sich Funktionen hinsichtlich ihres

Wachstumsverhaltens unterscheiden. Umgangssprachlich äußert sich diese Vorstellung beispielsweise durch Aussagen wie „wird ... größer, dann verringert sich ... um ...“.

3. *Objektvorstellung:* Bei dieser Vorstellung werden Funktionen als eigene Objekte betrachtet, die als Ganzes manipuliert (verschieben, strecken) oder durch Operationen (Addition, Hintereinanderausführung) verknüpft werden können.

Gesten

Für die folgende Untersuchung werden Gesten als „sprachbegleitende, idiosynkratische, spontane Bewegungen der Hände und Arme“ (McNeill 1992, S. 37, eigene Übersetzung) verstanden, wovon Handlungen ausgenommen werden. Der gemeinsamen Analyse von Lautsprache und Gestik liegt die Annahme zugrunde, dass die beiden Modalitäten koexpressiv sind, also „verschiedene Seiten eines einzigen mentalen Prozesses“ (ebd.) widerspiegeln. Jede dieser Seiten enthält Facetten, die von der andere ausgelassen bzw. nicht ausgedrückt werden können (ebd., S. 79).

Design der Untersuchung

In unserer Pilotstudie wurden Realschülerinnen und -schüler einer neunten Klasse Aufgaben im Rahmen von halbstandardisierten Interviews gestellt. Die videographierten Interviews wurden ausgewertet, um zu klären, a) inwieweit sich Grundvorstellungen durch Gesten ausdrücken, b) inwieweit sie in der Analyse die lautsprachliche Äußerung ergänzen oder kontrastieren, und c) ob Aspekte deutlich werden, die verbal nicht repräsentiert werden können.

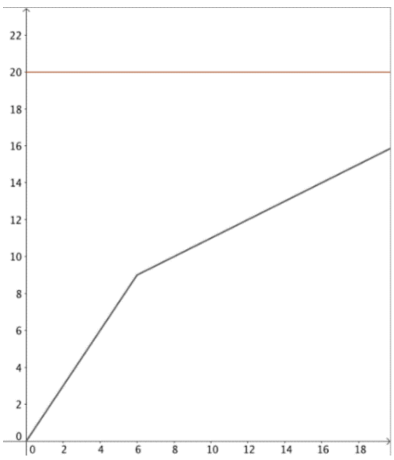


Abb. 1: *Aufgabenstellung* „Hier sind die Tarife von zwei anderen Anbietern zu sehen. Wie könnten Ihre Angebote formuliert sein?“

In den Videoaufnahmen der Interviews wurden zunächst Gesten-haltige Abschnitte lokalisiert. Anschließend wurden diese Abschnitte detailliert beschrieben, interpretiert und auf Grundvorstellungen analysiert.

Im Folgenden wird die verkürzt dargestellte Analyse einer Szene und daraus abgeleitete Ergebnisse abgebildet. Mit eckigen Klammern wird markiert, an welcher Stelle die Ausführung einer Geste beginnt, und an welcher sie aufhört. Geschachtelte eckige Klammern geben an, wenn mehrere Gesten in einer komplexeren Bewegung verbunden sind.

Fallanalyse

Victor bearbeitet die abgebildete Aufgabe (siehe Abb. 1) und fokussiert dabei auf den unteren Graphen, der aus zwei Segmenten linearer Funktionen zusammengesetzt ist. Er schildert seine Lösung der Aufgabe.

1 `Bei dem zweiten sieht [man halt, dass die` *(bewegt seinen Finger an der x-Achse zwischen den Werten 4 und 10 entlang, legt ihn dann auf x=6 ab.)*

2 `[ersten sechs Stunden], ehm, [teurer sind]` *(setzt Daumen auf Ursprung und Zeigefinger auf Knick, Koordinaten (6,9), s. Abb. 2, links. Hebt dann Hand hoch und bewegt sie, behält die Haltung jedoch bei.)*

3 `[Aber wenn man halt dann, bisschen länger, also nach den sechs Stunden, der wird dann immer,` *(setzt Daumen auf Knick und Zeigefinger ca. auf den Punkt mit den Koordinaten (14,13), s. Abb. 2, rechts.)*

4 `also dann wird'er günstiger]]` *(Bewegt dann die Hand bei gleichbleibender Haltung ein Stück nach rechts den Graphen entlang.)*

Abb. 2: Handhaltung von Victor während der Transkriptzeilen 2-4.

Die Analyse der sprachlichen Äußerungen („*wenn man ... bisschen länger, dann wird'er günstiger", 3-4*) lässt darauf schließen, dass Victor zur Lösung der Aufgabe vorrangig auf die Kovariationsvorstellung zurückgreift. Zudem bleibt er in seinen Äußerungen auf der Ebene der Sachsituation, was durch die Verwendung von „Zeit", „Stunden" und „länger" deutlich wird.

Seine Handhaltung offenbart zusätzlich Aspekte der Objektvorstellung: Victor umfasst die beiden linearen Segmente, aus denen der Graph zusammengesetzt ist, und begreift ihn innerhalb des Koordinatensystems als Objekt. Sprachlich wird diese Vorstellung an dieser Stelle nicht deutlich. Erst im darauf folgenden Abschnitt thematisiert er „Linie", „Knick" und die Steilheit des Graphen auch explizit verbal.

Fazit & Ausblick

Zusammenfassend kann festgehalten werden: Victors Gesten

– verankern seine sprachlichen Äußerungen am konkreten Objekt und unterstützen bzw. ergänzen die Interpretation und Analyse von verbal repräsentierten Schülervorstellungen,

– offenbaren eine zusätzliche relevante Grundvorstellung, die in den sprachlichen Äußerungen nicht deutlich wird, und

– nehmen so eine Idee bzw. Vorstellung vorweg, die erst im folgenden Verlauf der Szene zu Tage tritt (vgl. Salle & Krause 2016).

In weiteren Interviews soll untersucht werden, inwieweit Gesten in anderen mathematischen Inhaltsbereichen ähnliche Funktionen aufweisen.

Zudem hoffen wir näher ergründen zu können, welche Rolle Gesten beim Übergang von primären zu sekundären Grundvorstellungen spielen können, d.h. beispielsweise inwieweit sich reale Handlungsmuster beim Umgang mit eher symbolisch repräsentierten Objekten identifizieren lassen.

Anmerkung: Wir danken Saskia Wetter für die Erhebung der Daten im Rahmen ihrer Bachelorarbeit.

Literatur

Arzarello, F., Robutti, O., Paola, D., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 70, 97-109

Hafner, T. (2011). *Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I – Empirische Untersuchung und didaktische Analysen*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.

Krause, C. M. (2016). *The mathematics in our hands. How gestures contribute to constructing mathematical knowledge.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

McNeill, D. (1992). *Hand and Mind: What gestures reveal about thought*. Chicago: University of Chicago Press.

Salle, A. & Krause, C. M. (2016). On the role of gestures for the descriptive analysis of 'Grundvorstellungen': A case of linear functions. *Tagungsband ICME 13*, Hamburg.

Sabena, C. (2007). *Body and signs: a multimodal semiotic approach to teaching–learning processes in early Calculus*. PhD-Dissertation. Turin: Turin University.

Stölting, P. (2008). *Die Entwicklung funktionalen Denkens in der Sekundarstufe I - Vergleichende Analysen und empirische Studien zum Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich*. Regensburg, Bielefeld. Online zugänglich unter http://core.ac.uk/download/pdf/11540300.pdf (zuletzt abgerufen am 23.3.2016)

vom Hofe, R. & Blum, W. (2016, eingereicht). „Grundvorstellungen" as a Subject-Matter Didactics Category. *Journal für Mathematikdidaktik*.

vom Hofe, R., Kleine, M., Blum, W., & Pekrun, R. (2005). Zur Entwicklung mathematischer Grundbildung in der Sekundarstufe I – theoretische, empirische und diagnostische Aspekte. In M. Hasselhorn, H. Marx, & W. Schneider (Hrsg.), *Diagnostik von Mathematikleistungen* (Bd. 4, S. 263–292). Göttingen: Hogrefe.

Wartha, S. (2007). *Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs*. Hildesheim; Berlin: Franzbecker.

Thorsten SCHEINER, Hamburg

PCK im Spannungsfeld zwischen Transmission und Konstruktion

Aktuelle Debatten über die Natur von *pedagogical content knowledge* (PCK) haben darauf abgezielt, was PCK beinhaltet und ob und wie PCK von anderen Formen des Lehrerprofessionswissens abzugrenzen ist. Was jedoch in Diskussionen fehlt, ist eine genaue Untersuchung, wie das, was PCK ist, zu bestimmen ist. Zentrales Anliegen dieses Beitrages ist daher eine kritische Untersuchung der grundlegenden Annahmen von PCK. Durch eine Prüfung zentraler Arbeiten zur Konzeptualisierung von PCK (Shulman, 1986, 1987) und weiterführender Forschungsprogramme (vgl. Ball & Bass, 2000) sollen mögliche Spannungsfelder mit konstruktivistischen Lerntheorien aufgezeigt werden.

Ausgangspunkt der Betrachtung ist Shulmans Beschreibung von PCK, dem eine Schlüsselrolle in der Forschung zum Lehrerprofessionswissen zugeschrieben wird. Bei Shulman (1987) findet man

"[…] the key to distinguishing the knowledge base of teaching lies at the intersection of content and pedagogy, in the capacity of a teacher to transform the content knowledge he or she possesses into forms that are pedagogically powerful and yet adaptive to the variations in ability and background presented by the students." (Shulman, 1987, S. 15)

Während Shulmans Verständnis von PCK als Amalgam von Fachwissen und pädagogischem Wissen weitestgehend bekannt ist und häufig rezipiert wird, bleibt der zugrundeliegende Gedanke der Transformation (des Fachwissens von der akademischen Fachdisziplin zum Unterrichtsfach) wenig berücksichtigt oder wird in der Diskussion zum Lehrerprofessionswissen nur implizit angenommen. Gudmundsdottir (1987) sprach mit Bezug auf Shulmans Idee der Transformation von einer kontinuierlichen Umstrukturierung des Fachwissens für pädagogische Anliegen, und Gudmundsdottir und Shulman (1987) bezeichneten dies als eine Umbenennung von Fachwissen. Marks (1990), auf der anderen Seite, bezeichnete die Transformation als einen Prozess der Deutung: "the content is examined for its structure and significance, then transformed as necessary to make it comprehensible and compelling to a particular group of learners" (Marks, 1990, S. 7). Diesen Auffassungen ist gemein, dass die Fachdisziplin als bestimmendes Moment der Transformation dient. In anderen Worten: die Transformation ist begründet und bestimmt durch die Fachsystematik. Dabei wird der Inhalt (das Fachliche) als ein Objekt des Lehrens verstanden.

In der internationalen Debatte zum Professionswissen von Mathematiklehrkräften wird Mathematik als ein Objekt des Lehrens diskutiert, das sich in der oft verwendeten Metapher *unpacking mathematics content in ways accessible to students* wiederfindet. Grossman, Wilson und Shulman (1989) beschrieben den Grundgedanken der Transformation als ein Zugänglichmachen des Fachlichen: “into a form of knowledge that is appropriate for students and specific to the task of teaching” (Grossman et al., 1989, S. 32). Ähnlich bezeichneten Ball und Bass (2000) die zentrale Aufgabe der Lehkraft als *decompression*: “to deconstruct one’s own mathematical knowledge into a less polished and final form, where elemental components are accessible and visible” (Ball & Bass, 2000, S. 98). Dabei wird die Fähigkeit des Rückwärtsarbeitens von einem verdichteten Verständnis des Inhaltes hin zu konstituierenden Elementen als zentral angesehen. Entsprechend dieser Auffassungen besteht die zentrale Aufgabe der Lehrkraft in der Darbietung mathematischen Wissens in einer Art (und Form), die für den Lernenden zugänglich ist. Kirsch (1977) argumentierte für das Vereinfachen (nicht Verfälschen) als einen Prozess des Zugänglichmachens mathematischer Inhalte – ein Ansatz, der wesentlich für die Entwicklung der Stoffdidaktik im deutschsprachigen Raum war.

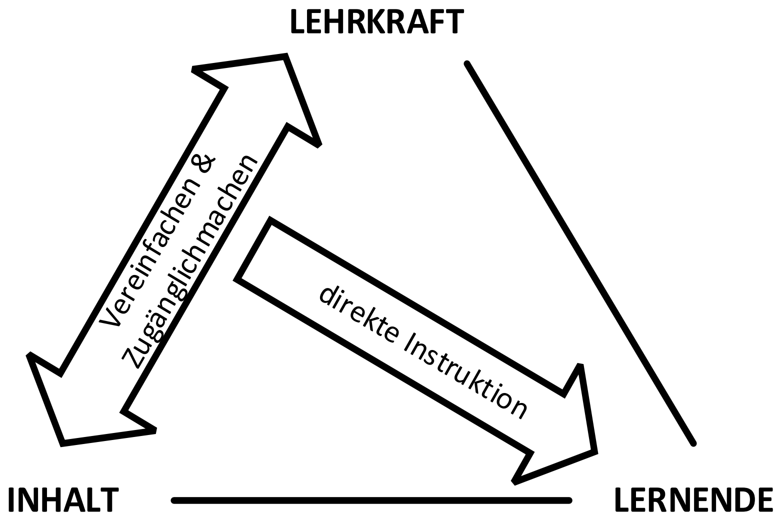


Abb. 23: Der Grundgedanke der Transformation

Diese Orientierung – der Inhalt als Objekt des Lehrens, der für die Lernenden zugänglich zu machen ist – bezieht sich sehr stark auf die Annahme, dass der Inhalt gegeben ist (vgl. Abb. 1). Seine Existenz hängt nicht vom Lernenden ab. Mit anderen Worten: diese Vorstellung impliziert eine Trennung zwischen dem Lernenden und dem Inhalt. Zudem wird das Objekt des Wissens als unveränderliches Objekt abgebildet. So liegt die Vermutung nahe, dass Shulman eine objektivistische Ansicht von Inhalt (bzw. von Wissen) einnimmt, in der Erkenntnis gegeben und in der objektiven Realität begründet ist. Diese Ansicht steht allerdings im Spannungsfeld mit einer konstruktivistischen Auffassung zum Lernen:

“[constructivism is] grounded in a strong skeptical stance regarding reality and truth: Knowledge cannot be thought of as a copy of an external reality, and claims of truth cannot be grounded in claims about reality. […]. The importance of this skeptical stance for mathematics educators is to remind that students have their own mathematical realities that teachers and researchers can understand only via models of them.” (Thompson, 2014, S. 96)

Eine objektivistische Ansicht von Fachwissen, wie sie in dem vorliegenden Beitrag Shulmans Arbeiten attribuiert wird, bezieht sich zudem sehr stark auf eine Perspektive, bei der angenommen wird, dass das Fachliche transferiert werden kann – von der Lehrkraft in die Köpfe der Lernenden. Diese Ansicht wiederspricht der grundlegenden Prämisse konstruktivistischer Lerntheorien (da Wissen an Lernende nicht einfach übertragen werden kann, sondern vom Lernenden selbst konstruiert werden muss).

Cobb et al. (1991) erinnern uns aber daran, dass “from a constructivist perspective, mathematical learning is not a process of internalizing carefully packaged knowledge but is instead a matter of reorganizing activity” (S. 5).

Unter Voraussetzung grundlegender konstruktivistischer Thesen können Lehrkräfte das Fachliche nicht nur nicht in einer Form bereitstellen, die für den ‚Verzehr‘ durch den Lernende geeignet ist, sondern Wissen muss vom Lernenden selbst konstruiert werden, damit es sinnvoll ist. Es ist gerade diese Metapher der Wissenskonstruktion, die verschiedene Formen des Konstruktivismus (wie bspw. radikalen und sozialen Konstruktivismus) zusammenbringt und die unserem gegenwärtigen Verständnis gerecht wird, dass Wissen nicht etwa transzendent von unsere menschlichen Erfahrung ist, sondern von uns selbst gebildet wird.

Aus meiner Sicht entspricht Shulmans Konzeptualisierung von PCK daher nicht den aktuellen Ansätzen, welche Mathematik eher als ein Objekt des Lernens (statt eines Objekt des Lehrens) verstehen. Im Gegenteil: Shulmans Grundgedanke des Zugänglichmachens des Inhaltes, ein Prozess, der ganz und gar durch die Fachsystematik begründet und bestimmt ist, hat eine eher beunruhigende, dem Lehrerprofessionswissen zugrundeliegende Auffassung gefördert: eine implizit lineare, bemerkenswert enge und transmissive Sichtweise auf Lehr-Lern-Prozesse.

Der lehrerzentrierte Fokus in der Konzeptualisierung von PCK ist gewiss ein Artefakt unserer früheren Denkweisen. Dass Shulman die Fachsystematik als Ausgangspunkt seiner Transformationsthese nutzte, ist nicht sehr verwunderlich, da die Fachsystematik viele Jahrzehnte als Grundlage für die Entwicklung von Fachcurricula u.a. diente.

“The fundamental structures of mathematics served as the fixed foundation for most of the developers of the modern mathematics programs. In those cases, we believe that the curriculum developers […] felt no necessity to look beyond mathematical structures to investigate what the mathematical knowledge of students might be like." (Steffe & Kieren, 1994, S. 713)

Eine stärkere Orientierung am zeitgenössischen Verständnis zum Lernen wirft Fragen hinsichtlich der Angemessenheit der ursprünglichen Konzeptualisierung von PCK auf und fordert eine neue Konzeptualisierung von PCK, die die Komplexität von Lehr-Lern-Prozessen stärker berücksichtigen kann.

Literatur

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics* (pp. 83-104). Greenwich, CT: JAI/Albex.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J., Wheatley, G., Trigatti, B., & Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centered second-grade mathematics project. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(1), 3-29.

Grossman, P. L., Wilson, S. M., & Shulman, L. S. (1989). Teachers of substance: subject matter knowledge for teaching. In M. C. Reynolds (Ed.), *Knowledge base for the beginning teacher* (pp. 23-36). Elmsford, NY: Pergamon Press.

Gudmundsdottir, S. (1987). *Pedagogical content knowledge: teachers' ways of knowing*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association. Washington, D.C.

Gudmundsdottir, S., & Shulman, L. (1987). Pedagogical content knowledge in social studies. *Scandinavian Journal of Educational Research, 31*(2), 59-70.

Kirsch, A. (1977). Aspects of simplification in mathematics teaching. In H. Athen & H. Kunle (Eds.), *Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education* (pp. 98-119). Karlsruhe: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik.

Marks, R. (1990). Pedagogical content knowledge: from a mathematical case to a modified conception. *Journal of Teacher Education*, *41*(3), 3-11.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*, 1-22.

Steffe, L. P., & Kieren, T. (1994). Radical constructivism and mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 711-733.

Thompson, P. W. (2014). Constructivism in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 96-102). Dordrecht: Springer.

Bruno SCHEJA, Köln

Aktivierungspotentiale von Mathematikaufgaben des Gymnasialtests im reformierten polnischen Bildungssystem

1. Forschungsanliegen

Zu den wesentlichen Elementen des in den vergangenen drei Jahrzehnten international vermehrt vollzogenen Wandels von Bildungssystemen zählen unter anderem zentrale (Abschluss-)Prüfungen, die zumeist schulstufenabschließend durchgeführt werden. In den darin eingesetzten, in erster Linie fächergebundenen Aufgabensets einerseits und den in abbildender Weise zugrundeliegenden Standards andereseits manifestieren sich- so die Annahme-bildungspolitische Wirkungserwartungen im Hinblick auf Bildungsprodukte und -prozesse der einzelnen Fächer. Eines der Länder, das infolge seiner Bildungsreform im Jahre 1999 auf der Grundlage dieses Wirkungsgefüges, zentral und eng gerastert, die Leistungen seiner Schülerinnen und Schüler überprüft, ist Polen. Dessen, beispielsweise im Rahmen der internationalen Leistungsstudie PISA erfasste Leistung im Fach Mathematik zeigt während des Folgezeitraumes der Reformumsetzung eine beachtliche Entwicklung auf (vgl. Bialecki & Haman 2001; IFISPAN 2013). Vor dem Hintergrund des dabei vorfindbaren Ausmaßes, ist es aus fachdidaktischer Sicht von besonderem Interesse, den Fokus auf qualitätserfassende- und zugleich -beeinflussende Instrumente zu legen, von dem funktionsbedingt angenommen werden kann, in besonderem Maße gerade für diesen bildungsbiographischen Zeitraum, eine der zentralen Einflussgrößen für den polnischen Mathematikunterricht zu sein. Ein derartiges Instrument des reformierten Bildungssystems ist beispielsweise der Gymnasialtest. Diese landesweit einheitliche Zentralprüfung schließt das gemeinschaftsschulähnliche "gimnazjum" (Klasse 6 bis 9) und damit auch die zweite Schulstufe ab. Seit der erstmaligen Durchführung des Gymnasialtests im Jahre 2002 nimmt daran jährlich das **vollständige** Spektrum polnischer Neuntklässler verpflichtend teil.

Das zentrale Ziel der durchgeführten Studie besteht nun darin, auf der Grundlage der rationalen Aufgabenanalyse, die kognitiven Aktivierungspotentiale von Mathematikaufgaben des polnischen Gymnasialtests zu erfassen, zu analysieren und zu bewerten. Dieses Ziel wird dabei wie folgt ausdifferenziert:

5. Welche Anforderungsniveaus lassen sich im Bezug auf curriculare, inhaltliche und kognitive Erfassungskategorien in den eingesetzten Gymnasialtestaufgaben identifizieren?

6. Welche längsschnittlichen Entwicklungen der Anforderungsverteilungen lassen sich zwischen der Phase der Einführung des Gymnasialtests und dem Zeitraum nach dessen organisatorisch-konzeptioneller Reform im Jahre 2012 in den mathematischen Tätigkeiten erkennen?
7. Lassen sich in einem Vergleich mit Zentralen Abschlussprüfungen des Landes Nordrhein-Westfalens Unterschiede hinsichtlich der Verteilungen von mathematischen Tätigkeiten ausmachen?

.2Untersuchungsmethode

Um das kognitive Aktivierungspotential der Gymnasialtestaufgaben zu erfassen, stützt sich die Studie auf eine Auswahl von Klassifikationskategorien, die zum einen im Rahmen des Projektes COACTIV (vgl. Jordan et. al. 2006) und zum anderen von Drüke-Noe (vgl. 2014) entwickelt wurden (s. Tabelle).

Dimension	Kategorie	Ausprägung
Inhaltlicher Rahmen	Stoffgebiet	1Arithmetik, 2- Algebra, 3- Geometrie, 4- Stochastik
	Curriculare Wissensstufe	1Grundkenntnisse (Stufe I, in der Grundschule erworben), 2- Einfaches Wissen der Sekundarstufe I (Stufe II), 3- Anspruchsvolles Wissen der Sekundarstufe I (Stufe III(
Kognitiver Rahmen	Typ mathematischen Arbeiten	1Tecnische Aufgabe, 2- rechnerische Aufgabe, 3- begriffliche Aufgabe
Kognitive Elemente der Modellierung	Außermathematisches Modellieren	0nicht beötigt, 1- Standardmodellierungen, 2- Mehrschrittige Modellierungen, 3- Modellreflexion, -validierung oder -eigenentwicklung
	Innermathematisches Modellieren	0nicht benötigt, 1- Standardmodellierungen, 2- Mehrschrittige Modellierungen, 3- Modellreflexion, -validierung oder -eigenentwicklung
	Umgang mit mathematikhaltigen Texten	0nicht benötigt, 1- Unmittelbares Textverstehen, 2- Textverstehen mit Umorganisation, 3- Verstehen logisch komplexer Texte
	Math. Argumentieren	0nicht benötigt, 1- Standardbegründungen, 2- Mehrschrittige Argumantation, 3- Entwicklung komplexer Argumentationen oder Beurteilen von Argumenten
	Gebrauch math. Darstellungen	0nicht benötigt, 1- Standarddarstellungen, 2- Wechsel zwischen Darstellungen, 3- Beurteilen von Darstellungen
	Technisches Arbeiten	0nicht benötigt, 1- Standardtechnik, 2- zweistufige hierarchische Techniken, 3- komplexe hierarchische Techniken

Tabelle: Erfassungskategorien der kognitiven Aktivierung in der Studie

Das der Studie zugrunde liegende Klassifikationsschema fasst Beurteilungskriterien von Aufgaben in drei Dimensionen zusammen: Inhaltlicher Rahmen, Kognitiver Rahmen und Kognitive Elemente des Modellierungskreislaufs. Diese werden weiter im Sinne einer Indikatorisierung in Kategorien mit zumeist vier Ausprägungsstufen (0-3) ausdifferenziert.

3. **Zen**trale Ergebnisse der Studie

Qualitätsorientierte Perspektive (Fragestellung 1)

Im Rahmen der ersten Fragestellung der Studie wurde der Aufgabensatz des polnischen Gymnasialtests unter Einbeziehung der obigen Erfassungskategorien untersucht (N = 249), um so zunächst die Breite des mathematischen Denkens in den zugrundeliegenden Bearbeitungsprozessen zu erfassen.

Im Bezug auf die Kategorien der ersten zwei Dimensionen zeigte sich, dass

- die curriculare Wissensstufe insgesamt ein mittleres Aktivierungsniveau aufweist,
- wobei innerhalb der vier Stoffgebiete a) zum Teil erhebliche curriculare Streuung besteht und b) die geforderten Aufgaben-Verarbeitungsprozesse annähernd ausschließlich in begriffliche und rechnerische Modellierungsaufgaben zu trennen sind (insg.: 98,4%, PISA 2000 international: 96,8%; PISA 2000 national: 79,5%).

Darüber hinaus zeigte die Erhebung der Ausprägungen der sechs mathematischen Tätigkeiten, dass die im polnischen Gymnasialtest eingesetzten Aufgaben insgesamt ein verhältnismäßig hohes kognitives Anforderungspotential aufweisen (vgl. Neubrand et al. 2011, S. 127f; Drüke-Noe 2014, S. 110 und 157 ff). Hierzu tragen insbesondere

- komplexe Aufgabenstellungen,
- ebensolche mathematische Dartstellungen bei,
- denen auch anspruchsvolle, da mehrschrittige Verarbeitungsprozesse nachgeordnet werden.
- Das Technische Arbeiten und das Argumentieren bestimmen das kognitve Anspruchsniveau hingegen eher in geringerem Maße.

Längsschnittorientierte Perspektive (Fragestellung 2)

Um zu erfahren, ob- und falls ja- welche Veränderungen in der Verteilung innerhalb der untersuchten mathematischen Tätigkeiten auszumachen sind, wurden Aufgabensets sowohl unterschiedlicher Testzeiträume als auch Durchführungsbedingungen gebildet und kategorieweise gegenübergestellt.

Hinsichtlich der längsschnittlichen Anforderungsdynamik wurde unter anderem Folgendes deutlich:

- Die Verteilung der math. Tätigkeiten und mit Einschränkungen auch ihrer Niveaus können in den Aufgaben nach der Testreform als ausgewogener und tendentiell kognitiv anspruchsvoller als in den Aufgaben im Zeitraum der Testeinführung beurteilt werden.
- Zur Anforderungsfacettierung tragen insbesondere das mathematische Argumentieren sowie eine erweiterte Anwendung der

Verarbeitungsprozesse im Zuge der Auseinandersetzung mit Aufgabenkontexten bei, in denen nun inner- und außermathematische Kontexte gleichermaßen Anwendung finden.

Vergleichsorientierte Perspektive (Fragestellung 3)

Da hiesige Prüfungen vergleichbaren Typs und Erhebungszeitpunkts mit Ausnahme von Rheinland-Pfalz zwar flächendeckend installiert sind, diese jedoch im Gegensatz zu Polen bundeslandintern konzipiert und organisiert werden, wird für den Vergleich mit den schriftlichen "Zentralen Prüfungen 10" des Landes Nordrhein-Westfalen auf ein vergleichbares Instrument der Landesebene zurückgegriffen (N = 1556). Der Anteil der Schüler eines Jahrgangs, die an dieser MSA-Prüfung teilnehmen, lag in Deutschland im untersuchten Zeitraum bei etwa 20 Prozent.

Der Vergleich mit den Aufgaben des Gymnasialtets zeigte unter anderem:

- Die Verteilungen der Tätigkeiten und ihrer Niveaus weist in beiden Aufgabensätzen ein mit Einschränkungen vergleichbares kognitives Aktivierungspotential auf.
- Das Technische Arbeiten wird- trotz erheblich höherer Themenanteile in NRW, die der curricularen Wissensstufen 3 zuzuordnen sind- in beiden Aufgabensätzen auf vergleichbarem Niveau verlangt.
- Ein, vor allem seit der Gymnasialtestreform im Jahre 2012 als fundamental einzustufender Unterschied wird dagegen sowohl im Hinblick auf Maß als auch auf Niveau der Berücksichtigung innermathematischer Modellierungensaufgaben deutlich.

Literaturverzeichnis

Białecki, I. & Haman, J. (2001). Program Międzynarodowej Oceny Umiejętności Uczniów OECD/PISA. Wyniki polskie – raport z badań. IFIS PAN.

Drüke-Noe, Ch. (2014). Aufgabenkultur in Klassenarbeiten im Fach Mathematik. Empirische Untersuchungen in neunten und zehnten Klassen. Wiesbaden: Springer.

Jordan, A., Ross, N., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Löwen, K., Brunner, M., Kunter, M. (2006). Klassifkationsschema für Mathematikaufgaben: Dokumentation der Aufgabegkategorisierung im COACTIV-Projekt. Berlin: MPIB.

IFIS PAN (2013). Programme for international student assessment. Wyniki badanie 2012 w Polsce. Ministerstwo Edukacji Narodowej

Neubrand, M., Jordan, A., Krauss, S., Blum, W. & Löwen, K. (2011). Aufgaben im COACTIV-Projekt: Einblicke in das Potenzial für kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. In M. Kunter u.a. (Hrsg.), Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Erg. des Forschungsprogramms COACTIV (S. 115-132). Münster: Waxmann

Alexandra SCHERRMANN, Ludwigsburg; Heike SCHÄFERLING, Ludwigsburg

Differenzierende Aufgabenformate für heterogene Lerngruppen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I – eine Herausforderung für die Lehrerweiterbildung

Nachfolgender Beitrag stellt zunächst die Konzeption der Ludwigsburger Lehrerweiterbildungen vor. Während in diesem ersten Abschnitt organisatorische Aspekte in den Vordergrund treten, gibt der zweite inhaltliche Einblicke. Der dritte Abschnitt stellt Evaluationen vor. Mit einem kurzen Fazit endet der Artikel.

Die Konzeption der Ludwigsburger Lehrerweiterbildungen

Die Ludwigsburger Lehrerweiterbildungen werden seit dem Schuljahr 2013/2014 für Lehrkräfte in den Fächern Deutsch und Mathematik angeboten (Primarstufe und Sekundarstufe I). Dieses Pilotprojekt wird bis 2017 vom Innovations- und Qualitätsfond (IQF) des Ministeriums für Wissenschaft, Forschung und Kunst Baden-Württemberg gefördert (Antragsteller(innen): S. Jeuk, S. Kuntze, J. Schäfer, S. Wessolowski). Die Weiterbildungen führen Dozentinnen und Dozenten der Hochschule durch. Bislang fanden in Mathematik 15 Weiterbildungen mit rund 200 Lehrpersonen statt (Stand: Ende WS 2015/16).

Die Konzeption der Ludwigsburger Weiterbildungen (LuWe) sieht für jeden Weiterbildungsbaustein drei Präsenztage und zwei jeweils ca. vierwöchige Zwischenphasen vor. Die Kernidee liegt in der Verknüpfung von unterrichtspraktischen Erfahrungen mit fachdidaktischem Wissen. Für diese Verzahnung zwischen Unterrichtspraxis und Theorie/Wissenschaft haben die Zwischenphasen eine besondere Bedeutung. Diese werden durch ein Blended-Learning-Szenario über die Lernplattform „moodle" begleitet. Dazu werden beispielsweise vom Dozenten ergänzende Materialien zur Verfügung gestellt, von den TeilnehmerInnen Unterrichtsmaterialien hochgeladen oder Fragen und Erfahrungsberichte ins Forum eingebracht.

Damit werden in der Konzeption wichtige in der Literatur empfohlene Gestaltungsprinzipien und Merkmale zur Umsetzung effektiver Lehrerweiterbildungen umgesetzt (vgl. z.B. Barzel und Selter 2015): Inhaltlich sind die Weiterbildungen fachlich und fachdidaktisch ausgerichtet, auf der organisatorischen Ebene ist die Konzeption auf Langfristigkeit angelegt. Es finden Erprobungen und Umsetzungen in der Schulpraxis statt, die anschließend reflektiert werden. Ebenfalls sind empfohlene methodische Merkmale wie Kompetenz- und Teilnehmerorientierung, eine Vielfalt an Lehr-Lernszenarien, Fallbezug und Anregung zur Kooperation realisiert (vgl. Barzel und Selter 2015).

„Differenziert differenzieren“ – ein Weiterbildungsangebot als Antwort auf Bedürfnisse aus dem schulischen Mathematikunterricht

Das Weiterbildungsangebot „Differenziert differenzieren“ wird in Ludwigsburg seit 2014 durchgeführt. Insgesamt nahmen bislang 65 Lehrpersonen aus der Primar- und Sekundarstufe I teil. Insbesondere für die Sekundarstufe I wurde dieses Angebot verstärkt nachgefragt. Die schriftlichen Statements der TeilnehmerInnen zu Beginn einer Weiterbildung thematisieren die Fortbildungsintentionen:

- die Lehrkräfte nehmen eine Zunahme der Heterogenität bezüglich der mathematischen Fähigkeiten bei den Fünftklässlern wahr aufgrund des Wegfalls der Bildungsempfehlung (seit 2012 in Baden-Württemberg am Ende der Grundschulzeit nach Klasse 4);

- die Themen „Differenzierung“ und „Heterogenität“ werden als „Hürde“ bzw. „Schwierigkeit“, gar als Problem wahrgenommen; die Lehrkräfte suchen hier nach Entlastung im Unterrichtsalltag;

- das Thema Inklusion beschäftigt die Lehrkräfte hinsichtlich der unterrichtspraktischen Umsetzbarkeit.

In der inhaltlichen Ausgestaltung dieses Weiterbildungsbausteins wurde ein Schwerpunkt auf den Umgang mit Aufgaben im Mathematikunterricht gelegt. Denn die „Aufgabenkultur“ im Mathematikunterricht nimmt eine Schlüsselposition ein wie die fachdidaktische Forschung und Diskussion zeigt, beispielsweise hinsichtlich der kognitiven Aktivierung (z.B. Jordan et al. 2006), bezüglich „selbstdifferenzierender Aufgaben“ (Büchter und Leuders 2005) oder für die adaptive Lernbegleitung (Krammer 2009). Ebenso tangiert dies die Frage wie eine möglichst informative Leistungsmessung gelingen kann: Die zu diesem Zwecke eingesetzten Aufgaben sollen sowohl eine valide Diagnose der mathematischen Fähigkeiten ermöglichen als auch ausreichend offen für heterogene Lernvoraussetzungen sein (Bruder und Büchter 2012). Nicht zuletzt hat die sprachliche Formulierung von Aufgaben eine hohe Bedeutung für deren Lernpotential (z.B. Prediger et al. 2015).

Insofern erhielten die Lehrkräfte zunächst Anregungen und Informationen zu differenzierenden Aufgabenmerkmalen. Dementsprechend wurden Lernumgebungen entwickelt und in der Zwischenphase im eigenen Unterricht implementiert. Der reflektierende Austausch darüber nahm am nachfolgenden Präsenztag die Funktion einer formativen Evaluation ein, so dass die Lernumgebungen in „angereicherter“ Form (inhaltlich, methodisch, mit möglichen Alternativen in der unterrichtlichen Umsetzung, …) in nachfolgenden Schuljahren bzw. in einer parallel unterrichtenden Schulklasse erneut eingesetzt werden können.

Professionelles Wissen und Einstellungen von Lehrpersonen zum Differenzierungspotential von Aufgaben

In einer Pre-Post-Erhebung wurden die Lehrpersonen hinsichtlich ihres professionellen Wissens und ihrer Einstellungen zum Differenzierungspotential von Schulbuchaufgaben und von Aufgaben im Unterrichtsgespräch (vgl. Schäferling, Scherrmann, Kuntze 2016, in Vorb.) befragt. Unter „professionellem Wissen“ wird hier in Bezug auf Shulman (1986) vor allem das fachdidaktische Wissen (PCK) verstanden. Hierzu wurden den Lehrkräften beispielsweise Schulbuchaufgaben zu verschiedenen Leitideen aus der Klassenstufe 5/6 vorgelegt, die jeweils in einer eher offenen bzw. geschlossenen Form präsentiert wurden. Die Lehrpersonen sollten anhand der beiden Fragen „Welches Potential (bzw. welche Problematik) sehen Sie ggfs. in dieser Aufgabe?“ Stellung beziehen. Die offenen Antworten wurden dahingehend codiert, ob verschiedene Aspekte erkennbar waren: Beispielsweise, ob die Antwort auf die potentielle Bearbeitbarkeit auGeben Sie hier eine Formel ein.f verschiedenen Niveaus eingeht, ob eine Offenheit bezüglich der Ergebnisse oder der Herangehensweise thematisiert wird und ob mögliche Schülerschwierigkeiten vermutet werden. Die Codierung der offenen Antworten erwies sich als Herausforderung, da die Antworten teils sehr stichwortartig formuliert wurden. Es lässt sich jedoch tendenziell erkennen, dass beispielsweise das Potential für verschiedene Herangehensweisen der Schülerinnen und Schüler bei den offenen Aufgaben nach der Weiterbildung häufiger thematisiert wird als zuvor. Auch die Einengung auf ein Ergebnis und einen Rechenweg bei den geschlossenen Aufgaben und damit die Festlegung auf ein Niveau wurde in der Post-Erhebung deutlich häufiger thematisiert als unmittelbar vor der Weiterbildung.

Zudem wurde über Items (z.B. „Mit dieser Aufgabe können die Schülerinnen und Schüler viel lernen“, „Diese Aufgabe ist geeignet das mathematische Wissen meiner Schülerinnen und Schüler voran zu bringen“) die Einstellung zu diesen Aufgaben mit einer vierstufigen Likert-Skala (1 = „stimmt gar nicht“ bis 4 - „stimmt genau“) erhoben. Erste Auswertungen zeigen, dass die pre-post-Antworten hinsichtlich der geschlossenen Aufgabenstellungen statistisch signifikant deutlich positiv miteinander korrelieren ($p < 0.001$, $r_s = 0{,}649$ bis $r_s = 0{,}708$, zweiseitig). Für die tendenziell offen formulierten Schulbuchaufgaben gilt dies so nicht ($p > 0{,}05$; $0{,}162 \leq r_s \geq 0{,}393$). Das bedeutet, dass die Lehrkräfte ihrer Einschätzung des Potentials von geschlossenen Aufgaben eher treu bleiben. Bei offenen Aufgabenformaten hingegen konnte die Einschätzung des Aufgabenpotentials zwischen der pre- und post-Erhebung verändert werden. Es zeigt sich (t-test, abhängige Stichproben, n=27), dass die offenen Aufgaben im Mittel beim Post-Test statistisch signifikant günstiger ($p < 0.05$) eingeschätzt werden (im Mittel rund 0,4 Punkte) hinsichtlich des Lernpotentials (z.B. „Mit dieser Aufgabe können die allermeisten Schülerinnen und Schüler etwas anfangen“) als dies vor der Lehrerweiterbildung der Fall war.

Fazit

Die Ergebnisse beziehen sich lediglich auf eine kleine Stichprobe und müssen als vorläufig betrachtet werden. Es lassen sich jedoch folgende Tendenzen erkennen: Zum einen zeichnet sich eine Einstellungsänderung zugunsten der offeneren Aufgabenformate durch die Weiterbildung bei den Lehrkräften ab. Zum anderen zeigen die Codierungen der offenen Antworten, dass sich auch hier tendenziell der Blick für das Potential von offenen Aufgaben für heterogene Lerngruppen geweitet hat. Das in der Weiterbildung vermittelte fachdidaktische Wissen spiegelt sich in den Antworten wider.

Literatur

Barzel, Bärbel; Selter, Christoph (2015): Die DZLM-Gestaltungsprinzipien für Fortbildungen. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 36, S. 259–284.

Bruder, Regina; Büchter, Andreas (2012): Beurteilen und Bewerten im Mathematikunterricht. In: *Mathematik lehren* 29 (170), S. 2–8.

Büchter, Andreas; Leuders, Timo (2005): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern - Leistung überprüfen. 1. Aufl. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Jordan, A.; Ross, N.; Krauss, S.; Baumert, J.; Blum, W.; Neubrand, M. et al. (2006): Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben: Dokumentation der Aufgabenklassifikation im COACTIV-Projekt. Max-Planck-Institut für Bildungsforschung. Berlin (Materialien aus der Bildungsforschung, 81).

Krammer, Kathrin (2009): Individuelle Lernunterstützung in Schülerarbeitsphasen. Eine videobasierte Analyse des Unterstützungsverhaltens von Lehrpersonen im Mathematikunterricht. Münster, New York, NY, München, Berlin: Waxmann.

Prediger, Susanne; Wilhelm, Nadine; Büchter, Andreas; Gürsoy, Erkan; Benholz, Claudia (2015): Sprachkompetenz und Mathematikleistung – Empirische Untersuchung sprachlich bedingter Hürden in den Zentralen Prüfungen 10. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 36 (1), S. 77–104.

Shulman, Lee S. (1986): Those who understand: Knowledge growth in teaching. In: *Educational Researcher* 15 (2), S. 4–14.

Michaela SCHEURING, Landau, Jürgen ROTH, Landau

Funktionales Denken fördern - Realexperimente oder Simulationen?

Funktionale Zusammenhänge sind Bestandteil des Mathematikunterrichts in jeder Jahrgangsstufe (vgl. Leitidee 4, KMK 2004). Aber nicht nur für den Mathematikunterricht ist ihre Relevanz unbestritten. Auch in anderen Fächern wie etwa den Naturwissenschaften oder Sozialkunde sollten SchülerInnen in der Lage sein, funktionale Zusammenhänge erkennen und deuten zu können. Über den schulischen Kontext hinaus sind funktionale Zusammenhänge des Weiteren Teil unseres Alltags. Sei es, dass eine Tasse Kaffee abkühlt oder sich die Außentemperatur über den Tag hinweg ändert. Oft ist die beständige Gegenwart dieser Zusammenhänge den SchülerInnen aber gar nicht bewusst. Stattdessen lässt sich rein syntaktisches Wissen feststellen, dass nur selten semantisch fundiert ist. Im Zentrum der Schülerwahrnehmung steht die algebraische Darstellung eines funktionalen Zusammenhangs (Leinhardt et al. 1990), es dominiert häufig der Rezept-Gedanke (Allmendinger et al. 2013) oder es kommt eine von zahlreichen, immer wieder konstatierten Fehlvorstellungen zum Tragen. Betrachtet man die Bedeutung funktionaler Zusammenhänge für Schule und Alltag sowie die vielschichtigen Schwierigkeiten der SchülerInnen mit dieser Thematik, muss man zu dem Schluss kommen, dass das funktionale Denken von SchülerInnen gefördert werden muss. So kann es ihnen ermöglicht werden, funktionale Zusammenhänge inhaltlich zu erfassen und zu durchdringen.

Theoretischer Hintergrund

Funktionales Denken lässt sich auf unterschiedlichen Ebenen beschreiben. Normativ betrachtet untergliedert es sich nach Vollrath (1989) in drei grundlegende Aspekte: Zuordnung, Änderungsverhalten und Objekt. Unter den Zuordnungsaspekt fasst er, dass jedem Element aus der Definitionsmenge (der unabhängigen Variablen) genau ein Element aus der Wertemenge (die unabhängige Variable) zugeordnet wird. Mit dem Aspekt des Änderungsverhaltens beschreibt er die mit der Variation der unabhängigen Variablen einhergehende Kovariation der abhängigen Variablen. Im Rahmen des Objektaspekts nimmt er schließlich die Funktion als Ganzes in den Blick. Versucht man dagegen, funktionales Denken aus Sicht der SchülerInnen zu charakterisieren, gilt es zu erfassen, wie SchülerInnen Funktionen wahrnehmen, beschreiben und verwenden. Tall und Vinner (1981) unterscheiden zu diesem Zweck *concept image* und *concept definition*. Unter *concept image* sind alle Vorstellungen, Bilder wie auch Prozesse, Beispiele und auch Fehlvorstellungen zu verstehen, die SchülerInnen zum Begriff Funktion in den Sinn kommen. Daneben besteht *concept definition* aus der allgemein gültigen Definition. Meist stehen die beiden Konzepte unverbunden nebeneinander und die

SchülerInnen greifen situationsbedingt auf das eine oder andere zu. Nähern sich die beiden Konzepte einander an und werden Verknüpfungen geschaffen, entsteht funktionales Denken, wie es sich bei Experten zeigt (Thompson 1994).

Forschungsfragen

Die vielschichtige Theorie funktionalen Denkens, die Schwierigkeiten der SchülerInnen, mit funktionalen Zusammenhängen adäquat umzugehen, und die unbestrittene Relevanz der Thematik für Schule und Alltag führen zur Frage, wie man funktionales Verständnis fördern kann, um eine Grundlage für die im Laufe der Schulzeit immer mehr in den Vordergrund tretenden syntaktischen Aspekte funktionaler Zusammenhänge zu schaffen. Die Förderung soll des Weiteren motivierend und interessant gestaltet sein. Diese Aspekte aufgreifend soll es das Ziel der hier beschriebenen Studie sein, funktionales Verständnis von SchülerInnen der Jahrgangsstufen 6 und 7 mit Hilfe von zwei Typen von Experimenten zu fördern. Wir unterscheiden an dieser Stelle Realexperimente (materialbasiert) und Simulationen (GeoGebra). Beide Arbeitsweisen bringen eine Vielzahl von Vorteilen mit sich. Sei es, dass materialbasiertes Experimentieren Zusammenhänge erlebbar macht oder dass Simulationen es ermöglichen, unterschiedliche Repräsentationsformen neben- statt nacheinander zu betrachten. Im Zuge der Entwicklung unseres Studiendesigns ergab sich außerdem die Überlegung, ob sich die drei Aspekte nach Vollrath als empirisch trennbar erweisen, was in unsere Forschungsfragen Eingang gefunden hat:

- Lassen sich Zuordnungsaspekt, Änderungsverhalten und Objektaspekt empirisch als einzelne Dimensionen funktionalen Denkens identifizieren?
- Fördern Realexperimente und Simulationen das funktionale Verständnis von Schülerinnen und Schülern?
- Rufen Realexperimente und Simulationen einen unterschiedlich großen Lernfortschritt im funktionalen Verständnis von Schülerinnen und Schülern hervor?

Funktionales Denken messen

Bevor funktionales Denken gefördert werden kann, muss man einen Weg finden, es messbar zu machen. Zu diesem Zweck haben wir einen Test entwickelt, der zudem versucht, die drei theoretischen Aspekte nach Vollrath auch empirisch zu trennen. Nach der Operationalisierung der drei Aspekte und der Konstruktion von Items, die sich an Items aus bekannten Studien zu funktionalen Zusammenhängen anlehnen, wurden diese einem Expertenrating unterzogen. Auf Basis der Ergebnisse konnte die Operationalisierung ausgeschärft und die Items überarbeitet werden. Es entstanden so 52 Items, wobei 15 Items auf den Aspekt der Zuordnung, 15 Items auf den Aspekt

Objekt und 22 Items auf den Aspekt der Kovariation entfallen. Die Items wurden gleichmäßig im Multi-Matrix-Design auf vier Testhefte verteilt, wobei zusätzlich alle in einem Heft befindlichen Items in umgekehrter Reihung angeordnet wurden, um Reihenfolgeneffekte auszuschließen. Die so entstandenen 8 Testhefte wurden zur Pilotierung über insgesamt 11 Klassen der Jahrgangsstufe 7 verteilt. Von jeder Klasse werden alle Testheft-Versionen bearbeitet, um Klasseneffekt bzw. einen möglichen Effekt der unterschiedlichen Heftversionen zu minimieren. Dieser kann natürlich auftreten, obwohl darauf geachtet wurde, die Hefte einander in der Schwierigkeit entsprechend zusammenzustellen. Ergebnisse der Pilotierung liegen zum aktuellen Zeitpunkt noch nicht vor.

Realexperimente oder Simulationen?

In einer *Vorstudie* werden theoriebasiert hergeleitete Experimentierkontexte auf ihre Durchführbarkeit im Unterricht hin überprüft, der benötigten Zeitaufwand abgeschätzt und erste Einblicke in den Lernprozess der SchülerInnen während ihrer Arbeit in den unterschiedlichen Settings gewonnen. Nachdem wir uns für die Kontexte Bleistifte anspitzen (Anzahl der Spitzumdrehungen => Läge des Bleistifts), Gefäße füllen (Füllvolumen => Füllhöhe), Würfel bauen (Anzahl der kleinen Würfel an einer Kante => Gesamtzahl der zum Bau benötigten kleinen Würfel) und Kreise abwickeln (Durchmesser => Umfang) entschieden haben, wurden zu diesen vier Kontexten Simulationen und Aufgaben für beide Settings erstellt. Diese werden im nächsten Schritt im Rahmen des Mathematik Labors „Mathe ist mehr" der Universität Koblenz-Landau erprobt. Die SchülerInnen werden die Aufgaben in Vierergruppen selbstständig bearbeiten. Um eine qualitative Auswertung der sichtbaren Prozesse neben Erkenntnissen über Durchführbarkeit und Zeitaufwand zu ermöglichen, wird eine dieser Schülergruppen bei ihrer Arbeit gefilmt und das Videomaterial anschließend qualitativ ausgewertet. Auf Grundlage der Ergebnisse der Vorstudie werden die Arbeitsaufträge überarbeitet und für die Einzelarbeit umgestaltet. Die *Hauptstudie* wird im Pre-Post-Test-Design mit Kontrollgruppe gestaltet sein. Zwei Experimentalgruppen werden sich in der auf 4 Schulstunden angesetzten Interventionsphase mit Realexperimenten bzw. Simulationen befassen. Die Kontrollgruppe wird sich dem Thema funktionale Zusammenhänge anhand der inhaltlich selben Aufgaben, aber weder mit Realexperimenten noch mit Simulationen widmen. Die Zuteilung zu den Gruppen geschieht in randomisierter Form über alle Klassen hinweg, um Klassen und Lehrereffekte ausschließen zu können. Des Weiteren sollen im Pre-Test die Intelligenz, die Freude an der Arbeit mit Materialien bzw. computerbasierten Simulationen und die Einstellung zum Mathematikunterricht erhoben werden. Der Nachtest wird die Motivation der SchülerInnen während der Intervention mit erfassen. Da davon auszugehen ist, dass SchülerInnen, die mit Simulationen arbeiten, weniger Zeit zur Erledigung aller

Aufgaben benötigen als die mit Material experimentierende Gruppe, wird die individuelle Bearbeitungszeit jeder Schülerin und jedes Schülers festgehalten und der Nachtest direkt im Anschluss an die individuelle Fertigstellung der Arbeitsaufträge stattfinden. Zusammenhänge zwischen Bearbeitungszeit, Intervention und Lerneffekt sind so möglicherweise erkennbar.

Ausblick

Unsere Studie wird es uns ermöglichen, Aussagen über den Grad des funktionalen Verständnisses von SchülerInnen zu treffen und die Effekte von Realexperimenten bzw. Simulationen für eine gezielte Förderung des funktionalen Denkens zu erfassen. Ein weiterführender Schritt sollte darin bestehen, den Effekt einer Kombination von Realexperimenten und Simulationen auf die Entwicklung des funktionalen Denkens zu untersuchen.

Literatur

Allmendinger, H., Lengnink, K., Vohns, A. & Wickel, G. (Hrsg.). (2013). *Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Konferenz der Kultusminister (Hrsg.). (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Darmstadt: Luchterhand.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing. Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research 60* (1), 1–64. doi:10.3102/00346543060001001.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12* (2), 151–169. doi:10.1007/BF00305619.

Thompson, P. W. (1994). Students, Functions, and the Undergraduate Curriculum. In E. Dubinsky (Hrsg.), *Research in collegiate mathematics education* (Issues in mathematics education, Bd. 4, S. 21–44). Providence, R.I.: American Mathematical Society.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik* (10), 3–37.

Katrin SCHIFFER, Köln

Eine Schulbuchanalyse im Bereich der Algebra

In diesem Beitrag wird ein Ausschnitt einer Analyse der Schulbuchreihe „Elemente der Mathematik“ [EdM], Schroedel-Verlag, Auflage für Nordrhein-Westfalen, vorgestellt. Das Ziel dieser Schulbuchanalyse ist es, die Auffassung von Algebra zu identifizieren, welche innerhalb der Schulbücher vertreten wird und welche die Lernenden anhand des Arbeitens mit den Schulbüchern erlangen können. Die der Analyse zugrundeliegenden Fragestellungen lauten: Welches sind die Objekte der Schulalgebra? Wie wird mit diesen Objekten umgegangen? Welche impliziten und expliziten Begründungen enthalten die Schulbuchseiten? Dieser Beitrag konzentriert sich auf die letztgenannte Fragestellung. In der Schulbuchreihe kann das Vorgehen innerhalb des Themenbereichs der Algebra nicht isoliert betrachtet werden, sondern muss im Zusammenhang zu den bereits behandelten Themenbereichen gesetzt werden. Dazu wird im Folgenden zunächst die Einführung der Grundrechenarten und der Rechengesetze als Grundlage für die Behandlung des Rechnens mit Termen und Gleichungen dargelegt.

1. Rechnen mit natürlichen Zahlen

Aufbauend auf dem Wissen aus der Grundschule werden in der fünften Klasse die Addition und Subtraktion mit den jeweiligen Fachbegriffen eingeführt. Die Fachbegriffe werden erst jeweils an einem Zahlbeispiel benannt und dann im Anschluss geometrisch interpretiert. Dazu wird die Bedeutung von Addition und Subtraktion am Zahlenstrahl thematisiert. Die Addition wird als das Aneinanderlegen von Strecken dargestellt und an einem Beispiel demonstriert. An der Darstellung kann nachvollzogen werden, dass die aneinandergelegten Strecken für die Summanden dieselbe Gesamtlänge einnehmen, wie die Strecke deren Summe. Analog wird die Subtraktion als das Wegnehmen eines Teils einer Strecke von einer Gesamtstrecke interpretiert. Die Lernenden bilden anhand der Darstellungen eine geometrische Vorstellung im Größenbereich der Längen zu den beiden Grundrechenarten aus. Die Zahlen werden dabei als Strecken interpretiert.

In EdM 5 werden die Rechengesetze als „vorteilhaftes Rechnen“, d.h. als Rechentricks, motiviert (vgl. EdM 5, S. 66). In einem anschließenden Informationskasten wird das jeweilige Gesetz erst verbal, dann formal mit Hilfe von Variablen und zuletzt durch ein Zahlbeispiel formuliert. Die Begründung der Gültigkeit der Gesetze erfolgt im Größenbereich der Längen. Die geometrische Vorstellung der Addition dient als Begründungsgrundlage. An einem Zahlenbeispiel wird aufgezeigt, dass die aneinandergelegten Strecken dieselbe Länge einnehmen, unabhängig von deren Reihenfolge. Für die Lernenden wird der exemplarische Charakter des Beispiels durch den angefügten Satz zum Assoziativgesetz betont: „Du erkennst: Ob du zuerst die Strecken für die Zahlen 21 und 18 oder zuerst die Strecken für die Zahlen 18 und 34 aneinandersetzt, das Ergebnis ist dasselbe. Diese Begründung ist für alle Zahlbeispiele möglich.“ (EdM 5, S. 67). Ebenso wie für die Addition werden auch die Rechengesetze der Multiplikation in einem konkretem Größenbereich induktiv begründet. Unter der Überschrift „Zur Begründung des Kommutativgesetzes“ findet sich die Darstellung eines Rechtecks, welches mit quadratischen Plättchen ausgelegt ist. Die Anzahl dieser Plättchen lässt sich sowohl durch die waagerechten als auch senkrechten Reihen beschreiben. Die Gültigkeit des Rechengesetzes wird durch die Beschreibungsgleichheit bezogen auf eine geometrische Figur erreicht. Analog wird das Assoziativgesetz durch die Beschreibungsgleichheit eines Quaders begründet.

Die Begründung der Gesetze an jeweils einem Beispiel in einem konkreten Größenbereich hebt die induktive und naturwissenschaftliche Vorgehensweise hervor. Daher stellen die geometrischen Darstellungen der Rechengesetze keine Veranschaulichung dar, sondern begründen ihre Allgemeingültigkeit.

2. Rechnen mit Termen

Die Einführung des Rechnens mit Termen erfolgt anhand einer Beispielaufgabe zur Bestimmung des Drahtverbrauchs für ein Schmuckstück (vgl. EdM 7, S. 246). Neben dieser Aufgabe ist eine aus regelmäßigen n-Ecken mit der Seitenlänge s zusammengesetzte Figur des Schmuckstücks abgebildet. In der Sachaufgabe werden zwei verschiedene Terme zur Bestimmung des Drahtverbrauchs aufgestellt. Die Lernenden sollen die Terme auf verschiedene Arten miteinander vergleichen. In der präsentierten Lösung zur Einstiegsaufgabe wird die Äquivalenz der Terme zunächst durch die Sachsituation begründet. Die beiden Terme sind beschreibungsgleich, da sie beide den Drahtverbrauch derselben geometrischen Figur beschreiben und die Terme sind einsetzungsgleich, da sie nach Einsetzung verschiedener Werte für s übereinstimmende Werte für die Gesamtlänge liefern. Diese induktive Vorgehensweise wird durch den Satz: „Dies ist anhand der Sachsituation klar.“ (EdM 7, S. 247) für die Lernenden verstärkt. Im nächsten Aufgabenteil sollen die Lernenden die Terme auch für negative Werte für s vergleichen. Der stattfindende inhaltliche Bruch zu der Sachsituation wird dabei nicht thematisiert. Dafür wird durch die Einsetzungsgleichheit gefolgert: „Auch bei der Einsetzung negativer Zahlen für s liefern die beiden Formeln jeweils denselben Wert.“ (EdM 7, S. 247). Im letzten Teil der Aufgabe wird eine allgemeine Begründung für die Gleichheit der Terme durch das Distributivgesetz gefordert. Die Notwendigkeit für eine allgemeine Begründung wird über die Unvollständigkeit der Wertetabelle der negativen Werte für s begründet. Die vorher gelieferte Begründung für positive Zahlen an der Sachsituation bleibt davon unberührt. In dem folgenden Informationskasten wird die Notwendigkeit von Regeln für ein begründetes Umformen noch einmal aufgegriffen. Dazu wird explizit geschrieben, dass das Einsetzten einiger Beispielwerte keinen Beweis darstellt, sondern nur Vermutungen liefert. Die Regeln für das begründete Umformen werden durch das Anwenden der Rechengesetze der Addition gerechtfertigt. Die Rechengesetze werden hierbei erst für das Rechnen mit Termen formuliert. Eine Begründung für die Gültigkeit der Rechengesetze selbst erfolgt nicht, diese ist nur implizit durch die Definition des Begriffs Term gegeben. Terme sind als Rechenausdrücke mit Variablen eingeführt worden in die Zahlen eingesetzt werden können. Daher sind Terme im Bereich der rationalen Zahlen verankert. Die dort gültigen Rechengesetze können somit auf das Rechnen mit Termen übertragen werden.

Die Multiplikation von Termen wird ebenfalls über eine Einstiegsaufgabe mit Lösung eingeführt (vgl. EdM 7, S. 256). In der Aufgabe sollen Terme zum Beschreiben des Flächeninhalts verschiedener geometrischer Figuren aufgestellt und vereinfacht werden. Das Rechnen mit den Termen wird dabei wieder über die Beschreibungsgleichheit begründet. Die Darstellung der Figuren, und damit verbunden die Sachsituation, liefert die Begründung der Termumformung für die positiven Zahlen. Diese wird in der Aufgabenstellung explizit als geometrische Begründung bezeichnet. Eine allgemeine Begründung auf Grundlage der Rechengesetze wird hier lediglich für die Erweiterung des Anwendungsbereichs der Termumformungen auf die negativen Zahlen verlangt. Die Regeln für die Termumformung werden dabei aus dem vorgestellten Beispiel gewonnen und als allgemeingültig gesetzt. Eine Begründung für die Gültigkeit der Rechengesetze für die Multiplikation bezogen auf Terme wird nicht gegeben, sondern ist ebenso wie die Begründung der Rechengesetze der Addition implizit in der Definition des Begriffs Term enthalten.

3. Lösen von Gleichungen

Bei der Einführung von Gleichungen werden den Lernenden zwei verschiedene Wege zur Bestimmung von Lösungen durch Umformung parallel vorgestellt (vgl. EdM 7, S. 264). Exemplarisch wird dazu die Lösung für den Term $3x + 4 = 10$ bestimmt. Die einzelnen Umfomungsschritte werden nebeneinander an einer Waage und an einem Zahlenstrahl ausgeführt. An der Waage steht x für ein unbekanntes Gewicht. Die Gleichheit der beiden Terme wird durch das Gleichgewicht der Waage verdeutlicht. Die Zahlen 4 und 10 werden als Anzahlen der Einheitsgewichtsstücke interpretiert, die passend auf den Waagschalen liegen. Am Zahlenstrahl steht x für eine Position auf der Zahlengerade, welche ermittelt werden soll. Die linke Seite der Gleichung wird über dem Zahlenstrahl und die rechte Seite der Gleichung an der gleichen Position unter dem Zahlenstrahl dargestellt. Jeder Umformungsschritt wird anschließend parallel ausgeführt. Eine allgemeine Begründung für die Gültigkeit der Äquivalenzumformungen wird nicht gegeben. Daher stellen die Darstellungen der Gleichungsumformungen an der Waage und dem Zahlenstrahl die einzige ersichtliche Begründung ihrer Gültigkeit dar.

4. Auffassung von Algebra

Die Addition und Subtraktion von natürlichen Zahlen wird geometrisch begründet. Es wird die Vorstellung des Aneinanderlegens und Wegnehmens von Strecken für die Grundrechenarten aufgebaut. Diese geometrische Vorstellung bildet die Grundlage der Begründung der Gültigkeit der einzelnen Rechengesetze, welche ihrerseits später auf das Rechnen mit Termen übertragen werden. Das Rechnen mit Termen wird an einer Sachsituation eingeführt und anhand dieser durch die Beschreibungsgleichheit für positive Zahlen begründet. Die allgemeinen Regeln für die Termumformungen werden induktiv gewonnen. Eine Begründung der Regeln durch die Rechengesetze wird erst bei der Erweiterung des Anwendungsbereichs auf die negativen Zahlen gefordert. Das Vorgehen bei dem Begründen verschiedener Sachverhalte hat einen naturwissenschaftlichen induktiven Charakter. Die Analyse der Schulbuchreihe „Elemente der Mathematik“, nach den eingangs aufgeführten Fragestellungen, lässt den Schluss zu, dass die Lernenden eine anschauliche und gegenständliche Auffassung von Algebra erlangen (vgl. Schiffer 2015a & b). Diese wird durch das Begründen der Sachverhalte in den konkreten Größenbereichen verstärkt.

Literatur

Griesel, H., Postel, H. & Suhr, F. (2006): *Elemente der Mathematik 5. Sekundarstufe I.* Gymnasium, Nordrhein-Westfallen: Schroedel.

Griesel, H., Postel, H. & Suhr, F. (2007): *Elemente der Mathematik 7. Sekundarstufe I.* Gymnasium, Nordrhein-Westfallen: Schroedel.

Schiffer, K. (2015a): On the Understanding oft he Concept of Numbers in Euler’s „Elements of Algebra“. In E. Barbin et al. (Hrsg.): *History and Epistemology in Mathematics Education, Proceedings of the 7th ESU,* S. 285 – 298.

Schiffer, K. (2015b): Schulbuchanalyse zum Umgang mit Variablen bei der Einführung von Termen und Gleichungen in der 7. Klasse, in: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 800 – 803.

Achim SCHILLER, Ludwigsburg

Entwicklung von Modulen zur Förderung von Statistical Literacy an der Hochschule

Kritisches Hinterfragen datenbasierter Aussagen ist für die informierte Partizipation von Zivilbürgern in der Demokratie unverzichtbar, denn oftmals sind die Informationsquellen für wichtige soziale Themen informationsreduzierte Artikel in den Medien. Welche statistischen Kenntnisse und Fähigkeiten werden benötigt, damit Jugendliche als heranwachsende Staatsbürger komplexe Phänomene, die die Gesellschaft, ihr soziales und privates Leben durchdringen, verstehen? Im Folgenden werden der theoretische Hintergrund und ein Modul für die Umsetzung skizziert.

Theoretischer Hintergrund

Kenntnisse und Fähigkeiten datenbasierende Aussagen zu verstehen, zu bewerten, zu interpretieren und mit Daten zu argumentieren sind eine wichtige Voraussetzung für das Funktionieren der Demokratie im privaten wie im gesellschaftlichen Bereich (Engel, 2014). Es gilt statistische Informationen und Aussagen, die auf Daten beruhen, zu verstehen, sie von Meinungen zu unterscheiden, Trends zu beurteilen, und daraus die begründete evidenz-basierte Schlussfolgerungen zu ziehen.

Im Informationszeitalter haben sich die hierfür verlangten Anforderungen gewandelt. Einerseits hat sich die Verfügbarkeit von großen multivariaten Datensätzen verändert, die Anzahl steigt kontinuierlich und der Zugang wird von nationalen statistischen Ämtern, supranationalen Organisationen wie UN und Eurostat sowie NGO’s wie Gapminder unterstützt (Vgl. Ridgway, 2015). Gleichzeitig sind die technischen Möglichkeiten zur Visualisierung und numerischen Verarbeitung multivariater Datensätze sowie ihre Benutzerfreundlichkeit stark verbessert worden.

Dies hat zur Folge, dass nicht nur vermehrt Argumente in jeglichen Bereichen der Gesellschaft statistisch untermauert werden, wodurch die Zivilbürger häufiger in Berührung mit statistischen Argumenten (bspw. Arbeitslosigkeit, Migration, Gesundheit oder Ernährung) kommen, sie können auch leichter von Journalisten und Zivilbürgern überprüft werden. Dabei gilt zu berücksichtigen, dass gesellschaftlich relevante Phänomene/ Datensätze oftmals eine komplexe multivariate Struktur haben, nicht-linare Zusammenhänge oder Störvariablen besitzen, im Gegensatz zu denen meist im Unterricht verwendeten Datensätzen (Ridgway, Nicholson & McCusker, 2013). Unterschiedliche und sich verändernde und teilweise komplexe Variablendefinitionen, Variablenmessungen und Darstellungen sorgen zusätzlich für Schwierigkeiten (vgl. Ridgway, 2015).

Es ist aber nicht nur reines statistisches Wissen notwendig, sondern auch Wissen und Einstellungen sich kritisch mit Daten auseinanderzusetzen, welche unter dem Begriff *Statistical Literacy* (SL) subsumiert werden. Gal (2002) unterscheidet explizit zwischen statistischen Informationen, datenbezogenen Argumenten oder stochastischen Phänomenen in verschiedenen Kontexten und die Anforderung diese zu verstehen, interpretieren und kritisch zu bewerten. Auch legt er Wert auf Kommunikation und Diskussion in Bezug auf Bedeutung der Informationen, Meinungen über die Auswirkungen dieser Informationen und daraus entstehende Schlussfolgerungen. Innerhalb seines Modells hat er sowohl kritisches Hinterfragen als ein Wissenselement als auch eine kritische Haltung gegenüber statistischen Aussagen verankert. Kritisches Denken beeinflusst SL und bezieht sich auf Bereiche von Fähigkeiten und Dispositionen, die für die Teilhabe von mündigen Bürgern in demokratischen Gesellschaften notwendig sind (Aizikovitsh & Kuntze, 2014).

Um sich unabhängig und mündig ein evidenzbasiertes, informiertes und kritisches Urteil über gesellschaftliche Phänomene, datenbezogene Argumente oder Darstellungen bilden zu können, müssen diese fachlich verstanden werden, im jeweiligen Kontext interpretiert werden und dazu noch eingeschätzt werden, welche Schlussfolgerungen und Konsequenzen daraus gezogen werden können (vgl. Engel, 2014; Ridgway, 2015). Im Hinblick auf diese Chancen und Möglichkeiten angesichts der freien Verfügbarkeit von offenen Daten wird eine neue Ausrichtung in der Statistikausbildung vorgeschlagen (Ridgway, Nicholson & McCusker, 2013; Ridgway, 2015).

Neuausrichtung der Statistikausbildung

Die Unterschiede der Neuausrichtung im Gegensatz zu bereits bestehenden Statistikvorlesungen lassen sich vor allem an drei Bereichen ausmachen:

- Den sich veränderten Anforderungen innerhalb der Gesellschaft (vgl. Ridgway, 2015) wird Rechnung getragen, dass die Vermittlung statistischer Kenntnisse durch multivariate Datensätze gesellschaftlicher Themen ergänzt wird. Geeignete multivariate Datensätze über gesellschaftliche Themen bieten den Vorteil, dass sie zentrale relevante statistische Bereiche abdecken (v.a. Grundbegriffe, Datenanalyse, Darstellungen), die Bedeutung der Statistik für gesellschaftliche Entscheidungen hervorhebt und dass das für die Interpretation der Ergebnisse zusätzlich notwendige Kontextwissen in der Regel zugänglich ist.
- Da im Alltag eine ausführliche komplexe Analyse multivariater Phänomene zu aufwändig ist, werden auch methodische Vorgehensweisen vermittelt, um datenbasierte Aussagen, statistische Informationen oder multivariate Phänomene einfacher bewerten und einschätzen zu können, um Schlussfolgerungen treffen zu können (Bspw.

Umgang mit kausalen Schlüssen, Achten auf die Basis bei Prozentangaben, Berücksichtigung der Variablenoperationalisierung).

- Die Verwendung von interaktiven bzw. dynamischen Visualisierungstools bietet u.a. die Möglichkeit ohne aufwendige Berechnungen mögliche Zusammenhänge innerhalb von Daten zu erkennen. Zudem bieten immer mehr Internetseiten grafische Visualiserungstools an, die es zu verstehen gilt.

Aufbau des Moduls kritisches Hinterfragen datenbasierter Aussagen

Da kritisches Hinterfragen datenbasierter Aussagen für die informierte Partizipation von Zivilbürgern in der Demokratie wichtig ist (vgl. Aizikovitsh & Kuntze, 2014; Ridgway, 2015) haben wir ein Modul entwickelt, welches in einem Mathematikseminar für Lehramtsstudenten durchgeführt wurde und den Fokus auf datenbasierte Aussagen aus den Medien legt:

Die Studierenden bekommen vier verschiedene datenbasierte Aussagen vorgelegt, bspw. „Der Anteil der weiblichen Vorstände ist gestiegen – aber weit unter dem Niveau von 2013". Sie sollen dazu eine erste Einschätzung über die Aussagekraft der datenbasierten Aussage abgeben und zwei Fragen nach zusätzlichen aus ihrer Sicht wichtigen Informationen stellen. Die Einschätzungen und Fragen werden anschließend im Plenum diskutiert, damit die Studierenden einen Überblick bekommen können, welche Einschätzungen und Fragen die Anderen haben und um bereits ein erstes Kategorisieren der Fragen in Bereiche durchzuführen.

Im nächsten Schritt bekommen die Studierenden zusätzliche Informationen (Artikel, Schaubild oder ähnliches) zu den jeweiligen Aussagen. Sie sollen ihre Einschätzung überprüfen, sowie sofern möglich Fragen beantworten und ggf. neue aufstellen. Die Überprüfung der Einschätzung, Beantwortung und Aufstellung der Fragen wird wieder im Plenum diskutiert, wodurch die Studierenden einen möglichen Entwicklungsprozess bei sich/ den Kommilitonen beobachten und sich auch gegenseitig unterstützen können.

Im letzten Schritt bekommen die Studierenden ausführlichere Informationen zu der Thematik der datenbasierten Aussage in Form von Mikro- oder Makrodaten und sollen ihre Fragen beantworten, ihre Einschätzung der Aussage überprüfen und die datenbasierte Aussage kritisch bewerten.

Anhand des Werbeslogans „Erfolgreich: Alle 11 Minuten verliebt sich ein Single über Parship" sollen die Studierenden die verschiedenen statistischen Bereiche herausfinden, welche für eine Bewertung der Aussage wichtig sind (siehe dazu auch Unstatistik des Monats Dezember 2015, http://www.rwi-essen.de/unstatistik/50). Wie wurden die Daten erfasst, wie sind *verliebt* und

Single definiert und wie wurden sie gemessen, wie ergeben sich *alle 11 Minuten*, wie kommt man zu dem Schluss *erfolgreich* und in welchem Kontextwissen ist diese Aussage zu betrachten?

Bei der Abschlussaufgabe des Moduls sollen die Studierenden die datenbasierte Aussage „Inflation: Früher war nicht alles billiger – Das Leben ist heute durchschnittlich nicht teurer als 1991“ auf ihre Aussagekraft überprüfen und datenbasiert begründen, ob sie die Aussage teilen. Die Studierenden haben dabei die Möglichkeit auf der Homepage des statistischen Bundesamtes mit multivariaten Datensätzen zu einer Lösung zu kommen.

Diskussion

Ziele des Moduls „kritisches Hinterfragen datenbasierter Aussagen“ sind Verbesserungen der kritischen Einstellung gegenüber datenbasierten Aussagen, eine Verbesserung der Einschätzung über die Aussagekraft von datenbasierten Argumenten und eine Verbesserung der Kenntnisse über wichtige Informationen, die für eine Einschätzung, Bewertung und mögliche Schlussfolgerungen datenbasierter Aussagen notwendig sind.

Literatur

Aizikovitsh-Udi, E. & Kuntze, S. (2014): Critical Thinking as an impact factor on statistical literacy – theoretical frameworks and results from an interview study. *In Makar, K.; de Sousa, B. & Gould, R. (Eds.), sustainability in statistics education: Proceedings of ICOTS9.* Voorburg, The Netherlands: Intern. Statistical Institute. http://iase-web.org/icots/9/proceedings/pdfs/ICOTS9_7E1_AIZIKOVITSHUDI.pdf

Engel, J. (2014): Open data, civil society and monitoring progress: challenges for statistics education. *In Makar, K.; de Sousa, B. & Gould, R. (Eds.), sustainability in statistics education: Proceedings of ICOTS9.* Voorburg, The Netherlands: Intern. Statistical Institute. http://iase-web.org/icots/9/proceedings/pdfs/ICOTS9_4F4_ENGEL.pdf

Gal, I. (2002): Adults’ Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities, in International Statistical Review, 70, S.1-25, Netherlands.

Ridgway, J., Nicholson, J. & McCusker, S. (2013): Open data and the semantic web require a rethink on statistics teaching, Technology Innovations in Statistics Education, 7 (2).

Ridgway, J. (2015): Implications of the Data Revolution for Statistics Education. *Intern. Statistical Review,* http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/insr.12110/abstract

Sabine SCHLAGER, Jana KAULVERS, Andreas BÜCHTER, Universität Duisburg-Essen

Zum Zusammenhang von Sprachkompetenz und Mathematikleistung – Ergebnisse einer Studie mit experimentell variierten sprachlichen Aufgabenmerkmalen

1. Forschungsstand

Die Beforschung von Sprache in der Mathematik hat eine lange Tradition (vgl. Maier/Schweiger 1999). Relativ neu für Deutschland ist hingegen der Blick auf herkunftsbedingte Leistungsdisparitäten. Schulleistungsstudien wie PISA (vgl. Gebhardt et al. 2013) zeigten auf, dass Mathematikleistungen in Deutschland stark mit dem familiären Hintergrund zusammenhängen. Der Fokus lag dabei lange auf dem Sozioökonomischen Status oder der Erstsprache als Prädiktoren für Fachleistung. In der internationalen Forschung hingegen wird bereits seit längerem der Sprachkompetenz, vor allem für Items mit Realitätskontext und hoher linguistischer Komplexität (vgl. Brown 2005), eine größere Bedeutung zugeschrieben (vgl. Abedi 2006). Solche Items liegen auch in den Zentralen Prüfungen am Ende der Klasse 10 in Nordrhein-Westfalen (ZP10) vor, in denen die Korrelation von Mathematikleistung mit Sprachkompetenz höher als mit anderen Hintergrundfaktoren ist (vgl. Prediger et al. 2015; Wilhelm, 2016). Als Hürden wurden vor allem Lesehürden, beispielsweise auf Grund komplexer Satzstrukturen oder Präpositionen, prozessuale Hürden und konzeptuelle Hürden identifiziert. Auf diesen Ergebnissen baut die hier vorgestellte Studie auf, die mit der systematischen Variation von sprachlichen Aufgabenmerkmalen die folgenden Forschungsfragen beantworten soll:

- F1: Welche sprachlichen Merkmale sind für alle Lernenden schwierigkeitsgenerierend?
- F2: Welche sprachlichen Merkmale sind besonders für sprachlich schwache Lernende schwierigkeitsgenerierend?

2. Aufbau der Studie

Zur Beantwortung dieser Fragen wurde ein mixed-method-Design angelegt. Am quantitativen Teil nahmen rund 600 Lernende aus Gesamtschulen der Region Rhein-Ruhr teil. Als unabhängige Variable wurden die Sprachkompetenz (C-Test), die kognitiven Fähigkeiten (CFT-20R) und sprach- und familienbiographische Daten (Fragebogen) erhoben. Der 90-minütige Mathematiktest, gestaltet in Anlehnung an die ZP10, enthielt Aufgaben zu Funktionen, beschreibender Statistik und Prozentrechnung.

Der Test lag in drei Versionen mit sechs identischen Ankeraufgaben (21 Items), sowie sechs sprachlich variierten Aufgaben (13 Items) vor. Bei der

Aufgabenvariation blieben der Kontext und der fachliche Gehalt der Aufgaben jeweils erhalten. Ausgehend von einer sprachlich optimierten Ausgangsfassung wurden die Aufgaben sprachlich nach je zwei der Kriterien Kontextlexik (KL), Referenzstruktur (RS), Präpositionaler Anschluss bzw. Trennbare Verben (PA/TV), oder Nominalisierung und Verdichtung (N/V) variiert. Die Variationen verteilen sich gleichmäßig auf die drei Testhefte. Die drei Testheft-Gruppen weisen im Vergleich der Ergebnisse zu Sprachkompetenz, kognitiven Fähigkeiten und Mathematikleistung keine signifikanten Unterschiede auf.

In der qualitativen Vertiefung wurden vier statistisch auffällige Aufgaben von Lernenden anderer Gesamtschulen in Einzelinterviews mit der Methode des lauten Denkens bearbeitet und anschließend diskutiert.

3. Ein Beispiel für die Aufgabenvariation

Als Beispiel wird die Aufgabe „Badewanne“ mit der Variante Nominalisierung/Verdichtung (N/V) betrachtet (weitere Variante: Referenzstruktur). Variierte Stellen wurden für diesen Artikel fett hervorgehoben.

> 0-Version: „Eine Badewanne hat einen Kaltwasserhahn und einen Warmwasserhahn. Die Badewanne wird mit 135 Litern Wasser gefüllt. Wenn beide Wasserhähne geöffnet sind, dauert es 9 Minuten, bis die Badewanne gefüllt ist. Wenn nur der Kaltwasserhahn geöffnet ist, dauert es 7,5 Minuten länger als mit beiden Wasserhähnen. Wie viel Liter Wasser kommen pro Minute aus dem geöffneten Kaltwasserhahn? Notiere deine Rechnung.“
>
> N/V: „Eine Badewanne **mit einem** Kalt- und einem Warmwasserhahn wird mit 135 Litern Wasser gefüllt. **Bei Öffnung** beider Wasserhähne dauert **die Füllung** der Badewanne 9 Minuten, bei **ausschließlicher Öffnung des Kaltwasserhahns** 7,5 Minuten länger als **bei Öffnung** beider Wasserhähne. Welche **Wassermenge** kommt pro Minute aus dem geöffneten Kaltwasserhahn? Notiere deine Rechnung.“

Insgesamt zeigte sich bei der Aufgabenvariation, dass alternative Formulierungen der Aufgaben an Hand zuvor festgelegter Kriterien vor allem an Stellen, die für die mathematische Bearbeitung bedeutungstragend sind, nicht immer möglich waren. Die Variation hat vor allem dadurch Grenzen, dass sie an den üblichen Sprachgebrauch, den Kontext, sowie die sprachliche Realisierung mathematischer Konzepte gebunden ist.

Zusätzlich wurde sichtbar, dass isolierte Änderungen kaum möglich sind. Bei der obigen Variation etwa muss durch die Nominalisierung von *geöffnet* (zu *Öffnung*) auch das Adverb *nur* durch das Adjektiv *ausschließlich* ersetzt werden, sodass eine weitere potentielle lexikalische Hürde auftritt.

4. Ergebnisse aus den quantitativen Analysen

In der statistischen Auswertung zeigten die Gruppen der Lernenden mit höherer Intelligenz, ohne Migrationshintergrund, mit höherer Sprachkompetenz, sowie Lernende, die in ihrer Familie monolingual Deutsch aufwachsen, hoch signifikant bessere Mathematikleistungen.

Regressionsanalysen zeigten, dass die Sprachkompetenz und die kognitiven Fähigkeiten als isolierte Prädiktoren die Leistung im Mathematiktest mit je ca. 15% aufgeklärter Varianz statistisch am stärksten bedingen. Die weiteren Hintergrundfaktoren tragen hierzu deutlich weniger bzw. kaum bei: Die Univariate Varianzanalyse zeigte für den Sozioökonomischen Status (SES), die Familiensprache und den Migrationshintergrund höchstens geringe Varianzaufklärungen.

Schwierigkeitsverschiebungen bezüglich der sprachlichen Variation zeigen sich besonders in der Badewannen-Aufgabe. Hier wurde die Variante N/V im Vergleich zur 0-Version um 0,6 WLE auf der Rasch-Skala schwieriger, was in diesem Leistungsbereich ungefähr drei von 34 richtig gelösten Items entspricht. In den anderen Items zur N/V zeigen sich keine signifikanten Verschiebungen. Die Referenzstruktur erschwerte ebenfalls die Bearbeitung der Badewannen-Aufgabe um 0,6 WLE. In den anderen so variierten Items zeigte sich ein uneinheitliches Bild. In manchen Fällen ist der mathematische Gehalt deutlich dominierender als die Sprache, so beispielsweise bei der Frage nach dem Median, bei der entscheidend ist, ob das mathematische Konzept im Unterricht thematisiert wurde oder nicht. Ähnliches zeigt sich auch bei den Schwierigkeitsverschiebungen durch Variationen nach den Kriterien PA/TV bzw. KL.

Insgesamt wirken sprachliche Variationen sich vor allem in Extremvarianten, wie der Badewannen-Aufgabe, signifikant aus. Solche Formulierungen lassen sich zumindest in den als Referenztest gewählten ZP10 nicht mehr finden – in Schulbüchern hingegen schon.

Das vorgestellte Ergebnis bedeutet nicht, dass die sprachliche Variation keinerlei Schwierigkeiten für die Lernenden verursacht, wie die qualitativen Analysen zeigen. Sie wirkt aber vermutlich nur im Zusammenspiel mit anderen Aufgabenmerkmalen schwierigkeitsgenierend.

5. Ergebnisse aus den qualitativen Analysen

In den Interviews wurde 16 Lernenden die Badewannen-Aufgabe in der N/V-Version vorgelegt. Hier zeigte sich, dass das Wort *ausschließlich*, das auf Grund der Nominalisierung verwendet werden musste, bei vielen Lernende Probleme hervorruft. Dies ist bereits zuvor in den schriftlichen Bearbeitungen sichtbar geworden. So hat ein Schüler anstelle einer Bearbeitung der Aufgabe geschrieben: „Ich habe die Fragestellung nicht verstanden. Wird mit ‚ausschließlicher Öffnung des Kaltwasserhahns' gemeint, dass nur kaltes Wasser benutzt wird?" Er kannte die richtige Bedeutung des Wortes „ausschließlich" zwar, war sich aber anscheinend unsicher und hat die Bearbeitung vermutlich aus diesem Grund abgebrochen.

Insgesamt zeigten sich in den Analysen auftretende Probleme im Textverständnis, vor allem bei *ausschließlich*, bei Präpositionen und beim Verständnis der bedeutungstragenden Stelle „länger als bei Öffnung beider Wasserhähne". In der Retrospektive konnten dann aber viele Lernende eigenständig oder auf Nachfrage die bedeutungstragenden Stellen „länger" und „ausschließlicher Öffnung des Kaltwasserhahns" identifizieren.

6. Fazit und Ausblick

Zur Beantwortung von F1 lässt sich sagen, dass Variationen vor allem in Extremvarianten allgemein schwierigkeitsgenerierend sind. Die Tatsache, dass sie in dieser isolierten Form sonst nicht signifikant auffällig sind, lässt vermuten, dass sie vor allem in Kombination untereinander oder mit konzeptuellen Merkmalen Schwierigkeit generieren. Dies muss noch genauer analysiert werden. Besonders für sprachlich schwache Lernende scheinen die Kontextlexik, die Nominalisierung/Verdichtung und die Präpositionen schwierigkeitsgenerierend zu sein, wie die qualitativen Analysen zeigen. Im nächsten Schritt wird analysiert, wie sich die Bearbeitungsstrategien je nach Sprachkompetenz unterscheiden.

Literatur

Abedi, J. (2006): Language Issues in Item Development. In S. M. Downing & T. M. Haladyna (Hrsg.): *Handbook of test development.* Mahwah, NJ: Erlbaum, 377-398.

Brown, C. L. (2005): Equity of Literacy Based Math Performance Assessments for English Language learners. *Bilingual Research Journal, 29(2*), 337–363.

Gebhardt, M., Rauch, D., Mang, J., Sälzer, C. & Stanat, P. (2013): Mathematische Kompetenz von Schülerinnen und Schülern mit Zuwanderungshintergrund. In M. Prenzel et al. (Hrsg.): *PISA 2012: Fortschritte und Herausforderungen in Deutschland.* Münster: Waxmann, 275-308.

Maier, H., Schweiger, F. (1999): *Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht.* Wien: ÖBV & HPT.

Prediger, S., Wilhelm, N., Büchter, A., Gürsoy, E. & Benholz, C. (2015): Sprachkompetenz und Mathematikleistung – Empirische Untersuchung sprachlich bedingter Hürden in den Zentralen Prüfungen 10. Journal für Mathematik-Didaktik, 36 (1), 77-104.

Wilhelm, N. (im Druck): *Sprachliche und konzeptuelle Hürden in der Bearbeitung mathematischer Textaufgaben durch sprachlich schwache Lernende - Quantitative und qualitative Analysen.* Dissertation, TU Dortmund.

Simeon SCHLICHT, Köln

Zur Entwicklung des Mengen- und Zahlbegriffs – Eine Beschreibung der Entwicklung mittels Empirischer Theorien

Die mathematische Bildung in der frühen Kindheit steht im Fokus aktueller politischer und gesellschaftlicher Diskussionen. So wird unter anderem in den Bildungsgrundsätzen gefordert, dass bereits in der KiTa den Kindern die Alltäglichkeit und Allgegenwärtigkeit von Mathematik bewusstgemacht werden soll (MFKJKS/MSW 2011, S. 57). Der vorliegende Artikel gibt einen Einblick in die Ergebnisse meines Dissertationsprojekts, welches die Entwicklung des Mengen- und Zahlbegriffs in den Blick genommen hat.

Vorerfahrungen bezüglich Mengen und Zahlen

Mengen (im Sinne von Kollektionen von Objekten) und (An-)Zahlen (eben dieser Objekte) zählen zu den ersten mathematischen Konzepten, welche Kinder erwerben. So können bereits Kleinkinder im Alter von vier Monaten kleine Anzahlen von bis zu vier Objekten spontan erfassen (vgl. Feigenson et al. 2004). Hierbei sind die korrespondierenden Zahlwörter zunächst nicht mit den Anzahlen der Objekte verknüpft. Fuson (1988) konnte in einer eindrucksvollen Untersuchung die Entwicklung der Zahlwortreihe beschreiben. Ab dem Vorliegen der Zahlwortreihe als „Unbreakable List“ ist die Zuordnung von Zahlwort zu Objekt und somit ein Abzählen von Objekten möglich. Nach Hefendehl-Hebeker & Schwank (2015) befindet sich die Forschung zum Erwerb arithmetischer Konzepte noch im Pionierstadium.

Forschungsvorhaben

Anliegen der Dissertation ist es einen Beitrag zur dieser Forschungsaufgabe der Mathematikdidaktik zu leisten und für besondere Phänomene im Prozess des Begriffserwerbs zu sensibilisieren.

> „Forschungen in der Mathematikdidaktik können dabei helfen, Unterrichtsvorschläge [und natürlich auch andere Maßnahmen, wie z.B. Lernsituationen in der KiTa, SJS] zu entwickeln und (partiell) zu rechtfertigen. Dazu benötigt man auch Theorien; denn erst ein Verständnis von Prozessen und Phänomenen erlaubt es, diese sinnvoll und planmäßig zu beeinflussen.“ (Struve 2015, S. 563)

Videographie

Um Phänomene im Mengen- und Zahlbegriffserwerb beobachten zu können, wurde im September 2013 und Januar 2014 eine Videographiestudie in einer

KiTa durchgeführt. Hierbei wurden Einzeltreffen mit Kindern in der Altersspanne von 3 Jahren und 10 Monate bis 4 Jahren und 8 Monaten in einem separaten Raum durchgeführt. Gesprächsanlässe boten hierbei mathematikdidaktische Materialien wie z.B. die Rechenwendeltreppe (vgl. Schwank 2010) oder der ZARAO (vgl. Schwank 2013a). Wichtig für diese Begegnungen war, dass diese für die Kinder jeweils ähnlich dem Spiel mit anderen, durchaus der Anleitung durch Erwachsener bedürftiger, Spielen gestaltet waren. Die verschiedenen Materialien wurden im Rahmen der Treffen erkundet und mitunter durch die Kinder selber gestaltet. Gerade die Beachtung der Wünsche und Vorlieben der Kinder war zentrales Anliegen, da zum einen die Verhaltensweisen der Kinder in den Situationen untersucht werden sollen und diese deshalb genügend Freiraum bekommen sollten, in den Spielsituationen gestalterisch tätig zu sein. Zum anderen stand das Wohlbefinden des Kindes während der gesamten Begegnung stets über der etwaigen Instruktion von elementarmathematischen Inhalten. Beispiele für solche Szenen sind in Schlicht (2014) & Schlicht (2015) zu finden.

Analyse der Szenen

Eine Analyse entsprechender Szenen im Hinblick auf das mathematische Wissen der Kinder verspricht detaillierte Einsichten in die Entwicklung erster Mengen- und Zahlkonzepte. Für die Analyse werden im Sinne des kognitionspsychologischen Ansatzes der Theory Theory (vgl. Gopnik & Meltzoff 1997) den Kindern gewisse Theorien über einen Phänomenbereich zugeschrieben. Im Sinne der Theory Theory kann das Verhalten von Kindern so beschrieben werden, als ob sie eine Theorie über den beobachteten Phänomenbereich besäßen. Hierbei vergleichen Gopnik & Melzoff (1997) die Kinder mit empirisch arbeitenden Wissenschaftlern:

> „The central idea of this theory is that the processes of cognitive development in children are similar to, indeed perhaps even identical with, the processes of cognitive development in scientists.“ (Ebd. S. 3)

In diesem Sinne erwerben Lernende *empirische Theorien* über einen Phänomenbereich. Diese empirischen Theorien werden mit Hilfe des strukturalistischen Theoriekonzepts präzise beschrieben und analysiert.

Für die Rekonstruktion eben solcher empirischer Theorien werden in der Arbeit geeignete Szenen ausgewählt und gesprochenes Wort sowie durchgeführte Handlungen transkribiert. Diese Transkripte werden dann im Sinne der Interpretativen Forschung (vgl. Meyer 2007, Krummheuer 2012) in Hinblick auf die Rekonstruktion analysiert.

Ergebnisse

Eine detaillierte Analyse eines oder gar mehrerer Transkripte ist an dieser Stelle aus Platzgründen nicht möglich, sodass im Folgenden Ergebnisse der Analysen skizziert werden.

Das Verhalten der Kinder in den einzelnen Spielsituationen lässt sich erfolgreich mittels der Zuschreibung von empirischen Theorien über Mengen und Zahlen beschreiben. Hierbei zeichnen sich diese Theorien dadurch aus, dass die Begriffe Menge und Zahl über konkret gegebene Kollektionen von Objekten gebildet werden. Zahlen werden von den Kindern zum Kennzeichnen von konkret gegebenen Kollektionen von Objekten wie Kugeln, Murmeln, o.Ä. genutzt. Für ein sinnvolles Beschäftigen mit (An-)Zahlen ist demnach das Vorliegen von Objekten immanent. In den rekonstruierten Theorien über Mengen und Zahlen ist die *leere Menge* nicht Teil der Theorie. Grundlegende Handlungen wie das Kennzeichnen von Objekten bzw. das Aussondern von Objekten aus einem Grundbereich, welche bei Kollektionen von Objekten durchgeführt werden können, sind hier nicht möglich. Dennoch kann die leere Menge durch die Setzung von gewissen Umgangsregeln eingeführt werden. Jedoch ist zu beachten, dass diese Setzungen gerade nicht der Beobachtung entspringen und demnach keine Einsichten im Begriffserwerb darstellen, sondern vielmehr, aus unserer Sicht sinnvolle, zusätzliche Annahmen voraussetzen, welche jedoch von der Theorie her kommen.

Die *leere Menge* und die *Null* sind wichtige Begriffe für die Mathematik. Nicht nur für die Darstellung von anderen Zahlen (vgl. Hefendehl-Hebeker & Schwank 2015, S. 96ff)., sondern auch für die Entwicklung einer funktional-logischen Sichtweise auf Zahlen sind diese essentiell (vgl. Schwank 2013b). In der Arbeit wird herausgestellt, dass die Entwicklung dieser Begriffe der Anleitung von Erzieherinnen und Lehrerinnen bedarf. Ebenso lassen sich bestimmte Verhaltensweisen von Kindern, welche als Fehler oder Irrtürmer abgetan werden könnten, erklären.

Schwierigkeiten im Erwerb mathematischer Fertigkeiten in Zusammenhang mit diesen und ähnlichen Begriffen lassen sich demnach als Probleme struktureller und nicht individueller Art auffassen. Dieser strukturell bedingten Hürde sollten sich Wissenschaftler und Lehrende bewusst sein.

Literatur

Feigenson, L., Dehaene, S & Spelke, E. (2004): Core System of Number, in: Trends in cognitive sciences, 8(7), S. 307-314.

Fuson, K. C. (1988): Children’s Counting an Concepts of Number, New York – Berlin – Heidelberg: Springer.

Gopnik, A. & Meltzoff, A. (1997): Words, Thoughts, and Theories, Cambridge, MA: MIT Press.

Hefendehl-Hebeker, L. & Schwank, I. (2015): Arithmetik: Leitidee Zahl, in: Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L. Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (Hrsg.), Handbuch für Mathematikdidaktik, S. 77-115, Berlin, Heidelberg: Springer.

Krummheuer, G. (2012): Interaktionsanalyse, in Heinzel, F: (Hrsg.), Methoden der Kindheitsforschung, S. 234-247, Weinheim: Juventa.

Meyer, M. (2007): Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument. Hildesheim: Franzbecker.

MFKJKS/MSW (2011): Mehr Chancen durch Bildung von Anfang an – Entwurf – Grundsätze zur Bildungsförderung für Kinder von 0 bis 10 Jahren in Kindertageseinrichtungen und Schulen im Primarbereich in Nordrhein-Westfalen, herausgegeben von: Ministerium für Familie, Jugend, Kultur und Sport des Landes Nordrhein-Westfalen, Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen.

Schlicht, S. (2014): Zur Entwicklung des Mengen- und Zahlbegriffs auf der Grundlage einer Videographie mit Drei- bis Vierjährigen, in: Roths, J. & Ames, J. (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2014, S. 1071-1074, Münster: WTM-Verlag.

Schlicht, S. (2015): „Empirische Theorien“ – Beschreibung des Verhaltens von Kindern in mathematikhaltigen Spielsituationen, in: Caluori, F., Linneweber-Lammerskitten, H. & Streit, C. (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2015. Münster. WTM-Verlag.

Schlicht, S. (2016): Zur Entwicklung des Mengen- und Zahlbegriffs. Eingereichte Dissertation, Universität zu Köln.

Schwank, I. (2010): Erlebniswelt Zahlen – Spielereien mit der Rechenwendeltreppe für Vorschulkinder, Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik e.V..

Schwank, I. (2013a): Wenn Würfelspielen schwer fällt... zur Bedeutung von Ereignissen für das Rechenlernen – Vorstellung der mathematischen Spielwelt ZARAO, in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2013, S. 934-937.

Schwank, I. (2013b): Die Schwierigkeit des Dazu-Denkens, in von Aster, M. & Lorenz, J. H. (Hrsg.), Rechenstörungen bei Kindern, 2. Auflage, S. 93-139, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Struve, H. (2015): Zur geschichtlichen Entwicklung der Mathematikdidaktik als wissenschaftlicher Disziplin, in: Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L. Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (Hrsg.), Handbuch für Mathematikdidaktik, S. 359-566, Berlin, Heidelberg: Springer

Christine SCHMEISSER, Regensburg

Sind die Bildungsstandards in den Mathematikschulbüchern der Sekundarstufe I angekommen?

Das schlechte Abschneiden deutscher Schülerinnen und Schüler in der PISA-Studie 2000 löste eine bildungspolitische Diskussion aus. Als Folge verabschiedete die Kultusministerkonferenz bundesweit geltende Bildungsstandards für zentrale Unterrichtsfächer, zu deren Umsetzung sich die Bundesländer verpflichtet haben (KMK 2003, 2004a, 2004b, 2012). Als Bedingung für eine erfolgreiche Implementation der Standards im Mathematikunterricht werden kompetenzorientierte Aufgaben gesehen. Die Aufgabenauswahl im Unterricht erfolgt dabei meist auf Grundlage des Schulbuches, welches eines der wichtigsten Unterrichtswerkzeuge darstellt und zudem auch als politisches Instrument Unterstützer bei der Implementation von Bildungsreformen ist (vgl. Heinze & Matthes 2005, Rezat 2011, Valverde et al. 2002, Wiater 2011). Öffentliche als auch fachliche Diskussionen lassen allerdings den Eindruck entstehen, dass die konkrete Umsetzung der Bildungsstandards (und damit auch die verstärkte Implementation von kompetenzorientierten Aufgaben) in der unterrichtlichen Praxis bisher noch nicht hinreichend erfolgte.

Aufgrund dieser Vermutungen stellt sich die dringende Frage, ob und in welchem Ausmaß die von den Bildungsstandards geforderten kompetenzorientierten Aufgaben in den im Jahr 2015/16 zugelassenen Mathematikschulbüchern tatsächlich bereits implementiert wurden. Im Rahmen der vorgestellten Studie soll dieses Forschungsdesiderat aufgegriffen werden. Folgende Fragen stehen dabei im Fokus: (1) Haben sich die Aufgaben und deren Anforderungsniveau in deutschen Mathematikschulbüchern seit Einführung der Bildungsstandards verändert? (2) Welche Schulform-/ Schulstufenspezifika lassen sich in den Aufgaben der Mathematikschulbücher (und deren Veränderung) identifizieren? (3) Unterscheiden sich die Aufgaben (und deren Veränderung) im Hinblick auf die Themengebiete Algebra, Stochastik und Geometrie?

Zur Untersuchung der Fragestellungen sollen Mathematikschulbücher der Sekundarstufe I mithilfe eines zuvor entwickelten Aufgabenklassifikationsschemas analysiert werden. In einer Vorstudie (Fragebogen an Mathematiklehrkräfte 2015/2016) wurden zunächst die am häufigsten im Unterricht eingesetzten Schulbuchverlage, der Verwendungszweck von Mathematikschulbüchern im Unterricht sowie die Einschätzungen von Lehrkräften zur Ausprägung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen in den Aufgaben der Mathematikschulbücher vor und nach Einführung der Bildungsstandards erhoben.

Ergebnisse der Vorstudie

Am Lehrerfragebogen nahmen insgesamt 309 Mathematiklehrkräfte (verteilt über alle Bundesländer und Sekundarschulformen) teil. 58,4% waren weiblich, 41,6% männlich. 179 der Lehrkräfte haben bereits vor Einführung der Bildungsstandards unterrichtet. Die Schulformen verteilen sich wie folgt: 7,3% Hauptschule, 32,2% Realschule, 12,8 % Gesamtschule, 42,6% Gymnasium und 5,2% andere Schulformen.

Am häufigsten werden von den befragten Lehrkräften Schulbuchreihen der Verlage Klett (32,6%), Schrödel (25,4%), Westermann (21,6%) und Cornelsen (9,6%) im Mathematikunterricht eingesetzt, weshalb die späteren Untersuchungen sich auch auf diese vier Verlage konzentrieren werden.

In Tabelle 1 werden die Antworten der Lehrkräfte auf die Frage nach der Verwendung des Mathematikschulbuchs im Unterricht dargestellt. Die Ergebnisse heben die Bedeutung des Schulbuchs für den Mathematikunterricht hervor.

Verwendung Mathematikschulbuch (N=309)	*MW (SD)*
Vorlage für den Unterricht	2,5 (1.01)
Unterrichtsvorbereitung	3,20 (.80)
Strukturierung des Stoffes	3,10 (.92)
Hausaufgaben	3,51 (.76)
Unterrichtsaufgaben	3,44 (.73)
Nachschlagewerk für SchülerInnen	2,75 (.98)

Tabelle 1: Antwortmöglichkeiten „1 = selten“, „2 = manchmal“, „3 = häufiger“, „4 = regelmäßig“; MW = arithmetisches Mittel; SD = Standardabweichung

Weiterhin wurden die 179 Lehrkräfte -welche bereits vor Einführung der Bildungsstandards unterrichtet haben- gefragt, inwieweit ihrer Meinung nach die sechs allgemeinen Kompetenzen vor (2003) und nach (heute) Einführung der Bildungsstandards in den Aufgaben der Mathematikschulbücher manifestiert waren bzw. sind. Die Ergebnisse (vgl. Tabelle 2) zeigen sehr signifikante mittlere bis große Effekte in Richtung Zunahme bei den Kompetenzen „K3: Mathematisch modellieren“, „“K4: Mathematische Darstellungen verwenden“ und „K6: Kommunizieren“ sowie in Richtung Abnahme bei der Kompetenz „K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“. Die Kompetenzen „K1: Mathematisch argumentieren“ und „K2: Probleme mathematisch lösen“ haben sich –nach Einschätzung der Lehrkräfte- in den Aufgaben der Mathematikschulbücher seit Einführung der Bildungsstandards nicht verändert.

Einschätzungen zur Ausprägung der Kompetenzen in den Mathematikschulbüchern… (N=179)	*...vor 2003* *MW (SD)*	*…2015* *MW (SD)*	*p*	*d*
K1: Mathematisch argumentieren	3,07 (.92)	3,11 (.80)	.71	.04
K2: Probleme mathematisch lösen	3,20 (.83)	3,25 (.76)	.60	.05
K3: Mathematisch modellieren	2,72 (.90)	3,39 (.78)	<.01**	.79
K4: Mathematische Darstellungen verwenden	3,40 (.84)	3,66 (.69)	<.01**	.33
K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen	3,85 (.95)	3,37 (.88)	<.01**	-.59
K6: Kommunizieren	2,80 (.94)	3,39 (.73)	<.01**	.70

Tabelle 2: Antwortmöglichkeiten „1= sehr gering", „2 = gering", „3 = mittel", „4 = stark", „5 = sehr stark"; t-Test für abhängige Stichproben p<0,05 signifikant und p<0,01 sehr signifikant; d=Effektgröße für abhängige Stichproben nach Cohen (1992)

Geplante Hauptstudie

Zur Beantwortung der Forschungsfragen wird derzeit ein Aufgabenklassifikationsschema entwickelt, welches es ermöglichen soll, den Implementationsgrad der allgemeinen mathematischen Kompetenzen in den Aufgaben von Mathematikschulbüchern der Sekundarstufe I zu ermitteln. Mit diesem Schema soll eine Auswahl von Aufgaben aus aktuellen Schulbüchern (T1) mit einer Auswahl von vor der Verabschiedung der Bildungsstandards im Jahr 2003 zugelassenen Schulbüchern (T2) verglichen werden. Damit sich differenzierte Aussagen sowohl im Hinblick auf Schulformunterschiede als auch über Schulstufenspezifika treffen lassen, werden Mathematikschulbücher jeden Schultyps der Sekundarstufe I (Hauptschule, Realschule, Gymnasium) der Jahrgangsstufen 6 und 9 analysiert. Insgesamt werden von jeder Klassenstufe und Schulart je ein Schulbuch der Verlage Klett, Schrödel, Westermann und Cornelsen vor (T1) bzw. nach (T2) der Einführung der Bildungsstandards betrachtet. Die Konzentration der Analysen liegt dabei auf Aufgaben aus den Themengebieten Algebra, Geometrie und Stochastik. Es ergibt sich eine Gesamtzahl von 48 Mathematikschulbüchern (vgl. Abbildung 1).

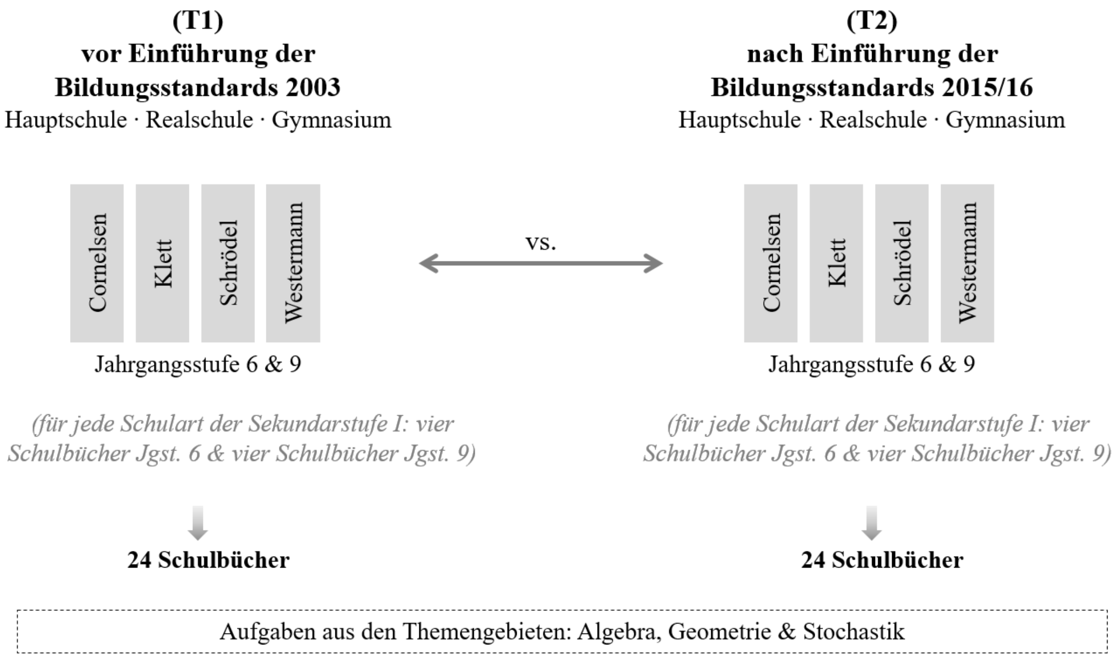


Abbildung 1: Design der Studie

Das Rating selbst wird von zwei (ehemaligen) Lehramtsstudierenden mit sehr guten Leistungen der Universität Regensburg durchgeführt. Die derzeitigen Aktivitäten liegen in der Ausschärfung der Kategoriengrenzen.

Literatur

Cohen, J. (1992). A power primer. *Psychological Bulletin 122*, 155-159.

Heinze, C. & Matthes, E. (2005). *Das Schulbuch zwischen Lehrplan und Unterrichtspraxis* (Beiträge zur historischen und systematischen Schulbuchforschung). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

KMK - Kultusministerkonferenz (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003.* München: Luchterhand.

KMK - Kultusministerkonferenz (2004a). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss. Beschluss vom 15.10.2004.*

KMK - Kultusministerkonferenz (2004b). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004.*

KMK - Kultusministerkonferenz (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss vom 18.10.2012.*

Rezat, S. (2011). Wozu verwenden Schüler ihre Mathematikschulbücher? Ein Vergleich von erwarteter und tatsächlicher Nutzung. *Journal für Mathematikdidaktik 32 (2*), 153–177.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. & Houang, R. T. (2002). *According to the book. Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Wiater, W. (2011). Aufgaben im Schulbuch. In E. Matthes & S. Schütze (Hrsg.), *Aufgaben im Schulbuch* (S. 31–42). Bad Heilbrunn: Julius Klinkhardt.

Stephanie SCHMID, Lüneburg

Begründen als Anforderung in Geometrieaufgaben der Grundschule

Eine eigene Analyse der gängigsten zehn Schulbücher zeigt auf, dass diese das Begründen zusammengefasst in Klasse 3 gerade einmal in 25 und in Klasse 4 in 49 Geometrieaufgaben deutlich einfordern (Indikatoren: begründ…, warum, weshalb, Grund). Demgegenüber wird bildungspolitisch „Begründungen suchen und nachvollziehen“ bereits für die Grundschule als Kompetenz eingefordert (KMK 2004, S. 8). Neben dieser Diskrepanz zwischen den geforderten und umgesetzten Aufgaben lässt sich noch ein weiteres Potential erkennen: So wird in der Fachdidaktik darauf hingewiesen, dass selbst Siebtklässlerinnen und Siebtklässler noch starke Probleme bei den argumentativen Kompetenzen haben (vgl. Reiss, Hellmich, Thomas 2002). Es heißt aber auch, dass schon 38% der Drittklässlerinnen und Drittklässler bei entsprechender Förderung durchaus in der Lage sind mathematische Besonderheiten individuell schriftlich zu begründen (vgl. Bezold 2009). Damit zeichnet sich nicht nur bei den Aufgaben, sondern auch auf Schülerebene ein bisher nicht ausgeschöpftes Potential für das Begründen in der Grundschule ab.

Begründen in Aufgaben

Brunner (2014) fasst den aktuellen Stand zum Begriffsverständnis zusammen, indem sie darauf hinweist, dass nicht nur die Begrifflichkeiten unterschiedlich verwendet, sondern auch das Verhältnis zwischen *Argumentieren*, *Begründen* und *Beweisen* sehr verschieden interpretiert wird. Je nach Perspektive reichen die Auffassungen bzgl. des Begründens bis hin zu Normen mathematischen Beweisens. Da eine solche Begründungsform für die Grundschule jedoch zu weit führt, bedarf es einer grundschulgerechten Definition. Für die eigene Arbeit wird *Begründen* daher als die Angabe eines Grunds oder mehrerer Gründe zu einer feststehenden Aussage definiert (vgl. Müller 1991; Spiegel, Selter 2003; Reiss, Ufer 2009; Bezold 2010; Fahse 2013; Neumann, Ruwisch, Beier 2014; Brunner 2014). *Feststehend* meint dabei, dass klar ist, welche Aussage begründet werden soll.

Für die Umsetzung des Begründens in Aufgaben bedeutet dies, dass eine Begründungsnotwendigkeit gegeben sein muss, die die Frage aufwirft, warum eine (feststehende) Aussage gilt. Die Schülerinnen und Schüler sind dann gefordert, nach einem oder mehreren passenden Gründen (bspw. entdeckte Zusammenhänge, bekannte Definitionen) zu suchen und diese im Kontext der Aufgabenantwort als Begründung für die entsprechende Aussage anzugeben. Daraus ergibt sich das nachfolgende Grundschema.

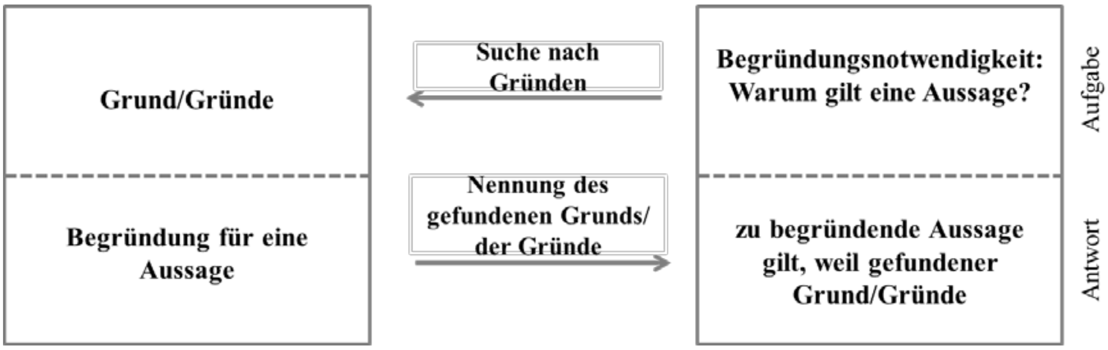


Abb. 1) Grundschema des Begründens in Aufgaben

Insbesondere bei der Begründungsnotwendigkeit liegen jedoch wesentliche Unterschiede in den Aufgabenstellungen und damit auch Anforderungen. Für die eigenen Aufgaben wird diesbezüglich zwischen *expliziten und impliziten Begründungsaufgaben* unterschieden. Mit *expliziten Begründungsaufgaben* werden solche Aufgaben bezeichnet, die eine klar formulierte Begründungsaufforderung beinhalten. Die Begründungsnotwendigkeit ist vorgegeben und die Begründung ist die Antwort selbst bzw. stellt einen festen Teil hiervon dar. *Implizite Begründungsaufgaben* dagegen meinen Aufgaben, die keine konkrete Begründungsaufforderung beinhalten, aber durchaus einen Begründungsgehalt und -anlass bieten. Das heißt bei diesen Aufgaben muss die Begründungsnotwendigkeit selbst erkannt werden und eine Antwort ist ohne Begründung zwar möglich, wird jedoch erst mit dieser nachvollziehbar.

Schriftliches geometrisches Begründen als Forschungsinteresse

Eine Betrachtung bisheriger Forschungsschwerpunkte zeigt, dass bzgl. des Begründens bereits mehrfach zu Schülertypen und -schemata ab der 7. Klasse geforscht wurde (vgl. Vollrath 1980; Harel, Sowder 1998; Fahse 2013). Auch Niveaustufen des Begründens wurden erfasst, jedoch primär für die 7., 8. Klasse oder in arithmetischen Aufgabenkontexten (vgl. Reiss, Hellmich, Thomas 2002; Bezold 2009; Neumann, Ruwisch, Beier 2014). Beim geometrischen Begründen wiederum zeigt sich ein deutlicher Fokus auf die Beweiskompetenz (vgl. Healy, Hoyles 1999; Reiss, Klieme, Heinze 2001; Reiss, Hellmich, Thomas 2002). Schaut man gezielt auf das Begründen im Grundschulkontext, liegt der Fokus auf interaktiven und mündlichen Prozessen im Unterricht (vgl. Schwarzkopf 2000; Krummheuer 2003; Fetzer 2007; Meyer 2007). Zusammenfassend kann daher festgestellt werden, dass die schriftliche Begründungskompetenz von Grundschülerinnen und Grundschülern bei Geometrieaufgaben noch eine weitgehende Forschungslücke darstellt. Die eigene Untersuchung widmet sich daher der übergeordneten Frage, welche schriftliche Begründungskompetenz Kinder der dritten und vierten Klasse bei Geometrieaufgaben zeigen. Diesbezüglich soll geklärt werden, welche Charakteristika schriftlicher geometrischer Begründungen sich identifizieren lassen und wie sich die Spannbreite der Begründungskompetenz in Niveaustufen beschreiben lässt.

Die Aufgabenkonzeption für die Studie

Im Sinne der angestrebten Erfassung der Spannbreite und Charakteristika geometrischen Begründens wurden die Aufgabenanforderungen gezielt dahingehend variiert, dass sowohl zwei- als auch dreidimensionale und sowohl implizite als auch explizite Aufgabenformate angelegt wurden. Zusätzlich wurde die Anforderung an alle Aufgaben gestellt, möglichst leistungsdifferenzierend bei der Begründung zu sein und daher einen Strukturgehalt zu besitzen, der anstelle einer Wissensabfrage eines gleichen zu nennenden Grunds eine Spannbreite verschiedener bzw. unterschiedlich tiefgehender Begründungen ermöglicht. Außerdem wurde darauf geachtet, dass die Begründungen nicht nur verbal, sondern, als geometrisch charakteristische Hilfestellung, auch visuell dargestellt werden können. Vor dem Hintergrund dieser Anforderungen ergaben sich vier grundlegende und parallel zueinander angelegte Aufgabenkategorien mit je drei Aufgabenblättern und zwölf Teilaufgaben für die geplante Studie.

parallel aufgebaut	**Muster & Strukturen** (2-dimensional)		**Raumvorstellung** (3-dimensional)	
	Implizit	**Explizit**	**Implizit**	**Explizit**
jeweils angelegte Vielfalt	verschiedene zu begründende Aussagenelemente			
	verschiedene (thematisch übergeordnete) Begründungsanlässe			
	verschiedene inhaltliche Anforderungen in den Themenbereichen (Mustertypen, Raumvorstellungskomponenten usw.)			

Abb. 2) Parallel angelegte Aufgabenkategorien mit vielfältigen Anforderungen

Innerhalb jeder der vier Kategorien wurde darauf geachtet, vielfältige Anforderungen zu stellen, um möglichst vielfältige Begründungen abzufragen. Gängige, geforderte Begründungsanlässe der Grundschule können dabei einerseits entdeckte Zusammenhänge, Auffälligkeiten und Gesetzmäßigkeiten, aber auch gefundene Lösungen/Lösungswege sein. Damit werden auf der einen Seite inhaltliche Aussagen zu vorgegebenen Fällen/Beispielen betrachtet und begründet, auf der anderen Seite Lösungen als passende und zu begründende Fälle zu einer inhaltlichen Aussage.

Literatur

Bezold, A. (2009). Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote. Eine Studie im Mathematikunterricht der Grundschule. Hamburg: Kovač (Schriftenreihe Didaktik in Forschung und Praxis, 47).

Brunner, E. (2014). Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum (Mathematik im Fokus).

Fahse, C. (2013). Argumentationstypen. In: G. Greefrath et al. (Hg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Münster: WTM, Verl. für wiss. Texte u. Medien, S. 300–303.

Fetzer, M. (2007). Interaktion am Werk. Eine Interaktionstheorie fachlichen Lernens, entwickelt am Beispiel von Schreibanlässen im Mathematikunterricht der Grundschule. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Harel, G.; Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. In: *CBM Issues in Mathematics Education* (7), S. 234–283.

Healy, L.; Hoyles, C. (1999). Student's performance in proving: competence or curriculum? In: I. Schwank (Hg.): European Research in Mathematics Education I. Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education Vol. 1. Osnabrück, S. 153–167.

KMK (2005). Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4).

Krummheuer, G. (2003). Argumentationsanalyse in der mathematikdidaktischen Unterrichtsforschung. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 35 (6), S. 247–256.

Meyer, M. (2007). Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument. Hildesheim, Berlin: Franzbecker (Texte zur mathematischen Forschung und Lehre, 52).

Müller, H. (1991). Grundtypen des Begründens im Mathematikunterricht. In: *Mathematik in der Schule* 29 (11), S. 737–745.

Neumann, A.; Beier, F.; Ruwisch, S. (2014). Schriftliches Begründen im Mathematikunterricht. In: *Zeitschrift für Grundschulforschung* 7 (1), S. 20–32.

Reiss, K.; Hellmich, F.; Thomas, J. (2002). Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentationen und Beweise im Mathematikunterricht. In: M. Prenzel und J. Doll (Hg.): Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen. *Zeitschrift für Pädagogik* (45. Beiheft). Weinheim [u.a.]: Beltz, S. 51–64.

Reiss, K.; Klieme, E.; Heinze, A. (2001). Prerequisites for the understanding of proofs in the geometry classroom. In: M. van den Heuvel-Panhuizen (Hg.): Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bd. 4. Utrecht, The Netherlands, S. 97–104.

Reiss, K.; Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Argumentieren, Begründen und Beweisen. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 111 (4), S. 155–177.

Schwarzkopf, R. (2000). Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und Fallstudien. Hildesheim [u.a.]: Franzbecker (Texte zur mathematischen Forschung und Lehre, 10).

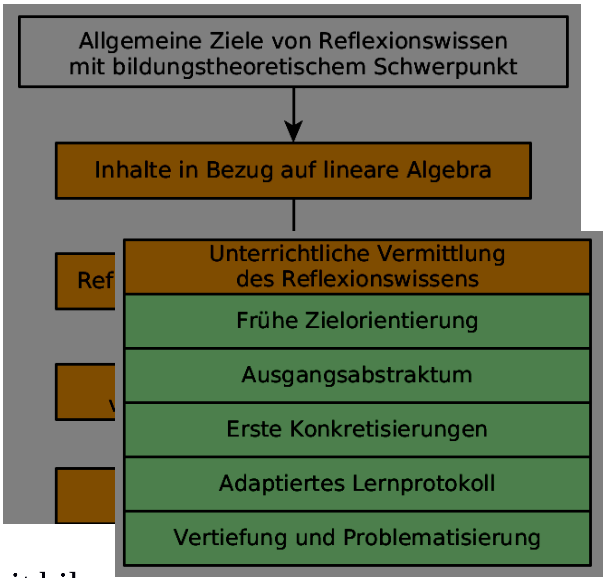
Spiegel, H.; Selter, C. (2003). Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten. 1. Aufl. Seelze-Velber: Kallmeyer (Wie Kinder lernen).

Vollrath, H.-J. (1980). Eine Thematisierung des Argumentierens in der Hauptschule. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 1 (1), S. 28–41.

Oliver SCHMITT, TU Darmstadt

Konzept zur Vermittlung von Reflexionswissen aus tätigkeitstheoretischer Perspektive

Im Mathematikunterricht, insbesondere in der Sek. II mit dem Ziel einer wissenschaftspropädeutischen Bildung, soll nicht nur fachliches Wissen vermittelt werden, sondern darüber hinaus auch Wissen über das Fach, dessen gesellschaftliche Bedeutung und Wirkung. Im Vortrag wurden verschiedene Ansätze, die ein solches Reflexionswissen aus bildungstheoretischer Perspektive anstreben, untersucht und inhaltlich zusammengestellt (z.B. Fischer, 2001 und Skovsmose, 1994). Als wesentliche Ziele wurden herausgearbeitet: die Reflexion des Mensch-Welt-Verhältnisses in Hinblick auf die spezielle Perspektive der Disziplin Mathematik in Abgrenzung zu anderen Disziplinen, die Explizierung der oft impliziten Wirkung von Mathematik auf die Welt sowie die Förderung von Kommunikations- und Entscheidungskompetenz in Hinblick auf die Auseinandersetzung mit mathematikhaltigen Expertisen. Neben Inhalt und Funktion ist für eine unterrichtliche Umsetzung auch eine wissens- und lernpsychologische Charakterisierung von Reflexionswissen wichtig. Als theoretischer Hintergrund wurde die Tätigkeitstheorie in der Rezeption von Giest und Lompscher verwendet (Giest & Lompscher, 2006). Reflexionswissen wird hier insgesamt als explizites, deklaratives Wissen über das Fach verstanden, das relevant zur Bildung einer Orientierungsgrundlage (Schmitt, 2013) in Reflexionshandlungen ist, gleichzeitig aber auch selbst ein Ergebnis von individuellen oder kollektiven Reflexionshandlungen darstellt und im Unterricht explizit zu behandeln ist. In Hinblick auf eine explizite Thematisierung wurden nach folgendem systematischen Vorgehen (siehe Abbildung rechts) Bausteine für insgesamt vier Unterrichtseinheiten im Rahmen der linearen Algebra entwickelt.



Bestimmung von Inhalten für die lineare Algebra

Mit Blick auf die genannten allgemeinen Ziele von Reflexionswissen mit bildungstheoretischem Schwerpunkt wurde untersucht, welche Charakteristika der Disziplin Mathematik und ihrer Anwendung im Rahmen der linearen Algebra thematisiert werden können. Hierfür wurden fachdidaktische Ausarbeitungen zu fundamentalen Ideen, explizite Charakterisierungen in schulischen und universitären Lehrbüchern, mathematikhistorische Einordnungen der Algebra sowie Arbeiten zu typischen Denkhandlungen betrachtet. Nach diesen Analysen wurden Ausarbeitungen zu den folgenden Themen erstellt: Algorithmisierung am Beispiel des Gauß-Algorithmus, Formalisierung und analytische Methode in der analytischen Geometrie, Phasen des Modellierens ausgehend von Anwendungen von Übergangsmatrizen sowie Strukturorientierung und Argumentieren im Rahmen der Einführung komplexer Zahlen. Im Folgenden werden die einzelnen Schritte zur Erarbeitung von Unterrichtsbausteinen anhand des Themas Algorithmus exemplifiziert.

Reflexionshandlungen für einen bestimmten Inhalt

Der Gauß-Algorithmus stellt für die Lernenden in der Sek. II kein Mittel dar, um bisher unlösbare Probleme bearbeiten zu können, da sie lineare Gleichungssysteme bereits etwa mit dem Einsetzungsverfahren lösen können. Das wesentlich Neue an diesem Gegenstand ist die algorithmische Formulierung, durch die zum einen eine Lösungsgarantie gegeben ist, zum anderen aber auch durch die präzise und klar determinierte Festlegung der einzelnen Schritte eine Implementierung auf Computern möglich wird.

Wenn, wie hier vorgeschlagen, der Algorithmenbegriff ins Zentrum der Unterrichtseinheit gestellt wird, so kann nicht nur dieser Vorteil klar herausgearbeitet werden, sondern es können auch Reflexionen über den Algorithmus als ein Charakteristikum mathematischen Arbeitens, sowie Vor- und Nachteile algorithmischer Formulierungen, auch bezogen auf außermathematische Probleme, angeregt werden. Unter Verwendung der Begrifflichkeiten komplexer Denkhandlungen (Kossakowski & Lompscher, 1977) werden dabei unter anderen die beiden folgenden Reflexionshandlungen als Ziele der Unterrichtseinheit angegeben:

- Eigenschaften eines Algorithmus konkreten Verfahrensweisen zuordnen können bzw. dagegen abgrenzen
- Entscheiden können, inwiefern ein algorithmisches Vorgehen einem Problem gerecht wird oder werden kann

Reflexionswissen für verschiedene Orientierungstypen

Die Lernenden können unterschiedliche Orientierungsgrundlagen in Hinblick auf Anforderungen entwickeln, in denen die genannten Reflexionshandlungen verlangt sind. Diese Orientierungsgrundlagen bilden sich abhängig von den dabei herangezogenen Kenntnissen aus. Ohne fundierte Kenntnisse in Bezug auf den Algorithmenbegriff würden Lernende etwa bei der Frage, ob sie bei der Suche nach einem passenden Partner auf einen Algorithmus vertrauen würden, eine sogenannte Probierorientierung ausbilden, in der sie probeweise bestimmte Merkmale, die sie mit Algorithmen in ihrer Alltagsvorstellung in Verbindung bringen, heranziehen, um eine Entscheidung zu treffen. Dabei kann eventuell eine gute Argumentation entstehen, häufiger beziehen sie sich aber vermutlich nur auf äußerliche oder unpassende Merkmale. Die *Kenntnis von beispielhaften Algorithmen und deren besonderen Eigenschaften,* sowie möglicher *beispielhafter kritischer Fragen und Aspekte* zu einer algorithmischen Umsetzung ermöglicht es Lernenden dagegen im Vergleich mit den ihnen bekannten Beispielen, auf Basis einer sogenannten Musterorientierung eine Entscheidung zu treffen. Dies gelingt zumindest solange, wie die bekannten Beispiele und die dabei betrachteten kritischen Aspekte dem Problem der Partnersuche nicht zu unähnlich sind. Sind den Lernenden dagegen der abstrakte *Begriff des Algorithmus,* seine *charakterisierenden Eigenschaften* und *damit in Verbindung stehende Prinzipien* wie *Automatisierung* bekannt, können sie auf der Basis einer sogenannten Feldorientierung selbständig diese abstrakten Eigenschaften und kritischen Aspekte auf das Problem, die Partnersuche algorithmisch zu beschreiben, übertragen, um zu einer Entscheidung zu kommen. Bei einer solchen Entscheidungsfrage gibt es allerdings keine sachlich unumstrittene korrekte Antwort. Auf der Basis einer sogenannten Problemorientierung (Schmitt, 2013) beziehen Lernende ihre Entscheidung bewusst auf eigene Wertvorstellungen und können sie so mit anderen möglichen Positionen in Beziehung setzen. Für eine solche eigene Positionierung ist die *Kenntnis gesellschaftlich vertretener kritischer Positionierungen zu Auswirkungen, Möglichkeiten und Grenzen von Algorithmen* hilfreich.

Unterrichtliche Vermittlung des Reflexionswissens

Die für die Vermittlung der genannten Kenntnisse erarbeiteten Unterrichtsbausteine orientieren sich an einer Rezeption der sogenannten Lehrstrategie des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten nach Dawydow (Giest & Lompscher, 2006, S. 220ff). Dabei wird gemeinsam mit den Lernenden bereits zu Beginn des Lernprozesses eine möglichst weittragende Zielorientierung entwickelt. In diesem Fall kann die Einheit zum Gauß-Algorithmus etwa mit der Betrachtung einiger Zeitungsartikel zum Thema des Algorithmus eingeleitet werden. Diese sind auf Grund der aktuellen Bedeutung der Thematik zahlreich, die Überschriften fragen etwa nach der Macht der Algorithmen oder beruhigen, dass keine Angst vor Algorithmen nötig sei. Davon ausgehend werden Vorstellungen der Lernenden über den Begriff zusammengestellt und diskutiert.

Bei der Erarbeitung des Gauß-Algorithmus wird nun genau dieser Aspekt, warum es sich um einen Algorithmus handelt, fokussiert und dabei das Ausgangsabstraktum erarbeitet, das eine abstrakte begriffliche Definition und eine ikonische Darstellung in Form eines Flussdiagramms enthält. Zur ersten Konkretisierung dieses Ausgangsabstraktums werden im weiteren Verlauf bekannte Verfahren aus der Sek. I aber auch die Beschreibung alltäglicher Abläufe in Hinblick auf den Algorithmusbegriff untersucht.

Um dem Problem zu begegnen, dass Reflexionswissen jenseits fachlicher Gegenstände von den Lernenden oft nicht als Lerninhalt wahrgenommen wird (Kröpfl, 2007, S. 283), wurde die Methode des Lernprotokolls (Bruder, 2007) für Inhalte des Reflexionswissens adaptiert. Dabei werden Lernzieltransparenz und ein erstes Grundverständnis durch Fragen nach dem Ziel der Einheit, Aufgaben zum Identifizieren und Realisieren der zentralen Begriffe sowie Fragen nach Sinn- und Sachbezügen sichergestellt.

Eine Vertiefung des Begriffs kann anschließend durch eine nun begrifflich fundierte, ausführlichere Diskussion der Zeitungsartikel, einen Vergleich unterschiedlicher Motive der Algorithmisierung in verschiedenen historischen Kontexten oder den Vergleich von scheinbar widersprüchlichen Einschätzungen der Bedeutung des Gauß-Algorithmus in Schulbüchern (vgl. Schmitt, 2012) vorgenommen werden.

Literatur

Bruder, R. (2007). Lerngelegenheiten für Reflexionen im Mathematikunterricht. In A. B.-A. Andrea Peter-Koop (Hrsg.), Mathematische Bildung - Mathematische Leistung (S. 305–316). Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.

Fischer, R. (2001): Höhere Allgemeinbildung. URL: http://imst3plus.uni-klu.ac.at/materialien/2001/fischer190901.pdf [Stand: 08.03.2016].

Giest, H. & Lompscher, J. (2006). *Lerntätigkeit - Lernen aus kultur-historischer Perspektive*. Berlin: Lehmanns Media.

Kröpfl, B. (2007). Höhere mathematische Allgemeinbildung am Beispiel von Funktionen. München, Wien: Profil Verlag.

Schmitt, O. (2012). Grundwissen als Voraussetzung für Reflexionen – am Beispiel des Gaußalgorithmus. In (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (S.). Münster: WTM.

Schmitt, O. (2013). Tätigkeitstheoretischer Zugang zu Grundwissen und Grundkönnen.In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 894–897). Münster: WTM.

Skovsmose, O. (1994): Towards a critical Mathematics Education. In: Educational Studies in Mathematics, 27, 35-57.

Silvia SCHÖNEBURG, Leipzig

Wer spielt, gewinnt und lernt – Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens durch den Einsatz von Lernspielen

Sich spielerisch Wissen anzueignen, ist eine ganz natürliche Form des Lernens. Dabei können Erfahrungen gesammelt und Entdeckungen gemacht werden. Sozial-kommunikative und affektive Kompetenzen werden beim Spielen ebenso gestärkt wie die kognitiven Kompetenzen. Das Spielen an sich trägt auch zur Entwicklung der eigenen Persönlichkeit bei. Im Spielprozess muss der Spielende Entscheidungen treffen, Verantwortung dafür übernehmen und die Konsequenzen dieser Entscheidung tragen. Auch Fähigkeiten wie Geduld, Ausdauer, Konzentrationsfähigkeit und nicht zuletzt das Einhalten von Regeln sind stets gefragt.

Was macht eine Handlung aber zu einem Spiel? Ob jemand eine Aktivität als Spiel wahrnimmt, hängt von verschiedenen Faktoren ab, die nebenstehend aufgeführt sind. Je mehr dieser durchaus subjektiven Kriterien erfüllt sind, umso größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler eine Aktivität als Spiel wahrnimmt (Vgl. Schöneburg, S., 2014, S. 2f.).

Wer spielt, erlebt…

- klare, verständliche Regeln
- Raum für eigene Entscheidungen
- unüblicher Handlungsablauf zum „normalen“ Unterrichtsalltag
- Möglichkeiten für Erfolgserlebnisse
- Freisein von Bewertungsdruck
- Möglichkeit der Unterhaltung und Entspannung
- Spannungsmomente

Beim Einsatz von Spielen im Unterricht ist es daher essentiell darüber nachzudenken, ob diesen Kriterien Rechnung getragen werden kann. In diesem Beitrag fokussieren wir auf die Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens durch Lernspiele und diskutieren dies an drei Beispielen.

Triovision

Die Regeln von Triovision sind klar und leicht zu verstehen. Ziel ist es, die Anordnung der Spielsteine, die auf einer der Karten zu sehen ist, auf dem Spielplan nachzubilden. Dazu darf genau ein Spielstein auf ein beliebiges freies Feld des Spielplans versetzt werden. Glaubt ein Spieler das zu schaffen, ruft er „Stopp!“ und versetzt eine Spielfigur. Ist dies korrekt, darf er die Karte behalten. Eine weitere Spielkarte wird aufgedeckt. Wurde es nicht geschafft, wird die Spielfigur wieder zurückgestellt und die Karte wieder an ihren Platz gelegt.

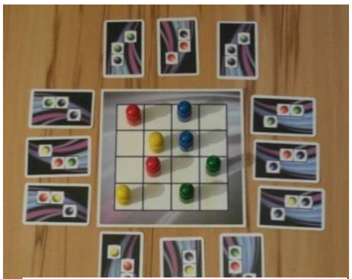


Abb. 6: Triovision (Foto: S. Schöneburg)

Es folgen keinerlei negative Konsequenzen, so dass frei von Bewertungsdruck gespielt werden kann. Einige Anordnungen auf den Karten lassen sich ohne Weiteres auf dem Spielplan sofort nachvollziehen, einige liegen mit etwas Glück bereits da, sodass jeder die Chance hat, zu Erfolgserlebnissen zu kommen. Welche Strategie den größten Erfolg erzielt, muss jeder für sich entscheiden. Die Vorgehensweise liegt dabei im Ermessen des Spielers. Das Spiel erfordert eine hohe Konzentration, denn nur wer am Ende die meisten Karten hat, hat gewonnen. Da nicht reihum gespielt wird, muss man ständig aktiv sein und mitdenken, wodurch auch ein gewisser Spannungsbogen und Wettbewerb unter allen Teilnehmenden aufgebaut wird. Für Unterhaltung ist auf jeden Fall gesorgt und wer eine kleine Pause braucht, schaltet kurz ab, um dann wieder hochkonzentriert ins Spiel einzusteigen, womit auch Momente der Entspannung gegeben sind.

Der Einsatz des Spiels im Mathematikunterricht hat gezeigt, dass Triovision auch wirklich als Spiel wahrgenommen wird. Neben Konzentration, Entscheidungsbereitschaft und Reaktion wird insbesondere das räumliche Vorstellungsvermögen geschult.

Räumliches Vorstellungsvermögen, d.h. die Fähigkeit, räumliche Zusammenhänge visuell zu erfassen und mit ihnen gedanklich agieren zu können, ist im Mathematik-, insbesondere im Geometrieunterricht, und natürlich auch im Alltag wichtig und muss erlernt, trainiert und gefestigt werden.

Gemäß Thurstone zählt das räumliche Vorstellungsvermögen zu den sieben Grundfaktoren menschlicher Intelligenz. Um die Vielschichtigkeit und Komplexität des Begriffes zu erfassen, ist eine Auseinandersetzung mit den einzelnen Teilkomponenten unerlässlich. Über deren Art und Anzahl besteht jedoch innerhalb der Psychologie kaum Einigkeit (Vgl. Franke, M.; Reinhold, S., 2016, S. 63ff., Maier P. H., 1999, S. 31ff.).

Nachfolgend soll das Modell von Maier zugrunde gelegt werden, das die 3-Faktoren-Hypothese nach Thurstone und das Kategoriensystem nach Linn & Petersen zusammenfasst. Den Komponenten Veranschaulichung, räumliche Beziehungen und räumliche Orientierung wird dabei eine besondere Bedeutung zugewiesen (Vgl. Maier P. H., 1999, S. 51).

Die ***räumliche Veranschaulichung*** umfasst die Fähigkeit, sich gedanklich Veränderungen innerhalb von Objekten vorzustellen. Damit sind Aktivitäten wie Verschieben, Falten und Schneiden von räumlichen Objekten oder Objektteilen verbunden. Unter ***räumlicher Beziehung*** wird hingegen die Fähigkeit, räumliche Konfigurationen von Objekten oder Teilen von ihnen zu erfassen, verstanden. Die ***räumliche Orientierung*** beinhaltet die Fähigkeit, den Standort der eigenen Person, also die Perspektive unter der etwas betrachtet wird, zu wechseln, während bei der ***mentalen Rotation*** die Fähigkeit, sich Rotationen von zwei- oder dreidimensionalen Objekten vorstellen zu können, im Vordergrund steht. Bei der ***räumlichen Wahrnehmung*** geht es vor allem darum, räumliche Beziehungen in Bezug auf den eigenen Körper erfassen zu können, d.h. die Senkrechte und Waagrechte identifizieren zu können.

Bei dem Spiel Triovision steht insbesondere die Förderung der Komponenten räumliche Beziehung und Orientierung bzw. die mentale Rotation im Vordergrund. Es muss die Anordnung der Spielsteine sowohl auf den Karten als auch auf dem Spielplan wahrgenommen werden, um einschätzen zu können, ob das auf der Karte abgebildete Muster durch das Versetzen von maximal einem Spielstein erreicht werden kann. Dabei muss man als Spieler entweder mental den eigenen Standort wechseln, um einen „besseren Blick" zu bekommen oder die Karte bzw. die Spielsteine auf dem Spielplan in Gedanken rotieren lassen.

Potz Klotz

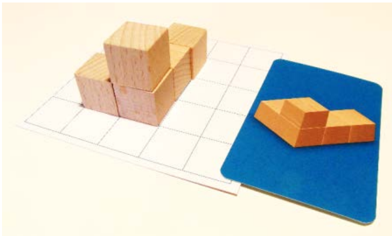


Abb. 7: Potz Klotz (Foto: S. Schöneburg)

Den Ausgangspunkt von Potz Klotz bilden fünf Würfel, aus denen ein Würfelgebäude errichtet werden soll. Jeder Spieler hat fünf Handkarten, die andere Würfelgebäude zeigen und die durch das Umsetzen nur eines Würfels nachgebaut werden sollen. Es gilt: Einmal berührt, geführt.

Die Regeln sind klar und leicht verständlich. Auch Phasen der Entspannung sind gegeben, wenn z.B. ein anderer Spieler am Zug ist. Es kann frei entschieden werden, welche der Karten man zuerst erfüllen möchte. Manchmal sind auch mehrere Möglichkeiten denkbar. Spannung ist bis zuletzt gegeben: Wem gelingt es als Erster seine Handkarten abzulegen?

Bei dem Spiel werden alle fünf Komponenten der räumlich-visuellen Qualifikation nach Maier bedacht. Die räumlichen Beziehungen kommen zum Tragen, wenn die Anordnung der Würfel im Würfelgebäude bzgl. der Spielkarten betrachtet werden, die räumliche Veranschaulichung bei Überlegungen, wie ein Würfel aus dem Gesamtgebilde verändert werden muss, um das neue Würfelgebäude zu erhalten. Je nach Sichtweise wechselt der Spieler dabei seine Betrachtungsposition oder lässt das Würfelgebäude bzw. die Karte mental rotieren. Auch die räumliche Beziehung in Bezug auf den eigenen Körper, was ist in einer Ebene, was ist senkrecht, was ist waagerecht, muss erfasst werden.

Cubidus

Abb. 8: Cubidus entwickelt von Tabea Treichel (Foto: S. Schöneburg)

Ziel von Cubidus, welches ebenfalls von Schülern als Spiel wahrgenommen wurde, ist es, auf der Grundlage verschiedener zweidimensionaler Ansichten ein dreidimensionales Würfelgebäude zu errichten. Zur Verfügung stehen 27 Würfel, bei denen die gegenüberliegenden Seiten gleich eingefärbt sind sowie ein 3 x 3 Felder großes Spielbrett und Aktionskarten, die das jeweils zu errichtende Würfelgebäude in verschiedenen Ansichten zeigen (Vgl. Schöneburg, S., Treichel, T., 2014, S. 32-34). Im Vordergrund stehen das Erkennen und Herstellen von Raum-Lage Beziehungen geometrischer Objekte, weswegen der Förderung der Komponente „räumliche Beziehungen“ im Rahmen dieses Spiels eine entscheidende Rolle zukommt. Da beliebig probiert, geschoben und gedreht werden darf, spielen die Aspekte „mentale Rotation“ und „räumliche Orientierung“ eine eher untergeordnete Rolle. Wichtig ist es hingegen zu erfassen, welche Würfel sich in einer Ebene befinden. Vorausschauendes Denken wird gleichermaßen gefordert wie gefördert.

In der Erprobung des Spiels haben sich unterschiedliche Herangehensweisen feststellen lassen. Einige beginnen mit der Draufsicht und bauen dann darunter weiter, andere beginnen mit einer Seitenansicht und schieben die entsprechenden Würfel nach und nach in die richtige Position.

Da mit der Zeit die Schüler nicht nur im Spiel, sondern auch in der verbalen Beschreibung von Spielsituationen zunehmend souveräner wurden, konnte sich Cubidus – wie die beiden zuvor betrachteten Spiele – für den Einsatz zur Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens empfehlen.

Literatur

Franke, M.; Reinhold, S. (2016). Didaktik der Geometrie. In der Grundschule. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Maier, P. H. (1999). Räumliches Vorstellungsvermögen. Donauwörth: Auer.

Schöneburg, S. (2014). Wer spielt, gewinnt und lernt. In: Schöneburg, S.; Etzold, H.; Petzschler, I: Mit Mathe spielen(d) lernen. Mathematik lehren 186, S. 2-5.

Schöneburg, S.; Treichel, T. (2014). Cubidus & Co. Das räumliche Vorstellungsvermögen spielerisch schulen. In: Schöneburg, S.; Etzold, H.; Petzschler, I: Mit Mathe spielen(d) lernen. Mathematik lehren 186, S. 32-34.

Stephanie SCHULER, Gerald WITTMANN, Freiburg

Entwicklung von Bildvignetten zur Erhebung mathematikdidaktischer Überzeugungen von Lehrkräften

Überzeugungen werden neben dem Professionswissen als einer der zentralen Aspekte professioneller Kompetenz erachtet. Gleichzeitig sind sie aber schwierig zu erheben, da sie aus den Äußerungen von Personen – mittels Befragung – oder ihrem Handeln – mittels Beobachtung – abgeleitet werden müssen (Pajares, 1992). Auftretende Inkonsistenzen zwischen den durch Befragung erhobenen Überzeugungen zum Lehren und Lernen von Mathematik und dem beobachteten Handeln von Lehrkräften werden häufig auf die Erhebung zurückgeführt, die vielfach nicht situiert erfolgt sowie über vorgegebene Aussagen, die mittels Likert-Skalen eingeschätzt werden sollen (Philipp, 2007). Bei angehenden Lehrkräften sind diese Inkonsistenzen größer als bei erfahrenen (Kleickmann, 2008), womit die Erhebung von Überzeugungen bei Studierenden hinsichtlich der Handlungsrelevanz besonders kritisch zu sein scheint.

Untersuchungsfrage und -design

Es stellt sich also die forschungsmethodische Frage, in welcher Weise die Art und Weise, wie Überzeugungen zum Lehren und Lernen von Mathematik erhoben werden, das Ergebnis beeinflusst. Konkret soll am Beispiel zukünftiger KindheitspädagogInnen und GrundschullehrerInnen untersucht werden, ob ein offenes Antwortformat andere Aspekte der Überzeugungen zum Lehren und Lernen von Mathematik zutage fördert als ein geschlossenes. Hierzu wurden in zwei aufeinander aufbauenden Studien jeweils dieselben sieben Bildvignetten in zwei unterschiedlich angelegten schriftlichen Befragungen in vergleichbaren Populationen von Studierenden der Kindheitspädagogik und des Grundschullehramts eingesetzt. Die Bildvignetten beziehen sich jeweils auf Situationen des Mathematiklernens im Übergang vom Kindergarten in die Grundschule und zielen auf die Lernbegleitung.

In Teilstudie 1 wurden Vignetten mit einem offenen Antwortformat verwendet (Abb. 1). Die ProbandInnen sollten ihr intendiertes Handeln in freier Weise aufschreiben (Testdauer ca. 30 min). TeilnehmerInnen waren 129 Studierende in einem kindheitspädagogischen Bachelorstudiengang und 57 Studierende des Grundschullehramts.

Auf Basis der in Teilstudie 1 gewonnenen Freitextantworten wurden Items mit geschlossenem Antwortformat (Likert-Skalen) entwickelt (Abb. 2). In Teilstudie 2 sollten die Befragten ihre Zustimmung zu den vorgegebenen Antworten auf einer Likert-Skala von 0 (Reaktion ist überhaupt nicht passend) bis 3 (Reaktion ist absolut passend) ausdrücken (Testdauer ca. 30 min). Pro Vignette wurden 8 mögliche Antworten vorgegeben. Es nahmen 224

Studierende in einem kindheitspädagogischen Bachelorstudiengang und 217 Studierende des Grundschullehramts teil.

Die Erzieherin hat mehreren Kindern die Aufgabe gestellt, möglichst viele verschiedene Türme aus je einem grünen, einem gelben und einem roten Duplo-Stein zu bauen. Robin (6 Jahre) hat drei verschiedene Türme gefunden und ist seit einer Weile auf der Suche nach einem weiteren Turm.

Wie reagieren Sie auf Robins Äußerung?

Abbildung 1: Bildvignette mit offenem Antwortformat

		3	2	1	0
	Die Erzieherin schildert ihre Reaktion wie unten beschrieben. Bitte schätzen Sie die Reaktion ein. Sie ist ...	absolut passend	eher passend	eher nicht passend	überhaupt nicht passend
1	Ich frage Robin, ob er sich sicher ist.	☐	☐	☐	☐
2	Ich zeige Robin eine weitere Möglichkeit.	☐	☐	☐	☐
3	Ich lobe ihn, da er bereits 3 Türme gefunden hat. Dies halte ich in seinem Alter für durchaus ausreichend.	☐	☐	☐	☐

Abbildung 2: Zur Bildvignette entwickelte vorgegebene Antworten

Datenauswertung und Untersuchungsergebnisse

In Teilstudie 1 wurden die Freitextantworten nach der dominierenden Art des Handelns kodiert. Als theoretischer Rahmen dienten die Konzepte Konstruktionsorientierung, Transmissionsorientierung und Selbstbildung (Staub & Stern, 2002; Schäfer, 1995). Es zeigten sich drei Formen des intendierten Handelns, die nicht vollständig in den theoretischen Konstrukten aufgehen und daher nach der Art des Handelns benannt wurden: *Begleitung* (Beispiel: „Wie kommst du darauf, dass du alle gefunden hast?“), *Anleitung* (Beispiel: „Ich würde damit anfangen, ihn zuerst einen gelben Stein unten legen zu lassen und damit alle Kombinationen mit ‚gelb unten‘ durchgehen.“) und *Keine Intervention* (Beispiel: „Ich störe ihn nicht in seinem Forscherdrang.“). Jede Antwort wurde von zwei fachkundigen Personen unabhängig voneinander kodiert; im Falle von Abweichungen wurde eine Einigung erzielt. Die Intercoderreliabilität (gemessen als Anteil der übereinstimmenden

Antworten) ist zufriedenstellend ($r_{Ü} = 0.8$). In Teilstudie 2 erfolgte die Skalenbildung über eine exploratorische Faktorenanalyse, die eine Drei-Faktoren-Lösung lieferte (scree test).

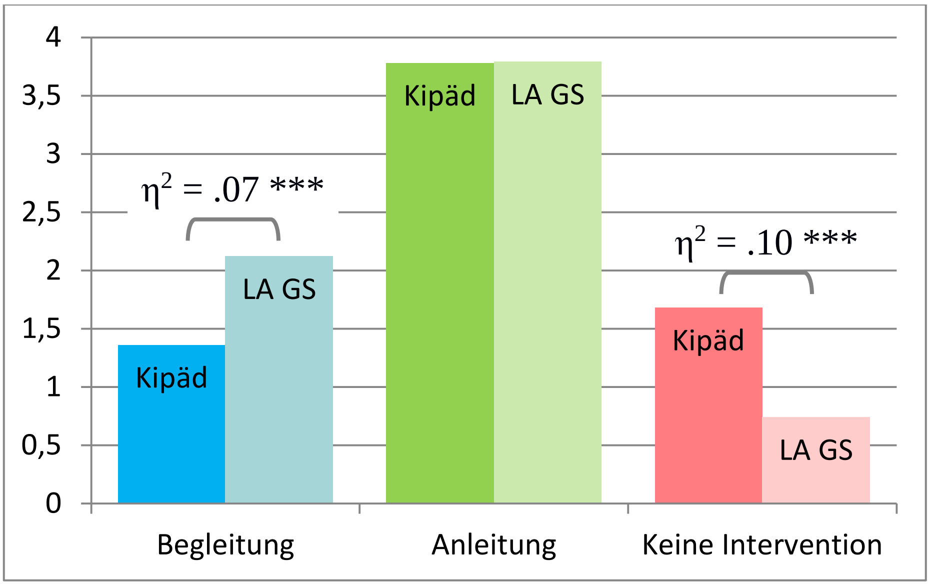


Abbildung 3: Ergebnisse von Teilstudie 1 (offenes Antwortformat)

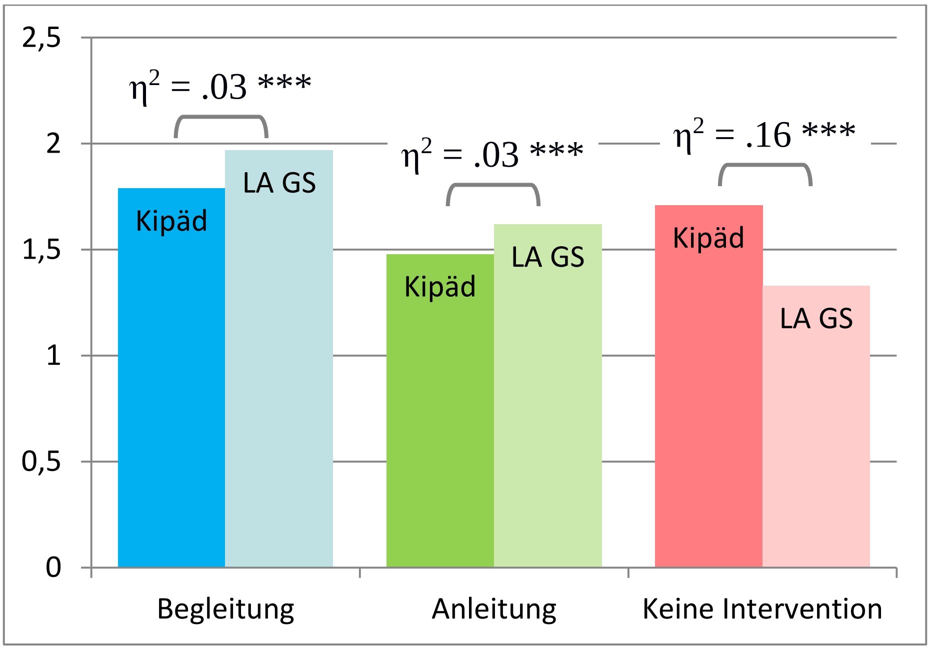


Abbildung 4: Ergebnisse von Teilstudie 2 (Likert-Skalen)

In Teilstudie 1 (Freitextantworten) zeigt sich Anleitung als dominierende Art des intendierten Handelns über die sieben Bildvignetten hinweg, während Begleitung und Keine Intervention weniger häufig auftreten (Abb. 3). Bezüglich Begleitung und Keine Intervention sind die Gruppenunterschiede signifikant.

In Teilstudie 2 (Einschätzung vorgegebener Reaktionen mittels Likert-Skalen von 0 bis 3) zeigt sich eine etwas stärkere Zustimmung zu Begleitung als zu Anleitung, wenngleich beide Werte im neutralen Bereich liegen (Abb. 4, nächste Seite). Bezüglich aller drei Kategorien treten signifikante Gruppenunterschiede auf.

Diskussion der Ergebnisse

Beide Antwortformate decken grundlegende Gruppenunterschiede zwischen angehenden Lehrkräften und KindheitspädagogInnen auf. Allerdings ändert sich die Stärke und Reihenfolge der Ausprägungen innerhalb der Gruppen je nach verwendeter Erhebungsmethode: Müssen die Studierenden das intendierte Handeln in freier Weise selbst formulieren, fokussieren sie auf die Korrektur von Fehlern und das Erreichen der richtigen Lösung, während diagnostische Aspekte eine untergeordnete Rolle spielen. Sollen sie jedoch vorgegebene Reaktionen bewerten, zeigt sich ein anderes Bild. Die Studie bestätigt damit, dass unterschiedliche Erhebungsmethoden auch unterschiedliche Aspekte von Überzeugungen zu Tage fördern.

Literatur

Kleickmann, T. (2008). *Zusammenhänge fachspezifischer Vorstellungen von Grundschullehrkräften zum Lehren und Lernen mit Fortschritten von Schülerinnen und Schülern im konzeptuellen naturwissenschaftlichen Verständnis.* Dissertation: Universität Münster.

Pajares, F. M. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307–332.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. K. Lester (Hrsg.): *Second handbook of research on mathematics teaching and learning.* Charlotte, NC: Information Age Pub, 257–315.

Schäfer, G. E. (1995). *Bildungsprozesse im Kindesalter : Selbstbildung, Erfahrung und Lernen in der frühen Kindheit.* Weinheim, München: Juventa.

Staub, F. C. & Stern, E. (2002). The nature of teachers' pedagogical content beliefs matters for students' achievement gains: Quasi-experimental evidence from elemen-tary mathematics. *Journal of Educational Psychology*, 94(2), 344–355.

Axel SCHULZ, Bielefeld

Inverses Schreiben und Zahlendreher – Eine empirische Studie zur inversen Schreibweise zweistelliger Zahlen

Die inverse Sprechweise zweistelliger Zahlen im deutschen Sprachraum hat zur Folge, dass manche Kinder und Erwachsene zweistellige Zahlen invers notieren. Unter dem inversen Schreiben von Zahlen wird im folgenden verstanden, dass zunächst die Einer einer zweistelligen Zahl und dann die Anzahl der Zehner notiert werden – und zwar stellengerecht: die Einer rechts und die Zehner links. In der hier berichteten Studie wird ein möglicher Zusammenhang zwischen dem inversen Schreiben und dem Auftreten von Zahlendrehern untersucht. Darüber hinaus ist von Interesse, welche Zahlen besonders häufig invers geschrieben werden, welche Kinder besonders häufig invers schreiben und welchen Einfluss Material auf das inverse Schreiben von Zahlen haben kann.

1. Einflüsse der inversen Zahlwortbildung

Die Regeln der Zahlwortbildung unterscheiden sich von Sprache zu Sprache, und in (international vergleichenden) Studien konnte gezeigt werden, dass die Zahlwortbildung großen Einfluss auf die Zahlverarbeitung und das Stellenwertverständnis haben kann. Dies gilt insbesondere für die inverse Zahlwortbildung. So konnte unter anderem gezeigt werden, dass das inverse Schreiben und das Phänomen der Zahlendreher (Einer und Zehner zweistelliger Zahlen werden vertauscht) nur in Sprachen mit inverser Zahlwortbildung zu beobachten ist (Möller et al. 2015). Das Auftreten von Zahlendrehern konnte vor allem bei der Nutzung elektronischer Medien (wie dem Taschenrechner) nachgewiesen werden (Schipper et al. 2010). Darüber hinaus konnte gezeigt werden, dass die inverse Zahlwortbildung Einfluss auf die Zahlverarbeitung haben kann: So kann zum Beispiel das Kopfrechnen durch die inverse Zahlwortbildung erschwert werden (Göbel et al. 2014) und beim Einordnen gehörter Zahlen in eine vorgegebene Zahlenreihe wird häufig der entsprechende Zahlendreher identifiziert. Bemerkenswert ist dabei, dass die inverse Zahlwortbildung auch Einfluss nimmt, wenn das Aufgabenformat sprach-ungebunden ist: Der schnelle Größenvergleich zweier Zahlen, die symbolisch als Zahlzeichen präsentiert werden, gelingt Probanden im deutschen Sprachraum sehr viel weniger sicher und weniger richtig als solchen im italienischen Sprachraum (ohne inverse Zahlwortbildung) (Pixner et al. 2011).

Welche Einflüsse das inverse *Schreiben* auf das Stellenwertverständnis und die Zahlverarbeitung haben kann, ist hingegen bisher kaum untersucht. Theoretische Überlegungen legen jedoch nahe, dass das inverse Schreiben zu Unsicherheiten beim tragfähigen Verständnis der Stellenwerte führen kann, da beim inversen Schreiben die jeweiligen Zahlwörter auf den Klang der beteiligten Ziffern reduziert werden können – ohne den Wortbestandteil „-zig“ als Hinweis für die Zehner zu berücksichtigen (Schulz 2014). Auch der Zusammenhang zwischen dem inversen Schreiben, der Entstehung von Zahlendrehern und dem Nutzen elektronischer Medien ist bisher nicht untersucht.

2. Forschungsinteresse

Aufgrund bisheriger empirischer Untersuchungen und theoretischer Überlegungen zum möglichen Einfluss des inversen Schreibens auf die Zahlverarbeitung und das Stellenwertverständnis sollen in der berichteten Untersuchung folgende Forschungsfragen beantwortet werden:

- Welche Zahlen werden (besonders häufig) invers geschrieben?
- Wie viele und welche Kinder schreiben invers?
- Können Zusammenhänge zwischen dem inversen Schreiben und dem Auftreten von Zahlendrehern identifiziert werden – auch am Taschenrechner?
- Hat der Einsatz von Material Einfluss auf das inverse Schreiben von Zahlen?

3. Methodisches Vorgehen

Die hier berichteten quantitativen Ergebnisse sind Teil einer größeren Untersuchung zum Zusammenhang zwischen dem inversen Schreiben und dem Stellenwertverständnis – die qualitativen Ergebnisse werden an anderer Stelle dokumentiert. Es wurden insgesamt 109 Grundschulkinder verschiedener Grundschulen (2 Jg.: 49, 3. Jg.: 40, 4. Jg.: 20) interviewt. Der hier dokumentierte Teil des halbstandardisierten Interviews umfasst (1) ein Zahlendiktat (diktierte Zahlen müssen auf dem Papier notiert werden) (2) ein Taschenrechnerdiktat (diktierte Zahlen müssen in einen Taschenrechner eingetippt werden) und (3) das Notieren von Zahlen, die als Menge mit dem Dienes-Material vorgelegt wurden (auch in nicht konventioneller Anordnung). Die Interviews wurden videografiert und transkribiert.

4. Ergebnisse

Es konnte festgestellt werden, dass ungefähr ein Drittel aller diktierten Zahlen invers notiert wurden. Bemerkenswert ist, dass Zahlen zwischen 13 und 19 so gut wie nie invers notiert werden – wohl aber die entsprechenden „Zahlendreher“ (z. B. 81 oder 31). Dieser Befund deutet darauf hin, dass das Schriftbild der Zahlen im Zahlenraum bis zwanzig als festes Bild abgespeichert ist und abgerufen werden kann. Volle Zehnerzahlen (z. B. 50) werden so gut wie nie invers notiert, wohl aber sog. „Schnapszahlen“ (z. B. 44), nämlich ein Viertel der diktierten „Schnapszahlen". Alle übrigen Zahlen werden in etwas weniger als der Hälfte der Fälle invers geschrieben (z. B. 38, 45 oder 91).

Insgesamt schreiben zwei Drittel aller interviewten Kinder wenigstens eine diktierte Zahl invers; ein Drittel aller Kinder schreibt mindestens die Hälfte der diktierten Zahlen invers. Obwohl es sich bei der vorliegenden Untersuchung nur um einen Quasi-Längsschnitt handelt, weisen die Ergebnisse darauf hin, dass das inverse Schreiben im Laufe der Grundschulzeit abnimmt. Bezogen auf den von der Lehrkraft berichteten Leistungsstand der Kinder schreiben sowohl leistungsschwache (95 %), durchschnittliche (71 %) als auch leistungsstarke (47 %) Schülerinnen und Schüler beim Zahlendiktat invers: das inverse Schreiben nimmt dabei mit zunehmender Leistung ab, ist aber kein Alleinstellungsmerkmal schwacher Schülerinnen und Schüler.

Einem Viertel der invers schreibenden Kinder unterlaufen auch Zahlendreher; umgekehrt schreiben fast alle Kinder, denen im Verlauf des Zahlendiktats Zahlendreher unterlaufen, invers. Darüber hinaus kann *kein* Zusammenhang hergestellt werden zwischen der *Häufigkeit* invers geschriebener Zahlen und dem Auftreten von Zahlendrehern – Kindern, die besonders viele Zahlen invers schreiben, unterlaufen nicht häufiger Zahlendreher als anderen. Bemerkenswert ist allerdings das Auftreten von Zahlendrehern beim Taschenrechnerdiktat: mehr als die Hälfte der Kinder, die invers schreiben und denen beim Zahlendiktat *keine* Zahlendreher unterlaufen, machen Zahlendreher am Taschenrechner – ungefähr ein Drittel dieser Kinder bemerkt die getippten Zahlendreher nicht. Umgekehrt tippen nicht-invers schreibende Kinder keine Zahlendreher in den Taschenrechner ein: Das inverse Schreiben scheint die Gefahr zu bergen, dass am Taschenrechner vermehrt Zahlendreher getippt werden (und unbemerkt bleiben).

Beim Notieren von Zahlen, die nicht vorgelesen werden, sondern am Dienes-Material dargestellt sind, schreiben in allen Leistungsstufen ungefähr ein Drittel weniger Kinder invers als beim Zahlendiktat; auch die Anzahl der Kinder, denen Zahlendreher unterlaufen, nimmt im Vergleich zum Zahlendiktat ab – allerdings nicht bei den leistungsschwachen Kindern. Dabei spielt die Anordnung des Materials keine Rolle. Dieser Befund deutet darauf hin, dass die Vorlage des Materials dafür sorgen kann, dass das inverse Schreiben und das Auftreten von Zahlendrehern abnehmen – wobei dieser Effekt bei den leistungsschwachen Kindern vergleichsweise am geringsten ist.

5. Fazit und Ausblick

Die oben dargestellten Befunde liefern einen ersten quantitativen Einblick in Zusammenhänge zwischen inversem Schreiben und dem Auftreten von Zahlendrehern – vor allem am Taschenrechner. Dabei muss berücksichtigt werden, dass der Umgang mit dem Taschenrechner in der Grundschule noch nicht thematisiert wurde. Weitere Untersuchungen zum Auftreten von Zahlendrehern und der inversen Schreibweise in der Sekundarstufe I scheinen hier sinnvoll. Darüber hinaus konnte gezeigt werden, dass bestimmte Zahlen seltener invers geschrieben werden als andere – was auf verinnerlichte Zahlbilder hinweisen kann. Auch wurde gezeigt, dass das inverse Schreiben in allen Leistungsstufen beobachtet werden kann – bei leistungsschwachen Kindern am häufigsten. Allerdings bieten die oben dargestellten quantitativen Befunde kaum unmittelbare Erkenntnisse über einen Zusammenhang zwischen dem inversen Schreiben und einem tragfähigen Zahl- und Stellenwertverständnis. Erste Ergebnisse der qualitativen Analyse der vorliegenden Daten deuten allerdings darauf hin, dass leistungsstarke Kinder ihr inverses Schreiben begründen und erklären können (und durch ihre Beschreibungen ein tragfähiges Zahlverständnis offenbaren), wohingegen leistungsschwache Kinder eher beschreiben was sie tun – ohne z. B. die Positionen der jeweiligen Ziffern im Zahlzeichen erklären zu können. Zudem bemerkenswert ist der positive Einfluss des Materials auf das inverse Schreiben und das Auftreten von Zahlendrehern, wobei eingeschränkt werden muss, dass dies nur für einen kleinen Anteil der Probanden zutrifft: Material ist nicht für alle Kinder „von allein“ hilfreich.

Literatur

Göbel, S., Möller, K., Pixner, S., Kaufmann, L., Nürk, H.-C. (2014). Language affects symbolic arithmetic in children: The case of number word inversion. *Journal of Experimental Child Psychology, 119*, 17–25

Möller, K., Shaki, S., Göbel, S., Nürk, H.-C. (2015). Language influences number processing – A quadrilingual study. *Cognition, 136*, 150-155.

Pixner, S., Möller, K., Hermanova, V., Nürk, H.-C., & Kaufmann, L. (2011). Whorf reloaded: Language effects on non-verbal number processing in 1st grade - a trilingual study. *Journal of Experimental Child Psychology, 108*, 371-382.

Schipper, W., Wartha, S. & von Schroeders, N. (2010). *Bielefelder Rechentest für das zweite Schuljahr – Skalenhandbuch*. Unveröffentlichtes Manuskript.

Schulz, A. (2014). *Fachdidaktisches Wissen von Grundschullehrkräften – Diagnose und Förderung bei besonderen Problemen beim Rechnenlernen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Jan SCHUMACHER, Paderborn

Erkunden mathematischer Strukturen anstatt Interpretation in Modellen – Ein innermathematischer Zugang zu negativen Zahlen

In diesem Beitrag soll ein innermathematischer Zugang zu den negativen Zahlen vorgestellt werden, bei dem das Permanenzprinzip wieder in den Vordergrund rückt und in der Grundschule etablierte Aufgabenformate genutzt werden. Dazu werden vorab die Forschungsinteressen dargestellt, die mit der Entwicklung der Lernumgebung verknüpft sind. Abschließend werden erste Hypothesen, die bei der Sichtung der erhobenen Daten aufgestellt wurden, formuliert.

Forschungsinteressen

Die Lernumgebung ist im Rahmen eines Kooperationsprojektes mit der TU Dortmund entstanden. Im Projekt wird untersucht, welche Rolle lebensweltliche Kontexte beim Erlernen von negativen Zahlen spielen. Darüber hinaus wird im Rahmen meines Dissertationsprojekts untersucht, welche Vorstellungen Schüler bei einem innermathematischen Zugang zu negativen Zahlen entwickeln und inwieweit sich diese Vorstellungen in bestehende Konzepte einordnen lassen.

Entwicklung der Lernumgebung

Trotz der zu beobachtenden Tendenz, negative Zahlen in außermathematischen Kontexten einzuführen, finden sich in der einschlägigen Literatur gute Gründe für innermathematische Zugänge zu negativen Zahlen. Einerseits liegt die „mit negativen Zahlen verfolgte Intention […] klar im algebraischen Kalkül“ (Jahnke 2003, S. 21) und andererseits werden im Alltag negative Zahlen nicht als eigenständige Denkobjekte genutzt, sondern es handelt sich bei ihnen nur um positive Zahlen mit einer anderen Interpretation (Hefendehl-Hebeker 1989, S. 11). Um die Relevanz außermathematischer Kontexte für das Lernen von negativen Zahlen zu untersuchen wurde im Rahmen der Studie eine Lernumgebung auf der Grundlage eines ausschließlich innermathematischen Zugangs zu negativen Zahlen entwickelt. Die Entwicklung der Lernumgebung basierte auf folgenden *Designprinzipien*:

- Vermeidung konstruierter außermathematischer Kontexte
- Betonung des Permanenzprinzips anhand eines innermathematischen Zugangs über Muster und Strukturen
- Förderung intuitiver Rechenwege
- Adäquater Gebrauch der Fachsprache

Zusammen verfolgen diese das Ziel algebraisches Denken zu fördern. Dabei wird auch an die Ideen von Rezat (2014), die Operation mithilfe von 1+1-Tafeln einzuführen, angeknüpft. Strukturell ist die Lernumgebung so aufgebaut, dass nach dem Einstieg in das Thema und der Behandlung der Ordnung der ganzen Zahlen die Strichrechnung in drei Teilen behandelt wird: 1) Subtraktion mit einem positiven Subtrahend, 2) Addition ganzer Zahlen und 3) Subtraktion mit negativem Subtrahend. Abschließend folgt die Multiplikation. Auf die Division ganzer Zahlen wird aufgrund der Vergleichsstudie verzichtet. Anstatt den Betrag einer Zahl einzuführen, bekommt der Begriff der Gegenzahl eine größere Gewichtung. Dabei soll das Rechnen mit ganzen Zahlen analog zum Rechnen mit natürlichen Zahlen in der Grundschule entwickelt werden.

Da die Schüler die Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen am Beispiel der Bruchzahlen schon erfahren haben, werden sie zu Beginn der Lernumgebung mit der Problematik konfrontiert, dass die Subtraktion zweier Zahlen in den natürlichen Zahlen nicht vollständig durchführbar ist. Bei der Erarbeitung der Ordnung der ganzen Zahlen werden die Vorstellungen der Schüler zur Ordnung der natürlichen Zahlen aufgegriffen und deutlich gemacht, warum diese teilweise nicht mehr tragfähig sind („Es ist die Zahl kleiner, die näher bei der 0 steht.“). Die *Einführung der Rechenoperationen* erfolgt jeweils auf ähnliche Art und Weise. Die Schüler nähern sich der Operation mit den neuen Zahlen mithilfe von 1+1-, 1–1- oder 1•1-Tafeln an, wobei vorab durch schöne Päckchen eine Fokussierung auf bestimmte Strukturen stattfindet und gezielt die Operationen mit negativen Zahlen im Sinne des Permanenzprinzips aus dem Rechnen mit natürlichen Zahlen entwickelt werden können. Die Rechentafeln und die schönen Päckchen bieten den Schülern Möglichkeiten Muster und Strukturen zu entdecken und diese bei den Operationen mit den ganzen Zahlen fortzuführen. Die entdeckten Strukturen werden anschließend als Regel formuliert. Dadurch, dass die Schüler in innermathematischen „Zusammenhängen Strukturen und Formen erkennen“, „Gesetzmäßigkeiten des Operierens mit Zahlen […] erfassen“ und diese „Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten […] schließlich begrifflich […] beschreiben“ (Hefendehl-Hebeker und Rezat 2015, S. 132), kann durch diesen Aufbau *algebraisches Denken* bei den Schülern gefördert werden (vgl. Abbildung 2).

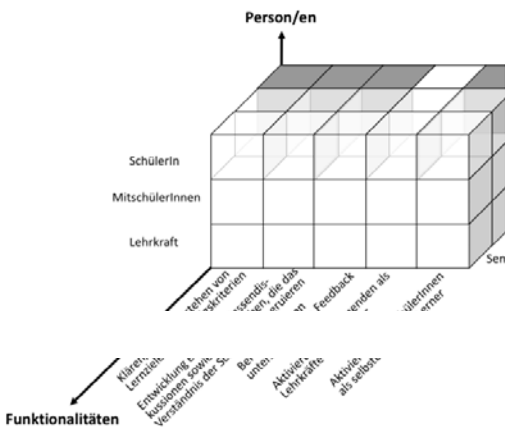
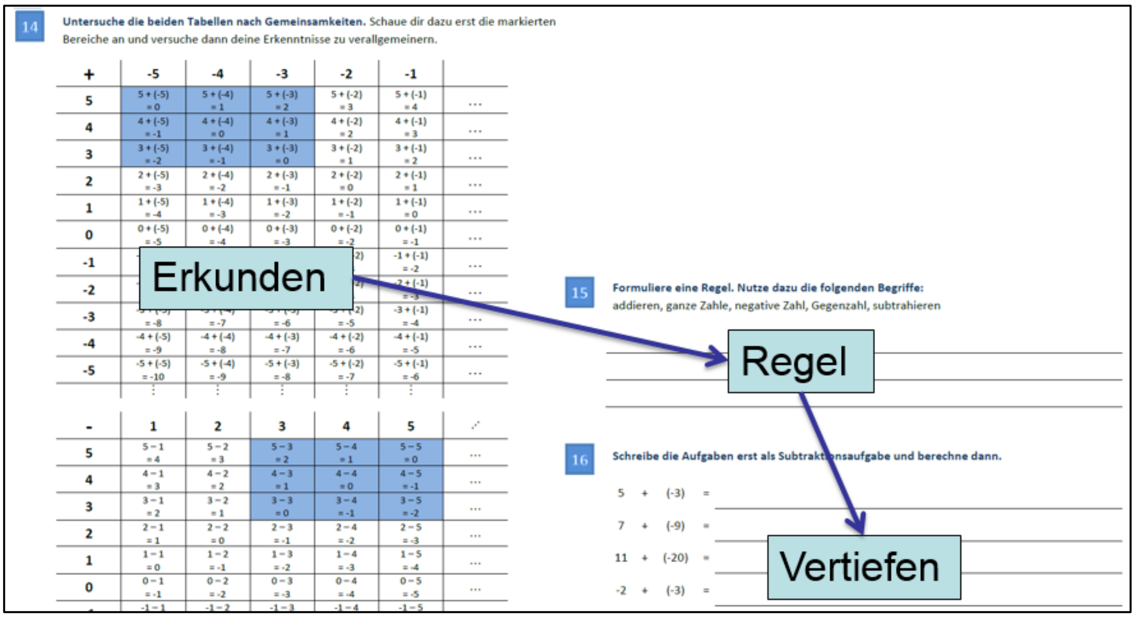


Abbildung 25: Ein beispielhafter Lernpfad



Intuitives Rechnen meint, dass die Schüler Aufgaben, bei denen die Operanden unterschiedliche Vorzeichen haben, so rechnen, wie es erfahrene Rechner machen würden. So würde z.B. im Guthaben-Schulden-Kontext, wenn die Summe aus einem Guthaben und einer Schuld bestimmt werden soll, geschaut, ob mehr Guthaben oder Schulden vorhanden sind und dann der jeweils kleinere vom jeweils größeren Betrag subtrahiert. Innermathematisch betrachtet bedeutet dass, dass anstelle Aufgaben der Art 3 + (-5) = -2 die Aufgabe 3 – 5 = -(5 – 3) = -2 berechnet werden.

Hypothesen und Ausblick

Nach der ersten Sichtung des Nachtests und den durchgeführten Interviews lassen sich unter Bezugnahme der Gespräche mit Schülern und Lehrern, die im Rahmen von Unterrichtshospitationen und wöchentlichen informellen Gesprächen erfolgt sind, schon jetzt drei Hypothesen formulieren:

1. Schüler können mit negativen Zahlen in außermathematischen Kontexten umgehen, auch wenn sie dieses nur in innermathematischen Kontexten kennengelernt haben.
2. Schüler operieren in außermathematischen Kontexten hauptsächlich mit positiven Zahlen.
3. Schüler wollen nicht nur in außermathematischen Kontexten arbeiten, sondern auch in der Welt der reinen Mathematik

Die erste Hypothese stützt sich auf die Daten, die im Nachtest erhoben wurden. Dort wurden die Schüler mit insgesamt vier Aufgaben konfrontiert, denen die außermathematischen Kontexte Guthaben-

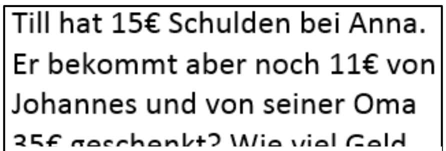


Abbildung 26: Aufgabe, die in den Interviews gelöst werden sollte

Schulden und Temperaturen zugrunde liegen. Nach Auswertung des Nachtests einer Klasse lässt sich feststellen, dass mehr als die Hälfte der Schüler mindestens drei dieser Aufgaben lösen konnten. In den geführten Interviews zeigt sich, dass Schüler in außermathematischen Kontexten hauptsächlich mit natürlichen Zahlen operieren und erst am Ende entscheiden, ob es sich beim Ergebnis um eine positive oder negative Zahl handeln muss. Schüler sollten benennen, ob Ihnen Aufgaben, die in inner- oder außermathematischen Kontexte eingekleidet sind, leichter gefallen sind. „Das hier [zeigt auf die Aufgabe in Abbildung 3] war die leichteste. […] Weil man da nicht so viel mit negativen Zahlen rechnen sollte. […] Das sind halt nur positive Zahlen“, antwortete eine Schülerin, was ein expliziter Beleg für diese Hypothese ist. Für die dritte gibt es zwar noch keine Belege, da die Analyse und Auswertung der vorhandenen Daten noch nicht abgeschlossen ist. Aufgrund der Eindrücke, die bei Unterrichtshospitationen, Gesprächen mit den Lehrkräften und ihren Schülern und der ersten Sichtung der Materialien aufgekommen sind, ist ein Nachweis aber sehr wahrscheinlich.

Es bedarf nun weiterer qualitativer und quantitativer Analysen um die ersten beiden Hypothesen weiter zu stärken und Belege für die dritte Hypothese zu finden, insbesondere, da diese im Fokus der zu Beginn formulierten Forschungsinteressen steht.

Literaturverzeichnis

Hefendehl-Hebeker, Lisa (1989): Die negativen Zahlen zwischen anschaulicher Deutung und gedanklicher Konstruktion. Geistige Hindernisse in ihrer Geschichte. In: *Mathematik lehren* (35), S. 6–13.

Hefendehl-Hebeker, Lisa; Rezat, Sebastian (2015): Algebra: Leitidee Symbol und Formalisierung. In: Regina Bruder, Lisa Hefendehl-Hebeker, Barbara Schmidt-Thieme und Hans-Georg Weigand (Hg.): Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, S. 117–148.

Jahnke, Hans Niels (2003): Numeri Absurdi Infra Nihil. Die negativen Zahlen. Sekundarstufe I, 7. Schuljahr. In: *Mathematik lehren* (121), S. 21–22.

Rezat, Sebastian (2014): Das Permanenzprinzip erfahren. An der 1 + 1-Tafel und der 1 x 1-Tafel das Rechnen mit negativen Zahlen erkunden. In: *Mathematik lehren* (183), S. 11–14.

Heinz SCHUMANN, Weingarten

Das räumliche Viereck – eine Sachanalyse

Die schulgeometrische *Formenlehre räumlicher Figuren* ist geprägt durch einen bescheidenen Vorrat an Figuren als dienende Magd für Berechnungen. Vermutlich deshalb und aus Gründen der Darstellbarkeit und der geringen physischen Repräsentanz ist das räumliche Viereck als eine Verallgemeinerung des ebenen Vierecks nicht Unterrichtsgegenstand des bisherigen Geometrie-Curriculums allgemeinbildender Schulen geworden. Eine Sachanalyse dieses elementargeometrischen Themas benutzt Dynamische Raumgeometrie-Systeme (DRGS), z. B. das prototypische Cabri 3D (Bain-ville & Laborde 2004-2015), zur Visualisierung, Exploration und Erkenntnissicherung in Gestalt von Beweisfiguren. Die heute vielfach vernachlässigte *Sachanalyse* bildet die intersubjektive Grundlage für didaktisch-methodische Überlegungen. Sie stellt die Beziehung zur Hintergrundtheorie *Elementarmathematik* her, deren Beherrschung und Pflege eine mathematikdidaktische Aufgabe ist. Das Thema liefert ein Musterbeispiel für die Anwendung von DRGS, die Förderung der räumlichen Vorstellung, die inhaltliche Bereicherung und die – vor allem heuristische – Methodenverstärkung im Raumgeometrie-Unterricht.

1. Sachanalyse

Eine idealtypische Beschreibung der Sachanalyse findet sich bei Roth (1963, S. 120): „Es ist völlig verkehrt, bei diesen ersten Bemühungen schon an das Kind oder den Jugendlichen zu denken. Es geht zunächst nur um die Sache. [...] Es geht nicht schon um das mögliche Verhältnis des Kindes zu dieser Wahrheit, sondern um das Verhältnis des Lehrers zu dieser Wahrheit. Nichts ist verkehrter als die Annahme, die Unreife des Kindes erlaube eine oberflächliche Beziehungsaufnahme zum Kulturgut. Das Verhältnis des Lehrers zu seinem Lehrgegenstand muß immer seinem eigenen geistigen Niveau entsprechen, nicht dem des Kindes. Und zwar immer seiner höchstmöglichen geistigen Fassungskraft. Jedes halbe, schiefe oder seichte Wissen verfehlt gerade das, worauf es bei der stofflichen Besinnung ankommt: die Erfassung des wahren Wesens, des sachlichen Gehalts, des existentiell Wichtigen. Es ist völlig verkehrt, bei diesen ersten Bemühungen schon an das Kind oder den Jugendlichen zu denken. Es geht zunächst nur um die Sache. [...] Es geht nicht schon um das mögliche Verhältnis des Kindes zu dieser Wahrheit, sondern um das Verhältnis des Lehrers zu dieser Wahrheit. Nichts ist verkehrter als die Annahme, die Unreife des Kindes erlaube eine oberflächliche Beziehungsaufnahme zum Kulturgut. Das Verhältnis des Lehrers zu seinem Lehrgegenstand muß immer seinem eigenen geistigen Niveau entsprechen, nicht dem des Kindes. Und zwar immer seiner höchst möglichen geistigen Fas-

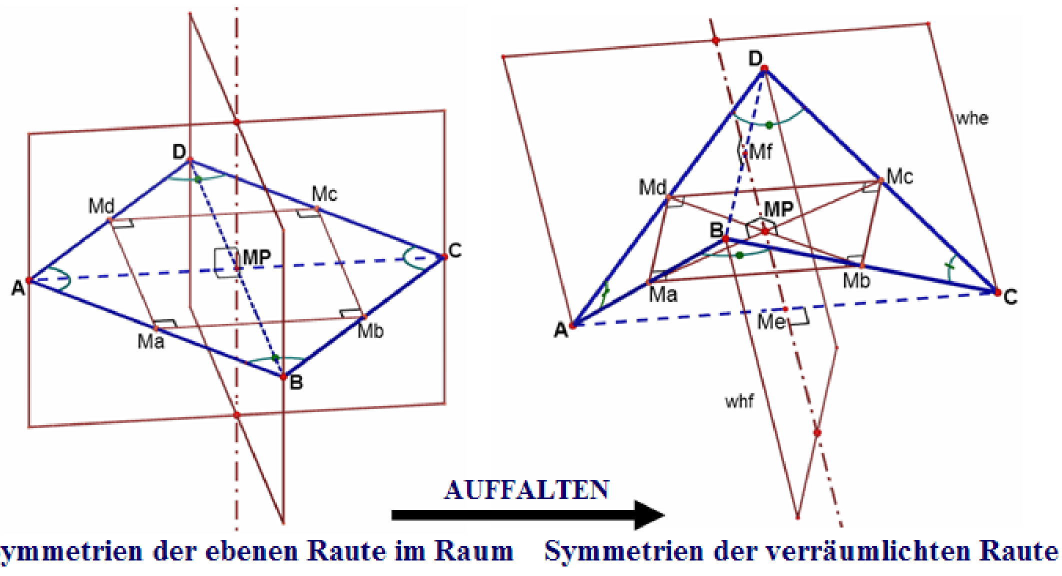
sungskraft. Jedes halbe, schiefe oder seichte Wissen verfehlt gerade das, worauf es bei der stofflichen Besinnung ankommt: die Erfassung des wahren Wesens, des sachlichen Gehalts, des existentiell Wichtigen.“ Neben dieser Beschreibung aus der Lernpsychologie liest man beispielsweise in der schulpädagogischen Literatur (Gonschorek & Schneider 2005, S. 283): „Die Sachanalyse ist die Grundlage für alle weiteren didaktischen und methodischen Entscheidungen. In der ausformulierten Sachanalyse zeigt der Planende, dass er sich in den Unterrichtsgegenstand vertieft hat, sich mit der Sache vertraut gemacht hat, die wichtigsten Momente und Strukturen und deren Beziehungen untereinander verstanden hat. Es ist ein abgerundeter, rein (fach-)wissenschaftlicher, sachlicher Text [...]“. Im Gegensatz dazu werden als Sachanalyse in dem vorstehenden Sinne gedachte Manuskripte von Herausgebern einer mathematikdidaktischen Zeitschrift folgendermaßen bewertet: „Wir haben unsere Zeitschrift auf didaktisch orientierte Beiträge ausgerichtet und möchten auf ele-mentarmathematische Beiträge verzichten“ (Andreas Eichler für die Herausgeber von *mathematica didactica*, 25.5.2014). Offensichtlich ist die enge Beziehung zwischen einer Sachanalyse und der Elementarmathematik aus dem Fokus geraten. – Leider geht der Bedeutungsverlust der Sachanalyse sogar soweit, dass diese in einer die Grundlagen der Mathematikdidaktik betreffenden Buchveröffentlichung überhaupt nicht mehr vorkommt (Reiss & Hammer 2012). Die weitgehende Schwächung der elementarma-thematischen Fundierung eines Unterrichtsthemas ist u. a. auf Klafkis subjektiv interpretierbare allgemeine Rechtfertigungskriterien soziologischer Art im Rahmen seiner kritisch-konstruktiven Didaktik zurückzuführen.

2. Das räumliche Viereck (Abriss)

Ein geschlossener Streckenzug aus vier Strecken, dessen Eckpunkte nicht derselben Ebene angehören ist ein räumliches Viereck. Man kann sich ein solches Viereck u. a. durch „Auffalten“ eines ebenen Vierecks um einer seiner Diagonalen als Faltachse vorstellen.

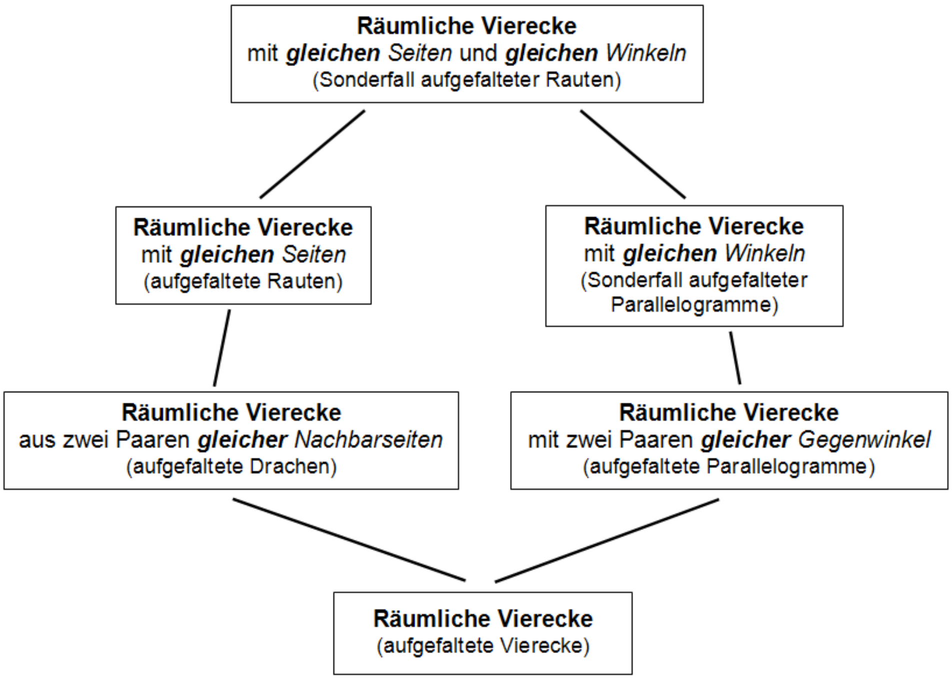
Einige Aussagen über räumliche Vierecke, die zusammen mit ihren Beweisen gleichermaßen für ebene Vierecke gelten: (1) Das Seitenmittenviereck eines räumlichen Vierecks ist ein Parallelogramm (*Varignon*). Deshalb halbieren die Verbindungsstrecken gegenüberliegender Seitenmitten einander im Mittelpunkt des Parallelogramms. (2) Der Mittelpunkt des Seitenmittenparallelogramms eines räumlichen Vierecks halbiert die Verbindungsstrecke seiner Diagonalenmittelpunkte. (3) Für ein räumliches Viereck gilt: Die Summe aus den Quadraten der Längen seiner Diagonalen ist gleich der doppelten Summe aus den Quadraten der Längen seiner Mittellinien. (4) Für ein räumliches Viereck gilt: Die Summe aus den Quadraten der Längen seiner Seiten ist gleich der Summe aus den Quadraten der Längen seiner Dia-

gonalen vermindert um das Vierfache des Quadrats der Distanz seiner Diagonalenmitten. (5) Vier Punkte P_a, P_b, P_c und P_d auf den Seiten bzw. Seitengeraden eines räumlichen Vierecks ABCD mit P_a auf AB, P_b auf BC, P_c auf CD und P_d auf DA liegen in einer Ebene genau dann, wenn gilt: $\frac{|AP_a||BP_b||CP_c||DP_d|}{|P_aB||P_bC||P_cD||P_dA|} = 1$ (*Menelaos*). Mittels Zurückführung auf die entsprechende Ungleichung für ebene Vierecke (*Ptolemäos*) erhält man: (6) Für ein räumliches Vierecks gilt: Die Summe der Produkte aus je zwei Gegenseiten ist stets kleiner als das Produkt seiner Diagonalen.
Andere Aussagen über räumliche Vierecke: (7) Die Summe der Innenwinkel eines räumlichen Viereck ist kleiner als vier rechte Winkel (*360°*). (8) Jedes räumliche Viereck besitzt genau eine Umkugel. Sie ist die Umkugel des aus dem räumlichen Viereck und seinen Diagonalen gebildeten Tetraeders. (9) Jedes räumliche Viereck besitzt für jede seiner Seiten unendlich viele Ankugeln, deren Mittelpunkte jeweils auf einer Achse liegen und deren jeweilige Berührpunktlagen variieren.
Symmetrien räumlicher Vierecke: Betrachtet man die ebenen Vierecke als räumliche Objekte, so gehen ihre ebenen in entsprechende räumliche Symmetrie-Eigenschaften über. Beim Auffalten eines ebenen zu einem räumlichen Viereck bleiben die räumlichen Symmetrie-Elemente erhalten (Beispiel in Abbildung)



Abbildung

Man erhält so das „Haus der symmetrischen räumlichen Vierecke“ (Diagramm).



Diagramm

Klassifikation nach Berührungskugel-Eigenschaften: (10) Die winkelhalbierenden Ebenen eines räumlichen Vierecks *ABCD* mit der Eigenschaft $a + c = b + d$ schneiden einander in einer Achse, deren Punkte Mittelpunkte jener Kugeln sind, welche die Seiten bzw. Seitengeraden des Vierecks berühren. Man nennt ein solches Viereck Umkugelviereck. (11) Lassen sich die Seiten eines räumlichen Vierecks mit *A*, *B*, *C*, *D* so bezeichnen, dass $a + b = c + d$, dann schneiden die Innenwinkelhalbierenden der Ecken *A*, *C* und die Außenwinkelhalbierenden der übrigen Ecken in einer gemeinsamen Achse, die Ort der Mittelpunkte jener Kugeln sind, welche die Seiten bzw. Seitengeraden des Vierecks berühren. Man nennt ein solches Vier-eck Ankugelviereck. (12) Jedes räumliche Viereck, das weder ein Inkugel-viereck noch ein Ankugelviereck ist, besitzt genau 8 besondere Berührungskugeln … (Schumann 2015).

Literatur

Bainville, E. & Laborde, J.-M. (2004-2015). *Cabri 3D* (Software). Grenoble: Cabrilog.

Gonschorek, G. & Schneider, S. (2005). *Einführung in die Schulpädagogik und die Unterrichtsplanung*. 4. Aufl., Auer Donauwörth 2005.

Reiss, K. & Hammer, Ch. (2012). *Grundlagen der Mathematikdidaktik*. Basel: Birkhäuser

Roth, H. (1963). *Pädagogische Psychologie des Lehrens und Lernens*. 12. Aufl., Hannover: Schroedel

Schumann, H. (2015). Zur Klassifikation räumlicher Vierecke. *Informationsblätter der Geometrie* (IBDG), Jg. 34, 2, 32 – 44

Natascha SCHUPP, Sebastian VOGEL, Julia SCHWABE, Stella PEDE, Rita BORROMEO FERRI, Frank LIPOWSKY, Kassel

Förderung adaptiver Strategiewahl durch verschachteltes Lernen? – Die Interventionsstudie LIMIT in der Grundschule

Theoretischer und empirischer Hintergrund

Wiederholt zeigen Studien, dass Grundschulkinder wenig adaptiv rechnen, unabhängig von Aufgabenmerkmalen eine Lieblingsstrategie bevorzugen und häufig schriftlich rechnen, selbst wenn die jeweiligen Aufgaben die Nutzung anderer Lösungsmethoden, z. B. halbschriftlicher Strategien nahelegen (Selter, 2001; Torbeyns et al., 2006). Die Fähigkeit zur adaptiven Strategiewahl lässt sich jedoch durch Lernumgebungen und Interventionen fördern (Blöte et al., 2000; Grüßing et al., 2013; Rathgeb-Schnierer, 2006).

Für die adaptive Wahl von Strategien scheint insbesondere konditionales Wissen, also Wissen darüber, *wann* (bei welchen Aufgabentypen) *welche* Lösungsstrategien sinnvoll und geschickt anwendbar sind, erforderlich. Hier setzt die Interventionsstudie LIMIT Grundschule an.

Verschachteltes Lernen (*interleaved practice*) bedeutet, dass Lerninhalte vermischt bzw. abwechselnd im Unterricht behandelt werden, im Gegensatz zum geblockten Lernen, bei dem ein Inhalt nach dem anderen eingeführt und geübt wird, bevor das nächste Thema im Unterricht aufgegriffen und geübt wird. Vereinfacht könnte man geblocktes Lernen mit AAAABBBBCCCCDDDD symbolisieren, verschachteltes Lernen etwa mit ABCDACBDBADCACDB.

Das Verschachteln von Inhalten stellt aus kognitionspsychologischer Sicht eine Erschwernis beim Lernen dar, denn im Unterschied zum geblockten Lernen werden hierbei vom Lernenden kognitiv anspruchsvollere Aktivitäten erwartet. Werden z. B. mathematische Inhalte, Operationen oder Strategien vermischt bzw. verschachtelt, ist der Lernende eher gefordert, Aufgaben zu analysieren, zu klassifizieren und sich bewusst für den erforderlichen Bearbeitungsweg zu entscheiden. Es geht im Unterschied zum geblockten Lernen also nicht um die wiederholte Anwendung einer Operation oder Strategie, sondern auch um die Entscheidung, *welche* Operation oder Strategie jeweils angewendet werden muss. Dies setzt umfassende Diskriminationsprozesse des Lernenden voraus. Verschachteltes Lernen stellt somit eine sogenannte wünschenswerte Erschwernis (*desirable difficulty*) dar (Bjork & Bjork, 2011; Lipowsky et al., 2015). Bislang vorliegende Studien, welche allerdings meist im Labor und nicht im Klassenzimmer stattfanden und welche bislang primär das Lernen von Erwachsenen und nicht von Kindern oder Jugendlichen untersuchten, ermittelten häufig positive Effekte für das verschachtelte Lernen (Dunlosky et al., 2013). Theoretisch werden die positiven

Effekte des verschachtelten Lernens mit dem wiederholten Abrufen von Inhalten aus dem Langzeitgedächtnis und/oder dem fortgesetzten Diskriminieren und Kontrastieren von Lerninhalten erklärt (Dunlosky et al., 2013; Kang & Pashler, 2012; Taylor & Rohrer, 2010).

Das Projekt LIMIT

Das Projekt LIMIT (Verschachteltes **L**ernen **i**m **M**athemat**i**kunterrich**t**) ist ein Teilprojekt des Forschungsschwerpunkts „Wünschenswerte Erschwernisse beim Lernen" an der Universität Kassel und besteht aus mehreren Teilstudien. In der Grundschulstudie werden die Effekte verschachtelten Lernens auf die adaptive Wahl von Subtraktionsstrategien im 3. Schuljahr untersucht. Hierbei wird die Effektivität einer verschachtelten und einer geblockten Lernumgebung miteinander verglichen. Neben der Frage, ob sich positive Effekte des verschachtelten Lernens auf die Adaptivität und Flexibilität der Strategiewahl im Vergleich zum geblockten Lernen nachweisen lassen, wird auch analysiert, welche Bedeutung motivationale Lernvoraussetzungen für den Lernerfolg haben, wenn der Lernprozess durch das Verschachteln erst einmal schwerer wird.

Die Pilotstudie

In diesem Beitrag werden Ergebnisse der Pilotstudie berichtet. Im Unterschied zur geplanten Hauptstudie, in der beide Lernumgebungen – verschachtelt und geblockt – implementiert und vergleichend untersucht werden, wurden im Rahmen der Pilotstudie nur die Effekte der verschachtelten Bedingung analysiert, da in der geblockten Bedingung nur ein Teil der Subtraktionsstrategien unterrichtet wurde. Verschachtelt wurden hierbei halbschriftliche Strategien der Subtraktion, wie das *Ergänzen*, die Bildung von *Hilfsaufgaben*, *stellenweises* Rechnen sowie das *schriftliche Normalverfahren* (Abziehen mit Entbündeln). Die Lernumgebung erstreckte sich auf insgesamt 10 Unterrichtsstunden. Die Stichprobe bestand aus insgesamt 19 Kindern des 3. Schuljahres. Um die Entwicklung der Flexibilität und Adaptivität in der Strategiewahl zu untersuchen, wurde unmittelbar vor der Unterrichtseinheit ein Prätest und unmittelbar danach ein Posttest eingesetzt. Acht Aufgaben im Prä- und Posttest (sieben Subtraktions- und eine Additionsaufgabe) waren identisch und dienten als Ankeraufgaben. Sie erforderten von den Kindern eine möglichst geschickte Bearbeitung. Als Indikator für die Strategieflexibilität eines Lernenden wurde die Anzahl der angewandten unterschiedlichen Lösungsstrategien bei den acht Ankeraufgaben gewertet (Maximum: 8). Die Adaptivität wurde bestimmt, indem für jede der acht Ankeraufgaben normativ festgelegt wurde, welche Strategien vor dem Hintergrund der jeweiligen Aufgabencharakteristika als nicht adaptiv (0 Punkte), wenig adaptiv (1 Punkt) und als effizient und adaptiv (2 Punkte) angesehen werden können (Heinze et al., 2009; Grüßing et al., 2013). Insgesamt konnten im Prä- und Posttest somit jeweils 16 Punkte (8 Aufgaben x 2 Punkte) erreicht werden.

Ergebnisse

Vergleicht man die Anzahl der für die acht Ankeraufgaben im Prä- und im Posttest angewandten Strategien, so zeigt sich, dass die Lernenden im Prätest im Mittel $M = 1.50$ unterschiedliche Strategien ($SD = 0.81$) nutzten, während der Mittelwert im Posttest mit $M = 3.06$ ($SD = 1.12$) Strategien deutlich größer ausfiel. Ein T-Test für verbundene Stichproben ergibt, dass dieser Unterschied auf dem 0.1%-Niveau mit einer Effektstärke von $d \approx 1.60$ deutlich signifikant ist ($t(15) = 5.42$; $p < 0.001$). Genaue Analysen offenbaren, dass die Lernenden vor der Intervention hauptsächlich mit der Strategie *schrittweise* (ca. 69%) und mit der Strategie *stellenweise* (ca. 25%) rechneten. Im Posttest hingegen zeigt sich eine größere Vielfalt an Strategien. Am häufigsten wird die Strategie *stellenweise* (ca. 27%) genutzt. Die Strategien *Ergänzen* und *schriftliches Normalverfahren* nehmen jeweils einen Anteil von ca. 23% ein, während ein kleiner Teil der Aufgaben über die Nutzung von *Hilfsaufgaben* (ca. 7%) oder *schrittweise* (9%) gelöst wird. Auffällig ist also, dass der Anteil an Aufgaben, die über schrittweises Rechnen gelöst werden, stark gesunken ist.

Was die Entwicklung der Adaptivität anbelangt, erzielten die Lernenden im Prätest durchschnittlich einen Score von 6.00 Punkten ($SD = 1.13$), im Posttest einen Score von 8.85 Punkten ($SD = 2.23$). Ein T-Test für verbundene Stichproben ergibt auch für die Adaptivität einen signifikanten Zuwachs ($t(13) = 4.26$, $p < 0.001$ mit einer Effektstärke von $d \approx 1.61$.

Insgesamt zeigt die Lernumgebung damit deutliche Effekte auf die Flexibilität und die Adaptivität. Interessant erscheint besonders, dass im Vergleich zu bisherigen Forschungsergebnissen (vgl. Selter, 2001) das schriftliche Normalverfahren nach dessen Einführung nicht als Lösungsweg dominiert.

Ausblick

Die Ergebnisse der Pilotierung beziehen sich bisher nur auf eine kleine Stichprobe aus einer Klasse. Der Vergleich mit der geblockten Bedingung steht zudem noch aus. Mit der größeren Stichprobe in der Hauptstudie wird es dann auch möglich sein, den Einfluss motivationaler Voraussetzungen der Lernenden zu prüfen. Denkbar ist, dass bei zunehmenden Erschwernissen insbesondere Lernende mit günstigen motivationalen Voraussetzungen profitieren. Ob dies aber tatsächlich der Fall ist, werden die Ergebnisse der Hauptstudie zeigen.

Literatur

Bjork, E. L. & Bjork, R. A. (2011). Making things hard on yourself, but in a good way: Creating desirable difficulties to enhance learning. In M. A. Gernsbacher, R. W. Pew, L. M. Hough & J. R. Pomerantz (Eds.), *Psychology and the real world: Essays illustrating fundamental contributions to society* (pp. 56–64). New York: Worth Publishers.

Blöte, A. W., Klein A. & Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction*, *10*(3), 221–247.

Dunlosky, J., Rawson, K. A., Marsh, E. J., Nathan, M. J. & Willingham, D. T. (2013). Improving students' learning with effective learning techniques promising directions from cognitive and educational psychology. *Psychological Science in the Public Interest*, *14*(1), 4–58.

Grüßing, M., Schwabe, J., Heinze, A. & Lipowsky, F. (2013). Adaptive Strategiewahl bei Additions- und Subtraktionsaufgaben: eine experimentelle Studie zum Vergleich zweier Instruktionsansätze. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 388–391). Münster: WTM-Verlag.

Heinze, A., Marschick, F. & Lipowsky, F. (2009). Addition and subtraction of three-digit numbers: adaptive strategy use and the influence of instruction in German third grade. *ZDM Mathematics Education, 41*(5), 591–604.

Kang, S. H. K. & Pashler, H. (2012). Learning painting styles: Spacing is advantageous when it promotes discriminative contrast. *Applied Cognitive Psychology*, *26*(1), 97–103.

Lipowsky, F., Richter, T., Borromeo-Ferri, R., Ebersbach, M. & Hänze, M. (2015). Wünschenswerte Erschwernisse beim Lernen. *Schulpädagogik heute, 6*(11), 1–10. URL: http://www.schulpaedagogik-heute.de/conimg/Archiv/SH_11/06_01.pdf

Rathgeb-Schnierer, E. (2006). *Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen. Eine Untersuchung zur Entwicklung von Rechenwegen bei Grundschulkindern auf der Grundlage offener Lernangebote und eigenständiger Lösungsansätze.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker (Texte zur mathematischen Forschung und Lehre, 46).

Selter, C. (2001). Addition and substraction of three-digit numbers: German elementary children's success, methods and strategies. *Educational Studies in Mathematics*, *47*(2), 145–173.

Taylor, K. & Rohrer, D. (2010). The effects of interleaved practice. *Applied Cognitive Psychology*, *24*(6), 837–848.

Torbeyns, J., Verschaffel, L. & Ghesquière, P. (2006). The development of children's adaptive expertise in the number domain 20 to 100. *Cognition and Instruction*, *24*(4), 439–465.

Uwe SCHÜRMANN, Münster

Kritische Diskursanalyse als Methode der Mathematikdidaktik

Im Folgenden werden Einblicke in die Methode der kritischen Diskursanalyse (KDA) geliefert. Eine solche Diskursanalyse orientiert sich an den Arbeiten von Michel Foucault und geht – ganz allgemein gefasst – dem Geflecht aus Wissen, Macht und Subjektwerdung in Diskursen nach. Mit der KDA als Methode der Mathematikdidaktik wird vom Autor unter anderem die Hoffnung verbunden, die Genese fachdidaktischer Diskurse oder didaktische Dokumente wie Lehrpläne und Unterrichtsbücher unter den drei genannten Gesichtspunkten zu analysieren. Im Beitrag wird dazu zunächst (1) in aller Kürze der theoretische Rahmen der KDA abgesteckt. Anschließend wurden (2) exemplarische Forschungsarbeiten vorgestellt, die unterschiedliche methodische Momente der KDA nutzen. Abschließend wird (3) ein Ausblick auf das eigene Forschungsvorhaben geliefert.

(1) Theoretischer Rahmen

Lernen auf Ebene von Diskursen verstehen zu wollen, ist als Forschungsansatz in der Mathematikdidaktik spätestens seit Sfards *„commognitive approach“* (vgl. Sfard 2008) etabliert. Diesem Ansatz zufolge wird Lernen analysiert, indem die in einem Unterrichtsgeschehen verwendete Sprache analysiert wird. Es geht dann z. B. um die Frage, wie mathematische Begriffe von einzelnen Diskursteilnehmern verwendet werden. Ebenso gelingt es Sfard mit denselben Mitteln Entwicklungen in der Mathematikdidaktik, also dem mathematikdidaktischen Diskurs, zu analysieren. So teilt sie z.B. Lerntheorien nach dem Gebrauch von Metaphern ein (vgl. Sfard 1998). Für die KDA stehen Diskurse ebenfalls im Zentrum der Betrachtung. Anders als bei Sfards Ansatz wird hier jedoch zusätzlich dem Umstand Rechnung getragen, dass ein Diskurs nicht nur Träger von Wissen sondern auch Ausdruck, Entwicklung oder Ergebnis von Machtbeziehungen sein kann. Es kann dann z.B. gefragt werden, *„wie durch Mathematik Macht ausgeübt wird“* (Kollosche 2014, S. 231).

Der Diskurs wird in der KDA nicht als bloßes Ergebnis eines gesellschaftlichen Überbaus betrachtet, wie dies vielleicht unter dem Label der Ideologiekritik etwa durch orthodoxe Marxisten zuweilen geschehen mag. Vielmehr sei der Diskurs als Materialität sui generis zu verstehen (vgl. Jäger 2009, S. 144 ff). Der Diskurs ist in diesem Sinne nicht der Spiegel der Wirklichkeit. Vielmehr produziert der Diskurs Wirklichkeit, indem er den Dingen eine Bedeutung zuweist, bzw. Bedeutungen ermöglicht. Der Diskurs weist ebenso, so die Annahme der KDA, den Individuen Bedeutungen zu, er trägt zur Subjektwerdung von Individuen bei. Dies markiert die Umkehr einer Denkart:

Der Diskurs ist nicht der Ort, an dem Subjekte zusammenkommen und Aussagen austauschen; der Diskurs ist eher der Ort, der Subjekte hervorbringt, die dann sprechen. Diskurse sind nach Foucault *„als Praktiken zu behandeln, die systematisch die Gegenstände bilden, von denen sie sprechen“* (Foucault 1995, S. 74).

Anders als in der Mathematikdidaktik ist die KDA als Analyse von medialen Diskursen bereits elaboriert und an vielen Stellen zur Anwendung gebracht worden. So z. B. vom Duisburger Institut für Sprach- und Sozialforschung (vgl. Jäger 2009). Für die Mathematikdidaktik muss diese Arbeit noch geleistet werden. Dabei wird sich zeigen, inwieweit das methodische Gerüst von Jäger auf mathematikdidaktische Diskurse übertragen werden kann. Eine solche Vorarbeit ist auch deshalb notwendig, weil Foucault seine Begriffe und Methoden im Laufe der Zeit stets verändert und an den Gegenständen seiner Untersuchungen ausgerichtet hat. Dabei bewegt er sich oft im Spannungsfeld zwischen Theoriebildung und Methodenentwicklung bzw. deren Anwendung. Er selbst rechtfertigt mit seinen Theorien, Begriffen und Methoden flexibel umzugehen, indem er seine Arbeiten als *„Werkzeugkasten“* bezeichnet, aus denen sich künftige Autoren nach Belieben bedienen sollen (Foucault 1976, S. 53).

(2) Exemplarische Forschungsarbeiten

Es werden nun zentrale Aspekte der KDA kurz dargestellt und zu jedem Aspekt eine Forschungsarbeit genannt, anhand derer deutlich werden soll, wie mit Foucaults Begriffen im mathematikdidaktischen Diskurs gearbeitet werden kann.

Ein Diskurs kann zuweilen durch einen zentralen Begriff oder einer grundlegenden Trennung zwischen Begriffen geprägt sein (z.B. Mann und Frau). Zur Analyse der Entstehung solcher Trennungen bringt Foucault zwei Verfahren, Archäologie und die Genealogie, zur Anwendung, die er in seinem Spätwerk unter dem Begriff der *„Problematisierung“* zusammenführt (vgl. Foucault 1986, S. 19). Während die Archäologie auf die Entstehung der Legitimation von Wissen gerichtet ist (vgl. Foucault 1995), geht es in der Genealogie darum, die äußeren Bedingungen, die Machtmechanismen zu analysieren, die zu bestimmten Entwicklungen von Diskursen geführt haben (vgl. Foucault 2014, S. 166ff). Dieses an Nietzsches Genealogie angelehnte Verfahren wird von Foucault z.B. angewendet, wenn er in *„Wahnsinn und Gesellschaft“* (Foucault 1973) zeigt, welche teils zufälligen Ereignisse, d.h. Differenzerfahrungen, allmählich zur Trennung zwischen Vernunft und Wahnsinn seit dem 17. Jahrhundert geführt haben. Die Vernunft wird als ein Begriff beschrieben, der nicht zuallererst eine zeitlose Identität ist, sondern der mittels der durchaus fragilen, ständig zu wiederholenden Abgrenzung zum Wahnsinn als Konzept aufrechterhalten wird. Als Beispiele einer solchen Genealogie in der Mathematikdidaktik kann die Arbeit von Kollosche zur Geschichte des Rechnens gelten (vgl. Kollosche 2015, S. 170ff). Kollosche will dort zeigen, wie *„das vorgeblich wertfreie Zeichenrechnen der ›reinen‹ Mathematik untrennbar verwoben ist mit gesellschaftlichen Bedürfnissen, Disziplinierung und Selektion“* (ebd., S. 193).

Um die Verbindung zwischen Machtmechanismen und Diskursen besser verstehen zu können, etabliert Foucault im Zuge der Genealogie den Begriff der Gouvermentalität, eine Zusammensetzung aus den Worten Regierung und Mentalität. Hiermit beschreibt er eine bestimmte Art der Führung, die sich im Laufe der Zeit in modernen liberalen Staaten herausgebildet hat. Foucault verweist darauf, dass die moderne Gouvermentalität auf die Freiheit eines jeden Einzelnen angewiesen ist. Ausschlaggebend für die Durchsetzung einer auf Freiheit angewiesenen Gouvermentalität sind der freie Markt und das Wissen der Ökonomen, welches sich seit dem 18. Jahrhundert entwickelt und ein neues Konzept von Freiheit voraussetzt (vgl. Sarasin, S. 179).

Die Analyse von Führungstechniken im Lichte der modernen Gouvermentalität und die Beschreibung der Geschichte von diskursivem Wissen durch Archäologie und Genealogie greifen auf konkrete Dokumente zurück. Die KDA ist in dieser Hinsicht eine empirische Methode und obgleich der qualitative Teil dieser Analyse deutlich überwiegt, sind der KDA quantitative Verfahren nicht fremd. So kann ganz einfach gefragt werden, wie häufig ein Begriff in einer Reihe von Publikationen auftaucht, welche Aussagen sich wann und wo versammeln und wann ein Diskurs quantitativ durch ein Mehr an Publikationen zu einem bestimmten Thema an Fahrt aufgenommen hat. Als Beispiel einer empirischen Analyse von Dokumenten, den materiellen Trägern von Diskursen, die gleichzeitig den Begriff der Gouvermentalität zur Anwendung bringt, kann die Arbeit von Valero und Knijnik (2015) gelten. Sie beschreiben ausgehend von einer Analyse des Third International Handbook of Mathematics Education (Clements et al. 2013) *„how the expert knowledge of mathematics education research contributes to the making of the desired subjects of our time with and through the use of ICTs* [Informations- und Kommunikationstechnologien, US]*: flexible, employable, competitive consumers who can also be entrepreneurs of themselves*” (Valero & Knijnik 2015, S. 34).

(3) Ausblick auf das eigene Forschungsvorhaben

Das eigene Forschungsvorhaben besteht darin, die Ordnung des (deutschsprachigen) Modellierungsdiskurses mithilfe einer KDA zu beschreiben. Dazu soll zunächst die KDA als Methode der Mathematikdidaktik entwickelt und ausgeschärft werden. Es werden dann die drei hier vorgestellten Aspekte der KDA auf den Modellierungsdiskurs bezogen. So soll (1) die für den Modellierungsdiskurs zentrale Trennung zwischen Mathematik und Realität bzw. dem Rest der Welt archäologisch und genealogisch nachvollzogen, (2) hinsichtlich der Führungstechniken die mannigfaltigen Verbindungen zwischen öffentlichen Debatten, fachdidaktischer Forschung und bildungspolitischen Maßnahmen in den Blick genommen und (3) anhand konkreter Unterrichtsdokumente aufgezeigt werden, welche Art von Führung mit Modellierungsaufgaben im Klassenzimmer einhergeht und auf welche Weise Modellierungsaufgaben zur Subjektwerdung von Schülerinnen und Schülern beitragen.

Literatur

Clements, M. A., Bishop, A. J., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Leung, F. K. S. (2013). *Third International Handbook of Mathematics Education*. New York, NY: Springer.

Foucault, M. (1973). *Wahnsinn und Gesellschaft: Eine Geschichte des Wahns im Zeitalter der Vernunft*. Frankfurt, M: Suhrkamp.

Foucault, M. (1976). *Mikrophysik der Macht: Über Strafjustiz, Psychiatrie und Medizin*. Berlin: Merve.

Foucault, M. (1978). *Dispositive der Macht: Über Sexualität, Wissen und Wahrheit*. Berlin: Merve.

Foucault, M. (1986). *Sexualität und Wahrheit: Zweiter Band: Der Gebrauch der Lüste*. Frankfurt, M.: Suhrkamp.

Foucault, M. (1995). *Archäologie des Wissens.* Frankfurt, M.: Suhrkamp.

Foucault, M. (2014). *Schriften. Dits et Ecrits.* Band 2, 1970 – 1975, Frankfurt, M.: Suhrkamp.

Jäger, S. (2009). *Kritische Diskursanalyse: Eine Einführung*. Münster: Unrast.

Kollosche, D. (2015). *Gesellschaftliche Funktionen des Mathematikunterrichts: Ein soziologischer Beitrag zum kritischen Verständnis mathematischer Bildung*. Wiesbaden: Springer.

Sarasin, P. (2005). *Michel Foucault zur Einführung*, Hamburg: Junius.

Valero, P. & Knijnik, G. (2015). Governing the Modern, Neoliberal Child through ICT Research in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics, 35(2),* 34 – 39.

Christoph SELTER, Verena PLIQUET, Laura KORTEN, Dortmund

Aufgaben adaptieren

Vor dem Hintergrund der bekannt großen Heterogenität, beispielsweise der Lernmöglichkeiten, der Interessen oder der Einstellungen der Schülerinnen und Schüler, hat in den letzten Jahren das Leitprinzip der sog. individuellen Förderung in den bildungspolitischen, didaktischen und professionstheoretischen Diskussionen sowie in Entwicklung und Forschung zunehmend an Bedeutung gewonnen (Hußmann & Selter, 2013). Studien in der Unterrichtsforschung haben gezeigt, dass Lehr-Lernprozesse effektiv und nachhaltig gestaltet werden können, wenn sie an individuelle Lernstände der Schülerinnen und Schüler anknüpfen und diese adaptiv weiterentwickeln (Helmke, 2010; Hattie, 2013).

Was nun unter dem Begriff der individuellen Förderung verstanden werden kann, ist nicht unmittelbar klar. So halten Fischer et al. (2014, S. 19) in ihrer Expertise fest: „Eine einheitliche Arbeitsgrundlage über das, was unter Individueller Förderung zu verstehen ist, gibt es in der schulischen Praxis, wissenschaftlichen Forschung und Bildungspolitik bislang jedoch nicht".

Gleichwohl ist unstrittig, dass das Ziel der individuellen Förderung die optimale Potenzialentfaltung und Persönlichkeitsentwicklung aller Schülerinnen und Schüler ist, oder wie es Kunze (2008, S. 19) formuliert: „Unter individueller Förderung werden alle Handlungen von Lehrerinnen und Lehrern und von Schülerinnen und Schülern verstanden, die mit der Intention erfolgen bzw. die Wirkung haben, das Lernen der einzelnen Schülerin/des einzelnen Schülers unter Berücksichtigung ihrer/seiner spezifischen Lernvoraussetzungen, -bedürfnisse, -wege, -ziele und -möglichkeiten zu unterstützen."

In diesem Sinn ist individuelle Förderung also eine Art Sammelbegriff, unter dem sich verschiedene Ansätze verbergen, …

- *organisatorische*, wie Förderstunden, zusätzliche personelle Unterstützung, Förderbänder oder äußere Differenzierung,
- *methodische* wie Wochen- bzw. Tagesplan, Lernen an Stationen oder Rechenkonferenzen oder auch
- *lernprozessbezogene*, wie substanzielle Aufgaben zur Natürlichen Differenzierung, Rechnen auf eigenen Wegen oder die Nutzung von Eigenproduktionen.

All diesen Ansätzen ist gemein, dass sie sich nicht auf gezielte Maßnahmen für Kinder mit besonderem Förderbedarf konzentrieren, sondern alle Kinder mit ihren je spezifischen Lernständen und Lernmöglichkeiten in den Blick nehmen.

Allgemeindidaktische, sonderpädagogische wie fachdidaktische Veröffentlichungen fordern daher, dass auch der Mathematikunterricht Schülerinnen und Schüler jeden Leistungsniveaus individuell fördern solle. Hierzu sind beispielsweise laut des Lehrplans Primarstufe für Nordrhein-Westfalen (vgl. MSW, 2008) „gute Lernaufgaben“ erforderlich, welche …

- dazu beitragen, dass die Schülerinnen und Schüler die formulierten inhaltsbezogenen bzw. prozessbezogenen Kompetenzerwartungen erreichen können (vgl. das Beispiel ‚Entdeckerpäckchen’ auf http://pikas.dzlm.de/edp),
- für die Schülerinnen und Schüler sinnvoll, bedeutsam und authentisch sind, beispielsweise indem sie einen Lebensweltbezug aufweisen (vgl. das Beispiel ‚Unsere Schule in Zahlen’ auf http://pikas.dzlm.de/125),
- an vorhandenes Wissen anknüpfen und dieses kumulativ über die Schuljahre hinweg weiterentwickeln (vgl. das Beispiel ‚Additionen von Reihenfolgezahlen; http://pikas.dzlm.de/024) sowie
- adaptiv auf die individuell unterschiedlichen Lernstände und Lernmöglichkeiten der Schülerinnen und Schüler eingehen, um allen Lernenden individuell angepasste Lernfortschritte und Könnenserfahrungen zu ermöglichen.

Mit dem letztgenannten Punkt ist keine übertriebene Individualisierung des Unterrichts gemeint. Ist dieser zu speziell auf jeden einzelnen Lernenden ausgerichtet, kann kein fachlicher Austausch mehr erfolgen, was dazu führt, dass Prozesse des von- und miteinander Lernens nicht mehr erfolgen können (Individualisierungsfalle; vgl. Brügelmann, 2011).

Natürlich ist nicht jeder mathematische Inhalt geeignet, um das Lernen am gemeinsamen Gegenstand mit einer übergeordneten Problemstellung zu ermöglichen. Aber wo immer es sinnvoll ist, sollten Lehrpersonen die Bedingungen dafür schaffen, dass alle Schülerinnen und Schüler mit ihren jeweiligen Lernmöglichkeiten einen Zugang zur Aufgabenstellung erhalten und sich an Prozessen des Gemeinsamen Lernens beteiligen können.

In diesem Beitrag soll daher aufgezeigt werden, wie durch die Adaption von Aufgaben eine stärkere Berücksichtigung von Heterogenität realisiert werden kann, welche insbesondere auch für den inklusiven Fachunterricht von Relevanz ist. Hierzu werden acht eng miteinander zusammenhängende Leitideen formuliert, die aus Gründen der Übersichtlichkeit nachfolgend getrennt voneinander beschrieben werden.

Die Anforderungsbereiche berücksichtigen: Das Anforderungsniveau der Aufgabenstellung variiert auf Grundlage verschiedener Anforderungsbereiche (Reproduzieren, Zusammenhänge herstellen, Verallgemeinern und Reflektieren; MSW, 2008), die innerhalb einer Aufgabe oder in unterschiedlichen Teilaufgaben angesprochen werden.

Tipps und Herausforderungen bereithalten: Die Bearbeitung der Aufgabenstellung wird durch unterschiedliche Formen der individuell angepassten Lernunterstützung (Tipps, Hilfsaufgaben, Sternchenaufgaben, Transferaufgaben, Wortspeicher, …) erleichtert.

Verwandte Aufgabenstellungen verwenden: Die Aufgabenauswahl erfolgt von den Schülerinnen und Schülern aus in der Regel zwei oder mehreren Aufgaben, mit gleicher oder ähnlicher Struktur, aber unterschiedlichen Inhalten. Diese zeichnen sich durch analoge Aufgabenanforderungen aus, die sich in Anspruch und Komplexität zwar unterscheiden, aber im Sinne des Spiralprinzips aufeinander aufbauen.

Offene Aufgaben einsetzen: Die Aufgabenauswahl wird innerhalb eines durch die Aufgabenstellung aufgespannten Rahmens, der vielfältige Wahlmöglichkeiten eröffnet, durch die Schülerinnen und Schüler selbst realisiert. Komplexität und Anspruchsniveau können sie demnach, ausgehend von ihren Lernmöglichkeiten, selbst bestimmen.

Unterschiedliche Darstellungsformen nutzen: Die Bearbeitung der Aufgabe wird durch die Bereitstellung unterschiedlicher Zugänge sowie die Nutzung und Vernetzung verschiedener Darstellungsformen (Handlungen an Material, Nutzung bildlicher Darstellungen, …) erleichtert.

Verschiedene Vorgehensweisen ermöglichen: Durch die Verwendung von mathematisch reichhaltigen Aufgaben („ergiebige Aufgaben"), die auf mathematischen Gesetzmäßigkeiten und Mustern beruhen, können die Lernenden unterschiedliche Vorgehensweisen zur Bearbeitung der Aufgabe im Hinblick auf individuelle Lernwege und angemessene Lernniveaus selbst auswählen.

Forschermittel verwenden: Das Nutzen von Forschermitteln (Pfeile, Einkreisungen, farbige Markierungen, Plättchen, Kärtchen zum Ordnen, Nummerierungen, …) kann die Schülerinnen und Schüler dabei unterstützen, Aufgabenstellungen zu bearbeiten bzw. die Darstellung der Ergebnisse und der Vorgehensweisen zu unterstützen.

Den gemeinsamen Austausch vorbereiten: Grundvoraussetzung für einen kompetenz- und schülerorientierten Mathematikunterricht, ist ein gemeinsamer Austausch der Lernenden im Rahmen einer übergeordneten Problemstellung. Die Aufgabenstellungen sollten demnach auf diesem Hintergrund gewählt werden, um eine gewinnbringende Kommunikation der Schülerinnen und Schüler untereinander zu ermöglichen.

Die genannten Leitideen verstehen sich als Konkretisierung des Prinzips der sog. natürlichen Differenzierung (nach Wittmann & Müller), welche Krauthausen und Scherer (2013) wie folgt umreißen: ein gemeinsames Lernangebot für alle Kinder; (inhaltliche) Ganzheitlichkeit und ein Mindestmaß an Komplexität (woraus sich naturgemäß unterschiedliche Schwierigkeitsgrade ergeben); Freiheit des Bearbeitungsniveaus, der Lösungswege, Hilfsmittel und Darstellungsweisen sowie ggf. auch der Problemstellungen selbst; soziales Lernen von- und miteinander. Weitere Ausführungen sowie konkretisierende Beispiele finden sich auf der Website des Projekts ‚Mathe inklusiv mit PIKAS' (http://pikas-mi.dzlm.de), eines Partnerprojekts von PIKAS (Selter & Bonsen, 2016).

Literatur

Brügelmann, H. (2011). Den Einzelnen gerecht werden - in der inklusiven Schule. Mit einer Öffnung des Unterrichts raus aus der Individualisierungsfalle! Zeitschrift für Heilpädagogik, 62(9), 355 - 361.

Fischer, Ch., unter Mitarbeit von Rott, D., Veber, M., Fischer-Ontrup, Ch. & Gralla, A. (2014). Individuelle Förderung als schulische Herausforderung. Berlin: Friedrich-Ebert-Stiftung.

Hattie, J. (2013). Lernen sichtbar machen. Baltmannsweiler: Schneider.

Helmke, A. (2010). Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität: Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts. Seelze: Klett-Kallmeyer.

Hußmann, S. & Selter, Ch. (2013). Diagnose und individuelle Förderung in der Lehrerbildung. Das Projekt dortMINT. Münster: Waxmann.

Klieme, E. & Warwas, J. (2011). Konzepte der individuellen Förderung. Zeitschrift für Pädagogik, 57 (6), 805–818.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2013). Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule. Seelze: Kallmeyer.

Kunze, I. (2008). Begründungen und Problembereiche individueller Förderung in der Schule - Vorüberlegungen zu einer empirischen Untersuchung. In I. Kunze & Ch. Solzbacher (Hg.), Individuelle Förderung in der Sekundarstufe I und II (S. 13-26). Baltmannsweiler: Schneider-Verlag.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (MSW; 2008). Lehrplan Mathematik an Grundschulen. Frechen: Ritterbach Verlag.

Selter, Ch. & M. Bonsen (2016). Konzeptionelles und Beispiele aus der Arbeit des Projekts PIKAS. In R. Biehler, Th. Lange, T. Leuders, B. Rösken-Winter, P. Scherer & Ch. Selter (Hg.), Mathematikfortbildungen professionalisieren. Heidelberg: Springer.

Johann SJUTS, Leer/Osnabrück

Mit Vignetten forschendes Lernen stimulieren

Was den Handelnden beim Lehren und Lernen im Eifer des Geschehens oft entgeht, lässt sich mittels Vignetten, also passend dokumentierten und fixierten Momenten, Szenen und Situationen, zum Vorschein bringen. Vignetten sind somit geeignet, forschendes Lernen zu initiieren und zu intensivieren.

Wie aber sollten Vignetten beschaffen sein, um Prägnantes und Prägendes hervorzuheben, um Eigentümliches und Exemplarisches aufzuzeigen? Was an Vignetten ist es, das Lehramtsstudierende und angehende Lehrerinnen und Lehrer als Forschende affiziert?

Vignetten dienen zum einen dem Aufbau beruflicher Kompetenzen und zum anderen dem Nachweis beruflicher Kompetenzen. In diesem Beitrag geht es um Vignetten in erstgenannter Hinsicht, also um Vignetten für den Einsatz zur Entwicklung und Weiterentwicklung beruflichen Wissens und Könnens.

Vignetten stellen ein reales oder fiktionales Lernmoment oder Lerngeschehen, eine reale oder fiktionale Lernsituation oder Lernszene in einem bestimmten Kontext dar. Vignetten sind vielfältig. Sie liegen vor allem in Form von Lerndokumenten, Aufgabenbearbeitungen, Tafel- oder Folienbildern und auch videographierten oder transkribierten Unterrichtsszenen vor. Sie bieten einen Anlass zu einer situierten Auseinandersetzung. Darin liegt ihre besondere Bedeutung als Gelegenheit zum Aufbau beruflicher Handlungskompetenzen.

Auch in der Mathematikdidaktik finden Vignetten mehr und mehr Verbreitung. Das führt zu der hier im Mittelpunkt stehenden Frage: Welche Gelegenheiten berufsfeldbezogenen forschenden Lernens (Sjuts 2015a) bieten Vignetten?

Dazu seien einige Miniaturen zur Fehler- und Förderdiagnostik angeführt. Zur Illustration dessen, was auf Lehrerinnen und Lehrer im Mathematikunterricht nämlich in fehler- und förderdiagnostischer Hinsicht zukommt, womit sie geradezu rechnen müssen, können kurze Aufgaben und Lösungen dienen (Sjuts 2015b).

Sie entstammen einem Unterricht, in dem so genannte Kopfübungen (Bruder 2008) einen festen Bestandteil bilden. Das Szenario ist wie folgt: Die Lehrperson stellt nach und nach mehrere kleine Aufgaben. Die jeweils gewährte Bearbeitungszeit ist kurz, aber ausreichend. Zwei aus der Lerngruppe befinden sich hinter den beiden aufgeklappten Tafelflügeln und notieren auf den nicht sichtbaren Tafelflächen ihre Rechnungen und Ergebnisse. Die anderen aus der Lerngruppe erledigen dies in ihren Heften. Am Ende werden die Tafelflügel wieder zugeklappt. Im Wechsel obliegt es den beiden Gruppenmitgliedern vorn, ihre Aufgabenbearbeitungen zu erklären und mit den anderen aus der Gruppe zu erörtern. Der diskursive Austausch ermöglicht eine Auseinandersetzung über verschiedene Ansätze, Vorgehensweisen und Begründungen und schließlich eine Klärung, die allen Schülerinnen und Schülern Sicherheit über Lösungswege und Ergebnisse liefert.

Hier einige Beispiele (Sjuts 2015b):

1. Wie lautet die kleinste vierstellige Zahl mit vier verschiedenen Ziffern?

1 2 3 4 | 1023

2. Welche Zahl ist dreimal so groß wie die Hälfte von 60?

60 : 2 = 30 · 3 = 90 | 60 : 2 = 30 30 · 3 = 90

3. Wie viele Ecken hat eine quadratische Pyramide, wie viele Kanten, wie viele Flächen?

4 Ecken, 8 Kanten, 4 Flächen | 5 Ecken, 8 Kanten, 5 Flächen

4. Beim Sportunterricht waren 24 Kinder, und zwar doppelt so viele Mädchen wie Jungen. Wie viele Mädchen waren beim Sportunterricht, wie viele Jungen?

24 : 2 = 12 12 : 2 = 6
12 Mädchen, 6 Jungen

24 : 3 = 8 8 · 2 = 16
8 Jungen, 16 Mädchen

5. Du bist der zehnte von vorn und von hinten. Wie viele seid ihr insgesamt?

10 + 10 = 20 | 10 + 10 + 1 = 21 | 9 + 1 + 9 = 19

Welche berufsfeldbezogenen Lernaktivitäten können Vignetten veranlassen?

Bei Aufgabe 1 ist zu erkennen, dass die Sonderrolle der Zahl 0 nicht im Blick zu sein scheint. Stelligkeit, Ziffer und Zahl sind genau zu fassende Begriffe in der Vorstellung und Darstellung von Zahlen. Klärungen und Abgrenzungen sind also wichtige Maßnahmen. Überdies ist die Bedeutung der Zahl 0 innerhalb der Mathematik und für das Mathematiklernen in vielen Veröffentlichungen nachzulesen.

Die unzulässige Notation in Aufgabe 2 ist bekanntermaßen weit verbreitet; allerdings steht sie einer Selbstüberwachung der einzelnen Rechenvorgänge und damit einer Missverständnisse vermeidenden Kommunikation mit anderen, aber auch mit sich selbst entgegen.

In Aufgabe 3 spielen räumliche Vorstellungen und ebenso geometrische Bezeichnungen eine Rolle. Passende Anschlussaufgaben können zu Klärungen führen.

Auch bei der Aufgabe 4 hat eine Ergebnisüberprüfung offenbar nicht stattgefunden. Und mit einer einfachen Korrektur ist es auch nicht getan. Tieferes Wissen über Verhältnisse und Anteile ist nötig. Konzepte zur Vermittlung hält die Mathematikdidaktik indes bereit.

Kommen kardinale und ordinale Zahlaspekte sowie arithmetische Anforderungen wie in Aufgabe 5 zusammen, ist eine besonders ausgeprägte Selbstüberprüfung von Vorstellungen und Darstellungen erforderlich. Verschiedene Maßnahmen passender Art sind durchaus bekannt. Allerdings ist hier auch auf Ursachen im Bereich der primardidaktischen Zahlbegriffsentwicklung einzugehen.

Insgesamt lässt sich sagen: Vignetten fordern zum Verstehen heraus. Dazu kann eine Literaturrecherche nötig werden. In der Sache sicher zu sein, ist grundlegend. Eine mathematikdidaktische Analyse vorzunehmen, erfordert auch entsprechendes Wissen. Zugleich sind Fragen nach den Tiefenstrukturen der Lehr-Lern-Prozesse zu beantworten. Und die für Vignetten charakteristische „teilnehmende Beobachtung“ verlangt, Handlungsoptionen zu entwickeln.

Anders als in realen Situationen kann vor dem Vollzug einer getroffenen Entscheidung eine vertiefte Auseinandersetzung stattfinden. Durch die Berücksichtigung zusätzlicher (recherchierter) Erkenntnisse, durch das Abwägen verschiedener Optionen wird eine Entscheidung für eine Anschlusshandlung begründet abgestützt.

Vignetten erlauben es, sowohl einfache als auch komplexe authentische Lehr-Lern-Situationen darzustellen. Beinahe von selbst entsteht eine sogar gezielte Auseinandersetzung. Selbstverständlich kann auch der Kontext zu einer bestimmten Aufgabenstellung führen. Typisch ist es, Ursachen zu benennen und Maßnahmen anzugeben. Und damit ist es möglich, eine große Bandbreite professionaler Fähigkeiten zu erproben. Dies kann im Gespräch, aber auch in einer Ausarbeitung geschehen. Die ausführliche Darlegung einer Fortführung der gegebenen Handlungssituation kann dann selbst zum Gegenstand einer Analyse von einem höheren Standpunkt aus werden.

Anzumerken ist jedoch: Vignetten mit Kontextgebundenheit und Komplexität sind zwar insofern von Vorteil, als sie authentische Situationen widerspiegeln, aber möglicherweise auch von Nachteil, da die durch sie erworbenen Handlungskompetenzen zu wenig klar und sicher sind. Die spezifische Eignung von Vignetten bedarf folglich der Überprüfung. Hier ist Forschungsbedarf.

Vignetten sind offensichtlich geeignet, Lernmomente gleichermaßen verstehend wie mitverstehend zu erfassen (Schratz, M. & Schwarz, J. F. & Westfall-Greiter, T. 2012, Streit & Weber 2013). Günstigenfalls gilt: Forschendes Lernen mittels Analysen von Fallbeispielen, vorgelegt in Form von Vignetten, leistet einen Beitrag zur Professionalisierung.

Bereits Mini-Vignetten bilden einen starken Impuls zum theoriegeleiteten forschenden Lernen. Sie können mathematisches Denken aufdecken. Sie schaffen aussichtsreiche Gelegenheiten, handlungsnahes mathematikdidaktisches Wissen aufzubauen und berufliches Können zu entwickeln (Sjuts 2015a). Dies gilt insbesondere für fehler- und förderdiagnostische Fähigkeiten.

Eine essentielle berufliche Aufgabe von Lehrpersonen ist es nämlich, Lehr-Lern-Prozesse so zu organisieren, dass Lernende Fehler erfassen und beheben, dass sie Fehler vorhersehen und vermeiden, dass sie also reaktiv und auch proaktiv mit Fehlern umgehen und dass sie am Ende das Richtige wissen und entsprechend zu handeln verstehen.

Zu fragen ist in Anlehnung an Lakoff & Johnson (2011): Inwieweit sind Vignetten wahrnehmungsbestimmende und handlungsstützende Erinnerungs- und Vorstellungsbilder? In welcher Art und Weise entwickelt sich organisiertes menschliches und berufliches Denken und Handeln? In welcher Form sind Wissen und Können gespeichert und verfügbar?

Denkbar ist, dass Vignetten so wie Sprachbilder das menschliche Konzeptsystem mitprägen, Wahrnehmungen (prototypisch) bestimmen, Erinnerungen aufbauen und Entscheidungen stützen und damit Erfahrungen, Vorstellungen und Orientierungen (partiell) strukturieren. So tragen sie dazu bei, Ressourcen für berufliches Denken und Handeln zu bilden. Durch Vorstellungsbilder stellt sich für Erinnern und Wiedererkennen ein Gefühl von Vertrautheit ein.

Literatur:

Bruder, R. (2008). Wider das Vergessen. Fit bleiben durch vermischte Kopfübungen. In: mathematik lehren, 147, 12-14.

Lakoff, G. & Johnson, M. (2011). Leben in Metaphern. Konstruktion und Gebrauch von Sprachbildern. Heidelberg Carl-Auer Verlag.

Schratz, M. & Schwarz, J. F. & Westfall-Greiter, T. (2012). Lernen als bildende Erfahrung. Vignetten in der Praxisforschung. Studienverlag Innsbruck.

Sjuts, J. (2015a). Mathematisches Denken unter die Lupe nehmen: Wie lassen sich Erkenntnisse im Berufsfeld gewinnen und Optionen für professionelles Handeln entwickeln? In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2015, 868-871.

Sjuts, J. (2015b). Forschendes Lernen mittels Analysen von Denk- und Verstehensprozessen: Fehler- und Förderdiagnostik in Mathematik. In: SEMINAR – Lehrerbildung und Schule. Heft 4, 2015, 56-67.

Streit, C. & Weber, C. (2013). Vignetten zur Erhebung von handlungsnahem, mathematikspezifischem Wissen angehender Grundschullehrkräfte. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2013, 986-989.

Elke SÖBBEKE, Paderborn

Analyse sprachlicher Mittel bei der Interpretation mathematischer Anschauungsmittel in der Grundschule

Anschauungsmittel aus epistemologischer & sprachlicher Perspektive

Kinder müssen im Mathematikunterricht bereits vom ersten Schuljahr an ein neues Bewusstsein dafür entwickeln, dass ein mathematisches Anschauungsmaterial nicht wie ein Material in der Alltagswelt des Kindes zu verstehen ist. Im Mathematikunterricht stehen nicht die konkreten Eigenschaften des Materials im Vordergrund, vielmehr ist das Anschauungsmittel in einer "*systemischen Welt*" zu verstehen, mit all seinen *nicht direkt sichtbaren Beziehungen und Strukturen* (vgl. Steenpaß 2014). Mit dieser Anforderung an die Nutzungsweise von Anschauungsmitteln ändert sich auch maßgeblich die Anforderung an die Sprache der Kinder.

Am Beispiel von 10 Plättchen soll nachfolgend verdeutlicht werden, inwiefern sich dieses Verstehen von Anschauungsmitteln (vgl. auch Steinbring 2014; Söbbeke 2015) sowie auch die Sprache der Kinder bei der Nutzung dieser Materialien verändern, ja ausdifferenzieren muss: (1.) Im Anfangsunterricht stellt das Zählen von konkreten Dingen eine wesentliche und bedeutsame Grundlage für die Entwicklung des Zahlbegriffs dar. Die konkreten didaktischen Mittel stellen den erklärenden Hintergrund für die zu verstehenden neuen Zahlzeichen und Zahlworte dar. Diese zu Beginn beim Zählen von Dingen benutzte *dingliche* Deutung, »ein Plättchen entspricht 1«, erfährt eine erste Wandlung, wenn die Plättchen bspw. in die Form eines Rechteckmusters gelegt werden. (2.) Nun können neue *systemische* Aspekte des Anschauungsmaterials in den Blick genommen werden. Das Rechteck der Plättchen enthält *komplexe interne Beziehungen zwischen den Elementen*. Zum Beispiel die Hervorhebung der beiden Seiten des Rechtecks als zwei neue »Einheiten«, sodass die Multiplikationsaufgaben "2•5" und "5•2" in das Feld hineingesehen werden können. Wenn beide Struktureinheiten systemisch aufeinander bezogen werden, kann eine erste Idee der Kommutativität der Multiplikation mit den Kindern entwickelt werden. Ein noch differenzierterer systemischer Aspekt wäre eine Zerlegung des Feldes, z.B. in "1•5+1•5" Punkte (distributive Zerlegung). Auch die Anforderungen an die Sprache verändern sich: In der *ersten* Betrachtung ist eine sprachliche Darstellung der Plättchen notwendig, die diese als diskrete Objekte beschreibt, die gezählt werden. Für die *zweite* Betrachtung müssen kommunikative Mittel genutzt werden, um etwas *Potentielles* auszudrücken: "Was ist die Funktion der Plättchen?",

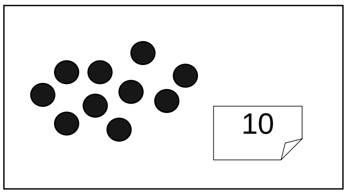


Abb. 1

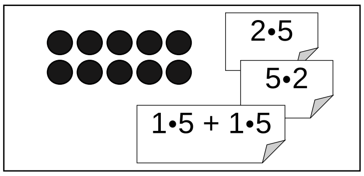


Abb. 2

"Welche Rolle nimmt das Plättchen im Gesamtsystem ein?" Langfristig ist dies eine grundlegende Voraussetzung für das mathematische Lernen, insbesondere dann, wenn Kinder im Kontext anschaulicher Beweise erste Verallgemeinerungen begründen sollen.

Konsequenzen für die Forschung

Der Aufbau von solch strukturellem Wissen kann nicht von einem Kind alleine geleistet werden, sondern er vollzieht sich immer in der sozialen Interaktion. Es bedarf eines gemeinsamen Sprechens über das Anschauungsmittel, um die abstrakten begrifflichen Aspekte in den Anschauungsmitteln überhaupt nutzbar für das Lernen zu machen. Aber gerade das Versprachlichen solcher Beziehungen stellt eine anspruchsvolle Anforderung für Kinder dar, die im Rahmen dieses Forschungsprojektes analysiert wird.

Zur Zeit werden aus der aktuellen Forschung theoretische Modelle und Instrumente gesichtet, die sich mit der beschriebenen epistemologischen Theorie verbinden lassen. Verschiedene Forschungen auf dem Gebiet "Sprache und Mathematik" untersuchen die Rolle der Sprache in Prozessen des mathematischen Lernens, insbesondere beim Verallgemeinern oder in der Auseinandersetzung mit Mustersequenzen (vgl. Akinwunmi 2012; Frobisher & Threlfall 1999; Link 2012; Steinweg 2001). Die einzelnen Modelle können an dieser Stelle nur verkürzt und zusammenfassend wiedergegeben werden; sie zeigen insgesamt, dass das Versprachlichen der Muster verschiedene Ebenen umfasst: Auf der untersten Ebene werden Muster erkannt und fortgesetzt, auf der nächsten Ebene werden Muster beschrieben. Auf der höchsten Ebene begründen Kinder den Aufbau eines Musters. Die Beschreibungen und Begründungen können unter Nutzung von einem oder mehreren Beispielen, unter Nutzung von Quasivariablen oder auch durch Nutzung von Wörtern mit Variablencharakter erfolgen. In vielen Veröffentlichungen zu Sprache und Mathematiklernen werden auch technische Aspekte beschrieben, die die mathematische Kommunikation beeinflussen: Wortschatz, Fachsprachaspekte, linguistische Aspekte etc. Diese sprachlichen Ausdrücke sind eine wichtige linguistische Grundlage, die von den Kindern gelernt werden muss. Dennoch verdeutlichen die vorherigen Ausführungen, dass die Kinder Fachausdrücke überhaupt erst einmal mit der inhaltlichen mathematischen Idee verbinden müssen, ihnen einen begrifflichen Sinn verleihen müssen, so dass die Analyse sprachlicher Mittel in der eingenommenen epistemologischen Perspektive über die Beschreibung solch technischer Bedingungen hinaus gehen muss: »This 'speaking mathematically' (Pimm 1989) is more than just learning vocabulary and using these words in the right linguistic form.« (Vogel & Huth 2010, 1034). In der nebenstehenden Matrix sind diese Erkenntnisse aus der Literatur aufgespannt (Abb. 3). Die Matrix zeigt in der linken Spalte die sprachliche Spanne von Beschreibungen auf der einen und Begründungen auf der anderen Seite. Dieser Bereich wird durch die epistemologischen Aspekte aus Abschnitt 1 angereichert. Ziel des Forschungsprojektes ist es, detaillierte Kategorien für die Felder der Matrix zu entwickeln.

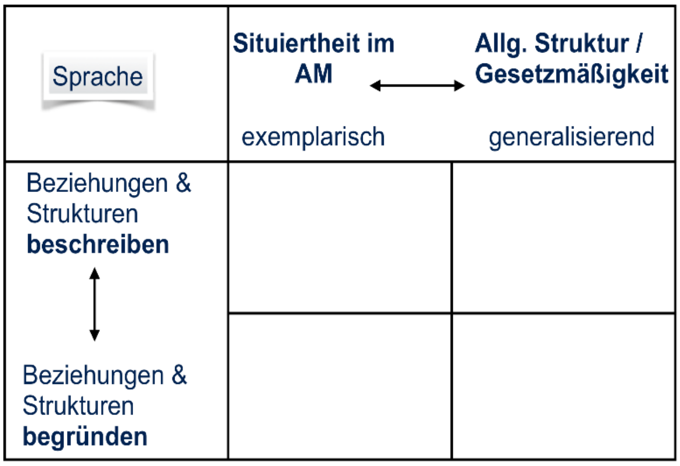


Abb. 3

Sprachliche Mittel bei der Erkundung von Anschauungsmitteln

Die folgenden Beispiele können an dieser Stelle des Forschungsprozesses noch nicht einer sorgsamen wissenschaftlichen Analyse unterzogen werden, vielmehr sind sie von illustrierendem Charakter, um die Frage nach den sprachlichen Mitteln anhand empirischen Datenmaterials zu konkretisieren. Paul und Alexander (3. Sj.) finden die Aufgaben "6•6" und "25+5+5+1" als passend zu dem Punktefeld (Abb. 4). Die Umdeutung des Feldes von "6•6" zu einer Zerlegung in "25+5+5+1" stellt auch eine produktive Voraussetzung für das Verstehen geeigneter Strategien zur Berechnung komplexerer Multiplikationsaufgaben dar. Durch ihre spontane Umdeutung des Punktefeldes entwickeln die beiden Kinder hier erste Ansätze einer langfristig tragfähigen Idee, die jedoch vage und implizit beleibt, wenn nicht darüber gesprochen wird. Die verbalen Äußerungen der Kinder zeigen, wie unterschiedlich die Passung der Aufgaben zu dem Punktefeld *begründet* wird: Paul bezieht sich in seinen Äußerungen auf die konkreten Eigenschaften der vier Segmente, indem er Beispielanzahlen beschreibt und zeigt und exemplarisch auf die konkret vorgenommene Zerlegung des Feldes verweist.

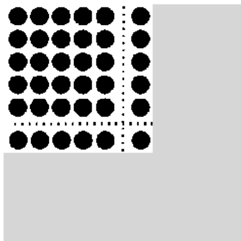


Abb. 4

Paul: »weil das passt auch, weil ich die hier sehe, die 25 is hier (zeigt *auf das 5x5-Quadrat*), die 5 is hier und hier (*zeigt auf die fünf Punkte neben und dann unterhalb der gestrichelten Linie*), und das ist die Eins.«

Alexander bezieht sich nicht auf die konkreten Anzahlen, sondern beschreibt die Beziehung zwischen den Elementen in der Anordnung und der Aufgabe. In Alexanders Äußerung wird ein erster Aspekt des Verallgemeinerns deutlich, indem er einen *wiederkehrenden Strukturierungsaspekt kommuniziert* (durch Sprache und Gesten). Auch wenn man den Winkel in dem Feld verschieben würde (und sich hierdurch die konkreten Punkteanzahlen in den Segmenten ändern würden), könnte doch Alexanders Idee des »Trennens und Zusammennehmens« immer wieder aufgegriffen werden, um die Passung der Aufgaben zu begründen:

Alexander: »Und die Aufgabe passt gut, weil dann kann man die alle doch genauso zusammennehmen, wie das (zeigt auf die vier Felder), wie hier die Striche (fährt mit dem linken Zeigefinger über die beiden gestrichelten Linien des Punktefeldes), wie die die getrennt haben.«

Ausblick

Vor dem Hintergrund obiger Ausführungen wird deutlich, dass die Bedingungen des Lehrens und Lernens von Mathematik äußerst komplexen *epistemologischen Voraussetzungen* und infolgedessen anspruchsvollen *sprachlichen Bedingungen* unterliegen. Diese Bedingungen sind sorgsam und grundlegend zu erforschen. Zur Zeit werden hierzu Interviewaufgaben entwickelt, die gezielt für das Kind zu beobachtende Kontraste zwischen verschiedenen Anschauungsmitteln provozieren, indem bestimmte strukturelle Beziehungen beibehalten werden und Eigenschaften auf der direkt zu beobachtenden Ebene (z.B. Punkteanzahlen) verändert werden.

Literatur

Akinwunmi, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Frobisher, L. & Threlfall, J. (1999): Teaching and assessing patterns in number in the primary years. In: Orton, A. (Hrsg.): *Pattern in the teaching and learning of mathematics*. London: Cassell, S. 84-103.

Link, M. (2012). *Grundschulkinder beschreiben operative Zahlenmuster*. Entwurf, Erprobung und Überarbeitung von Unterrichtsaktivtäten als ein Beispiel für Entwicklungsforschung. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Söbbeke, E. (2015). Language use, mathematical visualizations, and children with language impairments. In: *Proceedings CERME 9*, Prague, Czech Republic, S. 1497-1502.

Steenpaß, A. (2014). *Grundschulkinder deuten Anschauungsmittel. Eine epistemologische Kontext- und Rahmenanalyse zu den Bedingungen der visuellen Strukturierungskompetenz*. Dissertation, Universität Duisburg-Essen: http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DocumentServlet?id=35866.

Steinbring, H. (2014). *Die Rolle von Materialien, Anschauungsmitteln und Zeichen für das Lernen von Mathematik. Eine epistemologische Perspektive*. Vortrag auf der Tagung "Mathematik und Lehr-Lern-Prozesse - Theorie und Erfahrung". Ohrbeck, (24.-26.09.2014), Unveröffentlichtes Manuskript.

Steinweg, A. S. (2001). *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern: Epistemologisch-pädagogische Grundlegung*. Münster: LIT

Vogel, R. & Huth, M. (2010). Mathematical cognitive processes between the poles of mathematical technical terminology and the verbal expressions of pupils. In: *Proceedings CERME 6*. Lyon, France: http://www.inrp.fr/editions/editions-electroniques/cerme6, S. 1013-1022.

Anna-Christin SÖHLING, Münster

Das Lernen von Mathematik beim Problemlösen

1. Einleitung

Das Problemlösen hat spätestens seit den internationalen Vergleichsstudien einen festen Platz im Mathematikunterricht, der auch in den Bildungsstandards festgelegt ist. Befasst man sich als DidaktikerIn mit dem Problemlösen im Mathematikunterricht, so stößt man auf eine Fülle an Materialien zu den sogenannten heuristischen Strategien (siehe etwa Bruder & Collet 2011). Eine Frage, die nicht so oft gestellt zu werden scheint, ist die Frage danach, was beim Problemlösen an Mathematik gelernt wird und gelernt werden kann. Dennoch gibt es Bemühungen, das mathematische Lernen durch Problemlösen stärker in den Unterricht miteinzubinden (siehe etwa Schoen & Charles 2003). So werden zunehmend Materialien entwickelt, die das Lernen mathematischer Inhalte durch Problemlösen fördern sollen.

Auf der anderen Seite dieser recht optimistischen Bemühungen stehen Beobachtungen, dass das Lernen mathematischer Inhalte oft bereichsspezifisch erfolgt (siehe Bauersfeld 1983). Es ist naheliegend, dass auch das mathematische Lernen beim Problemlösen bereichsspezifisch ist.

Im Folgenden soll der Frage nachgegangen werden, was beim Problemlösen an Mathematik gelernt wird und gelernt werden kann, also wie allgemein oder bereichsspezifisch die Erkenntnisse sind, die beim Problemlösen gewonnen werden. Es wird ein Analyseinstrument vorgestellt, welches dazu dienen kann, das Allgemeine oder Bereichsspezifische von Äußerungen bzw. Lösungswegen von SchülerInnen herauszuarbeiten.

2. Methoden

In Einzelinterviews wurden 51 SchülerInnen der 4.-6. Klasse verschiedener Schulformen dazu aufgefordert, Problemaufgaben laut denkend zu lösen. Dabei wurden nacheinander Aufgaben aus einer Aufgabengruppe gestellt, die aus Expertensicht dieselbe mathematische Struktur aufweisen (siehe zum

Lesen-Aufgabe	Schäfchen-Aufgabe
Quicki las in einer Woche ein Buch von 133 Seiten. Am Montag las sie einige Seiten und von da ab jeden Tag 5 Seiten mehr als am Tag davor. Am Sonntag wurde sie fertig. Wie viele Seiten las sie am Montag? (Rasch 2001, S. 182)	Von Montag bis Freitag wurden auf einer Weide zusammen 60 Schäfchen geboren. Am Dienstag waren es drei mehr als am Montag, am Mittwoch wieder drei mehr als am Dienstag, am Donnerstag wieder drei mehr als am Mittwoch, am Freitag drei mehr als am Donnerstag. Kannst du herausfinden, wie viele Schäfchen an den einzelnen Wochentagen geboren wurden? (Rasch 2001, S. 194)

Beispiel die Lesen- und die Schäfchen-Aufgabe). Das bedeutet, dass die Variablen und Konstanten in den Aufgabenstellungen je in der gleichen Relation zueinander stehen, wobei die Größen der Konstanten variierten. Im Prinzip war es dadurch möglich, ein bei einer Aufgabe gefundenes Lösungsverfahren bei den strukturgleichen Aufgabenvarianten ebenfalls anzuwenden. Hierdurch sollte überprüft werden, ob und wenn ja inwiefern Erkenntnisse, die beim Lösen einer Aufgabe gewonnen wurden, zum Lösen weiterer strukturgleicher Aufgaben genutzt wurden.

3. Abduktionstheorie und der Begriff der latenten Sinnstruktur

Das Vorgehen der SchülerInnen wurde mithilfe der Abduktionstheorie nach Peirce (1903) rekonstruiert, die Meyer (2007) für die Mathematikdidaktik nutzbar machte. Bei der Abduktion wird von einem überraschenden Resultat aus auf einen erklärenden Fall und ein passendes Gesetz geschlossen. Dabei kann die Anwendbarkeit bekannter Gesetze im neuen Kontext entdeckt werden oder es können neue Gesetze gefunden werden. Da sich SchülerInnen beim Problemlösen in ihnen unbekannten Bereichen bewegen, sind beide Möglichkeiten naheliegend.

Eine Schwierigkeit bei der Analyse von Problemlöseprozessen besteht in der Rekonstruktion des entdeckten Gesetzes. Es ist möglich, dass ein Schüler einen allgemeinen Zusammenhang entdeckt hat, den er problemlos in anderen Kontexten nutzen kann, aber es ist ebenso denkbar, dass die Erkenntnis vorerst bereichsspezifisch bleibt. Je nachdem, wie allgemein oder bereichsspezifisch die Erkenntnis wohl seitens des Schülers war, ist das Gesetz entsprechend zu formulieren.

An dieser Stelle bietet es sich an, die Theorie der logischen Schlussformen um den Begriff der latenten Sinnstruktur zu erweitern. Der Begriff der latenten Sinnstruktur entstammt der objektiven Hermeneutik nach Oevermann und umfasst „die durch Regeln erzeugten objektiven Bedeutungen einer Sequenz von sinntragenden Elementen einer Ausdrucksgestalt“ (Oevermann 2001, S. 39). Dies schließt alle denkbaren Allgemeinheitsgrade mit ein, die man in einer Äußerung sehen kann, und auch unterschiedlich tiefgehende Erkenntnisse, etwa einer mathematischen Struktur.

Bei der Rekonstruktion von entdeckten Gesetzmäßigkeiten ist es sinnvoll, das Gesetz in allen möglichen Allgemeinheitsgraden zu formulieren, bevor an Folgeäußerungen oder an der Bearbeitung einer strukturgleichen Aufgabe entschieden werden kann, wie allgemein oder bereichsspezifisch eine Entdeckung wohl war.

Aber nicht nur bei der Analyse von Problemlöseprozessen, sondern auch in der Praxis kann es hilfreich sein, sich als Lehrkraft der latenten Sinnstruktur von Schüleräußerungen und von Lösungswegen bewusst zu sein. Denn beim

Problemlösen können entdeckte Zusammenhänge oder Lösungswege oftmals verallgemeinert werden. Dabei ist die allgemeine Form des entdeckten Zusammenhangs oder Lösungsweges latent im konkreten Vorgehen eines Schülers angelegt. Der Schüler mag noch nicht realisieren, dass sein gefundener Lösungsweg verallgemeinerbar ist, und für ihn mag die allgemeine Form eines entdeckten Zusammenhangs zunächst latent bleiben. Dies würde sich zum Beispiel dann zeigen, wenn es einem Schüler nicht gelingt, sein gefundenes Verfahren auf eine strukturgleiche Aufgabe zu übertragen.

4. Beispielanalyse

Um die bisher recht abstrakten Ausführungen zu veranschaulichen, soll im Folgenden ein Ausschnitt einer Beispielanalyse gezeigt werden.

Lennart (5. Klasse, Realschule) probiert bei der Lesen-Aufgabe zunächst verschiedene Summen mit 7 Summanden aus, die jeweils um 5 wachsen. Dabei nähert er sich schrittweise der gewünschten Summe von 133 an. Bei der Summe $5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30 + 35 = 140$ sieht er, dass sein Ergebnis um 7 zu groß ist und dass er von jedem Summanden 1 abziehen muss, um auf das Ergebnis zu kommen. Lennarts Entdeckung lässt sich unterschiedlich allgemein rekonstruieren. Im Folgenden seien nur drei unterschiedlich allgemeine Gesetze genannt, die latent in Lennarts Entdeckung angelegt sein können:

Gesetz A: Wenn man in einer Summe mit 7 Summanden (und konstanter Differenz) jeden Summanden um 1 verringert, dann ändert sich die Summe insgesamt um 7, ohne dass sich die konstante Differenz zwischen den Summanden ändert.

Gesetz B: Wenn man in einer Summe mit x Summanden jeden Summanden um 1 verringert, dann ändert sich die Summe insgesamt um x.

Gesetz C: Wenn man in einer Summe mit x Summanden jeden Summanden um y verringert, dann ändert sich die Summe insgesamt um x*y.

Gesetz A ist bereichsspezifisch an die gegebene Situation gebunden. Vielleicht hat Lennart nur in dieser konkreten Situation gesehen, dass sich die Zielsumme schneller erreichen lässt, aber kann diese Erkenntnis nicht auf andere Summen, etwa mit einer anderen Anzahl an Summanden und ohne konstanter Differenz der Summanden (Gesetz B) anwenden. Interessant ist Gesetz C, welches sich auf beliebige lange Summen anwenden lässt und auch größere Differenzen zur Zielsumme schnell überwinden lässt. Die allgemeineren Gesetze B und C sind im Vorgehen von Lennart bereits latent angelegt, wobei fraglich ist, ob Lennart dies bereits realisiert. Da Lennart bei der Bearbeitung der Schäfchen-Aufgabe den entdeckten Zusammenhang erst nutzt, als seine durch Probieren ermittelte Summe mit 5 Summenden um 5 von der gewünschten Zielsumme abweicht, liegt es nahe, dass für ihn das Allgemeine seiner Entdeckung, also etwa Gesetz C, noch latent bleibt.

5. Fazit

In einem Mathematikunterricht, in dem der mathematische Erkenntnisgewinn beim Problemlösen im Vordergrund steht, kann die Lehrkraft sich dafür verantwortlich sehen, den SchülerInnen bei der Realisierung zunächst latent bleibender Zusammenhänge zu helfen oder von Mitschülern helfen zu lassen. Außerdem kann sie den Vergleich von verschiedenen Lösungswege (etwa bei Mathekonferenzen) gezielt moderieren und den SchülerInnen besser helfen, allgemeinere Verfahren oder Zusammenhänge in ihren konkreten Lösungswegen zu sehen, wenn sie sich der latenten Sinnstruktur möglicher Lösungswege und Schüleräußerungen bewusst ist. Durch die Herausarbeitung der latenten Sinnstruktur von möglichen und tatsächlichen Lösungswegen gelingt es außerdem, das mathematische Potential von Aufgaben zu erfassen, was wesentlich ist, wenn man Problemaufgaben gezielt zur Erarbeitung von mathematischen Inhalten einsetzen möchte.

Insgesamt wurde die Weiterentwicklung eines Analyseinstruments zur Untersuchung des Erkenntnisgewinns bei Problemlöseprozessen vorgestellt, welches möglicherweise auch dazu nutzbar sein kann, Transferprozesse detailliert zu untersuchen.

Literatur

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In: H. Bauersfeld u.a. (Hrsg.): Lernen und Lehren von Mathematik. Untersuchungen zum Mathematikunterricht, Band 6. Köln: Aulis Verlag Deubner, S. 1-56.

Bruder, R., & Collet, C. (2011). Problemlösen lernen im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Skriptor.

Meyer, M. (2007): Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument. Hildesheim: Franzbecker.

Oevermann, U. (2001). Die Struktur sozialer Deutungsmuster – Versuch einer Aktualisierung. sozialersinn, 2, 35-81.

Peirce, C.S. Collected Papers of Charles Sanders Peirce, (Band 1-6. C. Hartshorne & P. Weiß (Hrsg.), 1931-35; Band 7-8 A.W. Burks (Hrsg.), 1985), Cambridge: Harvard University Press.

Rasch, R. (2001). Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Hildesheim: Franzbecker.

Schoen, H.L. & Charles, R.I. (2003). Teaching Mathematics through Problem Solving – Grades 6-12. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Christian SPREITZER, Baden (Österreich)

Modellieren mit dem Smartphone oder wie sich der Modellierungskreislauf schließen lässt

Alle gängigen Smartphones sind mittlerweile mit verschiedensten Sensoren ausgestattet, deren Messdaten in Hundertstelsekunden-Intervallen ausgelesen und abgespeichert werden können. Damit eröffnen sich neue Möglichkeiten in der Modellierung realer Prozesse, insbesondere das Testen und Verfeinern eines mathematischen Modells anhand realer Daten. Als Beispiel für eine solche Smartphone-Modellierung wird die Nutzung der im Gerät eingebauten Beschleunigungssensoren zur Aufzeichnung von Pendelschwingungen vorgestellt. Die gemessenen Daten können problemlos auf einen Rechner übertragen und in einer Tabellenkalkulation weiterverarbeitet werden.

Warum sich der Modellierungskreislauf nicht immer schließen lässt

Mithilfe eines mathematischen Modells möglichst präzise Vorhersagen für ein reales System zu erstellen, ist meist das eigentliche Ziel von Modellierungen in der angewandten Mathematik. Typische Beispiele dafür sind etwa die Wettervorhersage, die Positionsbestimmung mittels Satellitennavigation, die Modellierung von Kapitalmärkten, die Risikoabschätzungen von Versicherungsunternehmen oder die modernen bildgebenden Verfahren in der medizinischen Diagnostik (Computertomographie, Magnetresonanztomographie). Ein wesentlicher Aspekt der Modellentwicklung ist dabei stets die ständige Verbesserung des Modells durch das Vergleichen seiner Vorhersagen mit neuen Daten über das zu beschreibende reale System. Das Sammeln neuer Daten durch Messungen oder Erhebungen erlaubt es, ein Modell zu testen und in der Folge zu modifizieren bzw. zu verfeinern. Dieser Prozess lässt sich symbolisch durch einen "Modellierungskreislauf" darstellen.

Modellierungsaufgaben können durch ihren Anwendungsbezug den Mathematikunterricht bereichern und die Motivation der Lernenden steigern. Realitätsnahe Aufgaben sollten im besten Fall alle Phasen des Modellierungskreislaufs abbilden. Insbesondere das Testen des Modells am realen System ist jedoch bei vielen bzw. typischen Modellierungsaufgaben in Lehrbüchern prinzipiell nicht möglich, wodurch der Modellierungskreislauf unterbrochen wird und daher kein solcher mehr ist.

Das Modell kann (aus praktischen Gründen) häufig nur anhand derselben (und oft nicht realen) Daten überprüft werden, die bereits zur Modellentwicklung herangezogen wurden. Reproduziert das Modell die gegebenen Daten, ist eine weitere Modellverbesserung oder -korrektur damit grundsätzlich nicht mehr möglich. Mehr als das Beschreiben der zur Verfügung stehenden Daten durch mathematische Strukturen oder Objekte (z.B. Funktionen) dürfen wir von einem solchen Modell also nicht erwarten. Völlig verschiedene Modelle können durch geeignete Anpassung von Parametern schließlich dieselben Datensätze hervorragend reproduzieren (z.B. unterschiedliche nichtlineare Regressionsfunktionen). Ob ein auf diese Weise gewonnenes Modell die Realität einigermaßen vernünftig beschreibt, wissen wir nicht (dies schließt mitunter auch die Aufgabensteller*innen ein).

Ein Wettervorhersagemodell in Form einer Polynomfunktion, die durch Interpolation der Tagestemperaturen des Vorjahres gewonnen wird, gibt den Temperaturverlauf des Vorjahres zwar exakt wieder, wird sich in der Vorhersage der Temperaturen des heurigen Jahres jedoch für viele Tage als nicht zufriedenstellend erweisen (z.B. aufgrund einer anderen Großwetterlage als am selben Tag des Vorjahres). Entscheidend für die Güte eines Modells ist aber gerade seine Fähigkeit, Vorhersagen über das reale System unter geänderten Bedingungen zu machen.

Smartphones lassen sich als Messinstrumente einsetzen

Neue Daten in anderen Zuständen des realen System zu akquirieren, ist in der Unterrichtspraxis allerdings meist sehr aufwendig oder gar unmöglich, außer

- das zu untersuchende System ist direkt zugänglich (z.B. ein physikalisches System, das im Klassenzimmer auf- oder nachgebaut werden kann) und
- die Datenerfassung erfolgt nicht von Hand bzw. analog, sondern automatisiert bzw. digital mithilfe von Sensoren, deren Messdaten elektronisch aufgezeichnet und übertragen werden.

In Smartphones ist ein Sammelsurium verschiedenster Sensoren eingebaut (zur Messung von Beschleunigungen, magnetischer Feldstärke, Lichtstrom, Distanz, Geräuschpegel, Luftdruck, Temperatur etc.); vor allem die Beschleunigungssensoren besitzend eine hohe Genauigkeit. Die Sensordaten werden typischerweise in Hundertstelsekunden-Intervallen ausgelesen (die Intervallgrößen sind einstellbar) und lassen sich mit kostenlosen Apps (z.B. AndroSensor, GeoGebra Sensors App) in csv-Dateien speichern, die wiederum mittels USB oder Bluetooth auf einen Laptop oder PC übertragen werden können. Smartphones eignen sich daher hervorragend als digitale Messinstrumente, die die gemessenen Daten unmittelbar in elektronischen Standardformaten bereitstellen.

Modellierung mit Feedback: Das Smartphone-Pendel

Ein Modellierungsproblem, das die Sensortechnik von Smartphones nutzt, um Messdaten zu gewinnen, soll im Folgenden kurz vorgestellt werden. Die

Aufgabe besteht darin, den zeitlichen Schwingungsverlauf eines Pendels zu modellieren. Ein Smartphone kann als Pendelkörper und gleichzeitig als Messinstrument verwendet werden, um die während des Schwingungsvorgangs wirkenden Beschleunigungen aufzuzeichnen. Das Smartphone muss dazu nur in einer Box am Ende einer Schnur oder einer Stange befestigt werden.

	A	B	C	T	U	V
1	ACCELEROMETER X	ACCELEROMETER Y (	ACCELEROMETER Z	Time since start in ms	YYYY-MO-DD HH-MI-SS_SSS	
2	-0.568	1.175	9.612	4	2015-04-02 20:20:16:806	
3	-0.651	1.331	10.151	63	2015-04-02 20:20:16:865	
4	-0.554	1.443	9.439	113	2015-04-02 20:20:16:915	
5	-0.554	1.443	9.439	167	2015-04-02 20:20:16:969	
6	-0.176	1.563	9.323	227	2015-04-02 20:20:17:029	
7	-1.897	2.358	11.079	294	2015-04-02 20:20:17:096	
8	-1.584	2.061	9.48	361	2015-04-02 20:20:17:163	
9	-3.367	1.146	11.78	412	2015-04-02 20:20:17:214	
10	-2.957	1.444	9.293	468	2015-04-02 20:20:17:270	
11	-3.792	0.632	10.048	525	2015-04-02 20:20:17:327	
12	-5.701	2.9	9.529	579	2015-04-02 20:20:17:381	

Abb. 1: Smartphone als Pendelkörper, Sensor-App, Rohdaten der Beschleunigungssensoren nach Import in Tabellenkalkulation.

Ist das Display stets senkrecht zur Pendelschnur orientiert, dann ist die Beschleunigungskomponente orthogonal zur Displayebene (dies ist in der Regel die z-Komponente) unabhängig von etwaigen Rotationen des Smartphones durch Torsion der Pendelschnur während des Schwingungsvorgangs (was durch Verwendung einer Pendelstange vermieden werden kann).

Zu Beginn des Experiments wird in der Sensor-App die Aufzeichnung der Sensordaten gestartet, am Ende des Experiments wieder gestoppt. Die Rohdaten (z.B. im csv-Format) werden dann in eine Tabellenkalkulation exportiert und grafisch dargestellt.

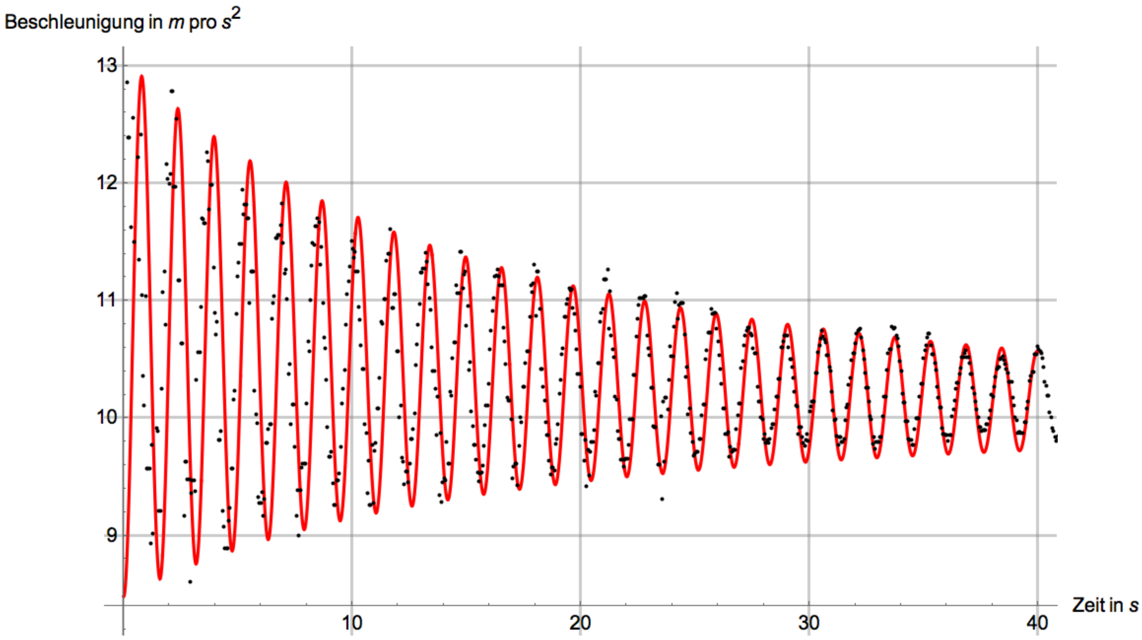


Abb. 2.: Gemessene Beschleunigungsdaten (Punkte) und berechnete Kurve (numerische Lösung der entsprechenden Differentialgleichung)

Ausgehend von den Messdaten wird ein mathematisches Modell entwickelt. Die Modellierung kann im einfachsten Fall rein phänomenologisch erfolgen, indem nach einer zeitabhängigen Funktion gesucht wird, die die Daten am besten beschreibt. Anspruchsvoller ist die Entwicklung eines die physikalischen Zusammenhänge berücksichtigenden Differentialgleichungsmodells. In jedem Fall enthält das gewonnene Modell Parameter, die den Anfangsdaten der Schwingung bzw. charakteristischen Größen wie der Pendellänge zugeordnet werden können. Mithilfe dieses Modells lassen sich nun Vorhersagen erstellen, wie Schwingungsverläufe mit anderen Anfangsdaten bzw. Pendellängen aussehen sollten.

Diese Vorhersagen können umgehend experimentell überprüft werden, indem entsprechende Schwingungsvorgänge mit dem Smartphone aufgezeichnet werden. Das Modell kann also sofort getestet und durch neue Messungen am Pendel falsifiziert bzw. weiter verbessert werden, wodurch sich der Modellierungskreislauf schließt. Es wird hier auch erfahrbar, was es eigentlich bedeutet, ein mathematisches Modell für ein reales Phänomen zu entwickeln und dass dabei immer auch Kenntnisse aus anderen Disziplinen einfließen müssen, um ein funktionierendes Modell zu erhalten.

Literatur

Spreitzer, C. (2015). Numerische Modellierung der gedämpften Pendelschwingung und des Falls aus großer Höhe. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG, Heft 48*, 119–135 (online unter http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/)

Mark SPRENGER, Karlsruhe

Erste Ergebnisse einer Interventionsstudie über die Wirksamkeit von Lehrerfortbildungen zum Thema Rechenschwäche

Ausgangslage

Um Schwierigkeiten beim Rechnenlernen angemessen und sinnvoll begegnen zu können, werden fachlich versierte Lehrerinnen und Lehrer benötigt, die in der Lage sind Rechenschwierigkeiten zu diagnostizieren und Förderangebote zu erstellen und durchzuführen (Gaidoschik, 2008). Um diese Aufgaben erfüllen zu können, brauchen Lehrpersonen ein fundiertes Wissen über die Ursachen und Symptome, über die Diagnose dieser Symptome, sowie die Gestaltung darauf abgestimmter Fördermaßnahmen.

Bisherige Untersuchungen haben gezeigt, dass dieses Wissen nicht immer in ausreichendem Maße vorhanden ist (Lesemann, 2015; Schulz, 2014). Schulz (2014) dokumentiert, dass Lehrpersonen durchaus Phänomene wahrnehmen, aber nur ungenaue Diagnosen stellen können. Ebenso sind ihnen zwar Förderformate bekannt, aber nicht unbedingt passgenaue zu den beobachteten Problemen.

Hier können Lehrerfortbildungen ansetzen. Metaanalysen von z.B. Hattie (2014) und Lipowsky (2014) zeigen, dass Lehrerfortbildung ein wirksames Mittel zur Förderung des Lehrerwissens, zur Verbesserung des Unterrichts und zur Förderung von Schülerinnen und Schülern sein können.

In der vorliegenden Studie werden zwei Fortbildungsmodelle zum Thema Rechenschwäche evaluiert: Bei dem Modell A handelt es sich um einjährige Qualifizierungsmaßnahmen, die weit über das Thema Rechenschwäche hinausgehen und auch arithmetische Inhalte wie die Multiplikation, Division und das Rechnen mit Brüchen beinhalten. Außerdem werden die Inhalte konkret in einem wöchentlich stattfindenden Förderunterricht in Kleingruppen umgesetzt. Die Qualifizierungsmaßnahmen werden an insgesamt sieben Tagen über ein Jahr verteilt angeboten und orientieren sich dabei an den Merkmalen wirksamer Fortbildungen, wie z.B. Fortbildungsdauer, Input-, Erprobungs-, und Reflexionsphasen, inhaltliche Relevanz, selbstorganisiertes Lernen und Fokussierung auf domänenspezifische Lern- und Verstehensprozesse von Schülern (Lipowsky, 2014). Bei dem Modell B handelt es sich um eintägige Fortbildungen, die soweit dies an einem Tag möglich ist, ebenfalls die Kriterien wirksamer Fortbildungen berücksichtigen. Gemeinsam ist den beiden Fortbildungsformaten, dass sie sich zu Beginn mit dem Thema ‚Schwierigkeiten beim Rechnenlernen' beschäftigen.

Forschungsfragen

Vor dem Hintergrund des Forschungsstandes ergeben sich folgende Forschungsfragen: Wie wirken sich die Qualifizierungsmaßnahmen in Form von Fortbildungen unterschiedlicher zeitlicher Dauer zum Thema Rechenschwierigkeiten auf das diagnostische Wissen und die Selbstwirksamkeitserwartungen der fortgebildeten Lehrkräfte aus? Steht der Fortbildungserfolg der Lehrpersonen in Zusammenhang mit ausgewählten Teilnehmermerkmalen und mit der Nutzung der Fortbildungsangebote durch die Lehrpersonen? Gibt es empirische Hinweise, dass sich der Unterricht der teilnehmenden Lehrpersonen durch die Qualifikation in Richtung eines stärker prozessorientierten Vorgehens verändert.

Methoden und Instrumente

Zur Beantwortung der Forschungsfragen wird, anknüpfend an das Kompetenzmodell aus der COAKTIV-Studie (Kunter et al., 2011) auf zwei Bereiche fokussiert: das Professionswissen und die motivationalen Orientierungen. Unter dem Punkt Professionswissen wird das fachdidaktische Wissen mit den Unterkategorien Diagnose, Förderung und Prozessorientierung untersucht. In Bezug auf die motivationalen Orientierungen werden der Enthusiasmus für das Fach, der Enthusiasmus für das Unterrichten und die Selbstwirksamkeitserwartungen zur Instruktion, Individualisierung und Diagnose erhoben.

Diese Kompetenzen und Orientierungen werden durch vier Instrumente erfasst: Neben einem Tagebuch, in welchem die Teilnehmer der einjährigen Qualifizierungsmaßnahme ihre Förderung dokumentieren, wird ein Abschlussbericht über ein gefördertes Kind erstellt. Um gegebenenfalls Auswirkungen auf den Unterricht festzustellen, wird zudem bei zufällig ausgewählten Personen dieser Gruppe der Unterricht vor und nach der Fortbildung videografiert. Dadurch soll insbesondere erfasst werden, ob sich der Regelunterricht der Lehrpersonen im Sinne einer prozessorientierten Vorgehensweise verändert. Das Instrument, das bei beiden Gruppen zum Einsatz kommt, ist der Fragebogen.

Onlinebasiert wurde hier zur Erfassung der Selbstwirksamkeitserwartungen auf bereits von Skaalvik & Skaalvik (2007) entwickelte und erprobte Skalen zurückgegriffen, sowie diese an das Thema Mathematikunterricht bzw. Rechenschwäche angepasst. Zur Erfassung des diagnostischen Wissens wurde unter anderem eine Skala entwickelt, die neben eigenen Items, adaptierte Items von Frey (2009) und Rakoczy, Buff & Lipowsky (2005) enthält. Außerdem wurde auf offene Items aus der Untersuchung von Schulz (2014) zurückgegriffen. In Zusammenarbeit mit Axel Schulz und Sebastian Wartha entstand in diesem Kontext auch ein Instrument, das die Diagnosekompetenz quantitativ erfassbar machen soll. Ausgehend von den typischen Hürden beim Rechnenlernen (Wartha & Schulz, 2012) wurden den Lehrpersonen Videovignetten aus typischen Diagnosesituationen präsentiert, um möglichst handlungsnahes Wissen zu erfassen. Der Einsatz von Vignetten ist, unter anderem aus Sicht der COAKTIV-Studie, in der Vignetten aus Schülerdokumenten verwendet wurden, ein adäquates Vorgehen, um eben das handlungsnahe Wissen zu erfassen.

Ergebnisse und Fazit

Skala	Mittelwerte		t-Wert	Signifikanz
	t1	t2		(,05)
Diagnosekompetenz	2,86	3,04	-3,92	,001
Selbstwirksamkeitserwartung – Instruktion	2,81	2,91	-2,09	,047
Selbstwirksamkeitserwartung - Individualisierung	2,69	2,87	-3,83	,001
Selbstwirksamkeitserwartung - Diagnose	2,49	2,25	5,17	,000
Enthusiasmus für das Fach	2,96	3,02	-0,87	,391
Enthusiasmus für das Unterrichten	2,98	3,04	- 0,68	,498

Tabelle 1: Skalenwerte zu Diagnosekompetenz, Selbstwirksamkeitserwartungen und Enthusiasmus der Lehrpersonen

Im Rahmen der Pilotierung (N = 23) konnte in allen erfassten Bereichen eine Veränderung festgestellt werden (siehe Tabelle 1). Während überall eine Steigerung zu verzeichnen ist, sinkt die Selbstwirksamkeitserwartung im Bezug auf die Diagnose. Eine Signifikanz konnte für die Diagnosekompetenz, die Selbstwirksamkeitserwartung in Bezug auf Individualisierung und Diagnose festgestellt werden. Für die Selbstwirksamkeitserwartung in Bezug auf Instruktion, für den Enthusiasmus für das Fach und für das Unterrichten konnte keine Signifikanz der Veränderung nachgewiesen werden. Eine mögliche Erklärung wäre, dass Lehrpersonen, die freiwillig an einer einjährigen Qualifizierungsmaßnahme teilnehmen schon viel Enthusiasmus mitbringen. Das Thema Instruktion wird in der Qualifizierungsmaßnahme nur marginal behandelt und lässt keinen allzu großen Zuwachs erwarten, insbesondere unter dem Blickwinkel der Selbstwirksamkeitserwartung.

Zur Erfassung des handlungsnahen fachdidaktischen Wissens, hier die Diagnosekompetenz, wurden in der Hauptstudie (N = 134) Videovignetten mit quantifizierbaren Skalen eingesetzt. Dabei wurde die Diagnosekompetenz auf zwei Skalen aus insgesamt 20 Items für zwei Vignetten abgebildet. Von den befragten Lehrpersonen beantworteten 41 % mehr als 10 Items falsch. 7, 4 % gaben bei mehr als 15 Items falsche Antworten. Richtig beantwortet wurden mehr als 10 Items von 59 % und mehr als 15 Items von 19,4 % der Lehrpersonen. Es kann festgestellt werden, dass die Diagnosekompetenz der Lehrpersonen in sehr unterschiedlichem Maße vorhanden ist. Diese und weitere Analysen zeigen, dass ein breites Spektrum diagnostischer Kompetenzen über die Vignetten erfasst werden kann.

Literatur

Frey, A., Taskinen, P., Schütte, K., Prenzel, M., Artelt, C., Baumert, J. et al. (Hrsg.). (2009). *PISA 2006 Skalenhandbuch: Dokumentation der Erhebungsinstrumente*. Münster: Waxmann.

Gaidoschik, M. (2008). *Rechenschwäche - Dyskalkulie: Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern* (4. Auflage). Buxtehude: Persen.

Hattie, J. (2014). *Lernen sichtbar machen* (2. Auflage). Baltmannsweiler: Schneider-Verl. Hohengehren.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.). (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster: Waxmann.

Lesemann, S. (2015). *Fortbildungen zum schulischen Umgang mit Rechenstörungen*. Eine Evaluationsstudie zur Wirksamkeit auf Lehrer- und Schülerebene. Wiesbaden: Springer-Verlag. doi:10.1007/978-3-658-11380-3

Lipowsky, F. (2014). Theoretische Perspektiven und empirische Befunde zur Wirksamkeit von Lehrerfort- und - weiterbildung. In E. Terhart, H. Bennewitz & M. Rothland (Hrsg.), *Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf* (S. 398–417). Münster: Waxmann.

Rakoczy, K., Buff, A. & Lipowsky, F. (2005). *Dokumentation der Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerisch-deutschen Videostudie. Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis. 1.Befragungsinstrumente* (Band 13). Frankfurt am Main: GFPF.

Schulz, A. (2014). *Fachdidaktisches Wissen von Grundschullehrkräften: Diagnose und Förderung bei besonderen Problemen beim Rechnenlernen*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden. doi:10.1007/978-3-658-08693-0

Skaalvik, E.M. & Skaalvik, S. (2007). Dimensions of teacher self-efficacy and relations with strain factors, perceived collective teacher efficacy, and teacher burnout. *Journal of Educational Psychology, 99* (3), 611–625. doi:10.1037/0022-0663.99.3.611

Wartha, S. & Schulz, A. (2012). *Rechenproblemen vorbeugen: Grundvorstellungen aufbauen: Zahlen und Rechnen bis 100. Diagnoseleitfaden online* (1. Auflage). Berlin: Cornelsen.

Ute SPROESSER, Markus VOGEL, Tobias DÖRFLER, Heidelberg; Andreas EICHLER, Kassel

Lernschwierigkeiten bei elementaren Funktionen - Ergebnisse einer Pilotstudie und Entwicklung einer Lehrerfortbildung

1. Theoretischer Hintergrund

Angesichts der Bedeutung des funktionalen Denkens (z.B. Vollrath, 1989) unterlegen die durch verschiedene Studien dokumentierten Lernschwierigkeiten in diesem Inhaltsbereich (z.B. Vogel, 2006; Nitsch, 2015) sowie das mangelnde diesbezügliche Bewusstsein von Lehrkräften (Hadjidemetriou & Williams, 2002) den Bedarf an spezifischen Lehrerfortbildungen. Die von Nitsch gefundenen Klassenunterschiede im Vorkommen und der Häufigkeit solcher Lernschwierigkeiten legen zudem die Vermutung nahe, dass Lehrkräfte mit ihrem Unterricht Anteil an diesen haben können. Insofern erscheint es plausibel, dass eine Lehrerfortbildung in diesem Bereich zur Verminderung bestimmter Lernschwierigkeiten beitragen könnte.

Lehrerfortbildungen werden als besonders erfolgsversprechend angesehen, wenn bestimmte Merkmale darin umgesetzt werden: Beispiele dafür sind der Fokus auf eine bestimmte Domäne, aber auch die Anlage über einen längeren Zeitraum und der Einbezug von Feedback (z.B. Lipowsky, 2013). Dies ist in Lehrercoachings implementierbar, die es ermöglichen auf Grundlage einer konkreten Unterrichtssituation Rückmeldung an Schüler zu formulieren und zur gezielten Reflexion über die jeweilige Situation anzuregen (West & Staub, 2003). In mikroadaptiven Coachings werden zudem die konkreten Äußerungen oder Tätigkeiten der gecoachten Personen aufgegriffen und gegebenenfalls optimiert (Leutner, 2004).

Kritiker bemängeln an vielen bestehenden Fortbildungen die oft unzureichenden Qualitätsstandards, aufgrund derer kaum Aussagen über Ursache-Wirkungszusammenhänge gemacht werden können (Lipowsky, 2013; Yoon et al., 2007). Außerdem fehlt in der Lehrerfortbildungsforschung häufig der Bezug auf spezifische Facetten fachdidaktischen Wissens (vgl. z.B. Ball et al., 2008), obwohl eine starke inhaltliche Fokussierung als erfolgsversprechend gilt.

2. Ziele

Das Projekt ProfiL 9 der PH Heidelberg hat zum Ziel, die Wirksamkeit bestimmter Aspekte einer Lehrerfortbildung zur Förderung spezifischer Facetten fachdidaktischen Wissens zu untersuchen. In Anlehnung an Ball et al. (2008) soll bei den Lehrkräften das „knowledge of content and students“ und das „knowledge of content and teaching“ bezogen auf elementare Funktionen verbessert werden. Um die im Projekt zu entwickelnde Lehrerfortbildung inhaltlich auf die konkreten Bedürfnisse der Schulpraxis abzustimmen, wurde außerdem zunächst untersucht, inwieweit einige aus der Literatur abgeleitete Lernschwierigkeiten unter Schülerinnen und Schülern anzutreffen und deren Lehrkräften bewusst sind. Der vorliegende Artikel stellt im Wesentlichen die Ergebnisse dieser Fragestellung vor.

3. Methode

In der Hauptstudie dieses Projekts soll 60 Lehrkräften in einer von zwei Variationen einer Lehrerfortbildung Wissen zum Vorkommen von und zum Umgang mit Lernschwierigkeiten bei elementaren Funktionen vermittelt werden. Die systematische Variation zwischen den experimentellen Treatments besteht darin, dass nur die Lehrer in einem Treatment konkret gefördert werden, Schülern angesichts von Lernschwierigkeiten lernförderliches Feedback zu geben.

Zur Vorbereitung der Hauptstudie wurde im Schuljahr 2015/16 eine Pilotstudie durchgeführt. Hierfür waren aus vorliegenden empirischen Studien bestimmte Lernschwierigkeiten („Probleme mit den Parametern“, „Graph-als-Bild-Fehler“, „Slope-Height-Confusion“, Probleme mit Textaufgaben aufgrund der Textreihenfolge; z.B. Hadjidemetriou & Williams, 2002; Nitsch, 2015) zusammengestellt worden. Da diese Studien größtenteils nicht aus Deutschland und insbesondere nicht aus Baden-Württemberg stammen, sollte in der Pilotstudie geklärt werden, in welchem Umfang oben genannte Lernschwierigkeiten auch hierzulande unter Lernenden verbreitet und deren Lehrkräften bekannt sind. Dazu wurden die Schülerinnen und Schüler aus drei Realschul- und einer Gymnasialklasse über Paper-Pencil-Tests (offene und Multiple-Choice-Aufgaben) befragt. Zudem wurde in Leitfadeninterviews untersucht, inwieweit die jeweiligen Lehrkräfte diese Lernschwierigkeiten kennen und in ihren eigenen Klassen erwarten. Der Abgleich von Schüler- und Lehrerdaten liefert Hinweise darauf, welche Lernschwierigkeiten in der Lehrerfortbildung thematisiert werden sollten, um den Bedarf aus der Praxis zu treffen.

4. Ergebnisse der Pilotstudie

Im Folgenden werden Ergebnisse aus Schüler- und Lehrerbefragung in Bezug auf oben genannte Lernschwierigkeiten vorgestellt.

„Probleme mit den Parametern“ beim graphisch-algebraischen Darstellungswechsel wurden u.a. in Form des „Fokus‘ auf Achsenschnittpunkte“ untersucht. Bei diesem Fehler fokussieren die Lernenden statt auf die Steigung auf den Schnittpunkt mit der x-Achse. Im offenen Aufgabenformat zeigten 11,3% - 23,8% der Schülerinnen und Schüler diesen Fehler, wobei er etwa doppelt so häufig vorkam beim Wechsel von Graph zu Gleichung als beim umgekehrten Darstellungswechsel. Im Multiple-Choice-Format kam der Fehler in beide Richtungen deutlich häufiger vor (65% - 75%), auch hier stärker ausgeprägt beim Wechsel von Graph zu Gleichung. 57 der 80 Lernenden zeigten diesen Fehler in mindestens drei der sieben Aufgaben. Die vier Lehrkräfte erkannten den Fehler nicht bzw. erst nach längerem Überlegen. Drei der vier Lehrpersonen erwarteten den Fehler in der eigenen Klasse nicht, obwohl er in allen Klassen vorkam. Eine Lehrkraft konnte sich den Fehler in der eigenen Klasse lediglich beim Wechsel von Gleichung zu Graph vorstellen.

Beim „Graph-als-Bild-Fehler“ werden optische Oberflächenmerkmale einer Situation auf einen dazugehörigen Graphen übertragen und andersherum. Lernende erliegen hier dem Irrtum, dass ein Funktionsgraph nicht einen Zusammenhang zwischen zwei Größen beschreibt, sondern die zu Grunde liegende Situation bildlich darstellt. Im offenen Format wurde die Testaufgabe zum „Graph-als-Bild-Fehler“ häufig nicht bearbeitet, so dass sich dieser in lediglich 6,3% der Fälle zeigte. Im Multiple-Choice-Format lag die Fehlerquote zwischen 38,8% und 43,8%. 24 der 80 Lernenden zeigten diesen Fehler in mindestens 2 der 3 Aufgaben. Alle vier Lehrkräfte erkannten diesen Fehler nach kurzer Zeit und erwarteten ihn im Multiple-Choice-Format in den eigenen Klassen. Im offenen Format rechneten zwei der vier Lehrpersonen in der eigenen Klasse mit ihm, wobei er auch in einer der Klassen vorkam, in der die Lehrkraft ihn nicht erwartete.

Die „Slope-Height-Confusion“ beim situativ-graphischen Darstellungswechsel beschreibt die Lernschwierigkeit, die Steigung eines Graphen mit seinem y-Wert in einem bestimmten Punkt bzw. Bereich zu verwechseln. Im offenen Format tauchte der Fehler in 32,5% der Fälle auf, im Multiple-Choice-Format lag die Fehlerquote sowohl bei der Frage nach einem Zeitpunkt als auch nach einem Zeitraum bei etwa 38%. 27 der 80 Lernenden machten den Fehler mehrfach. Zwei von vier Lehrkräften hatten zunächst selbst Probleme beim Verstehen dieser Aufgabe und erkannten den Fehler dementsprechend nicht. Alle vier Lehrpersonen konnten sich vorstellen, dass der Fehler in den eigenen Klassen gemacht wurde.

Schwierigkeiten mit Textaufgaben können beispielsweise beim Aufstellen einer Funktionsgleichung aus einer Situationsbeschreibung auftreten. Bei Fehlern im Sinne des „Word-Order-Matching-Processes“ wird die Reihenfolge im Text direkt auf die Reihenfolge in einer prototypischen Gleichung übertragen und diese dementsprechend falsch aufgestellt. Im offenen Aufgabenformat wurde die diesbezügliche Testaufgabe häufig nicht bearbeitet, so dass dieser Fehler in nur 2,5% der Fälle auftrat. Im Multiple-Choice-Format kam der Fehler deutlich häufiger vor (32,5% - 42,5%). Von den 80 Schülerinnen und Schülern machten 16 den Fehler in mindestens zwei der drei Testaufgaben. Nur eine der vier Lehrkräfte erkannte die Textreihenfolge als einen möglichen Grund für Probleme bei entsprechenden Aufgaben. Grundsätzlich erwarteten jedoch alle Lehrpersonen Schwierigkeiten beim Aufstellen einer Gleichung aus einem Text, wobei sie diese eher auf mangelndes Textverständnis oder einen fehlenden Ansatz zurückführten.

5. Diskussion und Ausblick

Die Befragungen ergaben, dass die aus der Literatur abgeleiteten Lernschwierigkeiten unter den Schülerinnen und Schülern tatsächlich verbreitet waren. Unter den Lehrkräften war das Wissen über diese Lernschwierigkeiten recht unterschiedlich, oft aber unzureichend ausgeprägt. Insofern erscheint eine Lehrerfortbildung in diesem Bereich als sinnvoll.

Die durch die Pilotstudie erlangten Erkenntnisse konnten zur inhaltlichen Gestaltung der Fortbildung genutzt werden. Erste Fortbildungsmodule wurden im laufenden Schuljahr 2015/16 bereits durchgeführt und auch im Schuljahr 2016/17 soll die Fortbildung angeboten werden.

Literatur

Ball, D. L., Hoover Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*, 389-407.

Hadjidemetriou C. and Williams, J. S. (2002). Teachers' pedagogical content knowledge: graphs, from a cognitivist to a situated perspective. *Proceedings of the 26th Conference of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education.*

Leutner, D. (2004). Instructional design principles for adaptivity in open learning environments. In N.M. Seel & S. Dijkstra, *Curriculum, plans, and processes in instructional design.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Lipowsky, F. (2013). Theoretische und empirische Perspektiven zur Wirksamkeit von Lehrerfortbildung. In E. Terhart, H. Bennewitz & M. Rothland, *Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf.* Münster: Waxmann.

Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge. Dissertation.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Vogel, M. (2006). *Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multimediabasierter Supplantation. Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchung.* Hildesheim: Franzbecker.

Vollrath, H.-J.(1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik 10*, 3-37.

West, L. & Staub, F. C. (2003). *Content-Focused Coaching: Transforming mathematics lessons.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Yoon, K. S., Duncan, T., Lee, S. W.-Y., Scarloss, B., & Shapley, K. (2007). *Reviewing the evidence on how teacher professional development affects student achievement.* http://ies.ed.gov/ncee/edlabs/regions/southwest/pdf/rel_2007033.pdf [27.01.2015].

Anna Susanne STEINWEG, Bamberg

Grundideen algebraischen Denkens in der Grundschule

Algebraisches Denken

Seit vielen Jahren befasst sich mathematikdidaktische Forschung mit Zugängen zu algebraischem Denken schon ab der Grundschule (Bednarz, 1996). Die entwickelten Ansätze sind jedoch noch kaum in die Unterrichtspraxis vorgedrungen, obwohl der Mathematikunterricht vielfältige Anknüpfungspunkte bieten würde.

In der Arithmetik werden z. B. die verschiedenen Zahlaspekte betont, dabei umfasst der Rechenzahlaspekt nicht ausschließlich das Ziffernrechnen, sondern Zahlen und Operationen in ihren Strukturen, d. h. einen algebraischen Aspekt: „Die Menge der natürlichen Zahlen bildet bezüglich der Rechenoperationen eine algebraische Struktur, die gewisse Eigenschaften („Gesetze“) besitzt“ (Müller & Wittmann, 1984, S. 172). Dieser Aspekt hat sich zwar u. a. in der stärkeren Betonung der halbschriftlichen Strategien, die auf den Eigenschaften der Rechenoperationen basieren, niedergeschlagen, wurde in seiner ganzen Wirkkraft im deutschsprachigen Raum jedoch nicht in der Praxis herausgearbeitet.

Die Eigenschaften und strukturellen Zusammenhänge von Zahlen, Operationen und Gleichungen sind nicht nur Hintergrund des (geschickten) Rechnens, sondern als eigenständige, in diesem Sinne ‚neue‘ Objekte der Auseinandersetzung (Sfard, 1991; Tall & Gray et al., 2001) und wertvolle Unterrichtsinhalte bewusst wahrzunehmen.

Algebra in der Grundschule

Aus dreierlei Gründen ist die Förderung algebraischen Denkens ab der Grundschule relevant: Erfahrungen aus dem Kontext diskreter Zahlen sind erstens grundsätzlich transferierbar (z. B. Livneh & Linchevski, 2007). Neben diesem vorbereitenden Charakter auf spätere Anforderungen in der Sekundarstufe liegen die Gründe aber vor allem im Mehrwert für die Kompetenzentwicklungen direkt in der Grundschule. Arithmetische Kompetenzen werden durch algebraische Durchdringung gestärkt und unterstützt sowie Prozesskompetenzen, z. B. des Kommunizierens und Argumentierens, von algebraischen Denkweisen eingefordert und gefördert (Steinweg, 2013).

Grundideen

Mathematikdidaktik als konstruktive Wissenschaft orientiert sich an Mathematik ebenso wie an lernpsychologischen und –pädagogischen Erkenntnissen (Wittmann, 1976 und 2013). Durch die Entwicklung von Grundideen wird ein Kompetenzbereich in seinen Themen ‚greifbar‘ und kann bewusst in die Unterrichtsgestaltung aufgenommen werden. Der Mathematikunterricht ist auf diese doppelte Bewusstheit angewiesen, die in der bewussten Auseinandersetzung mit mathematischen Fragestellungen auf Seiten der Lehrenden in der Unterrichtsorganisation und auf Seiten der Lernenden in der aktiven Tätigkeit liegt (Mason, 1987).

Algebraische Grundideen

Algebraisches Denken kann im Themenfeld der ‚Muster & Strukturen' verortet werden. Die besondere Bedeutung von Mustern und Strukturen ist unbestritten. Unterschiedlich wird jedoch deren Zuordnung als Inhaltsbereich oder allgemeine Kompetenz gesehen. Ebenso ist das Bemühen, die Begriffe Muster und Strukturen klar voneinander abzugrenzen, noch unbefriedigend. Grundlage des hier genutzten Gebrauchs ist die Kennzeichnung von Mustern als Regelmäßigkeiten, die individuell und kreativ erdacht werden, wohingegen Strukturen durch den mathematischen Raum (mit seinen Eigenschaften) festgelegt sind (Steinweg, 2014).
Dieser Beitrag schlägt vier Grundideen vor, die die Förderung algebraischen Denkens in der Grundschule orientieren können. Diese sind im Einzelnen:

- Muster (und Strukturen)
- Eigenschaftsstrukturen
- Äquivalenz-Strukturen
- Funktionale Strukturen

Keine der Grundideen ist völlig unabhängig von bereits etablierten Unterrichtsinhalten, sondern fokussiert hingegen neu auf die Potenziale, die in den vermeintlich arithmetischen Aufgabenstellungen und Lernumgebungen verborgen liegen.

Muster (und Strukturen)

Muster zeigen sich als regelmäßige Wiederholungen von Zahlen oder geometrischen Objekten. Exemplarische Beispiele sind Zahlenfolgen (Abb. 1) oder operative Muster in Aufgabenformaten, die entdeckt, genutzt (fortsetzen, reparieren) und auch beschrieben werden können.

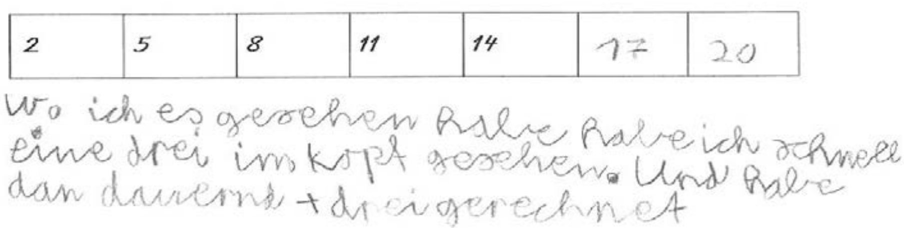


Abb. 1 Eine arithmetische Zahlenfolge wird fortgesetzt und beschrieben

Die Relationen der Objekte des Musters verweisen auf ‚Strukturen' (hier eine arithmetische Zahlenfolge), die in ihrer Erscheinung und ihrem Verhalten mathematisch definiert sein können.

Eigenschaftsstrukturen

Im Gegensatz zu Mustern sind Eigenschaften ‚vorgegeben' (Wittmann & Müller, 2007). Sie ergeben sich zwingend aus der algebraischen Struktur und den damit strukturell bedingten Eigenschaften. So können z. B. ‚Tauschaufgaben' zu Additionen von den Kindern gefunden und entdeckt werden, *da* die Operation + auf ℕ kommutativ ist. Die Aktivitäten im Unterricht entsprechen denen zu Mustern (entdecken, nutzen und beschreiben), betreffen nun aber die mathematischen Eigenschaften der Zahlen (Parität, Teilbarkeit etc.) und Operationen.

Äquivalenz-Strukturen

Gleichungen stellen Terme in strukturelle Beziehung. Die Äquivalenz von Termen führt zu wahren Aussagen. Etliche Strategien der Lösung linearer Gleichungen (Vollrath & Weigand, 2007), wie z. B. das gedankliche Lösen, der Termvergleich oder Gegenoperationen, können an reinen Zahlentermen in der Grundschule erprobt werden, d. h. Kinder beurteilen, erhalten oder stellen (einsetzen, korrigieren) Äquivalenz her.

Funktionale Strukturen

Lineare Funktionen sind in ihrem Zuordnungscharakter (Ko-Variationsaspekt) und Änderungsverhalten für Kinder zugänglich. Zuordnungen treten alltäglich z. B. als Proportionen im Grundschulunterricht auf. Auch Zuordnungsvorschriften können rekursiv oder explizit entdeckt, genutzt und beschrieben werden (Steinweg, 2000).

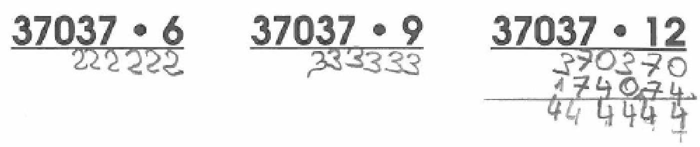


Abb. 2 Änderungsverhalten der Beziehung des 2. Faktors zum Produkt

Änderungsverhalten kann insbesondere an operativen Variationen (Wittmann, 1985) als mathematische Idee kennengelernt werden. Obwohl hier i.d.R. keine linkstotale Abbildung $x \rightarrow mx$ bei diskreten Datenreihen in ℕ gegeben ist, sind die Beobachtung und Beschreibung der Abhängigkeiten und Änderungswirkungen wesentlich analog. Im Beispiel in Abbildung 2 kann der zweite Faktor als Variable im Aspekt der Veränderlichen erkannt und die Wirkung auf das Produkt erforscht werden. Auf diese Erfahrungen kann später bei der Auseinandersetzung mit linearen Funktionen zurückgegriffen werden.

Schlussbemerkung

Die hier vorgeschlagene Gliederung in Grundideen zur Förderung algebraischen Denkens erhebt keinen Anspruch auf Trennschärfe. Vielmehr werden die möglichen Foki der Auseinandersetzungen im Bereich ‚Muster & Strukturen' ausdifferenziert. Somit können die wesentlich verschiedenen Strukturen und Muster der bewussten und gezielten Thematisierung im Unterricht grundsätzlich zugänglich gemacht werden. Die doppelte Hoffnung ist, dass zum einen der Bereich ‚Muster & Strukturen' in seiner umfassenden Bedeutung klarer erkannt wird und zum anderen algebraische Lernchancen von Anfang an ermöglicht werden.

Literatur

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publisher.

Livneh, D. & Linchevski, L. (2007). Algebrification of Arithmetic: Developing Algebraic Structure Sense in the Context of Arithmetic. *PME 31*. Korea vol 3, 217-224.

Mason, J. (1987). Erziehung kann nur auf die Bewußtheit Einfluß nehmen. *mathematik lehren,* (21), 4-5.

Müller, G. & Wittmann, E. ([3]1984). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe*. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22* (1), 1-36.

Steinweg, A. S. (2000). Wie heißt die Partnerzahl? *Die Grundschulzeitschrift*, (133), 18-20.

Steinweg, A. S. (2013). *Algebra in der Grundschule.* Heidelberg: Springer – Spektrum.

Steinweg, A. S. (2014). Muster und Strukturen zwischen überall und nirgends: Eine Spurensuche. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Mathematikdidaktik Grundschule – 10 Jahre Bildungsstandards* (S. 51-66). Bamberg: University of Bamberg Press.

Tall, D., Gray, E. et al. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics & Technology Education*, *1*(1), 81-104.

Vollrath, H.-J. & Weigand, H.-G. (2007). *Algebra in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Wittmann E. (1976). *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, E. & Müller, G. (2007). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther et al. (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 42-65). Berlin: Cornelsen.

Wittmann, E. (1985). Objekte - Operationen - Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. *mathematik lehren*, (11), 7-11.

Wittmann, E. (2013). Strukturgenetische didaktische Analysen – die empirische Forschung erster Art. In Greefrath, G., Käpnick, F & Stein, M. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*, (S. 1094-1097). Münster: WTM.

Peter Stender, Hamburg

Heuristische Strategien zur Überwindung der doppelten Diskontinuität in der Lehrerbildung

Die doppelte Diskontinuität ist ein seit langem bekanntes ungelöstes Problem des Lehramtsstudiums. In einem Lehramtstutorium zur Linearen Algebra fokussieren wir auf Methoden der Mathematik ergänzend zu den Gegenständen der Vorlesung. Als Methoden zur Beweisfindung sind heuristische Strategien aus der Theorie zum Problemlösen bekannt. Im Tutorium werden Strategien in Beweisen aus der Vorlesung bewusst gemacht und deren Auftreten in der Schulmathematik aufgezeigt. Dies wird an Beispielen dargestellt.

Rahmenbedingungen

Die Lehramtsausbildung in der Universität Hamburg findet fakultätsübergreifend statt. Das Fachstudium geschieht in den für das Fach zuständigen Fachbereichen (hier: Fachbereich Mathematik in der MINT-Fakultät), während die Fachdidaktiken in der Fakultät für Erziehungswissenschaften angesiedelt sind. Die hier vorgestellte Arbeit findet im Projekt ProfaLe (Professionelles Lehrerhandeln zur Förderung fachlichen Lernens unter sich verändernden gesellschaftlichen Bedingungen, Projektleitung Prof. Dr. Gabriele Kaiser, Prof. Dr. Eva Arnold) statt, das im Rahmen der Qualitätsoffensive Lehrerbildung durch das BMBF finanziert wird. Die Arbeit baut auf vorhandenen Kooperationen zwischen der Fachdidaktik Mathematik und dem Fach Mathematik auf.

Im Fachstudium Mathematik belegen die Studierenden in den ersten beiden Semestern Lineare Algebra I und II. Das Modul besteht in jedem Semester aus einer vierstündigen Vorlesung und einer zweistündigen Übung, in der wöchentlich Übungsaufgaben behandelt werden. Die Modulprüfung besteht aus einer Klausur am Ende des 2. Semesters. Zulassungskriterium für die Klausurteilnahme ist die regelmäßige Teilnahme an den Übungsgruppen sowie das Erreichen von 50% der Punkte bei den Übungsaufgaben.

Ergänzend bietet der Fachbereich drei zweistündige wöchentliche Tutorien zur Vorlesung an. Im Rahmen des Projektes ProfaLe wird ein viertes Tutorium angeboten, in dem eine lehramtsspezifische Unterstützung der Studierenden vorgenommen wird. Dieses Tutorium wird vom Autor gemeinsam mit Dr. Lukas Buhné (Fachbereich Mathematik, Universitätskolleg Hamburg) durchgeführt. Dr. Buhné bietet im Rahmen des Universitätskollegs darüber hinaus eine Hausaufgabenhilfe an, in der den Studierenden Unterstützung bei der Bearbeitung der Übungsaufgaben angeboten wird.

Das Tutorium wird von etwa 20 Studierenden besucht. Einige der Studierenden brachen das Studium ab, das Tutorium wurde jedoch im Laufe des Semesters von weiteren Studierenden belegt, so dass die Teilnehmerzahl insgesamt leicht anstieg.

Theoretischer Rahmen

In der Wissenschaftstheorie ist unstrittig, dass jede Fachwissenschaft neben einem spezifischen Gegenstandsbereich spezifische Methoden anwendet (z.B. Schurz, 2006). Ich unterscheide hier die folgenden *Gegenstände der Mathematik*:

- Die in den Definitionen generierten Begriffe,
- die mathematischen Sätze und
- die fertig formulierten Beweise zu diesen Sätzen.

Bei den *mathematischen Methoden* zum Generieren und Anwenden der mathematischen Gegenstände verwende ich die folgenden Unterscheidungen:

- die mathematischen Beweismethoden zum Beweisen von Sätzen, wie geschicktes Substituieren, geschicktes Addieren von Nullen etc. oder Verfahren, wie den Beweis durch Widerspruch, vollständige Induktion, etc.,
- die Methoden zum Nutzen von Mathematik zur Lösung von Problemen, an prominenter Stelle die heuristischen Strategien oder weitere mathematische Handlungsstrategien, wie das konsequente Nutzen von Algorithmen, Diskretisieren u.a.,
- die Methoden (eher Konventionen), mit denen mathematische Gegenstände in der Community präsentiert werden (Darstellungsmethoden).

Heuristische Strategien werden hier im Sinne von Dörner (1976) verstanden, als Verfahren, mit deren Hilfe Lösungen von Problemen gefunden werden können. Diese Definition bezieht sich auf Dörners Definition des Begriffs *Problem*: „Ein Problem ist also gekennzeichnet durch drei Komponenten: 1. Unerwünschter Anfangszustand s_α; 2. Erwünschter Zielzustand s_ω; 3. Barriere, die die Transformation von s_α in s_ω im Moment verhindert.“ (Dörner 1976). Diese Definition führt zu einer sehr weiten Sichtweise des Begriffs *heuristische Strategie*, da sie sämtliche Handlungsstrategien umfasst, die dazu beitragen, Handlungsbarrieren zu überwinden. In diesem Sinne sind die oben angeführten Beweisstrategien eine Teilmenge der heuristischen Strategien, da sie beim Entwickeln von Beweise genutzt werden können, die für das handelnde Subjekt neue sind. Mathematische Beweisstrategien beziehen sich in der Regel auf formalsprachliche Aspekte, während im Allgemeinen heuristische Strategien auch außerhalb der Mathematik wirksam werden können. Basierend auf diesem weiten Begriff heuristischer Strategien wurde eine Liste solcher Strategien erstellt, basierend u.a. auf Pólya (1973), der in dem Titel die heuristischen Strategien bereits den Methoden der Mathematik zuordnet: *Material organisieren; Systematisches Probieren; Zerlege dein Problem in Teilprobleme; Superpositionsverfahren; Vergrößere den Suchraum; Betrachte Grenzfälle oder Spezialfälle; Verallgemeinerungen; zum Optimieren muss man variieren; Rückwärts arbeiten und Vorwärts arbeiten; Repräsentationswechsel; Symmetrie nutzen; Superzeichenbildung; Simulationen nutzen; Probleme auf Algorithmen zurückführen; führe Neues auf Bekanntes zurück; Diskretisieren; Analogien nutzen; dran bleiben und Aufhören können - jeweils zum richtigen Zeitpunkt.*

Es gilt als bestätigt, dass das selbständige Bilden von Superzeichen in Problemlöseprozessen ein deutlicher Hinweis auf hohe mathematische Begabung ist, ebenso wie flexible Repräsentationswechsel (z. B. Bauersfeld, 2001; Fuchs, 2006). Daher kann man folgern, dass diesen Strategien eine besondere Bedeutung im Rahmen der Mathematik zu kommen. Der Begriff *Superzeichen* (Kießwetter, 1988) stammt aus der Informationstheorie und meint „ein Zeichen, das für mehrere Zeichen steht", also für eine Menge von Zeichen. Dörner (1976) bezeichnet das gleiche Konzept als *Komplexion*, die ursprüngliche Bezeichnung *Chunks* geht auf Miller (1956) zurück. Zentraler Gedanke dabei ist die effektive Nutzung des Arbeitsgedächtnisses durch sinnvolles Zusammenfassen mehrerer gedanklicher Objekte zu einem einzigen neuen Objekt. In der Mathematik treten Superzeichen vielfach auf in Form von Mengen, Äquivalenzklassen, Vektoren, Matrizen, Polynomen (unendliche Tupel), Funktionen (Mengen rechtseindeutiger Paare), Strukturen wie Gruppen, Ringen, Körpern etc.

Gestaltung des Tutoriums

Im Tutorium wurden Fragen zur Vorlesung beantwortet, selbst entwickelte Präsenzaufgaben bearbeitet, die einerseits Inhalte aus der Vorlesung illustrieren, andererseits Bezüge zur Schulmathematik aufzeigen, sowie heuristische Strategien thematisiert, die in den Inhalten der Vorlesung wirksam wurden. Bei letzterem wurden zu den jeweils thematisierten heuristischen Strategien passende Beispiele aus der Schulmathematik genannt. Daneben wurde in regelmäßigen Abständen Überblickswissen über die Vorlesungsinhalte vermittelt. Hier wird ein Beispiel zu den heuristischen Strategien vorgestellt.

Quotientenringe wie $\mathbb{Z}/(m\mathbb{Z})$ werden in der Vorlesung allgemein definiert, Strukturen werden nachgewiesen und daraus Operationen auf diesen Strukturen geklärt. Zur ergänzenden Erklärung wurden für m=4 unterschiedliche Repräsentationen der zugrundeliegenden Abbildung gezeigt, deren Kern $m\mathbb{Z}$ ist, sowie der Äquivalenzklassen (Kern und Nebenklassen), aus denen $\mathbb{Z}/(4\mathbb{Z})$ besteht. Eine der Schwierigkeiten im Umgang mit diesen Strukturen für die Studierenden ist anscheinend, dass hier mit Äquivalenzklassen, also Superzeichen, gerechnet wird und die Repräsentationen vielfach wechseln.

In der Schule treten an zwei zentralen Stellen vergleichbare Schwierigkeiten auf: Funktionen sind Superzeichen, die zugrundeliegenden Elemente sind Wertepaare. Der Wechsel zwischen den Repräsentationen „Term, Tabelle, Graph, Situation“ ist für die Lernenden anspruchsvoll und die Bildung des Superzeichens *Funktion* aus den Wertepaaren / Wertetabellen gelingt vielen Lernenden nicht.

Brüche / rationale Zahlen sind in zweierlei Hinsicht Superzeichen (Paare von Zahlen bzw. Äquivalenzklassen von Paaren von Zahlen). Auch für die Entwicklung des Bruchkonzeptes sind zahlreiche Repräsentationen und die entsprechenden Wechsel zentral und für Lernende sehr anspruchsvoll.

Zur Verdeutlichung der Schulrelevanz wurde ergänzend die emotionale Situation von Lernenden betont, die sich mit solchen neuen Strukturen auseinandersetzen und die für die Studierenden vermutlich in Bezug auf $\mathbb{Z}/(m\mathbb{Z})$ Ähnlichkeiten aufweisen zur Situation in der Schule in Bezug auf Funktionen und Brüche.

Literatur

Dörner, D. (1976). *Problemlösen als Informationsverarbeitung* (1. Aufl.). Stuttgart: Kohlhammer.

Bauersfeld, H. (2001). Theorien zum Denken von Hochbegabten. *mathematica didactica*, 24(2), 3–20.

Fuchs, M. & Käpnick, F. (Hrsg.). (2008). *Mathematisch begabte Kinder: Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft*. Begabungsforschung. Berlin: LIT.

Kießwetter, K. (1988). Das Hamburger Fördermodell und sein mathematikdidaktisches Umfeld unter besonderer Berücksichtigung der Überlegungen und Modellierungselemente, welche Ausgangspunkte für die Konzeption waren. In K. Kießwetter (Hrsg.), *Das Hamburger Modell zur Identifizierung besonders befähigter Schüler* (S. 6–34). Hamburg: Selbstverlag.

Miller, G. A. (1956). The Magical Number Seven, Plus or Minus Two: Some Limits on our Capacity for Processing Infor-mation. Psychological Review, 63, 81–97.

Pólya, G. (1973). *How To Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton, N. J.: Princeton University Press.

Schurz, G. (2006). *Einführung in die Wissenschaftstheorie*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Thomas STENZEL, Essen

Förderung mathematikspezifischer Lern- und Beweisstrategien in der Studieneingangsphase

Beim Übergang von der Schule in die Hochschule stehen Studierende vor vielfältigen neuen Aufgaben. Hierzu gehören im Studium der Fachmathematik bzw. des Gymnasiallehramts Mathematik vor allem der axiomatische Aufbau, der erhöhte Abstraktions- und Formalisierungsgrad, die geringen Vorerfahrungen beim Umgang mit Beweisen sowie das höhere Maß an Eigenverantwortung, das Studierende insbesondere in Bezug auf ihr eigenes Lernverhalten mitbringen müssen (vgl. Freudenthal 1973, Meija-Ramos et al. 2012, Streblow & Schiefele 2006, Vinner 1991).

Der in diesem Beitrag vorgestellte Ansatz rückt den Umgang mit Lern- und Beweisstrategien in der Studieneingangsphase in den Fokus. Hierbei wird zunächst über drei Zyklen, die jeweils begleitend zur Analysis-I-Vorlesung im ersten Fachsemester stattfinden, eine Interventionsmaßnahme entwickelt und evaluiert, mit dem Ziel herauszufinden, ob diese Maßnahme den strategischen Umgang mit den neuen Herausforderungen voranbringen kann.

Theoretische Grundlagen

In Tabelle 1 sind die für das Mathematikstudium wesentlichen Beweis- und Tiefenlernstrategien gegenübergestellt. Unter letzteren versteht man hierbei solche Strategien, die auf das Verständnis von Lerninhalten abzielen und damit zum langfristigen Lernen beitragen (vgl. Wirth 2004).

Tabelle 1: Übersicht über Beweisstrategien (vgl. Leuders (2003), Schoenfeld (1985), Pólya (1945) und Wallas (1926)) und Tiefenlernstrategien (vgl. Ramsen (2003) und Wirth (2004))

Beweisstrategien	Tiefenlernstrategien
Verstehen der Behauptung	Verstehen der Bedeutung der Aussage
Begriffe klären	In eigene Worte fassen
Vorstellungen bilden (Reduzieren, Darstellungswechsel, Beispiele)	Vorstellungen bilden (Reduzieren, Darstellungswechsel, Beispiele)
Ähnlichkeiten suchen	Verknüpfung mit Vorwissen
Durch aktiven Umgang Strukturen erkennen	Inhalte organisieren und strukturieren (z.B. markieren oder vernetzen
Metakognition	Metakognition

Teilprobleme bilden	Fragen stellen
Aufgaben variieren	Verstehen und unterscheiden von Beweis und Beispiel
Sackgassen nutzen	Kritisches Prüfen
Effektive Zeitplanung	

Vergleicht man die beiden Spalten, so entdeckt man viele Gemeinsamkeiten. Bis zum Punkt „Metakognition“ sind die in jeder Zeile gegenübergestellten Strategien ähnlich bis identisch. Hieraus lässt sich unter anderem schließen, dass Studierende, die sich strategisch mit Beweisen auseinandersetzen automatisch Tiefenlernstrategien anwenden. Mit anderen Worten: Wer beweist, lernt nachhaltig.

Da das Beweisen als Spezialfall des Problemlösens betrachtet werden kann (vgl. Leuders 2003), könnte man die linke Spalte allgemeiner mit der Überschrift *Problemlösestrategien* versehen. Sicherlich gibt es weitere, für das Beweisen spezifische Strategien (vgl. z. B. Tao 2010). Diese sind jedoch entweder sehr eng mit bestimmten Aufgabentypen verknüpft oder bereits in den obengenannten Strategien enthalten und bilden daher nicht den Kern der Maßnahme.

Rahmenbedingungen der Maßnahme

Ziel der beschriebenen Maßnahme ist es, die Studierenden bereits im ersten Semester mit Strategien vertraut zu machen, die ihnen im ganzen Studium von Nutzen sein können. Diese sollen anhand von Inhalten aus der Vorlesung Analysis I entwickelt, reflektiert und eingeübt werden. Die Maßnahme ist in die reguläre wöchentliche Übung integriert. Diese ist für die Besprechung bereits von den Studierenden bearbeiteter Hausaufgaben vorgesehen. Die Übungsaufgaben werden so übernommen, wie sie vom verantwortlichen Dozenten konzipiert wurden.

Diese Rahmenbedingungen bringen einige Vorteile mit sich. Zum einen sind damit ein sehr enger Bezug zur Veranstaltung und dadurch eine hohe Relevanz für die Studierenden gegeben. Außerdem haben diese durch die Intervention kaum Mehraufwand und es gibt die Möglichkeit, die Maßnahme in Zukunft in allen Übungsgruppen, in jedem Semester und in weiteren Veranstaltungen umzusetzen.

Konzeption der Maßnahme

Den Kern der Maßnahme bildet das Besprechen von Übungsaufgaben. Hierbei wird der Fokus auf den Problemlöseprozess gelegt. Es wird intensiv mit denjenigen Studierenden gearbeitet, die Schwierigkeiten hatten, eigenständig auf eine Lösung zu kommen. Zunächst wird gemeinsam reflektiert, worin genau diese Schwierigkeiten lagen und wie man diesen begegnen könnte. Hierbei wird auf die Expertise der anderen Studierenden zurückgegriffen. Anschließend werden Lösungsideen gesammelt, wobei insbesondere solche genauer betrachtet werden, die nicht zum Ziel führten, mit deren Hilfe man aber Erkenntnisse zu möglichen Lösungswegen finden kann. Schließlich wird nach und nach ein Lösungsprozess so beschritten, dass er für alle Studierenden nicht nur nachvollziehbar sondern möglichst auch selbstständig anwendbar wird.

Am Ende jeder Stunde wird das Vorgehen systematisch reflektiert, indem als hilfreich empfundene Strategien zusammengefasst und auf einer Strategietafel festgehalten werden. Diese bleiben während jeder Stunde sichtbar.

Zusätzlich zu der Arbeit mit den Übungsaufgaben beinhaltet die Maßnahme kleine Elemente zu Lernstrategien, bei denen in ähnlicher Weise wie bei der Besprechung der Aufgaben wichtige Stellen aus dem Skript aufgegriffen und gemeinsam bearbeitet werden.

Evaluation der ersten Interventionsphase

Neben regelmäßigen systematischen Reflexionen mit dem Übungsgruppenleiter wurden zwei weitere Instrumente zur Evaluation herangezogen. Zum einen wurden vier Teilnehmer der Maßnahme jeweils zu drei Zeitpunkten im Semester interviewt. Im Anschluss daran wurden die Studierenden beim Bearbeiten von Aufgaben gefilmt. Außerdem wurden am Ende des Semesters in der Übungsgruppe Evaluationsbögen verteilt, die neben einem offen gestalteten Teil auch einen Bogen mit vierstufiger Likert-Skala zur Frage:„Wie häufig haben Sie die folgenden Strategien bei der Aufgabenbearbeitung verwendet?“ enthielten.

Eine systematische Auswertung der gesammelten Materialien steht derzeit noch aus. Im Folgenden werden die ersten Eindrücke geschildert. Insgesamt wurde die Maßnahme, insbesondere die Nutzung der Strategietafel sehr gut aufgenommen.

Ergebnisse und Ausblick

Obwohl das Klären von Begriffen von den Studierenden auf dem Fragebogen als am häufigsten verwendete Strategie angegeben wurde (Mittelwert: 2,83 von 3), zeigte sich bei der Betrachtung der Aufgabenbearbeitungen, dass sie noch große Schwierigkeiten haben, dies eigenständig zu tun. An diesem Punkt sollte in Zukunft die Aktivität der Studierenden stärker gefördert werden. Strategien, die auf der Likert-Skala vergleichsweise niedrige Werte erreicht haben, sind das Variieren der Aufgabe (1,67) sowie das Suchen von

Ähnlichkeiten (1,83). Insbesondere der letzte Punkt kann durch engere Verknüpfung zur Vorlesung weiter gefördert werden. Positiv zu erwähnen ist der recht hohe Wert (2,5), den die Selbstreflexion einnimmt, obwohl metakognitive Elemente nicht explizit thematisiert wurden. Dies lässt sich vermutlich darauf zurückführen, dass bei der Besprechung der Aufgaben sehr viel Wert auf Reflexion gelegt wurde.

Bereits zu Beginn der Maßnahme wurde klar, dass bei einer solch ausführlichen Beschäftigung mit den Aufgaben nicht genügend Zeit bleibt, alle zu besprechen. Um das auszugleichen wurden den Studierenden für die leichteren Aufgaben Musterlösungen zu Verfügung gestellt.

Für die kommenden Phasen ist geplant, zusätzlich zu den Hausaufgaben Präsenzaufgaben zu bearbeiten, damit ein vollständiger Problemlöseprozess gemeinsam durchlaufen werden kann. Außerdem soll die Anzahl der durch die Maßnahme erfassten Übungsgruppen auf eine statistisch relevante Zahl erhöht werden, damit quantitative Auswertungen möglich werden.

Literatur

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Klett.

Leuders, T. (2003). Problemlösen. In T. Leuders (Hrsg.), *Mathematik-Didaktik: Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II.* (S. 119–134). Berlin: Cornelsen.

Mejia-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K. & Samkoff, A. (2012). An assessment model of proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 79(1),* 3–18.

Pólya, G. (1945). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton: University Press.

Ramsden, P. (2003). *Learning to Teach in Higher Education*. Abingdon: Routledge-Falmer.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Streblow, L. & Schiefele, U. (2006). Lernstrategien im Studium. In H. Mandl & H. F. Friedrich (Hrsg.), *Handbuch Lernstrategien* (S. 252–264). Göttingen: Hogrefe.

Tao, T. (2010). *Problem Solving Strategies.* [Zuletzt abgerufen am 26. März 2016]. URL: https://terrytao.wordpress.com/2010/10/21/245a-problem-solving-strategies/

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching of mathematics. In Tall, D. (Hrsg.), *Advanced Mathematical Thinking* (S. 65–80). Dodrecht: Kluwer Academic Press.

Wallas, G. (1926). *Art of Thought*. London: Watts & Co.

Wirth, J. (2004). *Selbstregulation von Lernprozessen.* Münster: Waxmann.

Gero STOFFELS, Siegen

Auffassungswechsel als eine wesentliche Hürde beim Übergang Schule – Hochschule: Ein Blick aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Übergangsproblematik ist ein komplexes Phänomen, das aus verschiedenen Perspektiven und von vielen Mitgliedern der mathematikdidaktischen Community diskutiert wird. Die aktuelle Forschung in diesem Bereich lässt sich in einem Spannungsfeld zwischen den vermuteten Ursachen „Fehlende Kenntnisse und Kompetenzen der Studienanfänger" vs. „Andersartigkeit von Schul- und Hochschulmathematik" verorten (vgl. Ableitinger, et al., 2013, S. V&VI). Das hier vorgestellte Promotionsprojekt ist eher letzterem Pol zuzuordnen. Ziele des Projekts sind zum einen die Übergangsproblematik durch Analyse von Übergangsbiographien der Studierenden aber auch Übergängen in der historischen Entwicklung der Mathematik zu verstehen. Zum anderen wird versucht innerhalb eines Seminarsettings der Übergangsproblematik dadurch zu begegnen, dass Studierenden die Möglichkeit gegeben wird anhand ausgesuchter historischen Quellen ihre eigene Auffassung von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematik zu reflektieren, um auf diese Weise ihren eigenen Übergang besser zu bewältigen. Auf der Basis eines Netzwerks von Theorien aus den Bereichen Mathematikdidaktik, Erkenntnistheorie und Psychologie (Balzer, Moulines, & Sneed, 1987; Bauersfeld, 1983; Burscheid & Struve, 2010; Gopnik & Meltzoff, 1997; Schoenfeld, 1985) lässt sich die folgende Hypothese formulieren:

Der Wechsel von einer empirisch-gegenständlichen zu einer formal-abstrakten Auffassung von Mathematik ist eine wesentliche Hürde für den Übergang von der Schule zur Hochschule.

Ein ähnlicher Auffassungswechsel von empirisch-gegenständlich zu formal-abstrakt ist in der Geschichte der Mathematik zu finden (Bspw. in der Entwicklung der Stochastik).

Daraus kann man die folgenden vier Forschungsfragestellungen entwickeln:

- Treten beide Auffassungen in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf?
- Ist die empirisch-gegenständliche Auffassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Schule dominant?
- Ist die formal-abstrakte Auffassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Hochschule/Universität dominant?
- Inwieweit kann die Auseinandersetzung mit historischen Quellen aus der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung den Studierenden dabei helfen ihre eigenen Übergangsprobleme besser zu bewältigen?

Die erste, zweite und dritte Fragestellung unterscheiden sich in ihrer methodischen Herangehensweise wesentlich von der vierten Fragestellung. Erstere soll insbesondere mithilfe einer strukturalistischen Rekonstruktion (vgl. Burscheid & Struve, 2010) von historischen Quellen, sowie Schul- und Fachbüchern untersucht werden. Letztere durch eine Fallstudie auf der Basis eines Forschungsseminars in Zusammenarbeit mit den teilnehmenden Studierenden (Stake, 1995).

Hinweise zu einer möglichen Antwort auf die erste Fragestellung können von Mises in „Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit" (Mises, 1928) und Kolmogoroff in seinen „Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung" (Kolmogoroff, 1933) geben. Von Mises legt seine Auffassung der Wahrscheinlichkeitstheorie folgendermaßen dar:

„Wir können sagen: Die Wahrscheinlichkeit, Sechs zu zeigen, ist eine physikalische Eigenschaft [sic!] eines Würfels, von derselben Art wie sein Gewicht, seine Wärmedurchlässigkeit, seine elektrische Leitfähigkeit usf. Ebenso entspricht dem Würfelpaar [sic!] […] neben anderen eine bestimmte physikalische Größe: die Wahrscheinlichkeit der Doppelsechs. Mit den mannigfachen Beziehungen derartiger Größen untereinander beschäftigt sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung." (Mises & Geiringer, 1972, S. 16)

Dieser Auszug deutet auf eine empirisch-gegenständliche Auffassung hin, schließlich fordert von Mises nicht nur die Anwendung eines formal-abstrakten Wahrscheinlichkeitsbegriffs, sondern legt diesen als „physikalische Eigenschaft" in einem empirisch wahrnehmbaren Phänomenbereich fest, worauf er im Folgenden seine Wahrscheinlichkeitsrechnung aufbaut.

Kolmogoroff wählt dagegen eine grundsätzlich andere Basis. Der Zweck seiner Ausarbeitung ist eine axiomatische Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, durch die ihre Grundbegriffe auf natürliche Weise in die moderne Mathematik eingeordnet werden können (vgl. Kolmogoroff, 1973, S. III). Dabei versteht er unter einer modernen Mathematik,

„daß [sic!], nachdem die Namen der zu untersuchenden Gegenstände und ihrer Grundbeziehungen sowie die Axiome, denen diese Grundbeziehungen zu gehorchen haben, angegeben sind, die ganze weitere Darstellung sich ausschließlich auf diese Axiome gründen soll und keine Rücksicht auf die jeweilige konkrete Bedeutung dieser Gegenstände und Beziehung nehmen darf." (Kolmogoroff, 1973, S. 1)

Dieser Auszug erinnert an Hilberts „Grundlagen der Geometrie" (Hilbert, 1899) auf die sich Kolmogoroff explizit bezieht. Damit ist seine Auffassung, die er innerhalb der „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung" vertritt, wohl eher als formal-abstrakt einzuordnen.

Aufschlüsse über die durch die Schule vermittelte Auffassung von Mathematik bzw. der Wahrscheinlichkeitsrechnung können Schulbücher geben. Exemplarisch sei hier eine Definition der Wahrscheinlichkeit aus dem Schulbuch Fokus 7 (NRW) genannt. „Mit der **Wahrscheinlichkeit** [sic!] eines Ausgangs wird die relative Häufigkeit bei vielen Wiederholungen des Experiments abgeschätzt.“ (Fokus Mathematik 7, 2014, S. 124)

Diese rekurriert auf die Definition der relativen Häufigkeit, die dort als Quotient von absoluter Häufigkeit und Gesamtanzahl der Versuchsausgänge gebildet wird. Die Wahrscheinlichkeit dient also, analog zu von Mises, zur Beschreibung empirischer Phänomene, d.h. tatsächlich durchgeführter Zufallsexperimente. Dementsprechend kann man auch hier von einer empirisch-gegenständlichen Auffassung sprechen.

Der dritten Frage wird sich mithilfe von Fach- bzw. Lehrbüchern ähnlich genähert. Georgii drückt beispielsweise in seiner „Einführung in die Stochastik“ seine im Werk vertretene Auffassung von Mathematik folgendermaßen aus:

„Erfreulicherweise hängt die Gültigkeit der mathematischen Aussagen über ein Wahrscheinlichkeitsmodell nicht von ihrer Interpretation ab. Die Mathematik wird nicht durch die Begrenztheiten menschlicher Interpretationen relativiert.“ (Georgii, 2009, S. 14)

In diesem Lehrbuch scheint also eine zu Kolmogoroff ähnliche Auffassung von (moderner) Mathematik vertreten zu werden, die auch ohne Interpretation, d.h. auch ohne Rückbezug auf empirische Gegenstände, gilt. Deshalb lässt sich diese Auffassung eher als formal-abstrakt klassifizieren.

Im Wintersemester 2015/2016 wurde in Hinblick auf die vierte Fragestellung erstmals ein Forschungsseminar mit ca. 25 Teilnehmenden durchgeführt, die sich überwiegend im 3.-6. Studiensemester des Studiengangs „Bachelor für das Lehramt an Haupt-, Real- und Gesamtschulen“ befanden. Die Fragestellung wird mithilfe des Fallstudienansatzes auf Basis dreier Datenquellen untersucht (Stake 1995). Dazu wurden zum einen Vorkenntnisse und Auffassungen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung, sowie Mathematik im Allgemeinen, mithilfe eines Pre- und Post-Tests erhoben, zum anderen wurde von den Teilnehmenden wöchentlich ein Reflexionsbuch geführt. Im Reflexionsbuch sollten drei bis fünf Fragen, die mehr oder weniger eng mit den Themen der jeweiligen Sitzung verknüpft waren, im Anschluss an jede Sitzung beantwortet werden. Dies konnte digital online oder handschriftlich erfolgen. Die Antworten in den jeweiligen Datenquellen sind durch einen Identifikationscode verknüpfbar, sodass die Möglichkeit besteht die Entwicklung der Teilnehmenden mithilfe dieser Daten nachzuzeichnen. Die Auswertung der vorliegenden Daten befindet sich in der Codier-Phase, daher können an dieser Stelle noch keine gesicherten Ergebnisse, inwieweit die Studierenden ihren eigenen Übergang mithilfe der vorgestellten Auseinandersetzung bewältigen, vorgestellt werden. Aus der Evaluation der Veranstaltung geht aber klar hervor, dass das Reflexionsbuch von den Teilnehmenden äußerst positiv aufgenommen wurde.

Literatur

Ableitinger, C., Kramer, J., & Prediger, S. (Eds.). (2013). *Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik. Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung: Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen.* Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Balzer, W., Moulines, C. U., & Sneed, J. D. (1987). *An Architectonic for Science: The Structuralist Program*: Springer Netherlands.

Bauersfeld, H. (1983). *Lernen und Lehren von Mathematik. Analysen zum Unterrichtshandeln*: Vol. 2. Köln: Aulis-Verlag Deubner.

Burscheid, H. J., & Struve, H. (2010). *Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen: Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung*. Hildesheim: Franzbecker.

Fokus Mathematik 7. Nordrhein-Westfalen, Gymnasium. (1. Aufl., 1. Dr). (2014). Berlin: Cornelsen.

Georgii, H.-O. (2009). *Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik* (4. überarb. und erw. Aufl.). De-Gruyter-Lehrbuch. Berlin: De Gruyter.

Gopnik, A., & Meltzoff, A. N. (1997). *Words, thoughts, and theories. Learning, development, and conceptual change*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Hilbert, D. (1899). *Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen*: Herausgegeben vom dem Fest-Comitee : Inhalt. D. Hilbert Grundlagen der Geometrie. Leipzig: B. G. Teubner.

Kolmogoroff, A. N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*: A. Kolmogoroff. Berlin: J. Springer.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, Fla.: Academic Press.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks: Sage Publications.

Von Mises, R. (1928). *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*: Richard von Mises. Wien: J. Springer.

Von Mises, R. von, & Geiringer, H. (1972). *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit* (4. Aufl. / durchges. von Hilda Geiringer). Library of exact philosophy: Vol. 7. Wien: Springer.

Hannes STOPPEL, Münster

Veränderungen epistemologischer Beliefs von Schülerinnen und Schülern in Relation zu unterrichtlichen Inhalten

1. Einleitung

Häufig stellt sich die Frage nach Beliefs von Schülerinnen und Schülern in Verbindung mit Mathematik sowie ihre Entwicklung über bestimmte Zeiträume. Ein Ziel dieser Studie liegt zum einen darin, die Entwicklung epistemologischer Beliefs von Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufe 12 in Projektkursen der Mathematik im Verlauf eines gesamten Schuljahrs zu untersuchen. Hierbei liegt die Konzentration einerseits auf Relationen zwischen den Beliefs der Schülerinnen und Schüler in Mathematik und Mathematikunterricht und unterschiedlichen Kursinhalten, Arbeitsformen und Ergebnissen. In diesen Bereichen sollen ebenfalls langfristige Veränderungen der Beliefs in Korrelation zu unterschiedlichen Kursinhalten und Arbeitsweisen von Schülerinnen und Schülern untersucht werden. Die Entwicklung ihrer Beliefs soll hinsichtlich Verbindungen zu den Unterrichtsinhalten sowie unterschiedlichen Arbeitsweisen untersucht werden. Hierbei werden Arbeitsphasen in beiden Schuljahren unterschiedlich zueinander so gestaltet, dass ein Vergleich der Entwicklung der Beliefs im Verlauf des Schuljahrs stattfinden kann. Dieser Artikel beschränkt sich auf den Vergleich der Beliefs sowie ihrer Entwicklung über die ersten acht Monate des Schuljahrs.

2. Methode und Datenerhebung

Der Autor selbst unterrichtete in den Schuljahren 2013/2014 und 2014/2015 jeweils zwei Projektkurse[6] in *Codierung und Kryptographie* oder in *Kosmologie und Teilchenphysik*. Die Kurse umfassten im Schuljahr 2013/2014 fünfundzwanzig Schülerinnen und Schüler sowie sechzehn Schülerinnen und Schüler im Schuljahr 2014/2015.

Die Datenaufnahme fand in Form von vier Fragebögen in Anlehnung an Kloosterman & Stage (1992) und Schommer-Aikins et al. (2005) und Urhahne & Hopf (2007), zwei Interviews in Anlehnung an Liu & Liu (2011), Arbeitsheften und Präsentationen der Schülerinnen und der Schüler sowie Notizen des Forschers statt. Hierbei fand die Datenaufnahme in beiden Schuljahren in derselben Form zu äquivalenten Zeitpunkten statt. Abbildung 1 zeigt den zeitlichen Verlauf beider Schuljahre zum Vergleich.

[6] Die Bezeichnungen der Kurse unterscheiden sich nach Bundesländern. Die offizielle Bezeichnung nach KMK ist *Seminarfach*.

Hier beschränkt es sich auf den Zeitraum vom Schuljahresbeginn bis zur Aufnahme der dritten Fragebögen zum Zeitpunkt t_3. Tabelle 1 zeigt den Ablauf für den Fall des Schuljahrs 2014/2015.

Die Fragebögen enthielten die Aspekte *Lernfähigkeit*, *Lerngeschwindigkeit*, *Stabilität des Wissens* und die *Struktur des Wissens* nach Schommer-Aikins et al. (2005) ergänzt durch einen Bereich der *Rechtfertigung des Wissens* nach Urhahne & Hopf (2004).

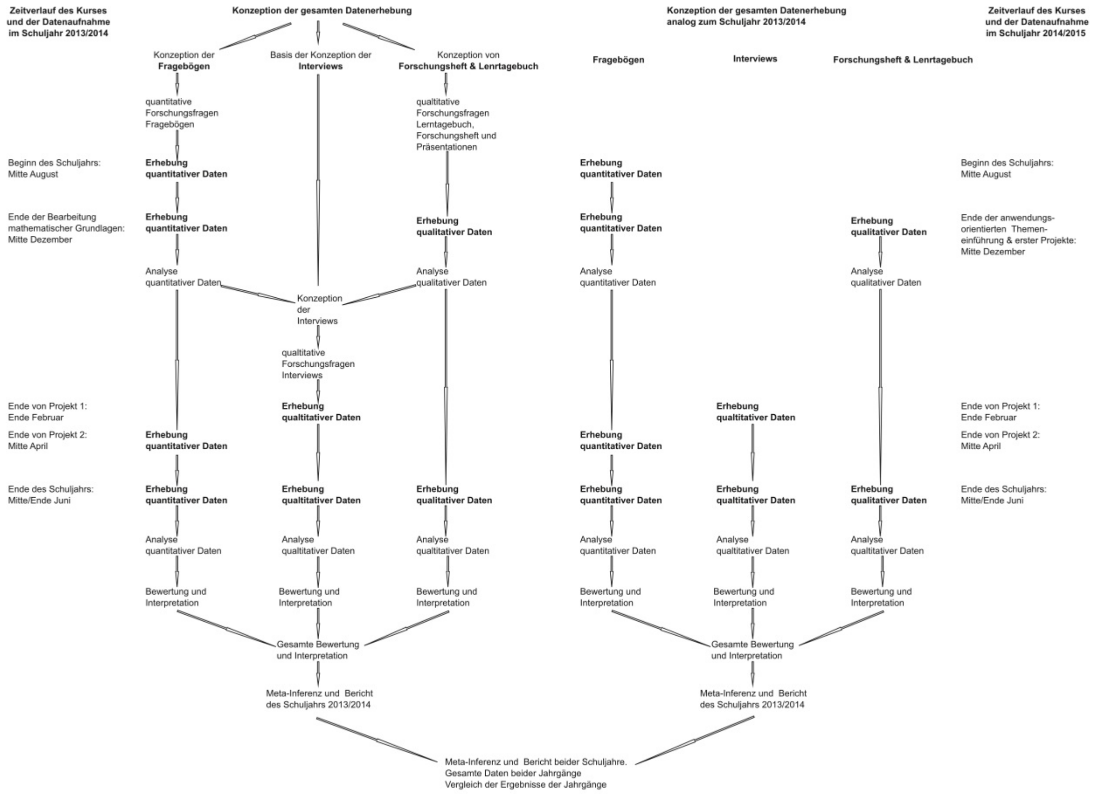


Abbildung 1. Zeitlicher Ablauf der Schuljahre

Die Schülerarbeitshefte enthielten die Spalten des Forschungsheftes und des Lerntagbuchs in Anlehnung an Hußmann (2003). Das Forschungsheft dient hiernach (S. 83) der strukturierten Darstellung der Ankerpunkte der Lernprozesse. Der Zweck des Lerntagbuchs liegt in der Darstellung, Kreativität, Fehlerbearbeitung und der Schlüssigkeit der Argumentationen (ed, S. 84).

Die Analyse der Daten lässt sich als *Vertiefungsdesign* qualitativer und quantitativer Daten mithilfe von *Mixed Method* (Kuchartz 2014, S. 44 ff) verstehen.

Datum	**Datentyp**	**Station im Unterricht**	**Folgende Phase**

Mitte August 2013 (t_1)	FB	Beginn d. Schuljahrs	Einführung in Codierung/Kryptographie & Mathe-Hintergründe
Mitte Dezember 2013 (t_2)	FB	Letzte Unterrichtseinheit vor den Weihnachtsferien, Ende der Mathe-Hintergründe	Themenvergabe Projekte 1, Einarbeitung über die Weihnachtsferien
Mitte April 2014 (t_3)	FB	Ende der Arbeitsphase des zweiten Projekts, Präsentation der Ergebnisse in den nächsten Stunden	Projekte 3

Tabelle 1. Zeitverlauf der Projektkurse 2013/2014; FB: Fragebogen

Die Arbeitsphase zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 zeichnete sich durch Unterschiede in beiden Schuljahren aus. Während im Schuljahr 2013/2014 rein mathematische Grundlagen für spätere Projektthemen geschaffen wurden, fand dies im Schuljahr 2014/2015 stets in Verbindung zum Kursthema (hier ausschließlich Codierung und Kryptographie) statt. Zum Zeitpunkt t_2 starteten Schülerinnen und Schüler erste Projekte alleine oder in Zweiergruppen, die zum Zeitpunkt t_3 fertiggestellt wurden.

3. Ergebnisse

In den Veränderungen der Beliefs in Phase d_1 zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 bzw. in Phase d_2 zwischen den Zeitpunkten t_2 und t_3 zeigten sich deutliche Unterschiede zwischen den Schuljahren, was hier am Beispiel der Beliefs in die Lernfähigkeit beschrieben sein soll. Während sich die Beliefs der Schülerinnen und Schüler im Schuljahr 2013/2014 in den Zeiträumen d_1 und d_2 bis auf wenige Ausnahmen in entgegengesetzte Richtungen veränderten, zeigten sich diese Beliefs im Schuljahr 2013/2014 in einer dieser Phasen gleich Null oder zumindest näherungsweise gleich Null. Dies deutet an, dass das Interesse zahlreicher Schülerinnen und Schüler eher bei rein fachlichen Inhalten liegt, anderen Schülerinnen und Schülern hingegen meinten, eher mit Inhalten eigener Projekte als mit rein fachlichen Inhalten umgehen zu können. Hierbei ist zu beachten, dass einige der Projekte rein fachliche Themen umfassten. Im Schuljahr 2014/2015 hingegen trauten sich Schülerinnen und Schüler entweder zu, kleine Projekte zu bearbeiten, oder sie gleubten eher an ihre Lernfähigkeit bei umfassenden Projekten. Dies lässt sich als Anregung zum Lernen bzw. zum Verständnis auffassen. Die Beobachtungen an den Fragebögen werden durch Analysen der Lerntagebücher sowie Forschungshefte als auch der Ausarbeitungen zu Projekten unterstützt. Ähnliche Erkenntnisse ergeben sich bei der Untersuchung anderer Beliefs und werden auch durch Beobachtungen der Lerntagebücher unterstützt.

4. Ausblick

Um Beobachtungen und Deutungen zu unterstützen bietet es sich an, die Interviews in die Untersuchung einzubeziehen. Da von den meisten Schülerinnen und Schülern vollständige Datensätze vorliegen, lassen sich unter Umständen Ursachen der Änderung ihrer Beliefs weiter einschränken. Andererseits lassen sich unter Umständen weitere bedeutungsvolle Ursachen der Änderungen ausmachen.

Unberücksichtigt blieben bislang die Beliefs zu einzelnen Zeitpunkten. Eine Untersuchung dieser Werte kann ebenfalls neue Erkenntnisse bringen.

Literatur

Hußmann, S. (2002). *Konstruktivistisches Lernen an intentionalen Problemen: Mathematik unterrichten in einer offenen Lernumgebung. Texte zur mathematischen Forschung und Lehre: Vol. 15*. Hildesheim [u.a.]: Franzbecker.

Kloosterman, P., & Stage, F. (1992). Measuring beliefs about mathematical problem solving. *School science and mathematics, 92*(3), 109–115.

Kuckartz, U. (2014). *Mixed Methods: Methodologie, Forschungsdesigns und Analyseverfahren. SpringerLink : Bücher*. Wiesbaden: Springer.

Liu, P.-H., & Liu, S.-Y. (2011). A Cross-Subject Investigation of College Students' Epistomological Beliefs of Physics and Mathematics. *The Asia-Pacfic-Pacific Education, 20*(2), 336–351.

Schommer-Aikins, M., Duell, O. K., & Hutter, R. (2005). Epistemological Beliefs, Mathematical Problem-Solving Beliefs, and Academic Performance of Middle School Students. *The Elementary School Journal, 105*(3), 289–304.

Urhahne, D., & Hopf, M. (2004). Epistemologische Überzeugungen in den Naturwissenschaften und ihre Zusammenhänge mit Motivation, Selbstkonzept und Lernstrategien. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften, 10,* 71–87.

Waldemar STRAUMBERGER, Bielefeld

Selbstdiagnosebögen als Grundlage für individuelles Üben

Selbstdiagnosebögen sind vom Prinzip ein Hilfsmittel zum eigenständigen Strukturieren von Übungsphasen. Durch die Darstellung der im Unterricht behandelten Kompetenzen ermöglichen sie es dem Lernenden, seinen Lernstand mittels eigener Einschätzung selbst zu bestimmen und seinen Übungsbedarf daraus abzuleiten. Die Übungsphase kann durch Übungsbedarf und die Übungsempfehlungen zu den Kompetenzen individuell strukturiert werden.

Der erste Bericht im deutschsprachigen Raum über die Nutzung von Selbstdiagnosebögen stammt von Rosel Reiff aus dem Jahr 2006, in dem sie über „Selbst- und Partnerdiagnose im Mathematikunterricht“ berichtet. Im Fokus stehen dabei ihre ersten Erfahrungen beim Einsatz in einer 7. Klasse einer Realschule. Kernpunkte sind dabei die Entwicklung der Einschätzung sowie die Motivation der Lernenden. Zu Beginn besteht bei Jungen eine Tendenz zur Überschätzung ihrer eigenen Leistung und bei Mädchen eine Tendenz zur Unterschätzung (Reiff 2006). Unabhängig vom Geschlecht wird die eigene Einschätzung mit der Zeit realistischer. Des Weiteren zeigen die Lernenden eine hohe Motivation beim Nutzen der Materialien. Ein weiterer Bericht aus dem Jahr 2011 stammt von Helmut Achilles, der Selbstdiagnosebögen zur Prüfungsvorbereitung in der Oberstufe einsetzte. Er berichtet ebenfalls von erhöhter Motivation seitens der Lernenden und betont zusätzlich den Nutzen solcher Materialien zur Förderung der Eigenverantwortung für das eigene Lernen (Achilles 2011).

Durch die Berichte stellt sich die Frage nach der Genauigkeit der Einschätzung. Gibt es zu Beginn Tendenzen zur Unter- oder Überschätzung und wie entwickelt sich diese? Gibt es Gruppen bei denen sich die Genauigkeit der Einschätzung unterscheidet?

Studie

Zum Untersuchen dieser Fragen wurde ein Studiendesign entwickelt, bei dem unter authentischen Bedingungen integriert in Übungsphasen Daten zur Selbsteinschätzung der Lernenden erhoben werden können. Die Übungsphasen haben einen Umfang von vier Unterrichtsstunden, die zur Vorbereitung auf Klassenarbeiten genutzt werden. Zu Beginn jeder Übungsphase schätzten sich die Lernenden selbst anhand der im Unterricht behandelten Inhalte ein und beginnen im Anschluss daran ihrem Übungsbedarf entsprechend zu Üben. In der dritten Stunde schätzen sich die Lernenden erneut ein und Bearbeiten einen Test zum Überprüfen ihres Lernstandes. Für die Korrektur stand den Lernenden eine Musterlösung zur Verfügung, die die Aufgaben den Basiskompetenzen des Selbstdiagnosebogens zuordnete. Hiermit konnten die Lernenden ihre Testleitung mit ihrer Einschätzung vergleichen.

Die Stichprobe bestand aus der 5. Jahrgangsstufe einer Realschule in Bielefeld Mitte. In den drei Klassen der Jahrgangsstufe wurden die Inhalte parallel behandelt und auch die gleichen Klassenarbeiten geschrieben.

Im Folgenden werden die Daten zu vier Übungsphasen mit der oben beschriebenen Struktur dargestellt. Die Daten beziehen sich dabei auf 48 Lernende, bei denen zu den vier Übungsphasen die Daten zur Selbsteinschätzung vor dem Test und zur Testleistung vorlagen.

Methoden zur Auswertung

Für die Auswertung der Genauigkeit wurde auf Methoden der Forschung zu metakognitiven Urteilen zurückgegriffen. Bei der Forschung zu metakognitiven Urteilen liegt ein Fokus auf der Messung der Genauigkeit von Urteilen über die eigene Kognition. Bei der Messung werden zwei Formen von Genauigkeit unterschieden, die absolute Genauigkeit (absolute accuracy) und die relative Genauigkeit (relative accuracy). Bei der absoluten Genauigkeit steht die Passung zwischen Urteilen und Leistungen in Form von Differenzen im Vordergrund. Bei der relativen Genauigkeit hingegen wird das Verhältnis von Urteilen und Leistungen untersucht, z. B. durch Messung der Korrelation. Klassisch werden Urteile und Leistung überwiegend normativ mittels 0 für falsch und 1 für richtig codiert. Zum Teil wird die Einschätzung mit einer 10-stufigen Skala oder durch die Angabe eines Prozentwertes erhoben. Dementsprechend wurde die Einschätzung der vorliegenden Studie mittels 0; 0,33; 0,67 und 1 codiert. Zur besseren Vergleichbarkeit und aufgrund der beschränkten Anzahl der Items im Test zum Messen der Leistung wurde die Testleistung ebenfalls mittels 0; 0,33; 0,67 und 1 codiert. Dabei steht 0 für keine Aufgabe richtig bearbeitet, 0,33 für weniger als die Hälfte richtig bearbeitet, 0,67 für mindestens die Hälfte der Aufgaben richtig bearbeitet aber nicht alle und 1 für alle Aufgaben richtig bearbeitet.

Zur Auswertung wurden zwei Kennwerte der absoluten Genauigkeit ausgewählt, der Absolute Accuracy Index und der Bias. Der Bias gibt die Richtung der Fehler bei der Einschätzung an, d. h. es liegt eine Tendenz zur Unter- oder Überschätzung vor (Schraw 2009). Dabei werden die Differenzen zwischen den Urteilen und den Leistungen aufsummiert und durch die Anzahl der Basiskompetenzen geteilt. Liegt die Einschätzung über der Leistung, so gibt der Bias einen Wert größer Null wieder, d. h. der Lernende hat eine Tendenz seine Leistung zu Überschätzen. Liegt die Einschätzung unter der Leistung, so gibt der Bias einen Wert kleiner Null wieder, d. h. der Lernende hat eine Tendenz seine Leistung zu unterschätzen. Gibt es keine Differenzen, so wird der Wert Null wieder gegeben. Der Absolute Accuracy Index gibt an, inwieweit die Einschätzung von der Leistung abweicht (Schraw 2009).

Hierzu werden die quadrierten Differenzen zwischen Urteil und Leistung zu jeder Basiskompetenz aufsummiert und durch die Anzahl der Basiskompetenzen geteilt. Gibt es keine Differenzen zwischen den abgegebenen Urteilen und der erhobenen Leitung, so hat der AAI den Wert 0. Liegen die Urteile und die Leistung eine Stufe auseinander im Mittel über alle Basiskompetenzen, so hat der AAI den Wert 0,11. Liegen Urteile und Leistung 2 Kategorien auseinander, so hat der AAI den Wert 0,44. Dies sind lediglich Richtwerte, da die Differenzen sich bei den Basiskompetenzen unterscheiden können.

Ergebnisse

Bei einer Klassifizierung der Stichprobe nach dem Geschlecht ließen sich nur geringe Unterschiede zwischen den zwei Gruppen erkennen. Unterschiede in Bezug auf eine Unterschätzung bei Mädchen konnten nicht beobachtet werden. In der vorliegenden Stichprobe überschätzten sich beide Gruppen.

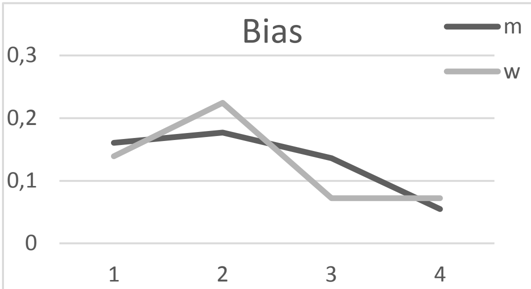


Abbildung 1: Bias nach Geschlechtern

In der Forschung zu metakognitiven Urteilen konnte in einigen Studien ein Zusammenhang zwischen dem Level des eigenen Könnens und der Fähigkeit, sich selbst adäquat einschätzen zu können, nachgewiesen werden (Bol, Hacker 2012). Daher wurde eine Klassifizierung nach der Entwicklung der Testleistung vorgenommen. Das erste Cluster beinhaltet ungefähr die Hälfte der Stichprobe und war bezüglich der Testleistung weitestgehend stabil im unteren Bereich. Das zweite Cluster beinhaltet ungefähr ein Viertel der Lernenden und zeichnet sich durch eine positive Entwicklung der Testleistung aus. Das dritte Cluster beinhaltet ebenfalls ungefähr ein Viertel der Lernenden, welche zu allen Messzeitpunkten eine gute Testleistung zeigten.

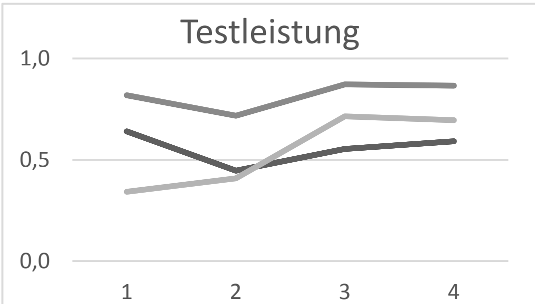


Abbildung 2: Entwicklung der Testleistung in den Clustern

Diese drei Cluster zeigen auch bei der Entwicklung des Bias und des AAI unterschiedliche Entwicklungen. Das dritte Cluster mit der guten Testleistung zeigt nur eine geringe Tendenz zur Überschätzung und im Vergleich zu den anderen Clustern eine bessere

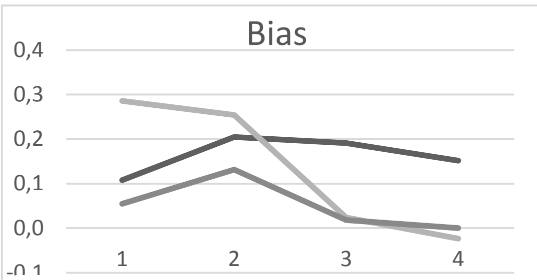


Abbildung 4: AAI nach Clustern

Genauigkeit bei der Einschätzung. Das zweite Cluster kann neben der Steigerung der Testleistung auch eine Steigerung der Genauigkeit zeigen, aber vor allem eine Abnahme der Überschätzung. Das erste Cluster zeigt ähnlich wie bei der Testleistung auch beim Bias und AAI nur geringe Veränderungen und keine erkennbaren Veränderungen.

Diskussion und Ausblick

Aus den erhobenen Daten ist zu erkennen, dass ein Teil der Lernenden ohne zusätzliche Hilfestellungen in der Lage ist, den Übungsbedarf zu bestimmen oder zumindest durch Übung sich darin zu verbessern. Es kann daher davon ausgegangen werden, dass ein Teil der Lernenden produktiv mit den Selbstdiagnosebögen arbeiten kann.

Es ist aber auch erkennbar, dass ein Teil der Lernenden neben Selbstdiagnosebögen weitere Hilfestellungen zum Verbessern der Genauigkeit benötigt. Eventuell kann diese Hilfestellung durch den sozialen Vergleich, der beispielsweise durch Partnerdiagnose (Reiff 2006) erfolgen kann, gegeben werden.

Literatur

Achilles, H. (2011). Selbst organisierte Prüfungsvorbereitung mithilfe von Selbsteinschätzungsbogen unterstützen. *PM. Praxis der Mathematik in der Schule*, 41, 17–22.

Bol, Linda; Hacker, Douglas J. (2012): Calibration research: where do we go from here? In: *Frontiers in psychology*, 3, 229

Reiff, R. (2006). Selbst- und Partnerdiagnose im Mathematikunterricht. Gezielte Förderung mit Diagnosebögen. *Friedrich Jahresheft*, 24, 68–72.

Schraw, Gregory (2009): Measuring Metacognitive Judgements. In: Douglas J. Hacker, John Dunlosky und Arthur C. Graesser (Hg.): *Handbook of metacognition in education*. New York: Routledge, 415–429.

Anselm STROHMAIER, Kristina REISS, Stefan UFER, Frank FISCHER, München

Einsatz heuristischer Lösungsbeispiele mit Selbsterklärungsprompts zur Förderung von Beweis- und Argumentationskompetenz an der Schnittstelle Schule-Hochschule

Mathematisches Argumentieren stellt eine erhebliche Herausforderung für viele Studienanfängerinnen und Studienanfänger der Mathematik dar (Rach, 2014). Das DFG-geförderte Projekt ELK-Math (vgl. Kollar et al., 2014) versucht daher gezielt im Rahmen eines Brückenkurses für Studienanfängerinnen und Studienanfänger der Mathematik unter anderem durch den Einsatz heuristischer Lösungsbeispiele verschiedene Facetten mathematischer Argumentationskompetenz zu fördern. In der vorliegenden Studie wird ein Teilaspekt des Projektes vorgestellt, der sich explizit mit der Förderung durch heuristische Lösungsbeispiele beschäftigt.

Generell zeigen Lösungsbeispiele den Lernenden eine vorgefertigte Lösung zu einem gegebenen Problem auf. Im Gegensatz zu regulären Lösungsbeispielen, die in ihrer Darstellungsform einen Produktcharakter aufweisen, fokussieren *heuristische Lösungsbeispiele* (HLB) auf den Prozess, der zu dieser Lösung führt. Dadurch sind HLB auch in wenig algorithmischen Domänen wie der Hochschulmathematik hilfreich, wo das Vermitteln erfolgreicher Strategien im Vordergrund steht (Reiss & Renkl, 2002).

Im Projekt ELK-Math werden bereits seit einigen Jahren erfolgreich HLB zur Förderung mathematischer Argumentationskompetenz eingesetzt (Reichersdorfer, 2013). Die HLB orientieren sich dabei an der von Boero (1999) beschriebenen Beweisstruktur. Für die vorliegende Studie wurden die HLB nochmals gezielt optimiert. Dabei wurde unter anderem das Format auf ein gedrucktes Arbeitsheft gewechselt und Selbsterklärungsprompts und Abbildungen dem aktuellen Stand der Forschung angepasst (Beitlich, Obersteiner & Reiss, 2015; Renkl, Hilbert & Schworm, 2009).

Mathematische Argumentationskompetenz wird verstanden „… als die Fähigkeit und Bereitschaft in einer mathematischen Argumentationssituation eine plausible mathematische Aussage zu finden, formulieren und evaluieren […]“ (Reichersdorfer, 2013, S. 8). Operationalisiert wurde das bisher in Form von vier Facetten: Neben technischem und komplexem Beweisen wurde auch das Evaluieren von richtigen bzw. falschen mathematischen Aussagen erhoben. Dabei fand sich bisher für die Evaluation keine Überlegenheit des Einsatzes von HLB gegenüber freien Problemlösebedingungen.

Es ist nach wie vor nicht geklärt, welchen Einfluss allgemeine kognitive Voraussetzungen der Lernenden auf die Wirksamkeit des Einsatzes von HLB haben. Während die Forschung zu allgemeinen Lösungsbeispielen eine Wirksamkeit vor allem für schwächere Lernende vermutet (Sweller, 2003), zeigen Studien zu HLB vermehrt den gegenteiligen Effekt: Hier sind oftmals positive Effekte vor allem bei stärkeren Lernenden zu beobachten (Kollar et al., 2014).

Neben den oben angesprochenen Facetten mathematischer Argumentationskompetenz deckt die genannte Definition explizit auch das Generieren einer mathematischen Hypothese mit ab. In unserer Operationalisierung wurde diese Facette bisher nicht erhoben. Auch wenn mittelfristig über die Analyse von Prozessdaten ein umfassenderes Erhebungsinstrument geschaffen werden soll (Ottinger & Ufer, 2015), findet sich die initiale Hypothesengenerierung derzeit noch nicht in unseren Instrumenten.

Für die vorliegende Studie ergeben sich daher drei Fragestellungen:

- Lässt sich durch optimierte heuristische Lösungsbeispiele ein positiver Einfluss auf das Evaluieren mathematischer Aussagen erreichen?
- Welchen Einfluss haben allgemeine kognitive Voraussetzungen auf die Wirksamkeit von heuristischen Lösungsbeispielen?
- Welchen Einfluss hat die Arbeit mit heuristischen Lösungsbeispielen auf die initiale Hypothesengenerierung?

Fragestellungen 1 & 2

Untersucht wurden bis zum jetzigen Zeitpunkt 120 Teilnehmerinnen und Teilnehmer eines Brückenkurses für Studienanfängerinnen und Studienanfänger der Mathematik (46 weiblich). Das Durchschnittsalter betrug 19,36 Jahre (*SD* = 2,18). Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer arbeiteten in vier Sitzungen in einer problemorientierten Lernumgebung. Dabei wurde eine offene mathematische Problemstellung präsentiert (beispielsweise „Wählen Sie einige Quadratzahlen. Bilden Sie Differenzen von je zwei Quadratzahlen. Was fällt Ihnen auf? Formulieren Sie eine Vermutung und beweisen Sie diese!“). Eine Gruppe erhielt in diesen Sitzungen HLB, eine Kontrollgruppe erhielt keine solche Unterstützung. Die Arbeit fand kooperativ in Zweiergruppen statt. Aufgaben, Instruktionen und Zeitvorgaben wurden dabei parallelisiert. Darüber hinaus wurde ein Vor- und Nachtest zum Evaluieren mathematischer Aussagen durchgeführt (vgl. Reichersdorfer, 2013). Zu Beginn des Brückenkurses wurde die Abiturnote als Indikator allgemeiner kognitiver Voraussetzungen erhoben.

Zur Analyse der Effekte der Bedingung und der allgemeinen kognitiven Voraussetzungen wurde eine ANCOVA gerechnet mit den Faktoren Interventionsgruppe und in einem zweiten Schritt darüber hinaus allgemeinen kognitiven Voraussetzungen (durch einen Mediansplit wurden zwei Stufen gebildet). Abhängige Variable war das Nachtestergebnis, das Vortestergebnis wurde als Kovariate kontrolliert.

Es zeigten sich keine signifikanten Effekte oder Interaktionseffekte.

Fragestellung 3

Methode

Untersucht wurden 306 Teilnehmerinnen und Teilnehmer des gleichen Brückenkurses für Studienanfängerinnen und Studienanfänger der Mathematik (117 weiblich). Das Durschnittalter betrug 19,22 Jahre (*SD* = 2,05). Für diese Untersuchung wurde nach zwei Interventionssitzungen eine weitere offene mathematische Problemstellung präsentiert, jedoch in beiden Gruppen keine Hilfestellung gegeben. Am Ende der Sitzung wurden die Teilnehmerinnen und Teilnehmer aufgefordert, eine Vermutung zur Problemsituation schriftlich festzuhalten.

Für die Aufgaben waren unterschiedliche hierarchische Hypothesen möglich. Kodiert wurde die mathematische Stärke der aufgestellten Vermutung.

In der Gruppe, die zuvor mit Lösungsbeispielen gearbeitet hatte, zeigten sich signifikant stärkere Vermutungen.

Diskussion

Auch durch die systematische Optimierung der HLB konnte in diesem Fall kein signifikanter Vorteil der Arbeit mit HLB gegenüber dem freien Arbeiten an gleichartigen Problemen auf das Evaluieren mathematischer Aussagen festgestellt werden. Das deutet darauf hin, dass sich auch nach vollständiger Auswertung aller vorliegenden Daten bisherige Forschungsergebnisse bestätigen könnten und lässt vermuten, dass in dieser Facette mathematischer Argumentationskompetenz möglicherweise kein systematischer Vorteil von HLB vorhanden ist. Ein Interaktionseffekt von allgemeinen kognitiven Voraussetzungen konnte in dieser Stichprobe nicht gefunden werden. Das bestärkt das Vorhaben, weiterhin genauer individuelle Voraussetzungen für die Wirksamkeit von HLB zu untersuchen. Insbesondere wird dies durch die vollständige Auswertung aller vorliegenden Daten möglich sein.

Ferner scheint die Vermutung bestärkt zu werden, dass die Arbeit mit HLB einen positiven Effekt auf die spätere initiale Hypothesengenerierung haben könnte. Auch wenn durch lediglich eine Aufgabe und ohne einen Vortest die Ergebnisse nicht überbewertet werden dürfen, scheint es doch lohnenswert, diese Facette mathematischer Argumentationskompetenz künftig systematisch zu untersuchen, wenn HLB zur Förderung verwendet werden. Auch hier erhoffen wir uns, durch vollständige Auswertung aller Daten ein differenzierteres Bild zeichnen zu können.

Literatur

Beitlich, J., Obersteiner, A., Reiss, K. (2015). How do secondary school students make use of different representation formats in heuristic worked examples? An analysis of eye movements. In K. Beswick, T. Muir, & J. Wells (Hrsg.), *Proceedings of the 39th Psychology of Mathematics Education conference* (Band 2, S. 97–104). Hobart: PME.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: a complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 7(8).

Kollar, I., Ufer, S., Reichersdorfer, E., Vogel, F., Fischer, F., Reiss, K. (2014). Effects of collaboration scripts and heuristic worked examples on the acquisition of mathematical argumentation skills of teacher students with different levels of prior achievement. *Learning and Instruction*, *32,* S. 22-36.

Ottinger, S., Ufer, S. (2015). Entwicklung eines Instruments zur Erfassung kooperativer mathematischer Argumentationskompetenz. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten, & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (S. 1148f.). Münster: WTM-Verlag.

Rach, Stefanie (2014). *Charakteristika von Lehr-Lern-Prozessen im Mathematikstudium. Bedingungsfaktoren für den Studienerfolg im ersten Semester.* (Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik 22). Münster, Waxmann.

Reichersdorfer, E. (2013). *Unterstützungsmaßnahmen am Beginn des Mathematikstudiums: Heuristische Lösungsbeispiele und Problemlösen in problembasierten Lernumgebungen zur Förderung mathematischer Argumentationskompetenz.* Diss. Technische Universität München.

Reiss, K., Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *37*(3), S. 212-220.

Renkl, A., Hilbert, T., Schworm, S. (2009). Example-based learning in heuristic domains: a cognitive load theory account. *Educational Psychology Review, 21*, S. 67-78.

Sweller, J. (2003). Evolution of human cognitive architecture. *Psychology of Learning and Motivation, 43,* S. 215–266.

Zöttl, L., Ufer S., Reiss, K. (2010). Modelling with Heuristic Worked Examples in the KOMMA Learning Environment. *Journal für Mathematik-Didaktik 31,* S. 143-165.

Nina STURM, Landau

„Ich kann das nicht!“ Ein Zugang zum Lösen problemhaltiger Textaufgaben mit externen Repräsentationen

Repräsentationen, die den in der Textaufgabe geschilderten Inhalt widerspiegeln, können als Modelle verstanden werden (vgl. Palmer, 1978). Sie übernehmen lösungsunterstützende Funktion insbesondere dann, wenn sie vom Lösenden selbst generiert und externalisiert werden. Für das Lösen und Verstehen der Textaufgabe ist entscheidend, ob es dem Lernenden, der seine eigene Sicht der Dinge zu Papier bringt, gelingt, die geschilderte Situation und die zugrunde liegenden Beziehungen adäquat zu repräsentieren (van Dijk & Kintsch, 1983).

Der Vorteil des Externalisierens liegt darin, dass die Repräsentationen konkretisiert und präzisiert, aber auch manipuliert, umstrukturiert und stetig weiterentwickelt werden können (Krauthausen & Scherer, 2014). Sie werden für den Lernenden zur Gedächtnis- und Lösungsstütze, da er sich fortwährend an seinen Notizen orientieren und an die Lösung herantasten kann (Lorenz, 2004; Norman, 1993). Dies geht mit einer Entlastung des Arbeitsgedächtnisse einher (Cox, 1999; Schnotz, Baadte, Müller, & Rasch, 2011). Der Lernende gewinnt zum einen freie Kapazitäten, die er für den Problemlöseprozess nutzen kann, da er seine Lösungsideen und –schritte wie auch die Aufgabenbedingungen nicht im Arbeitsgedächtnis präsent halten muss (Sweller, 1994). Zum anderen an Flexibilität und Beweglichkeit, wenn es darum geht den Problemraum einzuschränken (Fehse, 2001).

Ferner können externe Repräsentationen eine Unterstützung für Mitschülerinnen und Mitschüler wie auch Lehrkräfte darstellen, da vollzogene Handlungen und Gedankengänge sichtbar und leichter nachvollziehbar sind, als wenn sie lediglich verbal aufgenommen werden (Bransford & Johnson, 1972; Cox, 1999). Hinzu kommt, dass durch Zeigen Bezüge herausgestellt werden können und externen Repräsentationen zur Gesprächs- und Argumentationsstütze werden lassen (Fehse, 2001; Norman, 1993).

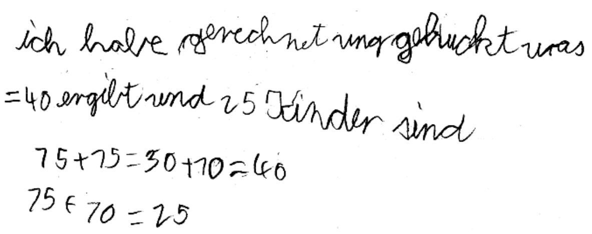
Die Vorteile externer Repräsentationen wurden im Repräsentationstraining der vorliegenden Untersuchung aufgegriffen und sich zunutze gemacht. Die Kinder wurden im Klassensetting angeregt, zu vielfältigen problemhaltigen Textaufgaben externe Repräsentationen zu generieren (vgl. Sturm & Rasch, 2015). In einer Problemlösestunde, insgesamt gab es zwölf, stand immer nur eine problemhaltige Textaufgabe im Vordergrund. Da es Grundschulkindern häufig an Erfahrungen in der Konstruktion und dem Umgang mit externen Repräsentationen mangelt (Cox, 1999; Sturm, 2015b), wurden die in Einzelarbeit entstandenen Eigenproduktionen der Kinder zum Lerngegenstand gemacht. Der Fokus lag dabei auf unterschiedlichen Heran- und Vorgehensweisen, die gemeinsam reflektiert, analysiert und weiterentwickelt wurden. In diesem Zusammenhang wurden auch die Vor- und Nachteile der Denk- und Erkenntniswerkzeuge herausgestellt und diskutiert.

Greift man die problemhaltige Textaufgabe

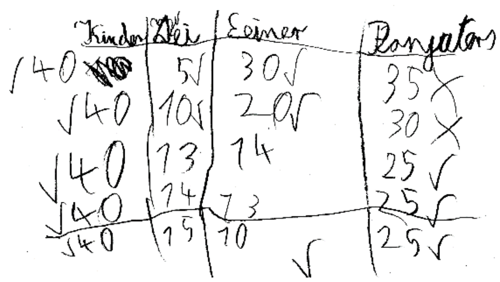
„Die Klassen 3a und 3b gehen in den Computerraum. Einige Kinder müssen zu zweit an einem Computer arbeiten. Insgesamt gibt es 25 Computer, aber 40 Kinder. Wie viele Kinder arbeiten alleine an einem Computer? Wie viele Kinder arbeiten zu zweit an einem Computer?“

heraus, so lassen sich die hierzu entstandenen Denk- und Erkenntniswerkzeuge der Drittklässler in Rechnungen, Tabellen, Zeichnungen und begründende Texte klassifizieren:

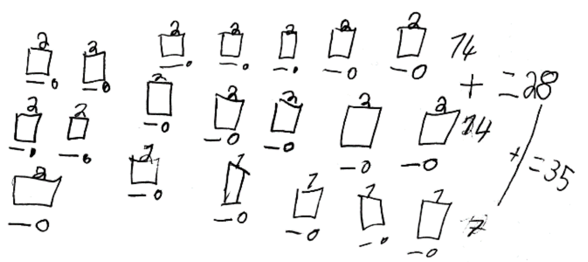
Kind 1: Rechnung



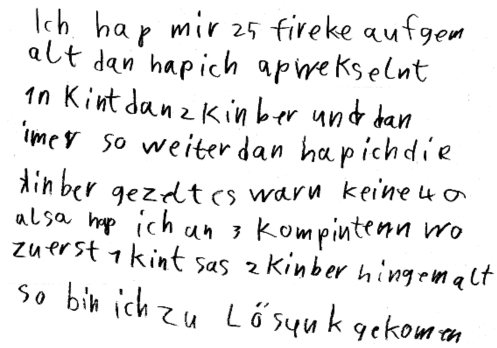
Kind 2: Tabelle



Kind 3: Zeichnung



Kind 4: Begründender Text



Die Denk- und Erkenntniswerkzeuge der Drittklässler spiegeln ganz unterschiedliche Denk- und Vorgehensweisen wider, die in der Reflexionsphase aufgegriffen, nachvollzogen aber auch gegenübergestellt wurden. Für einen vertiefenden Einblick in das Training und die Rolle der Eigenproduktionen muss an dieser Stelle auf Sturm (2015a) sowie Sturm und Rasch (2015) verwiesen werden.

Um den Fragestellungen, ob Drittklässler problemhaltige Textaufgaben nach der Intervention erfolgreicher lösen als vorher und inwiefern sich die Gruppen hinsichtlich ihres Lösungserfolgs unterscheiden, nachzugehen, lag der Untersuchung ein Pre-Post-Test-Kontrollgruppen-Design zugrunde. Dabei wurden vier Gruppen unterschieden: 1) trainierte Klassen, die sich zusätzlich austauschen durften (T+K+), 2) trainierte Klassen, die sich nicht zusätzlich austauschen durften (T+K−), 3) nicht trainierte Klassen, die sich zusätzlich austauschen durften (T−K+) und 4) nicht trainierte Klassen, die sich nicht zusätzlich austauschen durften (T−K−).

Rein deskriptiv spiegelte sich in allen vier Gruppen vom Pre- zum Posttest - die aus jeweils drei, strukturgleichen Aufgaben bestanden - ein Leistungsanstieg wider. Während zu Beginn der Untersuchung noch kein Drittklässler in der Lage war alle drei problemhaltigen Textaufgaben zu lösen, waren es nach der Intervention in den trainierten Klassen 19,6 % bzw. 18,2 %, in den nicht trainierten Klassen 7,2 % bzw. 4,0 % (s. Tabellen).

T+K+	***Pretest***	***Posttest***
Keine Richtige	73,9 %	19,5 %
Eine Richtige	22,7 %	25,3 %
Zwei Richtige	3,4 %	35,6 %
Drei Richtige	0 %	19,6 %

T+K−	***Pretest***	***Posttest***
Keine Richtige	75,6 %	30,7 %
Eine Richtige	21,1 %	26,1 %
Zwei Richtige	3,3 %	25,0 %
Drei Richtige	0 %	18,2 %

T−K+	***Pretest***	***Posttest***
Keine Richtige	76,2 %	38,6 %
Eine Richtige	22,6 %	31,3 %
Zwei Richtige	1,2 %	22,9 %
Drei Richtige	0 %	7,2 %

T−K−	***Pretest***	***Posttest***
Keine Richtige	84,4 %	52,0 %
Eine Richtige	15,6 %	29,3 %
Zwei Richtige	0 %	14,7 %
Drei Richtige	0 %	4,0 %

Zusammenfassend bleibt festzuhalten, dass nach der Intervention in allen vier Gruppen eine signifikante Leistungssteigerung zu beobachten war. Hypothesenkonform zeigte sich der größte Anstieg in den trainierten Klassen, die sich zusätzlich austauschen durften (T+K+). Insbesondere das Thematisieren und Aufgreifen unterschiedlicher Vor- und Herangehensweisen ermöglichte den Auf- bzw. Ausbau eines Repräsentationsrepertoires seitens der Drittklässler. Das Training sensibilisierte sie für unterschiedliche Zugänge und wirkte sich positiv auf deren Lösungserfolg aus. Nach der Intervention waren sie in der Lage adäquate Repräsentationen zu generieren, die ihnen dazu verhalfen, Problembarrieren zu überwinden.

Auch wenn Kinder die Textaufgaben mit ihrer regulären Mathematiklehrkraft bearbeiteten, ließ sich eine signifikante Leistungssteigerung feststellen. Hierbei darf jedoch nicht vernachlässigt werden, dass die unterrichtende Lehrkraft den Effekt beeinflusst.

Literatur

Bransford, J. D., & Johnson, M. K. (1972). Contextual prerequisites for understanding: Some investigations of comprehension and recall. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, *11*(6), 717–726. http://doi.org/10.1016/S0022-5371(72)80006-9

Cox, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual differences. *Learning and Instruction*, *9*(4), 343–363. http://doi.org/10.1016/S0959-4752(98)00051-6

Fehse, E. (2001). *Unterstützung von Kohärenzbildung beim kooperativen und individuellen Lernen mit externen Repräsentationen* (Dissertation). Abgerufen von https://www.freidok.uni-freiburg.de/data/220

Krauthausen, G., & Scherer, P. (2014). *Einführung in die Mathematikdidaktik* (3. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer.

Lorenz, J. H. (2004). *Kinder entdecken die Mathematik*. Braunschweig: Westermann.

Norman, D. A. (1993). *Things That Make Us Smart: Defending Human Attributes in the Age of the Machine*. Cambridge, MA: Perseus Books.

Palmer, S. (1978). Fundamental Aspects of Cognitive Representation. In E. Rosch & B. Lloyd (Hrsg.), *Cognition and Categorization* (S. 259–303). Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Schnotz, W., Baadte, C., Müller, A., & Rasch, R. (2011). Kreatives Denken und Problemlösen mit bildlichen und beschreibenden Repräsentationen. In K. Sachs-Hombach & R. Totzke (Hrsg.), *Bilder - Sehen - Denken. Zum Verhältnis von begrifflich-philosophischen und empirisch-psychologischen Ansätzen in der bildwissenschaftlichen Forschung* (S. 204–252). Köln: Halem.

Sturm, N. (2015a). Barrieren überwinden - aber wie? *Die Grundschulzeitschrift*, *29*(283/284), 36–39.

Sturm, N. (2015b). Die Rolle selbstgenerierter Repräsentationen beim Lösen problemhaltiger Textaufgaben und Fördern von „problem representation skills". In H. Linneweber-Lammerskitten, F. Caluori, & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015: Beiträge zur 49. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 9. bis 13. Februar in Basel* (S. 900–904). Münster: WTM-Verlag.

Sturm, N., & Rasch, R. (2015). Forms of Representation for Solving Mathematical Word Problems – Development of an Intervention Study. In W. Schnotz, A. Kauertz, H. Ludwig, A. Müller, & J. Pretsch (Hrsg.), *Multidisciplinary Research on Teaching and Learning* (S. 201–223). Basingstoke: Palgrave Macmillan.

Sweller, J. (1994). Cognitive load theory, learning difficulty, and instructional design. *Learning and Instruction*, *4*(4), 295–312. http://doi.org/10.1016/0959-4752(94)90003-5

van Dijk, T. A., & Kintsch, W. (1983). *Strategies of Discourse Comprehension*. New York: Acadamic Press.

Neruja SURIAKUMARAN, Maike VOLLSTEDT, Christoph DUCH-HARDT, Bremen

Sinn und Motivation im Kontext schulischen Mathematik-lernens

Schülerinnen und Schüler setzen sich im Mathematikunterricht stets mit der Sinnfrage auseinander und möchten dabei der Mathematik bzw. dem Mathematikunterricht einen Sinn unterlegen (Vinner, 2007). Der Sinn, verstanden als persönliche Relevanz eines Objekts oder einer Handlung (Vollstedt, 2011), wird von Meyer (2008) als das wichtigste Gütekriterium für die Unterrichtsgestaltung aufgezeigt.

Sinnkonstruktion

Die Interpretation des Sinnbegriffs ist vielfältig. Abhängig von Individuum und Kontext (Inhalt oder Situation) kann persönlich empfundene Relevanz beispielsweise in Wert, Intention, Zweck, Bedeutung, Nutzen oder Ziel liegen, die ein Objekt oder eine Handlung für das Individuum hat (Vollstedt, 2011). Sinn kann nicht von außen, z.B. über die Lehrperson, vermittelt werden; er muss aus der individuellen Biographie heraus von den Lernenden konstruiert werden (Meyer, 2008). Das Sinnbedürfnis kann hierbei nicht global befriedigt werden, Sinn muss für jeden einzelnen mathematischen Lerninhalt immerzu neu individuell interpretiert und subjektiv konstruiert werden (Fischer & Malle, 1985). Auf diese Weise können zur selben Zeit unterschiedliche Schülerinnen und Schüler einem mathematischen Kontext verschiedene Sinnverständnisse unterlegen (Kilpatrick, J., Hoyles, C. & Skovsmose, O., 2005; Vollstedt, 2011). Vollstedt (2011) konnte in einer empirischen Studie insgesamt 17 Sinnkonstruktionsarten (s. Abb. 1) im Kontext schulischen Mathematiklernens rekonstruieren, die sich in einem breiten Spektrum zwischen Pflichterfüllung, Purismus der Mathematik oder sozialer Eingebundenheit in der Klassengemeinschaft bewegen.

Die 17 Sinnkonstruktionsarten lassen sich hinsichtlich der zwei Dimensionen, die Intensität der Mathematik- und Individuumsbezogenheit, zu sieben Sinnkonstruktionstypen zusammenfassen. Aus mathematikdidaktischer Forschungsperspektive scheinen Sinn und Motivation eng miteinander verwoben zu sein, die genaue Wirkungsbeziehung ist bisher ungeklärt.

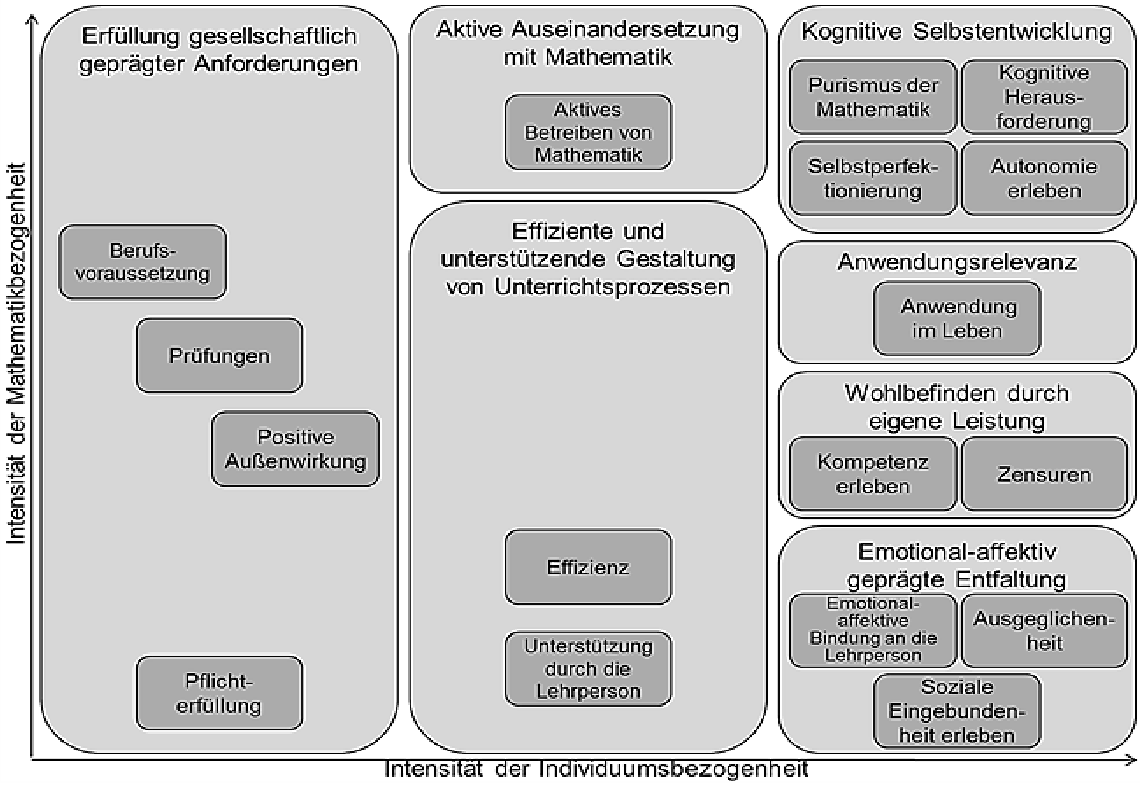


Abb. 1: Sinnkonstruktion beim Mathematiklernen (nach Vollstedt, 2011)

Motivation

Nach der Selbstbestimmungstheorie der Motivation (SDT) von Deci und Ryan (2002) haben Lernende die organismische und konstruktive Tendenz, ein immer mehr elaboriertes und kohärentes Selbst zu entwickeln. Dies bedeutet, sie haben das primäre Verlangen, Zusammenhänge zwischen dem eigenen Selbst und ihrer sozialen Umgebung zu erschließen, und stehen fortwährend in einer permanenten Interaktion mit ihrer sozialen Umwelt (Ryan & Deci, 2002). Die SDT umfasst sechs Subtheorien; zwei dieser sechs Subtheorien, das Kontinuum der Selbstbestimmung (Organismic Integration Theory) und die psychologischen Grundbedürfnisse (Basic Psychological Needs Theory) nehmen bei der Untersuchung der strukturellen Zusammenhänge von Sinn und Motivation eine bedeutende Rolle ein. Das Kontinuum der Selbstbestimmung beschreibt sechs Regulationsformen (amotiviert, introjiziert, identifiziert, integriert und intrinsisch) der Motivation hinsichtlich ihres Selbstbestimmungsgedankens. Je stärker selbstbestimmt eine Handlung ausgeübt wird, desto internalisierter ist sie mit dem eignen Selbst (Ryan & Deci, 2002). Die psychologischen Grundbedürfnisse nach Autonomie, Kompetenz und sozialer Eingebundenheit sind zentrale Elemente, die das psychische Wohlbefinden eines Individuums und die Internalisierung der von außen an die Person herangetragenen Ziele je nach Ausmaß unterstützen bzw. hemmen (Ryan & Deci, 2002).

Zusammenspiel von SDT und Sinnkonstruktion

Aus den Ergebnissen der Studie von Vollstedt (2011) geht die Annahme hervor, dass die Intensität der Individuumsbezogenheit aus der Sinnkonstruktionstheorie und das Ausmaß einer selbstbestimmt ausgeübten Handlung, aufgrund ihrer Wesensmerkmale in Wechselbeziehung stehen. Darüber hinaus stellten sich die psychologischen Grundbedürfnisse bei der Konstruktion von Sinn als einflussreiche Faktoren heraus und konnten gleichzeitig als Sinnkonstruktionsarten rekonstruiert werden.

Die zugrundeliegenden Theorien von Sinn und Motivation beinhalten organismische und dialektische Komponenten, d.h. sie berücksichtigen die Biographie der Lernenden im Einzelnen, welche eine entscheidende Rolle bei der Konstruktion von Sinn bzw. Motivation einnimmt, sowie die stetige Interaktion mit ihrer sozialen Umwelt (Deci & Ryan, 2002; Bruner, 1997). Ein tiefer gehender Einblick in diese Wechselbeziehung stellt eine hilfreiche Möglichkeit dar, mathematikdidaktische Lehr- und Lernprozesse aus Schülerinnen- und Schülerperspektive heraus zu betrachten und entsprechende Handlungsempfehlungen für die Bildungsrealität zu formulieren.

Geplantes methodisches Vorgehen

Die geplante Studie wird im Rahmen eines Dissertationsprojekts durchgeführt, welches sich noch in seinen Anfängen befindet. Um das Zusammenspiel zwischen Sinn und Motivation zu untersuchen, wird ein selbstentwickelter Fragebogen zu den unterschiedlichen Sinnarten mit bestehenden Instrumenten zur Motivation (Kontinuum der Selbstbestimmung: Müller, Hanfstingl & Andreitz, 2007; Psychologische Grundbedürfnisse: Rakoczy, Buff & Lipowsky, 2005) in neunten und zehnten Klassen in verschiedenen Bundesländern eingesetzt. Für die Datenerhebung wird derzeit von einer Stichprobe bestehend aus ca. 250 Schülerinnen und Schülern aus mindestens 10 Klassen ausgegangen. Die Daten werden mittels konfirmatorischer Faktorenanalysen und Strukturgleichungsmodellen ausgewertet werden. Derzeit wird der Fragebogen zu Sinn in neunten und zehnten Klassen unterschiedlicher Schulformen pilotiert. Hieran wird sich die Haupterhebung im Sommer 2016 anschließen.

Erwartete Ergebnisse

Im Rahmen dieser Studie soll ein Instrument entwickelt werden, welches zur Bestimmung von Sinnkonstruktionen beim Mathematiklernen eingesetzt werden kann. Daneben wird überprüft, wie die unterschiedlichen Sinnkonstruktionsarten untereinander in Zusammenhang stehen und welche Sinnkonstruktionsarten vorzugsweise in der befragten Stichprobe vorzufinden sind. Übergeordnetes Ziel der Studie ist es, zur Klärung des Zusammenspiels zwischen Sinn und Motivation beizutragen. Diese Einblicke sollen u.a. helfen die Sinnkonstruktionsarten beim schulischen Mathematiklernen, die im Zusammenhang mit der Lernmotivation als erstrebenswert eingeschätzt werden, zu fördern.

Literatur

Bruner, J. (1997). *Sinn, Kultur und Ich-Identität. Zur Kulturpsychologie des Sinns*. Heidelberg: Carl-Auer-Systeme.

Fischer, R. & Malle, G. (1985). Lokale, bedingte Sinn-Argumentation. In *Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln* (S. 9-26). Mannheim/Wien: BI Wissenschaftsverlag.

Kilpatrick, J., Hoyles, C. & Skovsmose, O. (2005). Meanings of Meaning of Mathematics. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, & O. Skovsmose. (Hrsg.), *Meaning in mathematics education.* New York, (S. 9-16).

Meyer, M. A. (2008). Unterrichtsplanung aus der Perspektive der Bildungsgangforschung. In M. A. Meyer, M. Prenzel, & S. Hellekamps (Hrsg.), Vol. 10. Sonderheft *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, Perspektiven der Didaktik* (S. 117-137). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Müller, F. H., Hanfstingl, B. & Andreitz, I. (2007). Skalen zur motivationalen Regulation beim Lernen von Schülerinnen und Schülern. In *Wissenschaftliche Beiträge aus dem Institut für Unterrichts- und Schulentwicklung* (IUS) Nr. 1, Alpen-Adria Universität Klagenfurt.

Rakoczy, K., Buff, A. & Lipowsky, F. (2005). Teil 1: Befragungsinstrumente. In E. Klieme et al. (Hrsg.): *Dokumentation der Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerisch-deutschen Videostudie „Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis“*, Frankfurt am Main.

Ryan, R. M. & Deci, E. L. (2002). An Overview of Self-Determination Theory: An Organismic-Dialectical Perspective. In E. L. Deci & R. M. Ryan (Hrsg.), *Handbook of Self-Determination Research.* (S. 3-33). Rochester, NY: University of Rochester Press.

Vinner, S. (2007). Mathematics education: Procedures, rituals and man`s search of meaning. In *Journal of Mathematical Behavior* 26, 1-10.

Vollstedt, M. (2011). *Sinnkonstruktion und Mathematiklernen in Deutschland und Hongkong. Eine rekonstruktiv-empirische Studie*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Kinga SZŰCS, Jena

Umgang mit Heterogenität unter Verwendung von (digitalen) Medien im Mathematikunterricht

1. Das Projekt „Medien im Mathematikunterricht“

Im Rahmen des durch das BMBF geförderten bundesweiten Projekts „Qualitätsoffensive Lehrerbildung“ werden Maßnahmen entwickelt, die langfristig die Lehrerausbildung verbessern. An der Friedrich-Schiller-Universität Jena geht es um das Projekt „Professionalisierung von Anfang an im Jenaer Modell der Lehrerbildung (ProfJL)“, dessen Teilprojekt 8 „Medien im Mathematikunterricht“ den Einsatz von insbesondere digitalen Medien unter dem Aspekt der Heterogenität in den Fokus stellt. In diesem Teilprojekt wird zum Ziel gesetzt, eine neue Lehrveranstaltung für die Ausbildung von Mathematiklehrern und –innen zu konzipieren, in der Unterrichtsmaterialien zum Einsatz von (insbes. digitalen) Medien im Mathematikunterricht entwickelt, exemplarisch schulisch erprobt und daraufhin evaluiert werden, inwieweit sie zum erfolgreichen Umgang mit Heterogenität beitragen. Im Wintersemester 2015/16 erfolgte zunächst die Pilotphase der Lehrveranstaltung, nachfolgend werden einige Ergebnisse exemplarisch vorgestellt.

2. Einsatz von nichtdigitalen Medien

Hierzu wurde im Rahmen der Lehrveranstaltung in erster Linie der vielfältige Einsatz von Zeitungen und populärwissenschaftlichen Zeitschriften thematisiert. Eine Unterrichtseinheit wurde zum Thema „Dezimalzahlen“ basierend auf dem Artikel „Verschieden und doch gleich“ (Rittaud, 2005) entwickelt. Das Hauptziel der Stunde ist, Lernenden der Klassenstufe 8 die Nicht-Eindeutigkeit der Dezimalzahldarstellung bewusst zu machen. Angeknüpft wird am Anfang der Stunde an die allen Lernenden vorausgesetzten Vorkenntnisse der Bruch- und Dezimalzahlen, indem eine Zuordnungsaufgabe mit bekannten Zahlen ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{2}{5}$, etc. und 0,1 ,$0,\overline{3}$, 0,4, 0,3) gestellt wird. Anschließend sollen die Schülerinnen und Schüler diese Zahlen und die Zahl 1 bzw. $0,\overline{9}$ auf den Zahlenstrahl eintragen. In der Erarbeitungsphase der Stunde erfolgt die Lektüre des Textes, parallel hierzu soll eine Richtig-falsch-Aufgabe mit neun Teilaufgaben gelöst werden, in denen das detaillierte Verständnis relevanter Informationen erfragt wird. Drei Beispiele sind Abbildung 1 zu entnehmen. In der Ergebnissicherungsphase kann nun leistungsdifferenziert gearbeitet werden, indem Aufgaben zum im Text hergeleiteten Beweis $(0,\overline{9} = 1)$ auf drei verschiedenen Ebenen angeboten werden. Leistungsschwächere sollen den Beweis mit Hilfe eines vor-

Wenn man 0,999… mit 10 multipliziert, verschiebt sich das Komma um eine Stelle nach links.
Bei 9,999… und 0,999… stimmt die Anzahl der Nachkommastellen nicht überein.
9,999…-0,999…=10

Abb. 1: Richtig-falsch-Aufgabe zum Text „Verschieden und doch gleich“

gegebenen Schemas (Abb. 2) rekonstruieren. Lernende mit durchschnittlicher kognitiver Leistung sind aufgefordert, den Beweis auf die Zahldarstellungen 0,2 und $0{,}1\overline{9}$ zu übertragen. Besonders leistungsstarke Schülerinnen und Schüler bekommen den offenen Transferauftrag, weitere Beispiele für Zahlen mit nichteindeutiger Dezimalzahldarstellung zu finden.

Ergänze den Beweis anhand des Textes:

$$\begin{aligned} x &= 0{,}\overline{9} && /\cdot 10 \\ \ldots\ldots &= 9{,}\overline{9} && /\ldots\ldots \\ 9x &= \ldots\ldots && /:9 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Abb. 2: Beweis von $0{,}\overline{9} = 1$ in Lückentextform für leistungsschwache Schülerinnen und Schüler

3. Einsatz von digitalen Medien

In der Lehrveranstaltung wurde schwerpunktmäßig mit digitalen Medien gearbeitet, neben dem möglichen Einsatz von Filmen bzw. Pod- und Videocasts im Unterricht, die nachfolgend ausführlicher thematisiert werden, wurde auch der CAS-Einsatz, die Arbeit mit dem Interaktiven Whiteboard und mit der Software GeoGebra angesprochen.

Pod- und Videocasts im Mathematikunterricht

Pod- und Videocasts sind im Mathematikunterricht ebenfalls vielfältig einsetzbar. So können sie durchaus zur inhaltlichen Motivation unbekannter mathematischer Sachverhalte in der Einführungsphase, zur Findung von neuen Zusammenhängen oder Beweisideen in der Erarbeitungsphase, aber auch zur Vertiefung, Vorstellung weiterführender Inhalte oder praktischer Anwendungen in der Übungsphase eingesetzt werden. Im Rahmen der Lehrveranstaltung wurde zu einem Ausschnitt aus dem Videocast „Die Sprache des Universums“ (Time-Code: 39:06 – 45:45) eine Unterrichtseinheit für die Klassenstufe 8 entwickelt. Das Hauptaugenmerk liegt hierbei auf die Irrationalität der Zahl $\sqrt{2}$ bzw. auf den entsprechenden Widerspruchsbeweis, der im Video im Zusammenhang mit dem Satz von Pythagoras thematisiert wird. Es wird aber vorausgesetzt, dass die Schülerinnen und Schüler den Satz des Pythagoras bereits kennen und ihn zur Berechnung von fehlenden Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck nutzen können. In der Einführungsphase werden sie aufgefordert, bei vorgegebenen Dreiecken die fehlende Seitenlänge zu bestimmen, so auch bei einem rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen 1 LE. Somit wird nicht nur an Vorkenntnisse angeknüpft, sondern auch die Zahl $\sqrt{2}$ wird indirekt angesprochen. Die Lernenden kennen zwar an dieser Stelle, dass die fehlende Seite die Länge

$\sqrt{2}$ LE hat, sie wissen aber nicht, dass diese Zahl irrational ist. In der Erarbeitungsphase geht es um den Videoausschnitt, beim ersten Anschauen sollen die Lernenden nur entscheiden, ob bestimmte Begriffe im Video erwähnt werden. Diese Aufgabe dient der groben Orientierung und einer ersten Auseinandersetzung mit dem Thema. Beim zweiten Anschauen sind zehn Multiple-Choice-Aufgaben gestellt, die dem detaillierten Verständnis dienen. Zwei Beispiele sind der Abbildung 3 zu entnehmen.

f. Die Pythagoreer nahmen an, dass	**A** diese Größe ein Bruch ist.
	B diese Größe kein Bruch ist.
	C die Fläche eines Kathetenquadrates der Fläche des Hypotenusenquadrates ist.
g. Aus der Annahme hat Hippasos die Folgerung gezogen, dass	**A** die gesuchte Größe eine Quadratzahl ist.
	B sich 2 als Bruch nicht darstellen lässt.
	C sich 2 als Verhältnis zweier Quadratzahlen aufschreiben lässt.

Abb. 3: Multiple-Choice-Aufgaben zum Film Die Sprache des Universums

In der Ergebnissicherungsphase bekommt jede/r Schüler/in eine Beweispuzzle-Aufgabe zur Rekonstruktion des im Video thematisierten Beweises. Eine Leistungsdifferenzierung kann durch geringfügige Veränderung der Aufgabenstellung erfolgen. Leistungsschwächere Lernende erhalten einen Beweis mit Lücken (Abb. 4) und auch die fehlenden Behauptungen als Hilfekärtchen. Sie sollen den entsprechenden Platz für diese in der Beweiskette finden. Schüler mit durchschnittlicher Leistung bekommen ebenfalls den Beweis mit Lücken, aber sie sollen die fehlenden Behauptungen selbst formulieren. Für Leistungsstarke ist der Beweis nur mit Anfangs- und Endaussage und ohne weitere Hilfe vorzulegen.

Filme im Mathematikunterricht

Hierbei ging es in erster Linie um Unterhaltungsfilme, die direkt oder indirekt mathematische Inhalte ansprechen und demzufolge die entsprechenden Stellen des Films im Mathematikunterricht eingesetzt werden können. Die Einsatzmöglichkeiten überlappen sich überwiegend mit denen bei den Pod- und Videocasts. In der Lehrveranstaltung wurde eine Unterrichtseinheit zu einem Ausschnitt (Time-Code 2:00-8:54) aus „Rosenkranz und Güldenstern" entworfen. Ziel ist hierbei eine erste (mathematische) Vorstellung für den Begriff Wahrscheinlichkeit zu entwickeln, insbesondere der frequentistische Aspekt steht dabei im Vordergrund. Nach einer Zettelabfrage zu den bereits vorhandenen (intuitiven) Vorstellungen zur Wahrscheinlichkeit und anschließender Sortierung im Plenum sollen die Lernenden Fragen wie „Was ist wahrscheinlicher, bei einem 78maligen Wurf 78mal Kopf oder 39mal Kopf und 39mal Zahl zu werfen?" entscheiden.

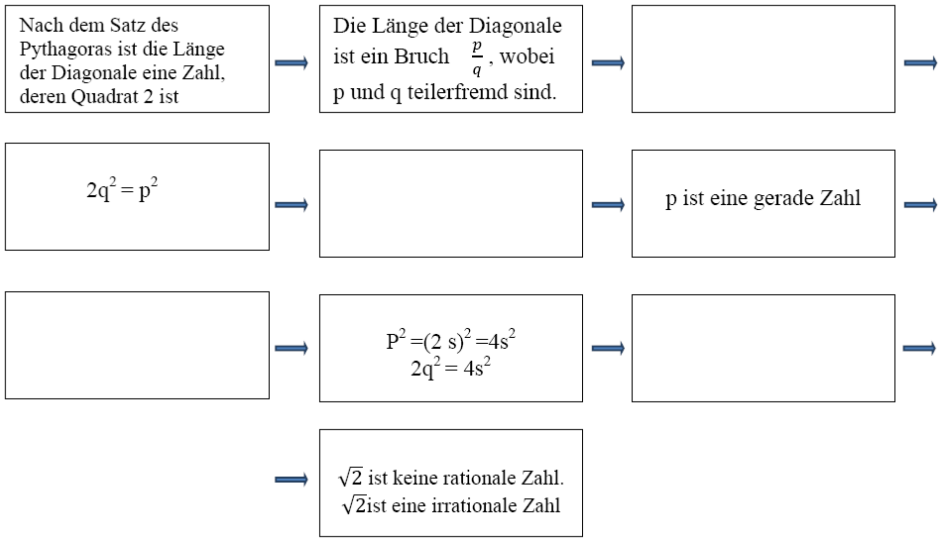


Abb. 4: Beweispuzzle (mittleres Leistungsniveau) zur Irrationalität von $\sqrt{2}$

Während des Anschauens sind die Lernenden aufgefordert, vorgegebene Argumente der im Filmausschnitt geführten Diskussion zweier Protagonisten in die richtige Reihenfolge zu bringen. Anschließend wird die Reihenfolge im Plenum besprochen und das Gesehene mit Hilfe von Leitfragen diskutiert. Hierzu ein exemplarisches Beispiel: „Im Film behauptet der eine Protagonist, dass Wahrscheinlichkeit nicht als ein Faktor wirkt. Diese Aussage formuliert er basierend auf der Erfahrung, dass die Münze 78mal auf die Kopfseite gefallen ist. Warum schlussfolgert er aus dieser Erfahrung, dass Wahrscheinlichkeit nicht wirkt? Was könnte man in der Praxis erwarten, wenn Wahrscheinlichkeit wirken würde?“

Literatur

Bernius, V. & Pleimfeldner, M. (2013). Das neue Zuhören. *Computer+Unterricht, 90*, 6–9.

Pallack, A. (2015). Filme in der Mathematik. *Mathewelt ML 189. Das Schülerarbeitsheft*, 1-16.

Pleimfeldner, M. (2013). Es war einmal… Podcasts im Mathematikunterricht. *Computer+Unterricht, 90*, 40–41.

Rittaud, B. (2005). Verschieden und doch gleich. *Spektrum der Wissenschaft, Spezial 2/05, Unendlich (plus eins)*, 52.

http://www.planet-schule.de/sf/filme-online.php?reihe=1073&film=8342 (25.02.2016)

Petra Carina TEBAARTZ, Gießen

Aufgabentypen bei der Mathematik-Olympiade

Die Mathematik-Olympiade ist ein Stufenwettbewerb, den jährlich bundesweit über 200.000 mathematisch interessierte Schülerinnen und Schüler in den Klassenstufen drei bis dreizehn bestreiten. In meinem Dissertationsprojekt beschäftige ich mich mit der Analyse und Förderung der Beweiskompetenz von Teilnehmerinnen und Teilnehmern der Mathematik-Olympiade ab der fünften Klassenstufe. Da diese Zielgruppe bisher kaum erforscht ist, habe ich zunächst untersucht, welche Anforderungen zum Beweisen bei der Mathematik-Olympiade gestellt werden. Diese Untersuchung stelle ich in diesem Text vor. Im weiteren Verlauf des Dissertationsprojekts erfolgt eine Erhebung der vorhandenen Beweiskompetenz und der Schwierigkeiten der Lernenden. Aus diesen zwei Analysen werde ich anschließend Ansatzpunkte für eine Förderung von Wettbewerbsteilnehmenden ableiten.

Aufgabenanalyse

Die Anforderungen an das Wissen und Können zum Beweisen erfasse ich mittels einer Aufgabenanalyse. Der Fokus liegt dabei auf dem Bereich der Teilbarkeit ganzer Zahlen. Untersuchungsgegenstand sind alle Wettbewerbsaufgaben aus diesem Themenbereich, die in den letzten zehn Schuljahren gestellt wurden. Insgesamt handelt es sich um 199 Aufgaben, von denen insgesamt 352 Aufgabenteile relevant sind.[7] Jeden Aufgabenteil analysiere ich separat. Zusätzlich zu den Aufgabenstellungen berücksichtige ich hierbei die vom Aufgabenausschuss herausgegebenen Lösungen und Bewertungsvorgaben und orientiere daran die vom Lösungsweg abhängige Untersuchung der Anforderungsstrukturen.

Ziel ist es herauszufinden, welche Anforderungen zum Beweisen vom Aufgabenausschuss an die Wettbewerbsteilnehmenden gestellt werden. Dafür arbeite ich die verschiedenen Anforderungsbereiche der komplexen Aktivität des Beweisens heraus und betrachte diese isoliert. Für jeden Schwierigkeitsbereich definiere ich Anforderungsniveaus und codiere alle Aufgabenteile entsprechend. Auf dieser Basis werde ich in Einklang mit den Analyseergebnissen Aufgaben für eine Erhebung der Beweiskompetenz von Teilnehmenden der Mathematik-Olympiade, dem zweiten Teil des Dissertationsprojekts, entwickeln. Abbildung 1 zeigt einen Ausschnitt des Schemas der Aufgabenanalyse, in dem als erster Schritt die Aufgabentypen erfasst werden. Im Folgenden erläutere ich diesen Ausschnitt näher.

[7] Da die Aufgaben der Bundesrunde der 55. Mathematik-Olympiade 2015/16 erst ab Juni 2016 berücksichtigt werden können, wird sich die Anzahl an Aufgaben noch geringfügig erhöhen.

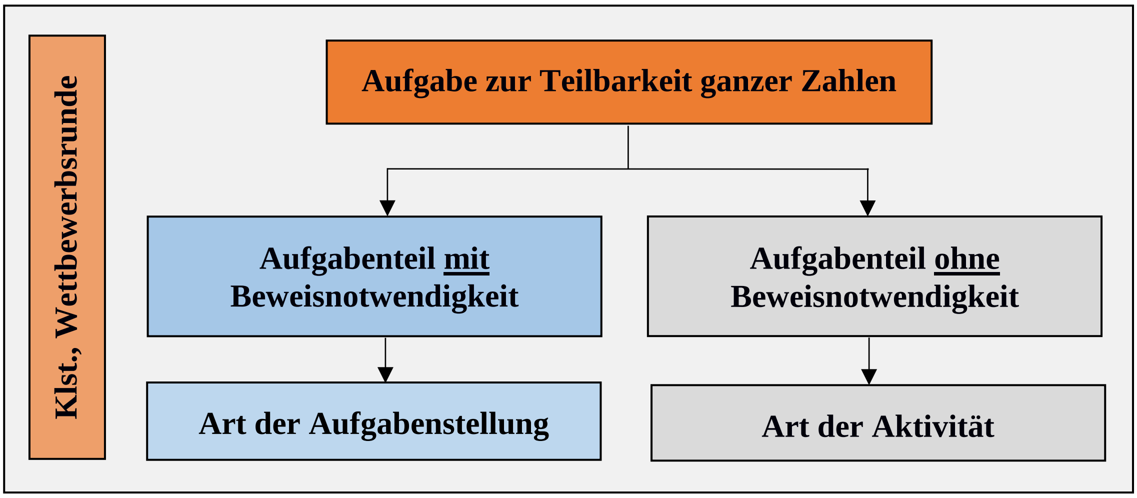


Abbildung 27: Ausschnitt des selbst entwickelten Schemas zur Aufgabenanalyse

Eine natürliche Zahl kann die Eigenschaft haben, dass sie durch ihre Quersumme teilbar ist. Ein Beispiel ist 12.

a) Gib zwei zweistellige natürliche Zahlen an, deren größter gemeinsamer Teiler 1 ist und die jeweils durch ihre Quersumme teilbar sind.

b) Untersuche, ob alle durch 9 teilbaren zweistelligen natürlichen Zahlen durch ihre Quersumme teilbar sind.

c) Begründe durch allgemeine Feststellungen, dass alle durch 10 teilbaren zweistelligen natürlichen Zahlen durch ihre Quersumme teilbar sind.

Abbildung 2: Aufgabe der 52. Mathematik-Olympiade, Klassenstufe 6, Landesrunde, 1. Aufgabe (Mathematik-Olympiaden e.V., 2013, S. 34f.)

Lisa geht in die 6. Klasse und wird zur Teilnahme an der 54. Mathematik-Olympiade eingeladen. Sie stellt fest, dass die Zahl 54 durch 6 teilbar ist, die Quersumme von 54 – das ist 9 – aber nicht.

a) Bestimme alle zweistelligen Zahlen, die durch 6 teilbar sind und deren Quersumme ebenfalls durch 6 teilbar ist.

Nun sucht sich Lisa Zahlen, die die Quersumme 54 haben.
Hinweis: Die Quersumme einer Zahl ist die Summe ihrer Ziffern.

b) Ermittle die kleinste derartige gerade Zahl.

[…]

Abbildung 3: Aufgabe der 54. Mathematik-Olympiade, Klassenstufe 6, Regionalrunde, 1. Aufgabe (Mathematik-Olympiaden e.V., 2015, S. 36)

Aufgabenteile mit/ohne Beweisnotwendigkeit

Bei der Analyse unterscheide ich zuerst zwischen Aufgabenteilen mit und solchen ohne Beweisnotwendigkeit. In Aufgaben ohne Beweisnotwendigkeit muss eine eigene Behauptung aufgestellt, eine vorgegebene Aussage geprüft, auf Beispiele angewendet oder eine Lösung angegeben werden. Zwar steht auf jedem Aufgabenblatt, dass der Lösungsweg korrekt und lückenlos darzustellen ist (z.B. Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V., 2010), was aber noch nicht der Beweiskompetenz zugerechnet werden soll, da es nach den Lösungen des Aufgabenausschusses unter anderem ausreicht, in Aufgabenteil a) in Abbildung 2 ein passendes Zahlentupel, zum Beispiel (10, 21), als Lösung anzuführen, ohne alle gegebenen Bedingungen explizit nachzuprüfen. In Aufgabenteil b) hingegen ist die gegebene Aussage mit einem Gegenbeispiel zu widerlegen, in Aufgabenteil c) ist eine Wenn-Dann-Aussage zu beweisen. Diese Aufgabenteile mit Beweisnotwendigkeit analysiere ich in Bezug auf die Anforderungen an das Wissen und Können zum Beweisen genauer. Dabei stellt sich die Frage, inwiefern die zu zeigende Aussage von den Wettbewerbsteilnehmenden zunächst selbständig entdeckt werden muss.

Art der Aufgabenstellung

Zu Aufgabenteilen mit Beweisnotwendigkeit gehören entsprechend den Ausführungen von Stein (1984) zum einen solche, in denen wie in Aufgabenteil c) in Abbildung 2 eine vorgegebene Aussage zu beweisen ist. Diese werden vom Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V. (2010) in Einklang mit der Aufgabentypologie von Bruder (2008) als „**Beweisaufgaben**“ bezeichnet.

Zum anderen gibt es Aufgaben, in denen ein gegebenes Problem selbständig zu lösen und die Richtigkeit der Lösung zu beweisen ist (Stein, 1984). Aufgabenteil b) in Abbildung 2 ist eine „**Untersuchungsaufgabe**“ (Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V., 2011, S. 2). Bei diesem Aufgabentyp ist zu entscheiden, ob etwas existiert oder ob eine Aussage allgemeingültig ist, und anschließend die gegebene Aussage oder ihre Negation zu beweisen. Abbildung 3 zeigt „**Bestimmungsaufgaben**“ (Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V., 2010, S. 2). Hier lassen sich zwei Arten unterscheiden. In Aufgabenteil b) muss weder die Existenz einer Lösung noch die Anzahl der möglichen Lösungen überprüft werden. In Aufgabenteil a) hingegen ist die Mächtigkeit der Lösungsmenge unbekannt. Entweder existiert keine Lösung oder es sind alle möglichen Lösungen zu finden. Die Korrektheit und die Vollständigkeit der Lösungsmenge sind nachzuweisen (a.a.O.).

Ergebnisse differenziert nach Klassengruppen

Abbildung 4 zeigt, dass in jeder Klassengruppe[8] die Aufgabenteile mit Beweisnotwendigkeit über 85% ausmachen. Zudem enthält jede (Gesamt-)Aufgabe einen Aufgabenteil mit Beweisnotwendigkeit. Die Fähigkeit, Beweise entwickeln und formulieren zu können, ist demnach in allen Klassengruppen von großer Bedeutung für einen Erfolg im Wettbewerb. Mit steigender Klassengruppe nehmen dabei Beweisaufgaben einen zunehmend großen Anteil an allen Aufgabenteilen ein (siehe Abbildung 4), jedoch nur teilweise signifikant. Daher erscheint es sehr wichtig, die genauen Anforderungen beim Beweisen auch inhaltlich zu verstehen, um dann gezielt fördern zu können.

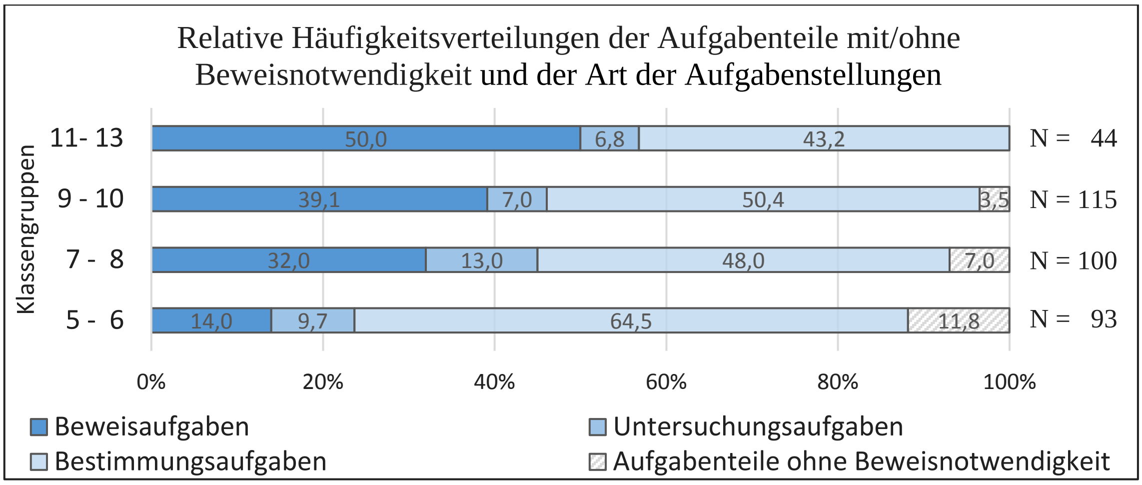


Abbildung 4: Ergebnisse differenziert nach Klassenstufen

Literatur

Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V. (Hrsg.) (2010). *50. Mathematik-Olympiade, 1. Stufe (Schulrunde), Klasse 7, Aufgaben*. Verfügbar unter http://www.mathematik-olympiaden.de/aufgaben/50/1/A50071.pdf [17.03.2016].

Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V. (Hrsg.) (2011). *51. Mathematik-Olympiade, 1. Stufe (Schulrunde), Klasse 7, Aufgaben*. Verfügbar unter http://www.mathematik-olympiaden.de/aufgaben/51/1/A51071.pdf [17.03.2016].

Bruder, R. (2008). Vielseitig mit Aufgaben arbeiten. In R. Bruder, T. Leuders & A. Büchter (Hrsg.), *Mathematikunterricht entwickeln* (S. 18–52). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Mathematik-Olympiaden e.V. (Hrsg.) (2013). *Die 52. Mathematik-Olympiade 2012/2013. Aufgaben und Lösungen.* Hamburg: Hereus.

Mathematik-Olympiaden e.V. (Hrsg.) (2015). *Die 54. Mathematik-Olympiade 2014/2015. Aufgaben und Lösungen.* Hamburg: Hereus.

Stein, M. (1984). *Beweisen*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

[8] Die Einteilung in Klassengruppen entspricht der Struktur des Aufgabenausschusses und trägt der Tatsache Rechnung, dass in einigen Wettbewerbsrunden in verschiedenen Klassenstufen (z.B. Klst. 11-13) dieselben Aufgaben gestellt werden.

Eva THANHEISER, Portland und Silke LADEL, Saarbrücken

Flexibles Verstehen der ganzen Zahlen und Operationen im Kontext der Grundschullehrerausbildung

Dieser Beitrag zeigt eindrücklich auf wie komplex die schriftlichen Rechenverfahren der Addition und Subtraktion in ihrem Verständnis sowohl für Kinder als auch für Lehramtsstudierende sind. Zur Erarbeitung dieser schriftlichen Rechenverfahren kommt der Analyse und der Arbeit mit didaktischen Materialien eine bedeutsame Rolle zu. Die Ergebnisse einer detaillierten Analyse weisen darauf hin, dass die Materialien ganz unterschiedliche Prinzipien unseres Zahlsystems fokussieren und erst die Summe der vorgestellten Materialien ein flexibles Verstehen der ganzen Zahlen und Operationen unterstützt. Insbesondere die Verknüpfung des Prinzips der Bündelung mit dem Prinzip des Stellenwerts ist hierfür entscheidend.

1. Zahlverständnis von Kindern und Lehramtsstudierenden

Der Zusammenhang zwischen verschiedenen Bündelungseinheiten (Einer, Zehner, Hunderter, etc.) ist nicht selbsterklärend. Allein die unterschiedlichen Wörter wie z.B. „Zehn" und „Zehn*er*" können zu Verständnisschwierigkeiten führen. So entwickeln Kinder häufig eine Vorstellung von Einern und Zehnern, in der diese in keiner Beziehung zueinander stehen (Cobb & Wheatley, 1988; Gaidoschik, 2014). Einer sind darin „klein" und Zehner „groß" (Ladel & Kortenkamp 2014). Die Ergebnisse der Untersuchungen von Kamii (1986) und Ross (1990) zeigen, dass nur etwa die Hälfte der Kinder in der vierten Klasse verstehen, dass die 1 in der Zahl 16 für 10 steht. Kouba & Wearne (2000) berichten, dass nur 60% der 8-Klässler in der Lage sind eine dreistellige Zahl zu schreiben, wenn ihnen Ziffern und Angaben zu deren Stellenwert gegeben werden.

Das fehlende Verständnis für den Zusammenhang verschiedener Bündelungseinheiten führt häufig zu einem verständnislosem Anwenden von Prozeduren und Algorithmen. Dies kann sich nachteilig auf Kinder auswirken (Ball, 1988/1989, Constance Kamii, 1986; Pesek und Kirshner, 2000). So lösten in einer Studie von Kamii (1994) Zweit- und Drittklässler, welche die Algorithmen nicht gelehrt bekommen hatten, die Aufgabe 504 – 306 erfolgreicher als Viertklässler, welche die Algorithmen gelernt hatten.

Bei den Lehramtsstudierenden sind die Ergebnisse ähnlich. Es mangelt ihnen an einem grundlegenden Verständnis unseres Zahlensystems und der schriftlichen Rechenverfahren (Ball, 1989; Ma, 1999; Ross, 2001; Zazkis & Khoury, 1993). Obwohl die meisten Lehramtsstudierenden die schriftlichen Rechenverfahren zwar durchführen können scheitern sie daran diese verständnisvoll zu erklären (Ball, 1988/1989; Ma, 1999). So sind laut Ross

(2001) nur 53% der Lehramtsstudierenden in der Lage zu vermitteln, dass die 2 in 25, 20 repräsentiert.

Thanheiser (2014) unterscheidet aufgrund ihrer Untersuchungen vier unterschiedliche Typen der Zahlvorstellung bei Lehramtsstudierenden (Abb. 1). Typ 1 *Reference Units* und Typ 2 *Groups of Ones* entsprechen korrekten Vorstellungen, Typ 3 *Concatenated Digits* und Typ 4 *Concatenated Digits Plus* sind hingegen fehlerhaft.

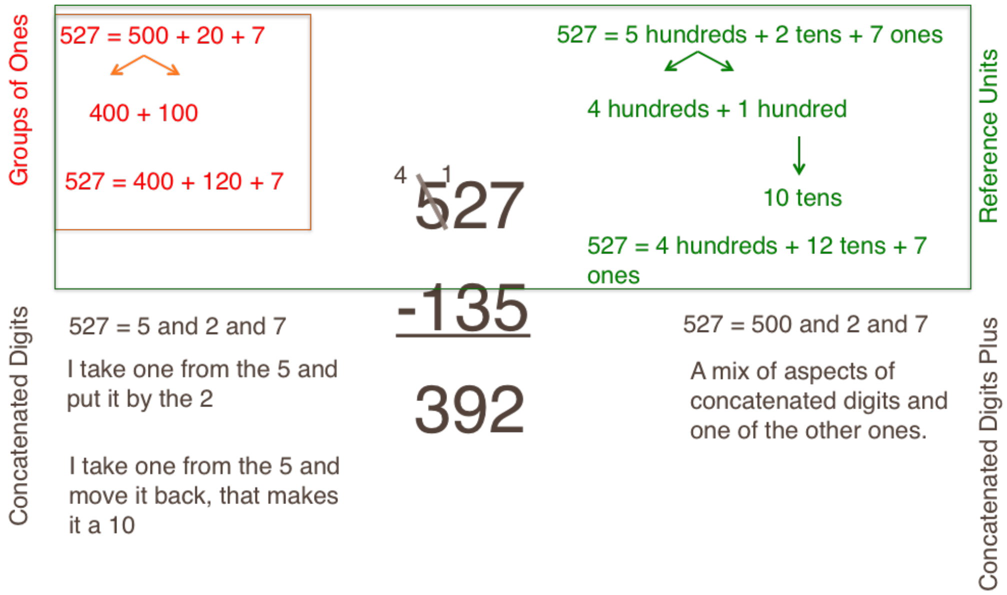


Abbildung 28: 4 Typen der Zahlvorstellung bei Lehramtsstudierenden

In Untersuchungen von 190 Lehramtsstudierenden sind 19% den *Reference Units* oder *Groups of Ones* zuzuordnen und 81% den *Concatenated Digits* bzw. *Concatenated Digits Plus*!

2. Ziffernwert – Stellenwert – Zahlenwert

Zur Erarbeitung eines verständnisvollen Umgangs mit Zahlen und Operationen sind Handlungen mit didaktisch gutem Material von besonderer Bedeutung. Hierzu werden im Folgenden die Montessori-Karten, das Mehrsystemmaterial sowie die App „Stellenwerttafel“ (Kortenkamp 2012-2016) detailliert betrachtet (Tab. 1) sowie dabei die Begriffe *Ziffernwert*, *Stellenwert* und *Zahlenwert* geklärt.

Multipliziert man bei einer Zahl (z.B. 389) den Wert einer Ziffer (z.B. 3) mit dessen Stellenwert (hier: 100), so erhält man nach dem multiplikativen Prinzip deren Zahlenwert (hier: 300). Werden die Zahlenwerte addiert (hier: 300 + 80 + 9), so erhält man den Zahlenwert der ganzen Zahl (additives Prinzip). Zur Veranschaulichung und Fokussierung dieses additiven Prinzips eignen sich die Montessori-Karten sehr gut. Diese sind so gestaltet, dass die Zahlenwerte der einzelnen Ziffern durch auseinanderschieben sichtbar gemacht werden können, bzw. das additive Prinzip durch Aufeinanderlegen der verschiedenen Zahlenwerte verdeutlich wird. Aufgrund ihrer symbolischen Repräsentationsform sind die Montessori-Karten einem hohen Abstraktionsniveau zuzuordnen. Diese Vorstellung von Zahlen entspricht dem Typ *Group of Ones*.

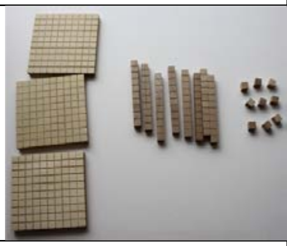
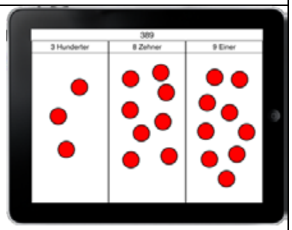
	Montessori-Karten	**Mehrsystem-material**	**App „Stellen-werttafel"**
Repräsentation der Zahl 389			
Repräsentationsform / Abstraktionsniveau	Symbolisch	Enaktiv mit Erhalt des Volumens	Symbolisch und enaktiv verknüpft mit einheitlichen Zählmarken
Direkte Verbindung der geschriebenen Zahl mit ihrem Zahlenwert	X		X
Sichtbare 10:1 Gruppierung		X	X

Tabelle 2: Material zur Förderung eines verständnisvollen Umgangs mit Zahlen und Operationen

Wird der Wert einer Ziffer (z.B. 3) zusammen mit dessen Stellenwert in Form der Bündelungseinheit genannt (hier: Hunderter), so erhält man die Zahlenwerte unter Angabe der Bündelungseinheit (z.B. 3 Hunderter). Dabei wird das Prinzip der Bündelung fokussiert. Zur Veranschaulichung eignet sich sehr gut das Mehrsystemmaterial. Die Bündelungseinheiten nach dem Dezimalsystem sind vorgegeben und die Handlung des Bündelns wird durch Tauschen vollzogen (vgl. Ladel 2014). Die Arbeit mit dem Mehrsystemmaterial entspricht einer sehr niedrigen Abstraktionsstufe, da das Material durch den Erhalt des Volumens gekennzeichnet ist und in der enaktiven Repräsentationsform damit gehandelt wird. Der Angabe von Bündelungseinheiten entspricht der Typ *Reference Units*.

Für einen verständnisvollen Umgang mit dem schriftlichen Additions- und Subtraktionsverfahren muss das Prinzip des Stellenwerts mit dem Prinzip der Bündelung verknüpft werden. Voraussetzung ist die vorherige Erarbeitung der beiden Prinzipien im Einzelnen und deren gesichertes Verständnis. Umgesetzt ist diese Verknüpfung sehr anschaulich in der App „Stellenwerttafel“. Ist die App so eingestellt, dass die Zahl angezeigt wird („Show total“), so ist auf einen Blick sichtbar, dass sich beim Verschieben eines Plättchens in eine andere Spalte nicht der Wert der Zahl ändert sondern deren Darstellung. Die symbolische Repräsentationsform ist dabei automatisch mit der enaktiven verknüpft. Das Material ist abstrakter als das Mehrsystemmaterial, da die Zählmarken nicht mehr den Erhalt des Volumens visualisieren, sondern wie die Ziffern auch gleichartig sind (Abb. 2).

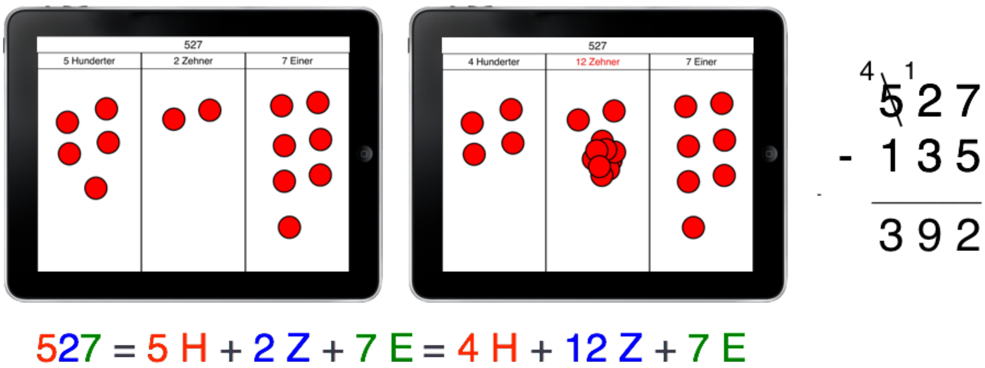


Abbildung 29: Entbündeln mit der App "Stellenwerttafel"

3. Ein Beispiel der Anwendung

In einem Seminar an einer Universität im Nordwesten der Vereinigen Staaten arbeiteten 19 Lehramtsstudierende über 6 Unterrichtsstunden (jeweils 3 Doppelstunden von 110 min) hinweg mit diesen drei Materialien. Es wurden Einzelinterviews geführt, schriftliche Arbeiten verfasst, Befragungen vorgenommen sowie Tests durchgeführt (nähere Informationen s. Thanheiser 2009; 2010; 2014; Thanheiser et al., 2013). Während vor dem Kurs noch lediglich 2 Lehramtsstudierende den Typen *Reference Units* und *Groups of Ones* zuzuordnen waren und 15 Lehramtsstudierende den Typen *Concatenated Digits* sowie *Concatenated Plus*, waren es abschließend 14 in den ersten beiden Typen und 5 in den zuletzt genannten.

Literatur

Die Literaturliste kann bei den Autorinnen angefragt werden.

Benjamin THIEDE, Lars HOLZÄPFEL, Timo LEUDERS, Freiburg

Von der Textaufgabe zum Ergebnis – Der Prozentstreifen als Hilfsmittel bei Prozentaufgaben

Ausgangssituation

Das Bearbeiten von Textaufgaben im Bereich des Prozentrechnens stellt seit Jahrzehnten eine besondere Herausforderung für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I dar. In diesem Kontext stellen sich bei der Betrachtung der folgenden, typischen Aufgabe: *„Ein Autohaus feiert Geburtstag. Beim Kauf eines Neuwagens gibt es deswegen 20 % Rabatt. Ein Kunde nutzt dieses Angebot, entscheidet sich für einen Sportwagen und zahlt an der Kasse noch 24000 €. Wie teuer war der Wagen ursprünglich?*“ sowohl Fragen nach Bearbeitungs- und Lösungsprozessen als auch auftretenden Schwierigkeiten. Im Folgenden wird aufgezeigt, inwieweit Visualisierungen, hier am Beispiel des Prozentstreifens, unterstützend wirken können.

Theoretischer Hintergrund

Dem Prozentrechnen wird in der Schule und im Alltag eine große Bedeutung zugemessen (vgl. Hafner, 2012; Sill, 2010; KMK-Bildungsstandards, 2003). Strikte, rezeptartig gelernte Schemata beim Lösen von Prozentaufgaben behindern jedoch die Flexibilität bei der Auswahl von Lösungsansätzen (vgl. Kleine & Jordan, 2007). Zudem sind solche Schemata und auch Lösungsansätze oft fehlerhaft (vgl. Jitendra & Star, 2012; Berger, 1989). Dabei wird immer wieder von ähnlichen Fehlermustern, wie Verständnis-, Zuordnungs- und Rechenfehlern berichtet (vgl. Hafner, 2012; Sill, 2010; Berger, 1989). Insbesondere bei Textaufgaben sind zentrale Hürden im Übersetzungsprozess von der Realsituation zum mathematischen Modell zu konstatieren. Diese drücken sich beispielsweise durch Schwierigkeiten im Erfassen der Situation, der Auswahl geeigneter Operationen sowie der Ergebnisvalidierung aus (vgl. Prediger, 2009). Das Lösen solcher Aufgaben erscheint demnach als “complex cognitive skill that would require considerably more time to achieve an adequate level of competence” (Jitendra & Star, 2012, S.157). Erfolgreiches Lösen verlangt in der Konsequenz unter anderem das Verständnis relevanter Textinformationen, die Fähigkeit Daten zu visualisieren und Struktur(en) zu erkennen (vgl. Jonassen, 2003). Es gilt also, den Lernenden eine Unterstützung anzubieten, die vor allem die Übersetzungsprozesse in einem strukturierungs- und verstehensfördernden Sinn begünstigen. Zwar existieren zahlreiche formale, (rechen-) verfahrensbasierte Lösungs- und Auswahlmöglichkeiten (Dreisatz, Operatormethode, Formel, Bruch-und Verhältnisgleichungen u.a.), jedoch unterstützen diese das Rechnen als solches und nicht den sehr wichtigen Schritt der Bildung des entsprechenden Situationsmodells (siehe Modellierungskreislauf nach Verschaffel, 2000), welches für das Mathematisieren einer Textaufgabe und somit auch für das Lösen grundlegend ist. Der Prozentstreifen als eine Form der Visualisierung hingegen kann die erwähnte „Lücke“ füllen und somit ein adäquates Hilfsmittel darstellen (vgl. Van der Heuvel-Panhuizen, 2003; Leuders et al., 2014). Unter Visualisierung wird hier die „bildhaft-analoge Darstellung von Informationen“ verstanden (Scheiter, 2016). Solche Visualisierungen sind in der Mathematik zum einen wichtige (heuristische) Erkenntniswerkzeuge, zum anderen fördern sie das Verstehen komplexer Situationen (vgl. Arcavi, 2003; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003; Jonassen, 2003; Verschaffel, 2000). So haben verschiedene empirische Untersuchungen herausgestellt, dass Visualisierungen die Leistungen, auch beim Lösen von Textaufgaben, verbessern (vgl. Rasch, 2015; Walkington, 2013; Van Essen & Hamaker, 1990). Es gibt bislang nur wenige Arbeiten, die sich empirisch mit dem Nutzen des Prozentstreifens befasst haben (u.a. Van Galen & Van Eerde, 2013; Rianasari et al., 2012; Hoven & Garelick, 2007; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Diese berichten von der wichtigen und vielseitigen Rolle, die der Prozentstreifen („bar model“) beim Verstehen und Lösen von Prozentaufgaben einnehmen kann.

Forschungsfragen und erste Ergebnisse

Das Erkenntnisinteresse fokussierte daher in einem ersten Schritt zunächst folgende Fragen: 1. An welcher Stelle im Lösungsprozess kann der Prozentstreifen unterstützen? 2. Welche Funktionen weist er beim Lösen von Textaufgaben auf? 3. Lassen sich durch das Anwenden des Prozentstreifens typische Fehler reduzieren? Untersuchungsergebnisse aus aufgabenbasierten, halbstrukturierten Schülerinterviews (*N*=11) sowie Fragebögen (*N*=59) (Klasse 8, Werkrealschule) illustrieren den bereits beschriebenen theoretischen Hintergrund. So lösen lediglich 53 % der Lernenden die Aufgabe „30 % von 1200 €“ richtig. Wird diese in strukturgleicher, ähnlicher Form als Textaufgabe dargeboten, so liegt die Lösungshäufigkeit nur noch bei 22 %. Sämtliche Lösungswege folgten dabei einem strikt kalkülorientierten Ansatz und enthielten keine Visualisierungen. Ein ähnliches Bild zeigte sich in der Auswertung der durchgeführten Interviews, in denen zwei Probandenkohorten Testaufgaben bearbeiteten. Alle Probanden wurden dabei angehalten, laut zu denken, sowohl während der Bearbeitung als auch retrospektiv. Gruppe 1 (*N*=6) erhielt im Vorfeld eine Kurzintervention, in der Lösungsbeispiele unter Anwendung des Prozentstreifens nachvollzogen, Übungsaufgaben bearbeitet und Lösungswege besprochen wurden. Kohorte 2 (*N*=5) fungierte als Wartekontrollgruppe. Während Gruppe 1 alle Testaufgaben eigenständig lösen konnte, gelang dies Gruppe 2 nur begrenzt. Starke Unterschiede zeigten sich insbesondere in den Lösungswegen. Während Gruppe 1 selbstständig und intuitiv den Prozentstreifen anwendete, gelang Gruppe 2 oft nur durch „Probieren“ zum Ergebnis. Zu den Forschungsfragen ergeben sich folgende Befunde: 1. Es konnten drei Phasen (P1 bis P3) identifiziert werden, in denen die Probanden auf das Hilfsmittel Prozentstreifen zurückgriffen. P1: beim (anfänglichen) Modellieren, P2: im Bearbeitungsprozess selbst, P3: bei der Validierung. Nach Forschungsfrage 2 waren die folgenden Funktionen identifizierbar, die in Zusammenhang mit den benannten Phasen stehen: Zuordnungs-, Übersichts- und Validierungsfunktionen. Frage 3 bestätigt empirische Befunde und erfasst für die hier untersuchten Gruppen hauptsächlich Zuordnungsfehler bei Größen und mathematischen Operationen. Die Untersuchungen geben also Hinweise darauf, dass das die Ergebnisse beim Lösen von Textaufgaben sich mit Hilfe des Prozentstreifens verbessern. Der Prozentstreifen hilft in diesem Kontext bei der Übersetzung der Realsituation in das mathematische Modell und folglich beim Verstehen und Lösen der Aufgabe.

Ausblick

In der sich anschließenden Hauptstudie soll nun die Wirksamkeit einer Intervention, die den Prozentstreifen systematisch einführt, untersucht werden. Dies erfolgt mittels einer quasiexperimentellen Studie mit Messwiederholungen im Pre-Post-Test-Kontrollgruppen-Design (N=400, Klasse 8, Werkrealschulen). Kontrastiert werden dabei zwei Interventionsgruppen, die beim Bearbeiten und Lösen von Textaufgaben zwei ähnliche Lösungsverfahren anwenden. Gruppe 1 erhält – wie in der Praxis oft üblich (vgl. Hafner, 2012; Berger, 1989) – ein Dreisatzverfahren als Lösungshilfe, Gruppe 2 zusätzlich den Prozentstreifen. In beiden Bedingungen wird die „time on task“ gleichgehalten. Dieses Vorgehen gründet auf der Zielsetzung den (positiven) Einfluss des Prozentstreifens konkret nachweisen zu können. Die postulierten Leistungen der einzelnen Gruppen gestalten sich wie folgt: KG < IG 1 < IG 2. Damit zusammenhängende Hypothesen sind: (a) Die Funktionen des Prozentstreifens unterstützen Lernende im Lösungsprozess und tragen so zur Reduzierung typischer Fehler (Zuordnungsfehler bei mathematischen Größen und Operationen) und Erhöhung der Lösungshäufigkeiten bei. (b) Die Anwendung des Prozentstreifens wirkt sich positiv auf die Steigerung von konzeptuellem Wissen und Transferwissen aus.

Literatur

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 52(3), 215-241.

Berger, R. (1989). Prozent-und Zinsrechnen in der Hauptschule: didaktische Analysen und empirische Ergebnisse zu Schwierigkeiten, Lösungsverfahren und Selbstkorrekturverhalten der Schüler am Ende der Hauptschulzeit. Roderer.

Hafner, T. (2012). Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I. Empirische Untersuchung und didaktische Analysen (Perspektiven der Mathematikdidaktik). Wiesbaden: Vieweg+ Teubner Verlag.

Hoven, J., & Garelick, B. (2007). Singapore math: Simple or complex?. Educational Leadership, 65(3), 28.

Jitendra, A. & Star, J. (2012). An exploratory study contrasting high- and low-achieving students' percent word problem solving, In: Learning and Individual Differences 22 (2012) 151-158.

Jonassen, D. (2003). Designing research-based instruction for story problems

Kleine, M., & Jordan, A. (2007). Lösungsstrategien von Schülerinnen und Schülern in Proportionalität und Prozentrechnung—eine korrespondenzanalytische Betrachtung. Journal für Mathematik-Didaktik, 28(3-4), 209-223.

KMK (2003). Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. München: Luchterhand.

Leuders, T.; Prediger, S.; Hußmann, S.; Barzel, B. (2014). mathewerkstatt 3. Schulbuch. Cornelsen Verlag: Berlin. S.195-220.

Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül. Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Weinheim: Beltz, 213-234.

Rasch, R. (2015). Problemhaltige Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. In: R. Rink (Hrsg.). Von Guten Aufgaben bis Skizzen Zeichnen. S. 203-216. Baltmannsweiler: Schneider Verlag.

Rianasari, V. F., Budaya, I. K., & Patahudin, S. M. (2014). Supporting Students' Understanding of Percentage. Journal on Mathematics Education, 3(01), 29-40.

Scheiter, K. (2016). Visualisierung. In M. A. Wirtz (Hrsg.), Dorsch - Lexikon der Psychologie. Abruf am 21.03.15 von https://portal.hogrefe.com/dorsch/visualisierung.

Sill, Hans-Dieter (2010): Probleme im Umgang mit Prozenten. – In: Herget, Wilfried (Hrsg.): Mathematische Kompetenzen entwickeln und erfassen. Festschrift für Werner Walsch zum 80. Geburtstag. Hildesheim: Franzbecker. – S. 137-149

Van den Heuvel-Panhuizen (2003). The didactical use of models in RME. In: Educational Studies in Mathematics 54, S.9-35.

Van Essen, G. & Hamaker, C. (1990): Using Self-Generated Drawings to Solve Arithmetic Word Problems. In: The Journal of Educational Research 83 (6), S. 301–312.

Galen, F. V., & Eerde, D. V. (2014). Solving Problems with The Percentage Bar. Journal on Mathematics Education, 4(01), 1-8.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). Making sense of word problems. Swets and Zeitlinger: Lisse.

Walkington, C. et al. (2013). The effects of visual representations and interest-based personalization on solving percent problems. In Martinez, M. & Castro Superfine, A (Eds.). pp. 533-536.

Sandra Thom, Metjendorf

Wie unterrichte ich „Flüchtlingskinder“ in Mathematik?

Probleme fehlender Sprachlichkeit und kultureller Kohärenz in der Griff bekommen

Mit den Migrationsbewegungen des Jahres 2015 kamen auch zahllose Kinder nahezu ohne oder ganz ohne Kenntnisse der deutschen Sprache. Im Unterricht stellt sich oft heraus, dass viele für uns alltägliche Methoden und Aufgaben diesen Kindern fremd sind. Das größte Problem ist dabei ihre fehlende Deutschsprachigkeit: Wie sollen die Kinder am Mathematikunterricht teilnehmen, wenn ihnen die notwendigen Sprachkenntnisse fehlen?

Primat der Handlung

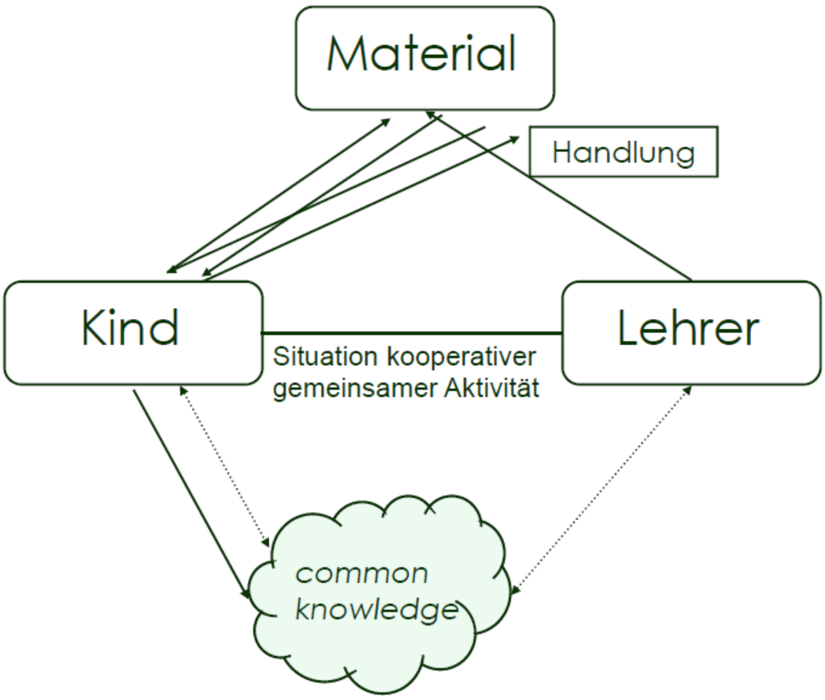
Kinder entwickeln individuelle mathematische Vorstellungen auf der Grundlage von Handlungen: Über das Zusammenfügen oder Wegnehmen entwickeln sie z.B. Vorstellungen von Plus und Minus oder bestimmen die Verhältnisse der Stufenzahlen des Stellenwertsystems (d.h. die Basis) durch Messen – immer sind Handlungen auf enaktiver Repräsentationsebene für solch theoretisch-dynamische Vorstellungen von Operationen von zentraler Bedeutung und bilden die Grundlage für den empirischen Vergleich der Operationsergebnisse auf vorwiegend ikonischer Ebene. Ikonische Darstellungen theoretischer Repräsentationen wie z.B. Bilder zur Subtraktion (sog. „Rechenbilder“) in Mathebüchern bedürfen der ikonographischen Erarbeitung, um die dargestellte Situation „lesen“ zu lernen und damit die nun nur noch „verschlüsselte“ und somit nur theoretisch vorhandene Operation wieder als Handlung lebendig werden zu lassen. Dies können Kinder ohne oder nur mit unzureichenden Kenntnissen der deutschen Sprache nicht leisten. Die Handlung kann jedoch durchgeführt und dabei statt wortreicher Erklärungen lediglich *benannt*, also die enaktive Ebene vor allem mit der sprach- und (zeichen-)symbolischen Ebene als intervenierende Hilfe zur Rekonstrution (Bruner (1971b) 79) verknüpft werden.

Handlungen können Schemata, können *Muster* sein. Die Handlung kann wiederholt werden und bedarf sogar der Wiederholung, um den begrifflichen Prototypen herauszulösen und ihn als ‚Vorstellungsbild‘ als ‚Basis für handlungsfreie Vorstellungen‘ (Bruner (1971a) 40f.) abzuspeichern. Aus dieser Handlung oder vielmehr *parallel zur* Handlung kann ein ‚Handlungsprotokoll‘ (Dörfler 1989) auf symbolischer Ebene entwickelt werden. Voraussetzung hierfür ist exakte Planung und zielgerichtete Durchführung der Handlungen durch die Lehrkraft. Die Handlung muss auf das Wesentliche reduziert, interpunktiert und damit sequenziert werden, d.h. jeder Schritt einzeln abgegrenzt, damit das Kind induktiv hieraus den Algorithmus erkennen kann. Diese Exaktheit führt i.d.R. zur Aufmerksamkeitsfokussierung. In Anlehnung an und als Abgrenzung von der durch Söbbeke 2005 eingebrachten ‚visuellen Strukturierungsfähigkeit' ist *Bewegungsstrukturierungsfähigkeit* damit die Kompetenz zur Erfassung dynamischer Muster (Handlungsschemata), mit denen durch die Handlung Beziehungen, Strukturen und Muster konstruiert werden.

Imitation im Sinne einer *aktivistischen* Lernposition

Die klassische Sichtweise betont das Lernmaterial und die Arbeit des Kindes mit ihm. Damit wird die Bedeutung der Lehrkraft zu stark verkürzt.

Kind und Lehrkraft teilen gemeinsames Vorwissen, z.B. zum Umgang mit Material allgemein oder im Besonderen beispielsweise bei der Einführung in die Schriftliche Subtraktion zum Bündeln und Entbündeln, zu Ritualen und Vorgehensweisen oder individuellen Besonderheiten wie Kommunikationsverhalten (z.B. Art der stummen Impulse) etc. Auch hier sind das von Hattie (2013) vertieft in die Diskussion gebrachte pädagogische Klima und ein austariertes Classroom Management lernwirksame Faktoren guten Unterrichts (vgl. zum „Unausgesprochenen" Rüede (2009) 94). Wenn das Kind durch die zielgerichtete und interpunktierte Handlung der Lehrkraft in seiner Aufmerksamkeit fokussiert wird, entwickelt sich eine von Tomasello (2002 bzw. Moll 2007) so genannte Situation gemeinsamer kognitiver Aktivität, in der das Kind versucht, das Handlungsziel der Lehrkraft auf der Grundlage des gemeinsamen Vorwissens (*common knowledge*) zu ergründen. Dies zeigt sich u.a. im Fortsetzen der Handlung verstanden als Muster im Anforderungsniveau II der Bildungsstandards oder im Eingreifen des Kindes, wenn die Lehrkraft einen Fehler bei der Handlung macht, d.h. Kind und Lehrkraft nehmen reziproke Rollen ein. Bei passender Hypothesenbildung durch das Kind kann so mit wenigen oder fast ohne Worte beim Fortsetzen von Handlungen oder eigenem Üben entdeckendes Lernen möglich werden. Das Kind übernimmt das



Bewegungsmuster nicht nur und ahmt es nach, sondern berücksichtigt auch das vermutete Verhaltensziel. Neurowissenschaftlich betrachtet erfolgt so eine Stimulation des (prä-)motorischen Kortex (Oliverio 2007) und damit die Antizipation des Handlungsergebnisses in einem Vorstellungsbild. Eine so verstandene Imitation kann folglich einer aktivistischen Lernposition zugeordnet werden.

Muster und Strukturen in Zahlwörtern

Während durch den zuvor in gegebener Kürze dargestellte Primat des Handelns Sprache auf ein Minimum reduziert und so Kommunikation auf andere Ebenen verlagert wird, muss parallel dazu der fachmathematische Wortschatz aufgebaut werden. Hierzu zählen die durch ihre inverse Schreibweise teils bereits für deutsche Schüler verwirrenden Zahlwortbildungen, die zu oft in der Mathematikdidaktik ignoriert werden. Durch Analyse der Zahlwörter können beispielsweise im Zahlenraum bis 99 fünf verschiedene Arten von Zahlwörtern identifiziert werden:

- Individualzahlwörter von 1 (0) bis 10
- Pseudo-Individualzahlwörter (elf und zwölf), die sich unter Hinzuziehung ihres sprachwissenschaftshistorischen Kontextes als auf Grund früherer Bedeutungen v.a. im indoeuropäischen und germanischen Sprachgebrauch durch Lautverschiebungen in ihrer äußeren Gestalt veränderte zusammengesetzte Zahlwörter analog 13-19 erweisen
- Zusammengesetzte Zahlwörter von 13 bis 19 (Zehner folgt Einer)
- Zahlwörter für Zehnerzahlen, gebildet mit der Endung –zig (Zwanzig erscheint auf Grund von Lautverschiebungen auch pseudo-individual)
- Zusammengesetzte Zahlwörter von 21 bis 99 (analog zu den Zahlwörtern von 13 bis 19, jedoch additiv verbunden mit „und“, wobei „eins“ in der Voranstellung zu „ein-“ verkürzt wird)

Durch Nutzung von Zahlwortkarten, bei denen die einzelnen Stellenwertkomposita analog zu anderen Stellenwertmaterialien eingefärbt sind (z.B. Mehrsystemmaterial, Ziffernkarten, Stellenwertwürfel etc.) kann ein Transfer zwischen verschiedenen Repräsentationsebenen (EIS) bzw. Modulen (Dehaene 1992) erfolgen und die Regeln der Zahlwortbildung können als sprachliche Muster von den Kindern gelenkt, aber selbstständig entdeckt werden. Dies wird unterstützt durch Tätigkeiten des Vergleichens und Ordnens, z.B. durch Auslegen eines Teils oder aller Zahlwortkarten.

Für die Arbeit mit Flüchtlingskindern sind Grundlagen einer materialgeleiteten Didaktik wichtig, wie sie für inklusiven Mathematikunterricht in der Grundschule ohnehin essenziell sind (Thom (2015)). Dabei werden andere

Kommunikationsebenen und –möglichkeiten als nur die rein sprachsymbolische Ebene als Kompensation für die (noch) geringe deutschsprachliche Kompetenz genutzt. Wissen um die natürliche Erkenntnisfähigkeit des Kindes und seine Potenziale der visuellen wie der o.g. *Bewegungsstrukturierungsfähigkeit* macht die dynamischen und statischen Muster der Mathematik für aktiv-entdeckendes Lernen zugänglich.

Literatur

Bruner, J. S. (1971a). Über kognitive Entwicklung. In ders. / R. R. Olver / P. M. Greenfield. *Studien zur kognitiven Entwicklung. Eine kooperative Untersuchung am "Center for Cognitive Studies" der Harvard-Universität*. Stuttgart: Ernst Klett, 21-53

Bruner, J. S. (1971b). Über kognitive Entwicklung II. In ders. / R. R. Olver / P. M. Greenfield. *Studien zur kognitiven Entwicklung. Eine kooperative Untersuchung am "Center for Cognitive Studies" der Harvard-Universität*. Stuttgart: Ernst Klett, 55-96

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, 44, 1–42

Dörfler, W. (1989). Begriffsentwicklung durch Handlungsprotokolle. *BMU*, 1989, 139-142

Hattie, J. (2013). *Lernen sichtbar machen*. Hohengehren: Schneider

Moll, H. (2007). Person und Perspektivität. Kooperation und soziale Kognition beim Menschen. In F. Kannetzky / H. Tegtmeyer (Hgg.). *Personalität – Studien zu einem Schlüsselbegriff der Philosophie*. Leipzig: Leipziger Universitätsverlag, 37-56

Oliverio, A. (2007). Der handelnde Geist. Über die Bedeutung motorischer Abläufe für mentale Repräsentationsprozesse. *Das Kind*, 41, 51-64

Peschek, W. (1988). Untersuchung zur Abstraktion und Verallgemeinerung. In W. Dörfler (Hrsg.). *Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung. Arbeiten aus dem Projekt „Entwicklung formaler Qualifikationen im Mathematikunterricht"*. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 127-190

C. Rüede (2009). Wenn das Unausgesprochene regelnd wirkt – eine theoretische und empirische Arbeit zum Impliziten. In *JMD*, 30 (2), 93-120

Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern. Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel* (texte zur mathematischen forschung und lehre, Bd. 42). Hildesheim / Berlin: Franzbecker

Thom, S. (2010). *Kinder lernen entdeckend. Eine hermeneutische Untersuchung zur Konzeption und Realisierung des Mathematikunterrichts Maria Montessoris*. Hildesheim: Franzbecker

Thom, S. (2015). Mathematikdidaktische Prinzipien Montessoris in der inklusiven Regelschule. In: A. Peter-Koop / T. Rottmann / M. Lüken (Hgg.). *Inklusiver Mathematikunterricht in der Grundschule*. Offenburg: Mildenberger, 90-106

Tomasello, M. (2002). *Die kulturelle Entwicklung des menschlichen Denkens. Zur Evolution der Kognition.* Frankfurt: Suhrkamp

Daniel THURM, Essen

Was bleibt? – Effekte einer Fortbildungsreihe zu digitalen Werkzeugen auf technologiebezogene Überzeugungen von Lehrkräften

Bei der Gestaltung von Fortbildungsangeboten stellt sich die Frage, inwieweit diese wirksam sein können (Lipowsky & Rzejak 2012). Die Wirksamkeit von Fortbildungsveranstaltungen im Bereich digitaler Mathematikwerkzeuge ist dabei noch kaum untersucht. So ist z.B. unklar, inwiefern sich technologiebezogene Überzeugungen und unterrichtlicher Einsatz digitaler Werkzeuge durch Lehrerfortbildungen beeinflussen lassen. Im Beitrag wird anhand einer Fortbildungsreihe des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik (DZLM), welche im Zuge der verbindlichen Einführung graphikfähiger Taschenrechner (GTR) in der gymnasialen Oberstufe in Nordrhein-Westfalen durchgeführt wurde, untersucht, inwiefern sich Überzeugung von Lehrkräften im Rahmen einer halbjährigen Fortbildungsreihe verändern.

Theoretischer Rahmen

Technologieeinsatz im Mathematikunterricht ist allgemein mit der Hoffnung verknüpft, konzeptuelles Wissen sowie aktiv-entdeckende Anteile im Unterricht zu stärken. Dies kann zum Beispiel durch reichhaltige Darstellungswechsel, die Unterstützung von individuellen Zugängen bei der Aufgabenbearbeitung, authentische Modellierungsaufgaben und aktiv-entdeckende Aufgabenformate geschehen (z.B. Barzel & Greefrath 2015). Dementsprechend wird der Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge von Bildungsadministration (z.B. KMK) wie auch von Wissenschaft und Lehrkraftverbänden (z.B. DMV, GDM & MNU) empfohlen. Um die beschriebenen Vorteile auszuschöpfen, ist es jedoch notwendig, dass Lehrkräfte nicht nur technische Fertigkeiten im Umgang mit den Werkzeugen, sondern vor allem didaktische Kompetenzen bzgl. des Einsatzes der Werkzeuge entwickeln (Mason 2014).

Für die Gestaltung entsprechender Fortbildungsangebote können dabei aus der Literatur Hinweise auf Kriterien effizienter Fortbildungen abgeleitet werden. Das DZLM hat diese Kriterien in sechs Gestaltungsprinzipien zusammengefasst: (a) Kompetenzorientierung, (b) Teilnehmerorientierung, (c) Kooperationsanregung, (d) Fallbezogenheit, (e) Methodenvielfalt, (f) Reflexionsförderung (Barzel & Selter 2015).

Fortbildungen können dabei ihre Wirksamkeit auf unterschiedlichen Ebenen entfalten (Lipowsky & Rzejak 2012): Akzeptanz der Fortbildungsveranstaltung in der Wahrnehmung der teilnehmenden Lehrkräfte, Auswirkungen auf die professionellen Kompetenzen von Lehrkräften, Konsequenzen für die unterrichtliche Praxis, Veränderungen in den Leistungen bzw. der Motivation der Schülerinnen und Schüler.

Bei der Wirkung auf die professionellen Kompetenzen der Lehrkräfte kann dabei weiter zwischen verschiedenen Kompetenzfacetten wie z.B. Fachwissen, fachdidaktisches Wissen und Überzeugungen differenziert werden. Der Bereich der Überzeugungen umfasst neben allgemeinen epistemologischen Überzeugungen auch Überzeugungen, die sich domänenspezifisch auf den Einsatz digitaler Werkzeuge beziehen. Weiterhin sind in diesem Bereich auch Selbstwirksamkeitserwartungen zum Umgang und Einsatz digitaler Werkzeuge zu verorten. Die Wirkung von Fortbildungen zum Einsatz digitaler Werkzeugen auf diese Bereiche der Lehrerkompetenz sind bisher noch kaum untersucht.

Forschungsfragen

Ausgehend von dem theoretischen Hintergrund lassen sich die folgenden Forschungsfragen formulieren:

- F_1: Wie ändern sich Überzeugungen zum Technologieeinsatz von fortgebildeten Lehrkräften im Vergleich zu nicht fortgebildeten Lehrkräften?
- F_2: Wie ändert sich Selbstwirksamkeitserwartungen von fortgebildeten Lehrkräften im Vergleich zu nicht fortgebildeten Lehrkräften?

Design der Fortbildungsreihe „GTR kompakt“

Die beforschte Fortbildungsreihe „GTR kompakt“ wurde durch das DZLM auf Basis der DZLM-Gestaltungsprinzipien in Kooperation mit dem Ministerium für Schule und Weiterbildung Nordrhein-Westfalen konzipiert. Die halbjährige Fortbildungsreihe erstreckte sich von November 2014 bis Mai 2015 über vier eintägige Module mit dazwischenliegenden Praxisphasen und wurde an drei Standorten in NRW mit jeweils 30 Lehrkräften durchgeführt. Die vier Module nahmen dabei jeweils unterschiedliche Bereiche in den Fokus: Modul A: Einstieg in das Unterrichten mit dem GTR, Modul B: Modellieren/Problemlösen mit dem GTR, Modul C: Unterrichtsprozesse mit dem GTR gestalten und Modul D: GTR in Prüfungssituationen.

Methodologie

Um die Forschungsfragen zu beantworten, wurde ein quasiexperimentelles Pre-Post-Design gewählt. Zur Gewinnung der Kontrollgruppe wurden alle Schulen mit gymnasialer Oberstufe in NRW angeschrieben und interessierte Lehrkräfte konnten sich online für die Studie registrieren. Allen Lehrkräften wurde kurz nach Modul A und 4 Wochen nach Modul C ein Fragebogen administriert, welcher unter anderem die Überzeugungen sowie die Selbstwirksamkeitserwartungen im Bereich digitaler Werkzeuge erfasste. Technologiebezogene Überzeugungen wurden dabei differenziert in den folgenden Skalen erfasst: Entdeckendes Lernen, Repräsentationswechsel, hoher Zeitaufwand, Verlust von Fertigkeiten, Unreflektiertes Arbeiten, Zeitpunkt des GTR-Einsatzes (Thurm et al., eingereicht). Selbstwirksamkeitserwartungen wurden über die Skalen „Auswahl und Konstruktion von GTR-Aufgaben" und „Unterrichtsprozesse mit dem GTR gestalten" erhoben.

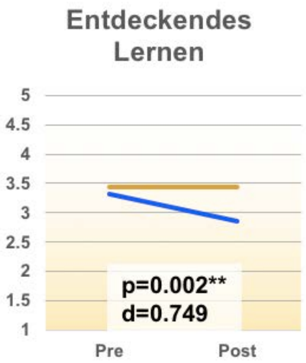
Um die Gefahr zu reduzieren, dass (selektionsbedingte) Unterschiede zwischen Versuchs- und Vergleichsgruppe die Ergebnisse beeinflussen wurde nach Abschluss der Datenerhebung ein Propensity-Score-Matching (Rosenbaum & Rubin 1983) unter Einbezug der oben beschriebenen Merkmale sowie von GTR-Vorerfahrung Geschlecht und Alter durchgeführt, um aus den nicht fortgebildeten Lehrkräften eine geeignete Kontrollgruppe zu generieren.

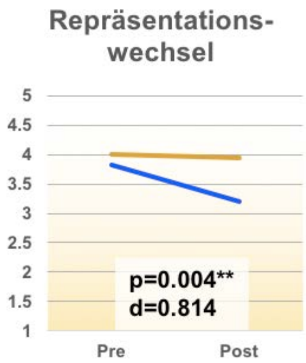
Ergebnisse

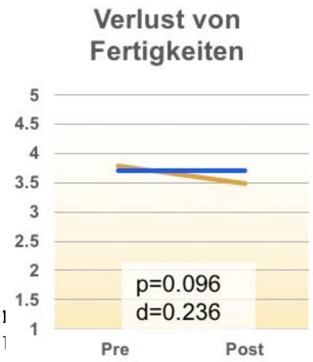
Insgesamt nahmen 39 Fortbildungsteilnehmer an der Studie teil, wobei nur Teilnehmer berücksichtigt wurden, die bei mindestens drei Fortbildungsmodulen anwesend waren. Das Propensity-Score-Matching resultierte in einer Kontrollgruppe von n=37 Lehrkräften (vorher n=89). Hervorzuheben ist, dass knapp 84 Prozent der Studienteilnehmer eine Unterrichtserfahrung mit digitalen Werkzeugen von höchstens einem Jahr aufwiesen, es sich somit also im Wesentlichen um Novizen beim Einsatz digitaler Werkzeuge handelt.

Bei den Selbstwirksamkeitserwartungen zeigen sich signifikante Steigerungen im Vergleich zur Kontrollgruppe (Effektstärken: d=0.545 und d=0.368), wobei jedoch auch die Kontrollgruppe leicht zulegt. Bei den technologiebezogenen Überzeugungen zeigen sich bei allen Skalen bis auf die Bereiche „Verlust von Fertigkeiten" und „Zeitpunkt des GTR-Einsatzes" signifikante Effekte mit deutlichen Effektstärken (s. Abb. 1). Insbesondere ist zu beobachten, dass bei Lehrkräften ohne Fortbildungsteilnahme eine stark negative Entwicklung der Überzeugungen zu beobachten ist.

Ausblick und Diskussion







Die Ergebnisse zeigen die Wichtigkeit von Fortbildungsmaßnahmen im Bereich digitaler Werkzeuge auf. Die deutliche Wirkung der Fortbildung auf die technologiebezogenen Überzeugungen ist dabei insbesondere vor dem Hintergrund bedeutend, dass viele Studienteilnehmer Novizen sind. So scheinen Lehrkräfte, die bei der Einführung digitaler Werkzeuge keine professionelle Unterstützung erhalten, in ihren ersten Unterrichtsjahren stark negative Erfahrungen zu machen, welche ihre Einstellung zum Technologieeinsatz deutlich negativ prägen. Dies ist vor allem daher problematisch, da einmal verfestigte Überzeugungen als eher resilient anzusehen sind. Eine professionelle Unterstützung der Lehrkräfte bei der Einführung von digitalen Werkzeugen scheint somit unerlässlich.

Literatur

Barzel, B., & Greefrath, G. (2015). Digitale Werkzeuge sinnvoll integrieren. In W. Blum (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret: Sekundarstufe II* (S. 141–153). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Barzel, B., & Selter, C. (2015). Die DZLM-Gestaltungsprinzipien für Fortbildungen. *Journal für Mathematik-Didaktik*.

Lipowsky, F., & Rzejak, D. (2012). Lehrerinnen und Lehrer als Lerner – Wann gelingt der Rollentausch? Merkmale und Wirkungen effektiver Lehrerfortbildungen. *Schulpädagogik heute 5*(3), 1–17.

Mason, J. (2014). Interactions between teacher, student, software and mathematics: Getting a purchase on learning with technology. In A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (Hrsg.), *The mathematics teacher in the digital era: An international perspective on technology focused professional development* (S. 11–40). Dordrecht: Springer.

Rosenbaum, Paul R. & Rubin, Donald B. (1983). The Central Role of the Propensity Score in Observational Studies for Causal Effects*". Biometrika 70(1)*: 41–55.

Thurm, D., Klinger, M., Barzel, B., & Rögler, P. (eingereicht). Überzeugungen zum Technologieeinsatz im Mathematikunterricht: Entwicklung eines Messinstruments für Lehramtsstudierende und Lehrkräfte. *Mathematica Didactica*.

Kerstin TIEDEMANN, Köln

„Ich habe mir einfach die Rechenmaschine in meinen Kopf gebaut!“ Zur Entwicklung fachsprachlicher Fähigkeiten bei Grundschulkindern

1. Einleitung

Im Arithmetikunterricht der Grundschule wird den Lernenden häufig Material angeboten und mit ihm die didaktische Hoffnung verbunden, dass es die Lernenden dabei unterstütze, tragfähige (Grund-)Vorstellungen von Zahlen, Rechenoperationen und Rechenstrategien entwickeln (vgl. Wartha & Schulz 2012, S. 25ff. und 62ff.). Auf diesem Weg von der Materialhandlung zur Vorstellung wird der Sprache nicht selten eine zentrale Rolle zugeschrieben (vgl. etwa ebd., S. 77). Sie ist in der Auseinandersetzung mit einer Materialhandlung einerseits ein Mittel, um das eigene Denken zu sortieren und ihm neue Möglichkeiten zu eröffnen (kognitive Funktion), und andererseits das zentrale Medium für den Gedankenaustausch mit anderen (kommunikative Funktion; vgl. Maier & Schweiger 1999, S. 11).

Um eine sprachsensible Förderung von Grundvorstellungen umzusetzen, braucht es Kenntnisse darüber, wie sich fachsprachliche Fähigkeiten im Zusammenhang mit dem Gebrauch von Material entwickeln. Zu diesem Zweck wird im Folgenden ein wichtiges Analyseergebnis aus dem Projekt „Rechenstark!“, einem Projekt zur Förderung rechenschwacher Grundschulkinder an der Universität zu Köln, illustriert und beschrieben.

Die Entwicklung von der konkreten zur nur noch vorgestellten Materialhandlung wird bei „Rechenstark!“ gemäß dem 4-Phasen-Modell nach Wartha & Schulz (2012, S. 62ff.) in 4 Phasen gegliedert: In Phase 1 handelt das Kind selbst am Material und nutzt es als Lösungshilfe. In Phase 2 beschreibt das Kind die notwendigen Materialhandlungen, welche vom Erwachsenen ausgeführt werden. In Phase 3 wird eine Stellwand zwischen dem Kind und dem Material positioniert. Nun beschreibt das Kind ohne Sicht auf das Material die notwendigen Handlungen, welche wieder vom Erwachsenen ausgeführt werden. In Phase 4 beschreibt das Kind schließlich die nur gedanklich ausgeführten Materialhandlungen.

Die zwei zentralen theoretischen Orientierungspunkte für die darzustellenden, qualitativ-interpretativen Analyseergebnisse sind linguistische Einsichten zur Sprachhandlung des Beschreibens einerseits und das Konzept der Subjektiven Erfahrungsbereiche (SEB) nach Bauersfeld (1983) andererseits. Eine kurze Skizze dieser Orientierungspunkte geht daher der Darstellung der Analyseergebnisse voraus.

2. Die Sprachhandlung des Beschreibens

Lange Zeit wurde in der Linguistik angenommen, dass das Beschreiben ein objektives, auf die Äußerlichkeit bezogenes Darstellungsverfahren sprachlicher Art sei (vgl. Feilke 2005, S. 47). Doch je mehr sich die Ansicht durchsetzte, dass es kein voraussetzungsloses Beobachten gibt, desto klarer wurde auch, dass es kein „bloß registrierendes und im naiven Sinne phänomenorientiertes Beschreiben" geben kann (Feilke 2005, S. 51). Der Beschreibende muss aus der Fülle der Sinnesdaten auswählen, er muss reduzieren, abstrahieren und konzentrieren. Dabei zeigt er notwendigerweise, was er als relevant erachtet, und reflektiert sprachliche Ordnungen. Denn der Beschreibende kann nur jene sprachlichen Mittel nutzen, die ihm bekannt sind und seiner gedanklichen Ordnung bestmöglich entsprechen (vgl. ebd., S. 52). Beim Beschreiben von Materialhandlungen geben uns Lernenden also wichtige Hinweise darauf, was für sie bereits relevant geworden ist *und* wofür sie bereits sprachliche Mittel zur Verfügung haben.

3. Subjektive Erfahrungsbereiche nach Bauersfeld (1983)

Bauersfeld (1983) hat in seinem Konzept der Subjektiven Erfahrungsbereich (SEB) die Idee ausgearbeitet, dass unser Wissen und unser daran gebundener Sprachgebrauch stets bereichsspezifisch organisiert sind. So erklärt er die Problematik, dass Lernende mathematisches Wissen, das ihnen im Alltag gut verfügbar ist, in schulischen Zusammenhängen manchmal entgegen der Erwartung der Lehrkraft nicht aktivieren, damit, dass bei eben diesen Lernenden ein außerschulisch-mathematischer Erfahrungsbereich und ein schulisch-mathematischer Erfahrungsbereich vielleicht entwickelt, aber bisher nicht miteinander verknüpft sind, sodass die SEB'e unverbunden nebeneinander existieren.

Als konstituierende Elemente eines SEB'es nennt Bauersfeld (ebd., S. 34) den Sinn und die je spezifischen Handlungen, Objekte und sprachlichen Mittel. Im Hinblick auf den Sprachgebrauch betont Bauersfeld (ebd., S. 31f.), dass dieser in einem SEB entstehe und als solcher auch an diesen gebunden bleibe. Um Worte SEB-übergreifend zu verwenden, brauche es einen eigenen SEB, der auf den Vergleich bereits vorhandener Erfahrungsbereich ausgerichtet sei und in dem die Worte auf eine neue Weise, nämlich vergleichend verwendet werden.

4. Fallbeispiel Hanna: Ein Einblick in die Entwicklung fachsprachlicher Fähigkeiten

Im Folgenden wird an einem Fallbeispiel illustriert und beschrieben, wie sich fachsprachliche Fähigkeiten in der Sprachhandlung des Beschreibens bereichsspezifisch entwickeln. Bei dem Kind des Fallbeispiels handelt es sich um Hanna, die zu Beginn der „Rechenstark!"-Förderung 9.4 Jahre alt ist und die 3. Klasse besucht. Im Diagnosegespräch, das einer jeden Förderung vorausgeht, wird offenkundig, dass es einen SEB gibt, der bei Hanna bereits gut entwickelt und ausdifferenziert ist. Er wird hier als „Symbol-Welt“ bezeichnet. In dieser Symbol-Welt geht es darum, die verbalsprachliche und symbolische Darstellung von Zahlen ineinander zu überführen (Sinn). Hanna gelingt es, genannte Zahlwörter sicher in eine Zifferndarstellung zu übersetzen und umgekehrt eine Zifferndarstellung mit dem richtigen Zahlwort zu belegen. Typische Handlungen dieser Symbol-Welt sind folglich das Aufschreiben von Ziffern und das Nennen von Zahlwörtern, typische Objekte sind Papier und Stift und der Sprachgebrauch ist wesentlich durch die Nutzung von Zahlwörtern geprägt.

Im Verlauf der Förderarbeit konstruiert Hanna über ihre Symbol-Welt hinaus drei neue SEB‘e: zunächst eine Rechenrahmen-Welt, dann eine Dienes-Welt und schließlich eine vergleichende Material-Welt. Entlang dieser allgemeinen Entwicklungslinie wird nachfolgend ein zentrales Analyseergebnis illustriert.

In der ersten Fördersitzung mit Studentin Britta soll Hanna am Rechenrahmen eine 23 einstellen (Phase 1 des 4-Phasen-Modells). Sie stellt eine 32 ein, vertauscht in der Übersetzung vom Zahlwort in eine Materialdarstellung also Zehner und Einer und beschreibt: „Ja, ich benutz einfach meinen Trick, dass das da [*auf die 3 Zehnerreihen zeigend*] 3 ist und dann ist das [*auf die 2 Perlen zeigend*] 2.“ Sie übersetzt also beide Positionswerte der 23 getrennt voneinander in eine Materialdarstellung und verwendet in ihrer Beschreibung sprachliche Mittel aus der ihr vertrauten Symbol-Welt, nämlich Zahlwörter. Die Stellenwerte der beiden Ziffern bleiben unberücksichtigt.

In der zweiten Fördersitzung soll Hanna Britta beschreiben, wie diese hinter einer Stellwand eine 15 am Rechenrahmen einstellen kann (Phase 3 des 4-Phasen-Modells). Sie formuliert: „Du nimmst erst, ähm, einen Zehner, also eine ganze Zehnerreihe. […] Ah, und dann noch 5 Einer dazu. Also, 5 Perlen.“ Hanna verwendet nun eine für den Rechenrahmen spezifische Sprache, die sie mit Britta ausgehandelt hat. Es geht allgemein um Zehner und Einer und spezifisch am Rechenrahmen um Zehnerreihen und einzelne Perlen. In der Entwicklung von Hannas „Rechenrahmen-Welt“ lässt sich somit eine Spezifizierung der Sprache beim Beschreiben von Materialhandlungen beobachten. Damit einher geht eine Berücksichtigung der Positionswerte; die Zahlwörter werden um eine ‚Material-Einheit‘ ergänzt: „eine […] Zehnerreihe“ und „5 Perlen“.

Im Verlauf der weiteren Förderarbeit vollzieht Hanna die für die Rechenrahmen-Welt beschriebene fachsprachliche Entwicklung analog in ihrer Dienes-Welt. Auch dort nutzt sie zunächst ausschließlich Zahlwörter und vertauscht Zehner und Einer. Dann spezifiziert sie erneut ihre Sprache („Zehnerstangen“, „Einerwürfel“) und beginnt, die Positionswerte zu beachten. Erst als die beiden Welten in der beschriebenen Weise sprachlich und inhaltlich ausdifferenziert sind, konstruiert Hanna eine vergleichende Material-Welt, in der sie untersucht, worin die Gemeinsamkeiten (und Unterschiede) der beiden verwendeten Materialien bestehen. Um eine 42 am Rechenrahmen anstatt mit Dienes-Material darzustellen, so formuliert Hanna schließlich, „machst du für die 4 Zehner halt Reihen und nicht Stangen, ne? Aber das ist ja egal."

5. Fazit

Am Fallbeispiel Hanna zeigt sich, dass sich mit der Nutzung unterschiedlicher Materialien für die Lernenden unterschiedliche Erfahrungsbereiche eröffnen, die durch eigene Objekte, Handlungen und sprachliche Mittel gekennzeichnet sind. Eine Verknüpfung im Sinne eines Transfers erfolgt nicht automatisch, sondern ist eine eigene Konstruktionsleistung des Kindes. Mit den Worten Bauerfelds: Das Sehen des Gemeinsamen in unterschiedlichen Materialien und damit verbunden ein einheitlich-integrierter Sprachgebrauch (z.B. ‚Zehner' und ‚Einer') erfordert die Konstruktion eines eigenen SEB, der auf den Vergleich der unterschiedlichen Materialien ausgerichtet ist.

Die dargestellten Ergebnisse legen nahe, dass eine Spezifizierung der Sprache in den materialspezifischen Erfahrungsbereichen (bei Hanna: Rechenrahmen-Welt und Dienes-Welt) die sprachliche und inhaltliche Bewältigung eines Vergleichs begünstigt. Sie ermöglicht es den Lernenden, präzise zu beschreiben, worin sich die Darstellungen mit unterschiedlichen Materialien gleichen und unterscheiden.

Literatur

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik* (S. 1-56). Köln: Aulis.

Feilke, H. (2005). Beschreiben, erklären, argumentieren - Überlegungen zu einem pragmatischen Kontinuum. In P. Klotz & C. Lubkoll (Hrsg.), *Beschreibend wahrnehmen - wahrnehmend beschreiben* (S. 45-59). Freiburg, Berlin: Rombach.

Maier, H. & Schweiger, F. (1999). Mathematik und Sprache. Wien: Öbv & hpt.

Wartha, S. & Schulz, A. (2012). *Rechenproblemen vorbeugen*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Melanie TOMASCHKO, Markus HOHENWARTER, Linz

GeoGebra Grafikrechner App für Smartphones

Die dynamische Mathematiksoftware GeoGebra ist bereits seit langem für Desktop und Laptop PCs verfügbar und seit 2013 auch als mobile Applikation für Tablets. Da mobile Geräte und Technologien auch in Schulen zunehmend an Bedeutung gewinnen, und vor allem das Smartphone aufgrund seiner weiten Verbreitung unter den mobilen Endgeräten eine ganz besondere Stellung einnimmt, ergeben sich auch für den Mathematikunterricht neue Möglichkeiten.

1. GeoGebra Grafikrechner

Wegen der speziellen Merkmale und begrenzten Ressourcen von Smartphones muss für die Verwendung von GeoGebra auf diesen Geräten eine geeignete Lösung gefunden werden.

Aus diesem Grund haben wir begonnen, uns mit der Frage zu beschäftigen, wie eine mobile GeoGebra Applikation aussehen und aufgebaut werden soll, um sie für die Verwendung auf Smartphones zu optimieren. So unterscheiden sich beispielsweise die Bildschirmgröße und die geräteeigenen Hardwareressourcen, wie etwa Arbeitsspeicher oder Prozessorgeschwindigkeit, von anderen Technologien, was folglich eine entsprechende Anpassung in Bezug auf Konzeption und Bedienung der mobilen Applikation erfordert. Zum Beispiel müssen die Elemente auf dem Bildschirm eine bestimmte Mindestgröße haben, damit die Applikation auch problemlos mit einem Finger bedient werden kann.

Aufgrund der vorhergehenden Überlegungen wurde mit der Entwicklung einer nativen mobilen Applikation begonnen, was bedeutet, dass die Applikation speziell auf die gerätespezifischen Anforderungen eines Android Smartphones angepasst ist. Daraus entstanden ist der „GeoGebra Grafikrechner“, eine mobile dynamische Mathematik App, die insbesondere Funktionalität zur Darstellung von Funktionsgraphen und für geometrische Konstruktionen bereitstellt. Mit der Entwicklung dieser Applikation ist es gelungen, eine flüssige Bedienung von GeoGebra auch auf preiswerten Android Smartphones zu ermöglichen.

Seit Dezember 2015 steht der GeoGebra Grafikrechner im Google Play Store zum Download zur Verfügung.

2. Materialien erstellen

Wird die Applikation gestartet, erscheint eine leere GeoGebra Datei mit den beiden Ansichten Grafik und Algebra (siehe Abb. 1a).

Durch Antippen des Editierstifts in der Kopfleiste links wird die Werkzeugleiste mit den GeoGebra-Werkzeugen eingeblendet (siehe Abb. 1b). Mithilfe der verschiedenen Werkzeuge können unterschiedliche Objekte in der Grafik-Ansicht erstellt werden. Durch Berührung mit dem Finger können erzeugte Objekte einfach bearbeitet, verschoben oder deren Eigenschaften geändert werden. Wird das Werkzeug „Freihandskizze“ gewählt, können direkt auf der Grafik-Ansicht Objekte mit dem Finger gezeichnet werden, die durch eine automatische Objekterkennung in ein entsprechendes geometrisches Objekt (z.B.: Kreis, Dreieck, etc.) umgewandelt werden.

In der Algebra-Ansicht werden die algebraischen Darstellungen aller erstellten Objekte angezeigt. Zusätzlich wird ein Formeleditor angeboten, der die Eingabe von GeoGebra Befehlen und mathematischen Ausdrücken relativ einfach gestaltet und übersichtlich darstellt. Um die Eingabe für BenutzerInnen einfacher zu machen, wurde eine eigene virtuelle Tastatur entwickelt, die speziell für die Eingabe von mathematischen Ausdrücken entworfen worden ist (siehe Abb. 1a).

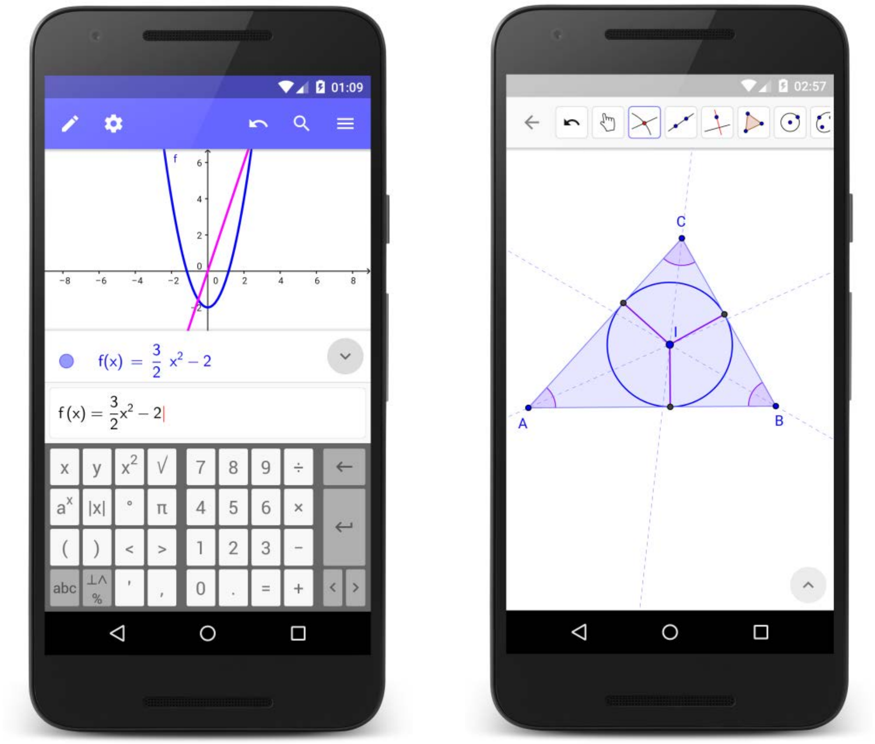


Abb. 30: a) Formeleditor und b) Werkzeugleiste

3. Materialien verwalten

Über die Suchansicht (siehe Abb. 2a) können verschiedene Materialien der GeoGebra Materialienplattform durchstöbert oder nach speziellen Schlagwörtern gesucht werden. Durch einfaches Antippen eines bestimmten Materials, wird dieses automatisch in angepasster Größe in der mobilen Applikation geöffnet und kann von der Benutzerin direkt bearbeitet werden.

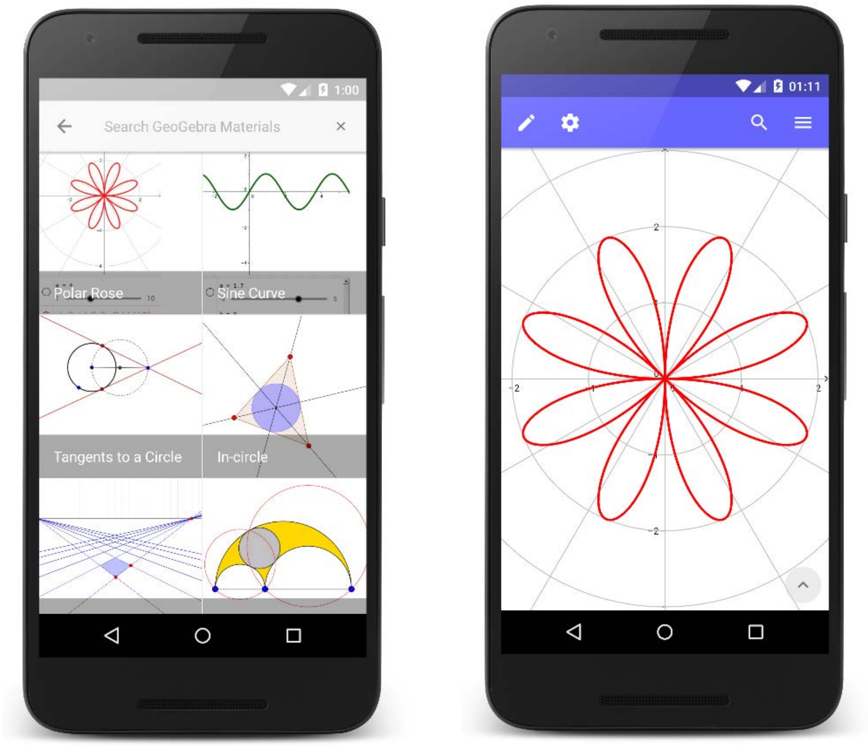


Abb.31: a) Suchansicht und b) Beispiel von GeoGebra Materialienplattform

In der Grafikrechner App kann sich die Benutzerin mit ihrem GeoGebra Konto anmelden, um eigene Konstruktionen zu speichern oder auf ihre bereits gespeicherten Materialien zugreifen zu können.

4. Ausblick

Die derzeitige Version des GeoGebra Grafikrechners umfasst noch nicht alle Funktionalitäten wie sie aus der Desktop oder Web Version von GeoGebra bekannt sind. Mittelfristig wird versucht, den vollständigen Funktionsumfang von GeoGebra für die mobile Smartphone Applikation zur Verfügung zu stellen. Die Details und Reihenfolge der nächsten Entwicklungsschritte werden dabei unter anderem von den Rückmeldungen und Wünschen der NutzerInnen beeinflusst werden.

Bereits in Entwicklung befindet sich eine Eingabehilfe, um die Benützung von Befehlen in der Eingabezeile zu erleichtern. Dafür wird eine Hilfe angeboten, die es ermöglicht, nach verschiedenen GeoGebra Befehlen zu suchen, diese in die Eingabezeile einzufügen und auch Beispiele zur korrekten Verwendung eines Befehles zu betrachten.

Die mobile GeoGebra Applikation soll unter anderem schon bald um eine 3D und eine CAS Ansicht ergänzt werden. Möglicherweise werden diese beiden Ansichten auch als separate mobile Applikationen veröffentlicht werden.

Besonders in Schulen, in denen keine Internetverbindung zur Verfügung steht, ist es notwendig, vorgefertigte Arbeitsblätter und GeoGebra Bücher direkt auf den Geräten zu speichern, um diese auch offline verwenden zu können. Ebenso soll es möglich sein, dass bereits offline getätigte Änderung oder neu begonnene Konstruktion bei vorhandener Internetverbindung automatisch mit den auf der GeoGebra Materialienplattform gespeicherten Dateien synchronisiert werden.

Um den GeoGebra Grafikrechner für alle NutzerInnen von mobilen Geräten verfügbar zu machen, wird derzeit bereits an einer Version für iPhones gearbeitet. Somit wird die Möglichkeit geboten, den GeoGebra Grafikrechner auf den eigenen mobilen Geräten der SchülerInnen, egal ob Android oder iOS, im Mathematikunterricht zu verwenden.

Literatur

GeoGebra. URL https://www.geogebra.org/, März 2016.

GeoGebra Grafikrechner. URL https://play.google.com/store/apps/details?id=org.geogebra.android&hl=de, März 2016.

GeoGebra Materialienplattform. URL http://www.geogebra.org/materials, März 2016.

Google Play Store. URL https://play.google.com, März 2016.

Philipp ULLMANN, Frankfurt

Die Energiewende modellieren – Statistical Literacy in der Wissensgesellschaft

Gesellschaftliche Teilhabe erfordert (auch) einen kompetenten Umgang mit Daten – das ist ein Allgemeinplatz, der in der Mathematikdidaktik unter dem Schlagwort *statistical literacy* verhandelt wird.[1] Hat sich aber erst einmal ein eigener Begriff etabliert, liegt die Versuchung nahe, das damit benannte Problemfeld zu schließen: Für mehr Teilhabe braucht es eben mehr Datenkompetenz, die nur noch geeignet operationalisiert werden muss.

Im Folgenden möchte ich einen anderen Weg beschreiten und *statistical literacy* zu einem Begriffsfeld ausweiten, um so vermeintliche Selbstverständlichkeiten (neu) in den Blick zu nehmen und (genauer) zu verstehen. Dabei werde ich zunächst soziologisch argumentieren und die Bedingungen herausarbeiten, unter denen Daten zu einem legitimen Argument innerhalb gesellschaftlicher Entscheidungsprozesse geworden sind.[2] Diese theoretischen Überlegungen werde ich anschließend an einem aktuellen Beispiel aus der Politik konkretisieren, der sogenannten ‚Energiewende', um schließlich ein (stochastik-)didaktisches Fazit zu ziehen.

Die Wissensgesellschaft

Folgt man einschlägigen soziologischen Modellen, haben sich die Vorstellungen von demokratischer Legitimität in Deutschland in den Jahren zwischen 1960 und 1990 tiefgreifend verändert. Ich kann das in der hier gebotenen Kürze nur skizzieren und beschränke mich auf zwei wesentliche Prozesse im Spannungsfeld von Öffentlichkeit, Politik und Wissenschaft.

Der erste ist der Prozess der *Demokratisierung*: Im Rahmen eines generellen Autoritätsverfalls steht die Politik unter wachsendem Legitimationsdruck, während die Öffentlichkeit ein Recht auf Mitsprache und Mitbestimmung einfordert (vgl. Gerhards 2001 & Nowotny 2004).

Der zweite ist der Prozess der *Verwissenschaftlichung*: Im Rahmen eines generellen Trends zur sogenannten ‚Wissensgesellschaft' durchdringt wissenschaftliches Wissen alle Sphären des Lebens und verdrängt andere Wissensformen (vgl. Stehr 1994 & Weingart 2001).

[1] Einschlägig zu *statistical literacy* und deren gesellschaftlicher Relevanz sind Ben-Zvi & Garfield (2004), Watson (2006) sowie Gal (2002).

[2] Ich beschränke mich dabei auf Deutschland, halte aber die Grundargumentation durchaus für übertragbar.

Die Notwendigkeit neuer Kommunikationsformen zwischen Politik und Öffentlichkeit führt zu einer strategischen Partnerschaft zwischen Politik und

Wissenschaft. Die Sachautorität wissenschaftlicher Experten kann die entwertete personale und soziale Autorität ersetzen bzw. stützen und damit politischen Entscheidungen neue demokratische Legitimation verschaffen – im Austausch gegen institutionelle Absicherung und Ressourcenzuweisung.

Dieses Zweckbündnis – geadelt durch das Versprechen der Wissensgesellschaft, gesamtgesellschaftliche Probleme sozial gerechter, ökonomisch effektiver, politisch rationaler und ökologisch nachhaltiger zu lösen – erfordert allerdings einen wissenschaftlich gebildeten Bürger (der Expertenautorität auch anerkennt): der *scientific citizen* ist geboren.[3] Da aber wissenschaftliches Wissen auf (empirischen) Daten beruht, kann das Ideal einer sich folgerichtig neu etablierenden Wissenschafts- und Bildungspolitik nur lauten: *statistical literacy* für alle.

Die Energiewende

‚Energiewende' – in den 1980er Jahren Kampfbegriff der politischen Linken – hat sich inzwischen als (internationales) „Synonym für die Abkehr vom Pfad der fossilen Energieträger hin zu den Erneuerbaren Energien" (Grasselt 2016, S. 23) etabliert. Als Schlüsseldokument gilt das sogenannte *Energiekonzept*. Mit diesem 36-seitigen Papier stellt die damalige schwarz-gelbe Bundesregierung der Öffentlichkeit eine langfristige Strategie „für eine umweltschonende, zuverlässige und bezahlbare Energieversorgung" vor und „beschreibt erstmalig den Weg in das Zeitalter der erneuerbaren Energien" (BMWi 2010, S. 3); wichtigstes Fernziel ist die Reduktion der Treibhausgasemissionen bis 2050 um mindestens 80% (gegenüber 1990).

Eine der Entscheidungsgrundlagen für das Energiekonzept bilden von wissenschaftlichen Experten simulierte *Energieszenarien*, die „mögliche Wege auf[zeigen], wie vorgegebene Ziele zu erreichen sind" (Prognos AG, EWI & GWS 2010, S. 2). Eine detaillierte Analyse dieser Szenarien kann ich hier nicht leisten, und so werde ich nur kurz skizzieren, welche Funktion sie im Kommunikationsprozess zwischen Politik und Öffentlichkeit haben. Interessantester Punkt ist, dass sich die verschiedenen Szenarien im Wesentlichen nur in einem Parameter unterscheiden: in der Dauer der Laufzeitverlängerung der Kernkraftwerke.

[3] „Das Konzept des Scientific Citizen ist ein [...] Konzept, das die Idee von Rechten und Pflichten in sich birgt: also das Recht, über Wissenschaft und Technik informiert zu werden, mitzureden und auch mitzuentscheiden, aber gewissermaßen auch die Pflicht, sich zu informieren, sich auseinander zu setzen, Verantwortung mitzutragen, sich als Teil eines Kollektivs auch in dessen Interesse zu positionieren." (Felt 2003, S. 19)

Dazu muss man wissen, dass 2002 von der damaligen rot-grünen Bundesregierung das *Gesetz zur geordneten Beendigung der Kernenergienutzung zur gewerblichen Erzeugung von Energie* (BGB 2002 I Teil Nr. 26, S. 1351ff.)

beschlossen wurde, das den Ausstieg Deutschlands aus der Kernenergie bis 2022 festsetzte – eine zu dieser Zeit politisch sehr umstrittene Entscheidung.

Die Energieszenarien dienen also offenkundig als (wissenschaftliche) Legitimation, dieses Gesetz zwar nicht aufzuheben, aber doch abzuschwächen. So kann das Ergebnis nicht überraschen: Mit massivem statistischen Aufwand und komplexer Modellierung wird gezeigt, dass – unabhängig davon, ob die Kernkraftwerke 4, 12, 20 oder 28 Jahre länger laufen – das Fernziel erreicht werden kann. Je länger aber die Kernkraftwerke laufen, desto weniger Treibhausgase werden in der Zwischenzeit produziert – auch das nicht verwunderlich, hält man sich die Alternative Kohlekraftwerke/Treibhausgase vs. Atomkraftwerke/radioaktiver Abfall vor Augen.

So kommt die Bundesregierung im Energiekonzept zum Ergebnis, dass eine befristete Verlängerung der Laufzeiten bis 2036 geboten ist. Die Sprachregelung lautet: Kernenergie als Brückentechnologie.

Der Rest ist Geschichte: 2011 kommt es im japanischen Kernkraftwerk Fukushima zu einer Katastrophe. Vor diesem Hintergrund reagiert die deutsche Öffentlichkeit so heftig auf die geplante Laufzeitverlängerung, dass die Bundesregierung noch im selben Jahr energiepolitische Beschlüsse verabschiedet, die zusammen mit dem Energiekonzept als ‚beschleunigte Energiewende' den Atom-Ausstieg bis 2022 festschreiben – diesmal allerdings politisch weitgehend einhellig.

Statistical Literacy?

Die kurze Fallstudie illustriert, wie das Ideal des *scientific citizen* wirkt. Indem die Bundesregierung eine politische Entscheidung evidenz-basiert trifft und – mit reichhaltigem Datenmaterial versehen – der Öffentlichkeit zugänglich macht, setzt sie stillschweigend voraus, dass es für eine (verantwortungsvolle) politische Teilhabe oder gar Mitsprache unabdingbar ist, solche Dokumente verständig zu lesen. Das setzt aber *statistical literacy* in ihrer gesamten Breite voraus. Dabei spielen statistisches und mathematisches Wissen nur eine untergeordnete Rolle; viel wichtiger sind allgemeine Lesekompetenz und Kontextwissen. Vor allem aber ist die Bereitschaft gefragt, sich überhaupt mit dem Gegenstand zu beschäftigen.

Diese Bereitschaft ist allerdings gar nicht selbstverständlich: Die Hälfte der Bevölkerung glaubt nicht an die Versprechungen der Wissensgesellschaft (vgl. EK 2014, S. 7) – und diese Zweifel sind nicht unbegründet. Die Politisierung der Wissenschaft und die Demokratisierung wissenschaftlichen Wissens sind nur zwei Momente, die das Bild eines privilegierten Expertenwissens ins Schwanken bringen. So stellt sich im obigen Beispiel die Frage, was Wissenschaft eigentlich wert ist, wenn darauf beruhende Entscheidungen in kürzester Zeit aus sachfremden Gründen umgestoßen werden. Immer deutlicher treten auch die Grenzen von Wissenschaft zutage, die mit neuem Wissen zugleich neue Probleme etwa in Gestalt von Risikowahrnehmung und Wissen über Nichtwissen erzeugt (vgl. Weingart 2001).

So kann *statistical literacy* keine Lösung sein, sondern nur Anlass, über Wert, Geltung und Reichweite von Daten und darauf gestützten gesellschaftlichen Entscheidungen ins Gespräch zu kommen; und es zeigt sich, dass viele Menschen bei entsprechender Motivation bereit sind, sich dieses Wissen anzueignen und es anzuwenden (vgl. Wynne 1991, S. 116). Es stellt sich also als Aufgabe, die abstrakte Welt der Daten an die Alltagserfahrungen der Menschen anschlussfähig zu machen, denn: „Expertise war niemals so unentbehrlich und zugleich so heftig unter Kritik. Die Frage, wessen Wissen anerkannt, übersetzt und umgesetzt werden soll, hat sich unter dem Druck der Demokratisierung verschärft.“ (Nowotny 2003, S. 151f.)

Literatur

Ben-Zvi, Dani & Garfield, Joan (Hrsg.) (2004): *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*. Kluwer.

BMWi (2010) = Bundesministerium für Wirtschaft und Technologie: *Energiekonzept für eine schonende, zuverlässige und bezahlbare Energieversorgung*. www.bmwi.de.

EK (2014) = Europäische Kommission (Hg.): *Special Eurobarometer 419. Public Perception of Science, Research and Innovation. Summary*.

Felt, Ulrike (2003): Scientific Citizenship. *Gegenworte* 11, S. 16-20.

Gal, Iddo (2002): Adult’s Statistical Literacy. *International Statistical Review* 70(1), S. 1-51.

Gerhards, Jürgen (2001): Der Aufstand des Publikums. *Zeitschrift für Soziologie* 30(3), S. 163-184.

Grasselt, Nico (2016): *Die Entzauberung der Energiewende. Politik- und Diskurswandel unter schwarz-gelben Argumentationsmustern*. Springer VS

Nowotny, Helga (2004): Der imaginierte Dialog zwischen Wissenschaft und Öffentlichkeit. In: Gisler, Priska et al. (Hrsg.): *Imaginierte Laien*. Velbrück Wissenschaft, S. 171-195.

Nowotny, Helga (2003): Democratising Expertise and Socially Robust Knowledge. *Science and Public Policy* 30(3), S. 151-156.

Prognos AG, EWI & GWS (2010): *Energieszenarien für ein Energiekonzept der Bundesregierung*. www.bmwi.de.

Stehr, Nico (1994): *Arbeit, Eigentum und Wissen*. Suhrkamp.

Watson, Jane (2006): *Statistical Literacy at School. Growth and Goals*. Erlbaum.

Weingart, Peter (2001): *Die Stunde der Wahrheit?* Velbrück Wissenschaft.

Wynne, Brian (1991): Knowledges in Context. *Science, Technology, & Human Values* 16(1), S. 111-121.

Elisabeth UNTERHAUSER, München, Hedwig GASTEIGER, Osnabrück

Begriffsverständnis von Viereck und Dreieck bei Kindern im Alter von 4 bis 6 Jahren – eine Pilotstudie

Studien, die sich mit dem Begriffserwerb von ebenen Figuren bei Kindergartenkindern befassen, legen den Schwerpunkt oft auf die Benennung und Unterscheidung verschiedener Figurenklassen. Bislang eher ungeklärt ist, was Kindergartenkinder bei der Betrachtung von Figuren wahrnehmen bzw. wie sie Figuren bestimmten Begriffsklassen zuordnen. Um erste Einsichten in das Begriffsverständnis von Viereck und Dreieck bei Kindergartenkindern zu gewinnen, wurde eine Pilotstudie durchgeführt.

1. Theoretische Grundlagen

In der Mathematikdidaktik werden unterschiedliche Stufen des Begriffsverständnisses gegeneinander abgegrenzt. Erst zeigt sich ein intuitives Begriffsverständnis bei dem der „Begriff als Phänomen“ ganzheitlich gesehen wird, ehe der „Begriff als Träger von Eigenschaften“ verstanden und anhand dieser analysiert wird (Vollrath, 1984). Möchte man sich dem Begriffsverständnis von Viereck und Dreieck bei Kindergartenkindern annähern, darf die Wahrnehmung dabei nicht vernachlässigt werden: „Begriffsbildung […] ist ein langfristiger Prozess, der auf Wahrnehmung von Objekten und bereits erworbenem Wissen aufbaut und vielleicht nie abgeschlossen wird“ (Franke, 2007, S. 99). Relevant für das Begriffsverständnis ist die im Zusammenhang mit der Wahrnehmung in den 70er Jahren formulierte Separabilitätshypothese. Sie konstatiert, dass es zwei Arten von Reizen gibt: Reize, die nicht analysiert werden können (z. B. Farben) und Reize, die analysierbar sind (z. B. ebene Figuren). Die zweite Art von Reizen scheint von Kindern bis ins Vorschulalter ganzheitlich wahrgenommen zu werden (z. B. Wilkening & Lange, 1989). Die Aussagen zum Begriffsverständnis und der Seperabilitätshypothese, sind theoretischer Natur und wurden in verschiedenen Studien empirisch überprüft.

2. Forschungsstand

Beim Klassifizieren und Identifizieren achten Kinder aller Altersstufen sowohl auf die Ganzheit (holistisch), als auch auf verschiedene Eigenschaften (analytisch) einer Figur, wobei v. a. jüngere Kinder holistisch vorgehen. Der Einfluss von Ganzheit und Eigenschaften auf die Entscheidungsfindung bezüglich der Zuordnung zu einer Begriffsklasse variiert allerdings. So wird z. B. eine Figur mit gebogenen Seiten als Dreieck akzeptiert, wenn die Figur geschlossen ist und drei Ecken hat. D. h. die Anzahl der Seiten und Ecken und die Geschlossenheit der Figur sind in diesem Fall entscheidender als die Art der Seiten (z. B. Clements et al., 1999; Lehrer et al., 1998). Neben dem

Achten auf Seiten und Ecken zeigen Kinder Ansätze eines Begriffsverständnisses von Parallelität und rechtem Winkel. Kinder können früh unterscheiden zwischen parallelen und sich schneidenden Streckenpaaren. Parallelität in diesem Sinne kann verhältnismäßig leicht in vertikaler und horizontaler Lage erkannt werden, bereitet aber in schräger Lage oder innerhalb von Figuren noch Schwierigkeiten (z. B. Abravanel, 1977). Ähnlich verhält es sich mit dem rechten Winkel: Kindergartenkinder können einen rechten Winkel in ″normaler Lage″ identifizieren, das Wahrnehmen in schräger Lage oder die Ausgliederung des rechten Winkels aus einer Figur gestalten sich hingegen komplexer (z. B. Mitchelmore, 1992).

Ähnliche empirische Ergebnisse zeigen sich auch bei Studien zur visuellen Wahrnehmung, obwohl sich diese Studien nicht explizit mit ebenen Figuren befassen. Um überhaupt zur visuellen Wahrnehmung fähig zu sein, müssen gewisse grundlegende, auch physiologische, Voraussetzungen gegeben sein (z. B. ausreichende Sehschärfe, Figur-Grund-Unterscheidung). Diese Voraussetzungen entwickeln sich bereits im Laufe des ersten Lebensjahres (z. B. Siegler et al., 2008). Entgegen der Annahme der Separabilitätshypothese hat sich gezeigt, dass kindliche Wahrnehmungsprozesse bereits vor dem Schuleintrittsalter sowohl analytisch als auch holistisch sind. Jüngere Kinder zeigen allerdings Inkonsistenzen bei der analytischen Wahrnehmung, indem sie z. B. bei Sortieraufgaben das Fokussierungsmerkmal als Basis für ihre Sortiervorschrift wechseln. Dabei hängt die Art der Wahrnehmung von verschiedenen Faktoren, wie z. B. Aufgabentyp, Vorwissen, Aufmerksamkeit, ab (z. B. Spangler & Schwarzer, 2008).

Studien zum Begriffsverständnis und zur visuellen Wahrnehmung kommen zu vergleichbaren Ergebnissen: Einerseits kann ein Begriff als Phänomen verstanden werden, was mit einer holistischen Wahrnehmung, also einer unanalysierten Betrachtung des gesamten Stimulus einhergeht; andrerseits kann ein Begriff Träger von Eigenschaften sein, was sich wiederum durch die Extraktion einzelner Merkmale in Form einer analytischen Wahrnehmung zeigt (Hershkowitz, 1990; Vollrath, 1984). Ungeklärt ist allerdings, ob es sich um eine Entwicklungsrichtung von einer holistischen hin zu einer analytischen Wahrnehmung handelt, oder ob beide Vorgehensweisen zur Verfügung stehen und abhängig sind von verschiedenen Faktoren.

3. Pilotstudie zum Begriffsverständnis von Viereck und Dreieck

Für die Pilotstudie ergeben sich folgende Forschungsfragen:

- Wie nehmen Kinder Linien, Strecken und Winkel wahr?
- Inwieweit achten Kinder auf Seiten, Ecken und Winkel bei Viereck und Dreieck?

– Welche Rolle spielen Eigenschaften bei der Identifikation von Repräsentanten der Objektbegriffe Viereck und Dreieck?

Mit Hilfe halbstandardisierter Einzelinterviews (ca. 30min) mit 15 Kindern im Alter zwischen 4;1 und 6;10 Jahren erfolgte eine Annäherung an diese Fragestellungen. Es wurden 11 Items aus 3 Bereichen eingesetzt (Abb. 1).

Teilaspekte des Begriffserwerbs	*Anzahl*
Wahrnehmen, Beschreiben von Eigenschaftsbegriffen (Linien, Strecken, Streckenlängen, -relationen, Winkel)	5 Items
Wahrnehmen, Beschreiben von Eigenschaften bei Vier- und Dreiecken (Seiten, Ecken, Parallelität, Winkel)	4 Items
Identifizieren von Vier- und Dreiecken inkl. Begründung (Repräsentanten, Nicht-Repräsentanten)	2 Items

Abbildung 1: Übersicht über Items

Die untersuchten Kindergartenkinder zeigen qualitativ unterschiedliche Ansätze von Begriffsverständnis, die in nachfolgende drei Gruppen unterteilt werden können.

Gruppe 1: Bei Identifikationsaufgaben neigt diese Gruppe zur Untergeneralisierung der Begriffe Viereck (z. B. wird in Abb. 2 nur das Quadrat als Viereck identifiziert) und Dreieck, sowie zu einer partitionalen Klassifikation des Vierecks. Figuren werden nicht anhand ihrer Eigenschaften analysiert und so dominiert eine holistische Wahrnehmung.

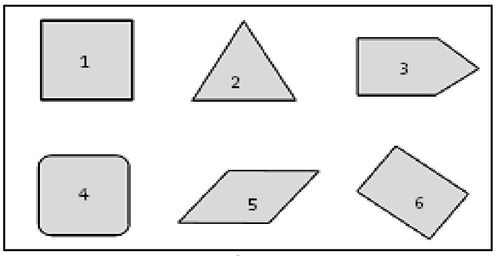


Abbildung 2: Identifizieren von Vierecken

Gruppe 2: Kinder dieser Gruppe isolieren erste Eigenschaften und nehmen diese bei Figuren wahr, aber die Ganzheit einer Figur ist nach wie vor entscheidend für die Identifikationsentscheidung. Das kann dazu führen, dass Kinder z. B. die Anzahl der Ecken bei Figur 5 (Abb. 2) richtig abzählen, diese aber nicht als Viereck identifizieren, weil die Figur „nicht so aussieht".

Gruppe 3: In dieser Gruppe achten Kinder isoliert und bei Figuren auf Eigenschaften, d. h. sie nutzen diese für Identifikationsentscheidungen und begründen ihre Entscheidungen anhand dieser. In erster Linie beziehen sich Kinder auf die Anzahl der Ecken, wobei häufig auch abgerundete Ecken akzeptiert werden.

Diese aus den Ergebnissen der Pilotstudie abgeleiteten Gruppen stellen Tendenzen dar und können aufgrund des explorativen Charakters der Studie nicht verallgemeinernd verstanden werden.

4. Ausblick

Im Rahmen einer größeren Studie soll unter anderem überprüft werden, ob sich die unterschiedlichen Ansätze im Begriffsverständnis von Viereck und Dreieck, die sich im Rahmen der Pilotstudie bei einer Stichprobe von 15 Kindern gezeigt haben, bestätigen lassen. Zudem sollen weitere Erkenntnisse zum Begriffsverständnis von Viereck und Dreieck gewonnen worden.

Literatur

Abravanel, E. (1977). The figural simplicity of parallel lines. *Child Development, 48,* 708-710.

Clements, D. H., Swaminathan, S., Zeitler Hannibal, M. A. & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 30,* 192-212.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Hrsg.), *Mathematics and cognition. A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (S. 70-95), Cambridge: Cambridge University Press.

Lehrer, R., Jenkins, M. & Osana, H. (1998). Longitudinal study of children's reasoning about space and geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Hrsg.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (S. 137-167). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Mitchelmore, M. (1992). Children's concepts of perpendiculars. In W. Geeslin & K. Graham (Hrsg.), *Proceedings of the 16th PME Conference, Volume 2* (S. 120-127). Durham: PME.

Siegler, R. S., DeLoache, J. S. & Eisenberg, N. (2005). *Entwicklungspsychologie im Kindes- und Jugendalter.* München: Elsevier.

Spangler, G. & Schwarzer, G. (2008). Kleinkindalter. In M. Hasselhorn & R. K. Silbereisen (Hrsg.), *Entwicklungspsychologie des Säuglings- und Kindesalters* (S. 127-140). Göttingen: Hogrefe.

Vollrath, H.-J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*. Stuttgart: Klett.

Wilkening, F. & Lange, K. (1989). When is children´s perception holistic? Goals and styles in categorization multidimensional stimuli. In T. Globerson & T. Zelniker (Hrsg.), *Cognitive style and cognitive development* (S.141-171). Norwood: Ablex Pub. Corp.

Lara VANFLOREP, Paderborn

Das professionelle Selbst angehender Mathematiklehrkräfte in der Praxisphase – Annäherung an eine Definition

Mit Inkrafttreten des Lehramtsausbildungsgesetzes aus dem Jahr 2009 in NRW erfolgte nicht nur eine Umstrukturierung der Lehramtsstudiengänge in Bachelor- und Masterstudiengänge, sondern auch die Einführung eines Praxissemesters.

Ein zentrales Element der Lehramtszugangsverordnung ist die Forderung, dass die Praxissemesterstudierenden über die Fähigkeit verfügen sollen, ein eigenes professionelles Selbst zu entwickeln (vgl. Lehramtszugangsverordnung – LZV 2009, §8 Abs. 1). Im vorliegenden Beitrag soll eine theoretische Annährung an dieses Konzept vorgenommen werden.

Das professionelle Selbst als Entwicklungsaufgabenkonzept

Zunächst erfolgt die Klärung des Begriffs eines professionellen Selbst.

Bauer (1998) widmet sich dem Begriff, indem er das professionelle Selbst als „die treibende Kraft, die eine *individuelle Professionalisierung* auslöst und in Gang hält" (S. 352) betrachtet. Er definiert das professionelle Selbst als „das Bewusstsein von der persönlichen *Entwicklungsaufgabe,* das die eigene (imperfekte) Professionalität steuert" (S. 345).

Der Begriff der Entwicklungsaufgabe geht auf Havighurst (1953) zurück, der zwei gegensätzliche Vorstellungen von Erziehung kontrastiert: „The theory of freedom – that the child will develop best if left as free as possible, and the theory of constraint – that the child must learn to become a worthy responsible adult through restraints imposed by society" (S. 332). Havighurst versteht Entwicklungsaufgaben als das Finden einer „Mitte" zwischen den gesellschaftlichen Anforderungen und den individuellen Bedürfnissen: „A developmental task is midway between an individual need and a social demand" (ebd.). Er konstatiert damit, dass Entwicklungsaufgaben sowohl aus Erwartungen der Gesellschaft als auch aus den Bedürfnissen des Kindes entstehen und das Finden einer „Mitte" die gegensätzlichen Erziehungsvorstellungen verbindet.

Aus heutiger Perspektive wird Havighursts Entwicklungsaufgabenkonzept als zu normativ kritisiert. Das bedeutet, es gibt keine einheitlich gesellschaftlichen Normerwartungen bzgl. vorgegebener Erziehungsziele mehr und in Folge dessen wird der Blick stärker auf das lernende Subjekt gerichtet. Entwicklungsaufgaben müssen also unter modernen Lernbiographien betrachtet und neu definiert werden. Meyer (2004) bspw. nimmt aus diesem Grund eine stärkere Subjektzentrierung vor (vgl. S. 102f.). Er geht davon aus, dass das Individuum heute ein aktiver Mitgestalter seiner Entwicklung ist und somit

(Entwicklungs-)Aufgaben subjektiv deutet und sinnhaft konstruiert (vgl. ebd.). Combe (2004) hingegen gibt zu bedenken, dass trotz der Enttraditionalisierung des gesellschaftlichen Lebens die Funktion der Institutionen bei der Konstruktion einer eigenen Lernbiographie vernachlässigt wird. Ihm geht es vielmehr um „die Verschärfung der Spannungen zwischen Biographie und Institution“ (S. 49). Das heißt, die Aneignung von Entwicklungszielen kann von außen angestoßen und sensibel beraten werden, muss aber dennoch insbesondere als das Ergebnis der eigenen Verarbeitung von Erfahrung betrachtet werden (vgl. S. 50). Aus diesem Grund definiert Combe Entwicklungsaufgaben als „Aneignung und Umarbeitung von Entwicklungszielen der eigenen Lernbiographie“ (S. 54). Der Lernende muss dafür ein Gespür für Veränderungsnotwendigkeiten entwickeln, die sowohl in der Vergangenheit als auch in der Zukunft liegen. Solche Veränderungsnotwendigkeiten finden laut Combe auf der Grundlage von Erfahrungskrisen statt. Lernende begegnen ihnen als „Störerfahrung“, die als Grenze der eigenen Kompetenzen wahrgenommen wird (vgl. S. 54f.).

Auch Hericks (2006) schließt sich den beschriebenen Modernisierungsvorschlägen an und betont zudem, dass „jeder Mensch äußerliche Anforderungen erst als Anforderungen an die eigene Person interpretieren und aus ihnen Aufgaben eigener Entwicklung formen [muss], damit sie biographisch wirksam werden“ (S. 60). Zunächst sind Entwicklungsaufgaben aber objektiv, da das Individuum erst durch die Gesellschaft vor die Aufgabe gestellt werden muss, damit er sie als eine eigene Entwicklungsaufgabe annehmen und bearbeiten kann. Das Annehmen und Bearbeiten wiederum ist ein subjektiver Prozess, der einmalig, aber nicht beliebig verläuft (vgl. ebd. S. 60f.). Hericks spezifiziert den Entwicklungsaufgabenbegriff, indem er ihn auf das Lehrerhandeln bezieht und die gesellschaftlichen Anforderungen an den Lehrerenden durch die spezifischen Anforderungen des beruflichen Handlungsfelds ersetzt: „Entwicklungsaufgaben sind die [spezifischen Anforderungen an das Lehrerhandeln], die individuell als Aufgaben eigener Entwicklung gedeutet werden können“ (S. 60). Hericks betont zudem, dass Entwicklungsaufgaben „unhintergehbar“ sind. Damit meint er, dass sie nicht nur wahrgenommen und erkannt werden müssen, sondern gerade die Bewältigung solcher Entwicklungsaufgaben dazu führt, dass eine Professionalisierung stattfindet (vgl. ebd.).

Zusammengefasst entstehen Entwicklungsaufgaben also aus einem Spannungsverhältnis zwischen individuell wahrgenommenen Anforderungen der Gesellschaft einerseits und den eigenen Entwicklungszielen andererseits. Der Versuch, zwischen diesen beiden Extremen eine Balance zu finden, löst eine Erfahrungskrise aus, auf die die Individuen mit der Formulierung von

Entwicklungsaufgaben reagieren. Diese müssen aber nicht nur erkannt, sondern insbesondere bearbeitet werden, damit eine Professionalisierung stattfindet.

Das Konzept der Zone der nächsten Entwicklung, welches Ähnlichkeiten[9] zu dem der Entwicklungsaufgabe aufweist, erlaubt eine tiefere Analyse der Erfahrungskrisen in einer gegebenen Handlungssituation. Diese theoretische Überlegung soll im folgenden Abschnitt für die Praxissemesterstudierenden im Fach Mathematik erörtert werden.

Die Entwicklungsaufgabe als Zone der nächsten Entwicklung

Betrachtet man also die Lehrertätigkeit der Praxissemesterstudierenden im Fach Mathematik, so kann Engeströms Tätigkeitstheorie (1990) herangezogen werden, um Erfahrungskrisen und die daraus resultierenden Entwicklungsaufgaben zu konzeptualisieren.

Engeström (1999) nimmt an, dass Tätigkeitssysteme inneren Widersprüchen unterliegen. Sogenannte Doublebinds entstehen innerhalb des Tätigkeitssystems zwischen den jeweiligen Elementen (vgl. S. 83). In dem hier vorliegenden Fall verfolgt der Studierende das Ziel, den Schülern Mathematik mit denjenigen Instrumenten des Mathematikunterrichts zu lehren, die er sich im Laufe seiner Lehrerausbildung angeeignet hat. Diese Tätigkeit bildet jedoch nur die Oberfläche des Tätigkeitssystems. Aufgrund der Umstrukturierung der Praxisphase bestehen die Situationsbeteiligten zudem aus den Institutionen Universität, Zentrum für schulpraktische Lehrerausbildung (ZfsL) und Schule, die wiederum aufgrund ihrer normativen Erwartungen oder Regeln eine bestimmte Perspektive auf den Mathematikunterricht einnehmen. Durch die unterschiedlichen Regeln können Spannungen zwischen den jeweiligen Situationsbeteiligten auftreten, die der Studierende als „Störerfahrung“ oder als Erfahrungskrise bzgl. seiner individuellen Lernbiographie wahrnimmt. Solche Doublebinds gilt es nach Engeström zu beherrschen, wenn Entwicklung stattfinden soll (vgl. ebd.). Die Struktur dieses Prozesses, das Beherrschen der Doublebinds, kann mit Hilfe der Zone der nächsten Entwicklung nach Vygotskij (1978) beschrieben werden. Engeström definiert die Zone der nächsten Entwicklung als den Abstand zwischen den gegenwärtigen alltäglichen Handlungen der Individuen und der neuen Form der Tätigkeit als Lösung der Doublebinds, die potentiell in den Alltagshandlungen eingebettet sind (vgl. Engeström 1999, S. 170). Die Lösung der Doublebinds, verstanden als das Lösen innerer Widersprüche in einem Tätigkeitssystem, kann also gedeutet werden als die zuvor angeführte Bewältigung von Erfahrungskrisen mit Hilfe der Bearbeitung von Entwicklungsaufgaben.

[9] Aufgrund der Platzbeschränkung wird hier nur auf Ähnlichkeiten eingegangen, da diese für die weitere Argumentation zentral sind.

Somit kann die Zone der nächsten Entwicklung als Konzeptualisierung der Entwicklungsaufgabe herangezogen werden.

Ausblick

Zunächst erscheint es sinnvoll, solche Situationen im Mathematikunterricht zu identifizieren, die das Beschreiben der Kontur der *Zone der nächsten Entwicklung* und damit auch die der *Entwicklungsaufgabe* der Praxissemesterstudierenden ermöglichen. Daran anknüpfend sollen diejenigen Bewältigungsstrategien der Praxissemesterstudierenden nachgezeichnet werden, die gewählt werden, um die Doublebinds zu lösen.

Werden also die inneren Widersprüche der Lehrertätigkeit im Fach Mathematik analysiert, so können Entwicklungsaufgaben der Praxissemesterstudierenden formuliert und schließlich mit Hilfe der Beschreibung der Bewältigungsstrategien ihre Zone der nächsten Entwicklung identifiziert werden, mit dem Ziel, diese Ergebnisse in die Vorbereitungs- und Begleitveranstaltungen des Praxissemesters zu implementieren.

Literatur

Bauer, K.-O. (1998). Pädagogisches Handlungsrepertoire und professionelles Selbst von Lehrerinnen und Lehrern. *Zeitschrift für Pädagogik, 44* (3), 343 – 359.

Combe, A. (2004). Brauchen wir eine Bildungsgangforschung? Grundbegriffliche Klärungen. In Trautmann, M. (Hrsg.): *Entwicklungsaufgaben im Bildungsgang* (S. 48-63). Wiesbaden: VS Verlag.

Engeström, Y. (1990). *Learning, Working and imagining*. Orienta-konsultit

Engeström, Y. (1999). *Lernen durch Expansion*. Marburg: BdWi-Verlag.

Havighurst, R. J. (1953). *Human Development and Education*. New York

Hericks, U. (2006). *Professionalisierung als Entwicklungsaufgabe*. Wiesbaden: VS Verlag.

Meyer, M. (2004): Was ist Bildungsgangdidaktik? In Trautmann, M. (Hrsg.): *Entwicklungsaufgaben im Bildungsgang* (S. 89-116). Wiesbaden: VS Verlag.

Schulministerium:

https://www.schulministerium.nrw.de/docs/LehrkraftNRW/Lehramtsstudium/Reform-der-Lehrerausbildung/Reform/Lehramtszugangsverordnung.pdf

Vygotskij, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Camebridge, Mass: Havard University Press.

Ingrida VEILANDE, Riga

Tasks on orthogonal configurations in extracurricular activities

Introduction. Why mathematical Circles? Mathematical Circles or Clubs (MC) are organized in the schools, at the universities, or in the Centers of Educational Research. There are different reasons of establishing them. For example, the project MALU at the University of Munster involve gifted children to raise the level of their mathematical competencies and to research their problem solving abilities (Rott, 2013). Moscow Center of Continued Mathematical Education[10] defines the goal to hold and to expand the traditions of mathematical education. The mathematics educators and the teachers from different countries propose that MC are necessary to improve the students mathematical knowledge (Thompson, 2009) or to prepare the students for Mathematical Olympiads (Koichu, Andzans, 2009), or to improve the problem solving skills of students and to collect the information about the challenging problems and to provoke the creativity of the bachelor students of pedagogy (Prescot, Pressick-Kilborn, 2015).

Preparation to the Open Mathematical Olympiad. Mathematical Circles organized in Latvia have additional important goal – to prepare students for Mathematical Olympiads. Two Mathematical Olympiads – State Olympiad and Open Mathematical Olympiad (OMO) - are organized by the Extramural School of Mathematics at the University of Latvia. At the State Olympiad can take a part only the best students. At the OMO can participate any student from the 1st till the 12th grade. This is very popular event - in recent years, the number of participants has been reaching 3000. Nevertheless the average score of gained results on the Olympiad is low, for example, the average score of the high school students' usually is less the third or the forth part of the maximal score 50 points. Considering the data offered by PISA about the assessment of the 15 – years old students (PISA, 2013), the principals of schools in Latvia reported that approximately a third part of students can attend to the MC, about a half of students can visit after-school lessons in mathematics, more than 90% of students can participate at the Mathematical Olympiads. Comparison of these data with the results on OMO shows implicitly that the students of these age group do not use by the school offered possibilities actively to prepare well for the Olympiad. The problem set on OMO is quite different from the problems of compulsory mathematics.

[10] Homepage of Moscow Center of Continued Mathematical Education (in Russian). Retrieved from http://www.mccme.ru/head/celi.htm

Therefore the question originate - what auxiliary materials could be recommended for teachers and leaders of the MC and of other extracurricular mathematical activities, who prepare the students for Olympiads?

Problems on changeable configuration. To solve the problems of OMO is not necessary to use very deep mathematical knowledge. In every problem set are included the problems of recreational type too along with the problems of number theory, algebra, and geometry. The problems of combinatorial geometry are offered every year. The students of younger grades and older students as well mostly use the method of trial and error to solve the problems of such type, but they do not understand exactly what does it means “the proof problem”.

The problems about the orthogonal configurations with changeable structure are very useful to master the main problem solving principles - to read and to understand givens, to make the purposeful experiments, to draw the pictures, to classify, to master different heuristic strategies, to hypothesize, to explain, to discuss, and to prove.

The orthogonal *changeable configuration* can be defined in the following way:

The objects are given in the actions’ field. The start position of objects is described generally or it is given by definite configuration. The configuration changes step by step according to the rules. Orthogonality of configuration is determined by the actions’ field and/or the specific configuration of objects.

Usually the *actions field* is a rectangle consisting from the unit squares, orthogonal lattice, squared plane, and marked straight line. The *objects* can be points, numbers, unit squares, figures, bricks, colors etc.

Dependent case:	**Independent case:**
Create an algorithm to reach the end position	Detect whether the process is finite or continuous
Find the shortest algorithm	What could be the end position?
Prove that the process converges to the fixed end position	What are specific characteristics of the process?
Prove that the desired result is not possible	Change the start position to get some specific end position

Table 1. Categories of problems on changeable configurations

The problems on changeable configurations can be categorized according to the content and the imperative of the problem. The *dependent case* is given when the solver has to use given conditions to change the configuration. The *independent case* has to be researched when the discrete configuration changes itself with respect of the givens (see Table 1). Each of these cases can be classified by the demand of the problem. In some cases these problems cover the questions of algorithm theory.

Examples of problems. The problems chosen for the MC have to fulfil some of the following criteria – here must be an introductory problem, problems have to be challenging, the levels of difficulty must increase, various heuristic methods have to be master at the problem solution.

Introductory problem. What do you see in this picture? What connections are between the squares? (See Figure 1.)

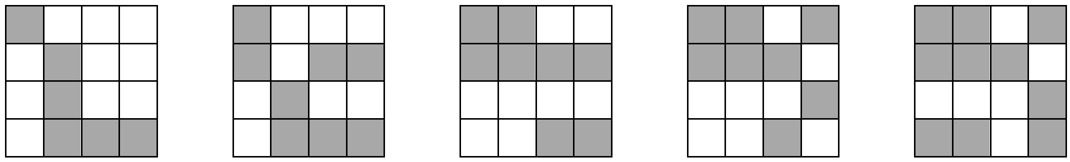


Figure 1. Colored squares for introductory problem

This problem was offered for 5th – 9th grade students from some Mathematical circles in Riga and the Extracurricular School of Mathematics in Valmiera district. They mostly responded about the number of colored unit squares, explored the properties of symmetry, and tried to detect different polyominoes. No one of them detected the change of the configuration. They can't immediately find how from the first square one can get the next squares. The observation of the part that does not changes gives the correct conclusion about the recoloring of the row or of the column. Such problem is good to introduce students with additional inquiry based tasks, for example, "Try to recolor the region of different form in the square"; "Detect all the groups of permutations"; "Investigate whether the properties of the coloring depend on the size of the square or on the type of the recolored region".

Second problem is useful for research what happens if the problem's conditions are changed?

Problem 2. The square 4 x 4 contains all the pluses except the corner square's neighbour containing a minus. It is allowed to reverse all signs in one whole row or column. Can we get only all pluses in the square?

The solution of the problem can be find by simple observation of the square 2 x 2 containing the minus sign. Adding the condition that it is allowed to change the signs in diagonals too, the solution becomes more general by the implementation of the method of invariants.

To raise students' interest in problem solving it is necessary to pose the problems with exciting content. Here is an example where the research on simpler special case can give the relevant information. The following problem can be solved using modular arithmetic by modulus 4 and the creation and solution of the system of appropriate equations.

Problem 3. Robber wants to crack the code on the safe to open it. The safe will open when all arrows will point in the same direction (see Figure 2). All arrows in the row (column) turn by 90 degrees in the same direction according to the wish of the user. How the robber can open the safe?

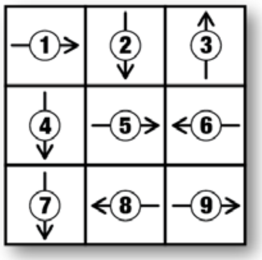


Figure 2. Problem3. The arrows on the safe

Conclusions. The solution of the problems of changeable configurations teach the students to work regularly and systematically, to change the viewpoint, to imagine, to try extraordinary ideas. The participation at Mathematical circles fortify students' mathematical proficiency, develop students' mathematical intelligence, foster students' creativity, and help them to prepare for Mathematics Olympiads.

References

Koichu, B., Andzans, A. (2009) *Mathematical creativity and giftedness in out-of-school activities*. In Leikin, R., Berman, A., Koichu, B. (Ed). Creativity in mathematics and the education of gifted students. Sense Publishers Pp 285-308

OECD (2013), *PISA 2012 Results: What Makes Schools Successful? Resources, Policies and Practices (Volume IV),* PISA , OECD Publishing. Pp. 112 – 116 Retrieved from *http://dx.doi.org/10.1787/9789264201156-en*

Prescot, A., Pressick-Kilborn, K. (2015) It's great to be doing maths! Engaging primary students in a lunchtime club. *Australian Primary Mathematics Classroom,* vol. 20 (3), pp. 34 – 39. Retrieved from https://opus.lib.uts.edu.au/handle/10453/35462

Rott, B. (2013) Mathematisches Problemlosen. Ergebnisse Einer Empirischen Studie. WTM, Munster, pp. 123 – 128

Thompson, J. H. (2009) Enhancing Problem Solving Through Math Clubs. *Action Research Projects.* Paper 24. University of Nebraska – Lincoln. Retrieved from http://digitalcommons.unl.edu/mathmidactionresearch/24

Anna-Marietha VOGLER, Technische Universität Dortmund

Lernendenperspektiven als methodisches Element im vignettenbasierten Professionalisierungsprozessen

Lehrkräfte für Partizipationsmöglichkeiten der Lernenden im Mathematikunterricht zu sensibilisieren, ist ein wichtiges Ziel von Professionalisierungsprogrammen in der Mathematikdidaktik. Dabei steht vor allem die Teilhabe aller Lernenden im Vordergrund. Der Beitrag stellt einen Ansatz vor, wie verschiedene Vignetten von Lernendenperspektiven auf Mathematikunterricht in Professionalisierungsphasen von Lehrkräften eingebunden werden können, um unterschiedliche Lernenden-Wahrnehmungen zu interaktiven Lerngelegenheiten zu thematisieren. Genutzt werden dazu aufeinander aufbauende Daten des interdisziplinären Projekts InterPass.

1. Wahrnehmungen als Schlüssel zu partizipationsförderlichem Unterricht

Studien zur Professionalisierung von Lehrkräften konnten in den letzten Jahren immer wieder eindrucksvoll zeigen, wie bedeutsam die Wahrnehmung von Lehrkräften in Bezug auf Unterrichtsprozesse für die Qualität des Unterrichts ist. Schönfeld bemerkt hierzu "... what teachers attend to as they teach is highly consequential" (Schönfeld 2011, S. 224). Folglich ist es ein Bestreben von Professionalisierungsprogrammen, den Wahrnehmungsfokus von Lehrkräften zu erweitern, so dass sie besonders lernförderliche Aspekte von Unterricht registrieren und ihr eigenes Unterrichtshandeln daran ausrichten. Hierzu wurden in den vergangenen Jahren vornehmlich Vignetten von mehr oder weniger ‚gelungenen' Unterrichtssituationen verwendet (u.a. Sherin 2007). Während einige Ansätze dabei besonders auf die Komplexität von Unterrichtsprozessen fokussieren und versuchen, die Wahrnehmung von Lehrkräften für instruktionale Aspekte innerhalb dieser Unterrichtsprozesse zu sensibilisieren, nehmen andere das Denken der Lernenden zu mathematischen Konzepten und Ideen oder Interaktionsmuster in Lehr-Lern-Situationen in den Blick.

Wir haben in einem eingereichten längeren Artikel aufgezeigt, inwiefern auch Vignetten, die die Interaktionen zwischen Lehrenden und Lernenden und die unterschiedlichen Perspektiven von Lernendengruppen auf diese Interaktionsprozesse thematisieren, wichtige Reflexionsgelegenheiten bilden (Vogler & Prediger 2016). Dieser Beitrag wird hier zusammengefasst.

2. Warum sollten Interaktionen fokussiert werden?

Die interaktionistische Unterrichtsforschung hat gezeigt, dass Lerngelegenheiten erweitert werden durch die Möglichkeit, produktiv an mathematisch gehaltvollen Aushandlungsprozessen zu partizipieren (z.B. Krummheuer

2011). Dies kann beispielsweise dadurch geschehen, dass die Lehrkraft den Kindern ‚Slots' eröffnet, um ihre Ideen zu einem Thema einzubringen und dadurch das interaktive Weiterbearbeiten zu ermöglichen. Obwohl diese Forschungsergebnisse seit ca. 30 Jahren in Forschung und Lehre existieren, herrschen in der Unterrichtspraxis weiterhin eher unproduktive Interaktionsmuster wie beispielsweise das Trichtermuster vor. Interessanterweise werden interaktionale Aspekte auch von handlungsentlasteten Lehrkräften selten wahrgenommen, sie fokussieren bei Videoanalysen vornehmlich auf Aspekte des Lehrendenhandelns (vgl. Vogler & Prediger 2016, Sherin 2007). Sherin (2007) argumentiert mit dem Konstrukt der „professional vision" (ebda., S.23), dass die Wahrnehmung der Lehrkräfte unmittelbar mit deren Unterrichtshandeln verknüpft ist. Daher ist zu vermuten, dass Lehrkräfte, die nicht auf interaktionale Aspekte von Unterrichtsinteraktionen fokussieren, auch weniger in der Lage sind, interaktionale Lernpotentiale im Unterricht zu schaffen.

3. Warum sollten Lernendenperspektiven fokussiert werden?

Die Notwendigkeit, interaktionale Aspekte von Unterricht in der Wahrnehmung der Lehrkräfte zu stärken, ist auch in Bezug auf die Debatte zur Chancengleichheit und Teilhabe von besonderer Bedeutung. Ging man in einigen Arbeiten zu Lerngelegenheiten im Unterricht zunächst von ‚der Klasse' als homogene Lerneinheit aus, so zeigen neuere Studien, dass die Möglichkeiten, am unterrichtlichen mathematischen Diskurs zu partizipieren, oftmals ungleich verteilt sind. Neben kognitiven und motivationalen Voraussetzungen wird die Teilhabe am Unterricht so beispielsweise auch von variierenden Fähigkeiten beeinflusst, implizite Regeln des Unterrichts zu erkennen (Gellert & Hümmer 2008). Diese Annahme sozial ungleich verteilter Wahrnehmungsfähigkeiten von Lernenden konnte im Projekt InterPass in Gruppendiskussionen von Lernenden mit verschiedenen sozioökonomischen Status (SES) bestätigt werden: Kindergruppen mit hohem SES fokussierten 2,5 mal häufiger auf das Lehrendenhandeln und daraus resultierende ‚Handlungszwänge' als Gruppen mit einem niedrigen SES.

4. Methodische Einbindung der Lernendenperspektive

Aus diesen Gründen haben wir uns für ein Fortbildungskonzept entschieden, das neben der Fokussierung auf interaktionale Aspekte auch verschiedene Lernendenperspektiven von Kindern mit hohem und niedrigem SES einbindet, um Lehrkräfte für die ungleiche Wahrnehmung von Kindern zu sensibilisieren. Hierzu wurden zwei Vignetten aus zwei Gruppendiskussionen von Kindern der Klasse 5 ausgewählt, die charakteristische Perspektiven zeigen. Beide Kindergruppen diskutieren in diesen Vignetten über ein Unterrichtsvideo, das auch den Lehrkräften aus ihrer Fortbildung bekannt ist: Ein Schüler zeigt in diesem Unterrichtsvideo eine mathematisch reichhaltige Vorstellung zum Runden auf den nächsten Zehner über Nähe und Distanz auf dem mentalen Zahlenstrahl: „man muss einfach ABrunden, und nä nähere zahl mit ner NULL muss man dahin schreiben “. Der Beitrag wird jedoch vom Lehrer subtil zurückgewiesen, während ein Mädchen, das die formale Rundungsregel exakt aufsagt, eine positive Rückmeldung erhält (Szene detailliert analysiert in Prediger und Erath 2014).

Die erste Vignette zeigt, wie die Kindergruppe mit hohem SES beide Schülerantworten und auf Basis der Lehrerevaluation Rückschlüsse auf die verschiedene Güte beider Antworten zieht. Die Antwort des Mädchens wird als der „LösungsWEG“ und als schnelle Lösungsmöglichkeit charakterisiert, die Antwort des Jungen als nur eine Lösung. In der zweiten Vignette hingegen charakterisiert die Kindergruppe mit niedrigem SES die Äußerungen des Schülers und des Lehrers als „unlogisch“. Sie ist sich auch auf Nachfrage der Interviewerin uneinig über die Güte der Beiträge (Vignetten aus den Gruppendiskussionen analysiert in Vogler & Prediger 2016). In der Fortbildung wurden die Vignetten der zwei Kindergruppen 40 Lehrkräften in 4er- bis 6er-Gruppen ohne Informationen über den sozioökonomischen Status der Kindergruppen zur Diskussion vorgelegt (vgl. Vogler & Prediger 2016).

5. Erste Eindrücke aus der Professionalisierung

Einen ersten Eindruck vom hohen Potential dieser Vignetten für eine Erweiterung der Lehrendenwahrnehmung zeigte sich in der Fortbildung. So diskutierte etwa eine Lehrendengruppe auf der Fortbildung kontrovers, inwiefern die Kindergruppe mit hohem SES nahezu ‚überangepasst’ wären, wenn sie ihr Handeln am impliziten Plan des Lehrers ausrichten. Sie thematisierten aber auch, wie hier Lehrer 2 und 4 die daraus resultierende erfolgreichere Teilhabe an der Unterrichtsinteraktion, in der sich diese Gruppe von der anderen unterscheidet.

Lehrer 4: Die Schüler [aus der Kindergruppe mit hohem SES] sind irgendwie darauf konditioniert, den Plan des Lehrers zu entdecken. Worauf will der eigentlich hinaus, und das, das lenkt das Denken irgendwie in so ne schmale Bahn, ne. Das, das verhindert im Prinzip kreatives Denken.

Lehrer 2: Anderseits können die wahrscheinlich dem Unterricht besser folgen als die [Lernenden aus der Kindergruppe mit niedrigem SES] unten ne, weil ich mein die haben letztlich die Regel aufgeführt und verinnerlicht, ne.

Zusätzlich konnte im Verlauf der Fortbildung eine zunehmende Fokussierung auf interaktionale Aspekte von Unterrichtsprozessen festgestellt werden. Diese verknüpften die Lehrkräfte in vielen Fällen mit Möglichkeiten der einzelnen Lernendengruppen, an der Unterrichtsinteraktion teilzunehmen. So bemerkt Lehrer 4 zu einem späteren Zeitpunkt in der Diskussion: „Aber das ist das Beispiel für DEN Schüler den der Lehrer auf jeden Fall unterwegs verloren hat, ne. Der weiß gar nicht mehr worum’s geht“ (tiefere Einblicke in die Prozesse der Fortbildung in Vogler & Prediger 2016).

6. Resümee

Der Einsatz von Vignetten kann einen wichtigen Katalysator für Professionalisierungsprozesse bilden. Dabei lohnt es sich, über die genauen Zielsetzungen der Arbeit mit Vignetten genau nachzudenken. Der kurze Einblick in die Forschung und Fortbildung zeigt, wie fruchtbar auch eine Einbindung von Lernendenperspektive nicht nur auf mathematische Konzepte, sondern in unserem Fall auch auf Unterrichtsinteraktionen sein kann. So verstärken diese Vignetten die Wahrnehmung von Lehrkräften auf interaktionale Prozesse im Mathematikunterricht und lenken ihren Fokus auf die verschiedenartigen Voraussetzungen von Kindern, an solchen Unterrichtsinteraktionen erfolgreich zu partizipieren. Der hier dargestellte spezielle Fall motiviert damit auch in Zukunft, weitere solcher Vignetten in Professionalisierungsprogramme zu integrieren.

Dank. Das Projekt INTERPASS wird mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert (Förderkennzeichen 01jc1112; Projektleitung S. Prediger & U. Quasthoff).

Literatur

Gellert, U., & Hümmer, A.-M. (2008). Soziale Konstruktion von Leistung im Unterricht. Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 11(2), 288-311.

Krummheuer, G. (2011). Representation of the notion “learning-as-participation” in everyday situations of mathematics classes. *ZDM, 43*(1/2), 81 - 90.

Prediger, S. & Erath, K. (2014). Content or interaction, or both? Synthesizing two German traditions in a video study on learning to explain.

Schoenfeld, A. H. (2011). Noticing matters. A lot. Now what? In M. G. Sherin, V. R. Jacobs & R. A. Philipp (Eds.), Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers’ eyes (pp. 223-238). New York: Routledge.

Sherin, M. G. (2007). The Development of Teachers' Professional Vision in Video Clubs. In R. Goldman, R. Pea, B. Barron & S. J. Derry (Hrsg.), *Video Research in the Learning Siences* (S. 383-395). Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Vogler, A.-M. & Prediger, S. (2016, eingereicht). Including students’ diverse perspectives on classroom interactions into video-based professional development for teachers. Einngreichtes Manuscript.

Nicolai VON SCHROEDERS, FAU Erlangen-Nürnberg

Abhängigkeiten zwischen typischen Fehlern bei einer Rechenschwäche in der Mitte des 2. Schuljahres

Im Jahr 2011 haben Schipper und Wartha am Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld die computergestützte Diagnostik BIRTE 2 entwickelt und veröffentlich. Basierend auf der Normierungsstichprobe dieser Diagnostik wird untersucht, ob sich zwischen den Fehleingaben und den sich daraus abzuleitenden Fehlertypen bzw. Fehlstrategien (kurz Fehler) Abhängigkeiten erkennen lassen. Diese spezifischen Fehler sind Indikatoren für Hauptsymptome einer sich entwickelnden Rechenschwäche

(SCHIPPER et. al., 2011). Im Hinblick auf eine detailliertere Diagnose einer Rechenschwäche ist nun der Ausgangspunkt die Kodierung und Zuordnung von spezifischen Fehlern und nicht mehr allein die Identifizierung von richtigen und falschen Lösungen. Es gilt also, zu Beginn das qualitative Merkmal Rechenschwäche zu operationalisieren und mit Hilfe einer Latent Class Analyse Gruppen mit annähernd gleichem Antwortverhalten zu identifizieren. Der Zusammenhang zwischen diesen Gruppen zeigt die Abhängigkeiten zwischen den Fehlertypen auf.

Ergebnisanalyse und Aufgabenauswahl

In einem ersten Schritt werden die Eingaben zu 145 Aufgaben aus 13 Modulen, die die arithmetische Kompetenz in der Mitte des 2. Schuljahres messen, von über 2000 SchülerInnen hinsichtlich spezifischer Fehleingaben, die sich unter anderem Zählfehlern, Zahlendrehern oder Ziffernstrategiefehlern zuordnen lassen, analysiert.

56	Zahlendreher im 1. und 2. Summanden (B), z1e1 + e1 Fehler (I)
57	ziffernweise z1 + z2 und e1 oder e2 (I), Zahlendreher im Ergebnis (B)
57	unvollstaendige Operation (H), Zahlendreher im Ergebnis (B)
58	Hilfsaufgabe runde auf vollen Zehner (H), Zahlendreher im Ergebnis (B)
67	ziffernweise z1 + z2 und e1 oder e2 (I), Zahlendreher im Ergebnis (B)
68	Zahlendreher im 2. Summanden (B), z2e2 + e2 Fehler (I)
68	Zahlendreher im 1. und 2. Summanden (B), z2e2 + e2 Fehler (I)
83	Zahlendreher im 1. Summanden (B), Kippfehler bei Hilfsaufgabe runde ab auf vollen Zehner (G)
85	Zahlendreher im 2. Summanden (B), Hilfsaufgabe runde ab auf vollen Zehner (H)
90	Zahlendreher im 2. Summanden (B), -10 +1 Fehler (D)
93	Zahlendreher im 1. Summanden (B), ziffernweise z1 + z2 und e1 oder e2 (I)

Abb. 1: Auszug möglicher Kombinationsfehler für die Aufgaben 35+46

Als Grundlage der weiteren Analyse dient eine Datenbasis aus allen möglichen Fehleingaben der zugehörigen Aufgaben. Die Fehleingaben werden automatisiert generiert und auch die Kombinationen von zwei Fehlertypen werden zugelassen. Für zum Beispiel die Additionsaufgabe 35 + 46 (siehe Abb. 1) ergeben sich dadurch theoretisch 48 mögliche Fehleingaben. Die Fehleingaben lassen sich dabei in direkte Fehler – bestehend aus genau ei-

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2016 (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

nem Fehlertyp - und kombinierte Fehler unterscheiden. Ein Abgleich der theoretisch möglichen und der eingegebenen Werte aus der Normierungsstichprobe zeigt, welchen Anteil an den Eingaben die direkten Fehler haben und mit welchem Vielfachen (Vergrößerungsfaktor) sich dieser Anteil verändert, wenn zusätzlich noch die kombinierten Fehler betrachtet werden (siehe Abb. 2).

	16+8 ZE+E mit ZÜ RA01	33+9 ZE+E mit ZÜ RA03	51+28 ZE+ZE ohne ZÜ RA06	53+17 ZE+ZE=Z RA09	35+46 ZE+ZE mit ZÜ RA10
Zahlendreher (direkt)	1,17%	2,99%	1,17%	0,05%	0,70%
Zahlendreher (komb.)	2,52%	4,11%	5,69%	7,16%	6,87%
Vergrößerungsfaktor	**2,2**	**1,4**	**4,9**	**143,2**	**9,8**
Zählfehler (direkt)	4,52%	7,10%	4,11%	10,80%	12,62%
Zählfehler (komb.)	6,75%	8,51%	5,69%	14,21%	19,90%
Vergrößerungsfaktor	**1,5**	**1,2**	**1,4**	**1,3**	**1,6**
Ziffernstrategiefehler (direkt)	4,05%	1,99%	3,93%	9,68%	10,45%
Ziffernstrategiefehler (komb.)	6,63%	6,04%	9,04%	14,38%	13,85%
Vergrößerungsfaktor	**1,6**	**3,0**	**2,3**	**1,5**	**1,3**

Abb. 2: Eingabeanalyse einiger Additionsaufgaben

Es fällt auf, dass die direkten Fehler, wenn diese tatsächlich so zustanden gekommen und nicht aus einer Kombination anderer Fehlertypen entstanden sind, mit nur einem geringen Anteil in den Eingaben vorhanden sind. Zählfehler und Ziffernstrategiefehler tauchen dabei deutlich häufiger auf als Zahlendreher, weil es für diese Art von Fehlern auch mehr Varianten gibt. Eine Aufgabe mit einem großen Anteil direkter Fehler und einem kleinen Vergrößerungsfaktor, deutet darauf hin, dass diese Aufgabe SchülerInnen mit einer Tendenz zu einer Rechenschwäche auch dazu verleitet, einen spezifischen Fehler oder eine Fehlstrategie einzugeben.

Latent Class Analyse und Ausprägungen der Fehlertypen

Eine Latent Class Analyse (LCA, vgl. ROST, 2004) für z.B. ausgewählte Additionsaufgaben mit einem Fokus auf Zahlendreher liefert ein Ergebnis mit insgesamt 4 Gruppen, die hinsichtlich der Lösung der Aufgaben unterschiedliche Muster aufweisen.

	Aufg. 1: 16 + 4		Aufg. 3: 33 + 9		Aufg. 6: 51 + 28		Aufg.10: 35 + 46	
	k. ZD	ZD	k. ZD	ZD	k. ZD	ZD	k. ZD	ZD
ZD1:	0.9299	0.0701	0.9242	0.0758	0.7341	0.2659	0.6823	0.3177
ZD2:	0.7495	0.2505	0.8797	0.1203	0.0001	0.9999	0.0000	1.0000
ZD3:	0.9888	0.0112	0.9759	0.0241	0.9885	0.0115	0.9795	0.0205
ZD4:	0.3239	0.6761	0.0000	1.0000	0.5126	0.4874	0.8669	0.1331
	ZD1: 9,95%		ZD2: 0,46%		ZD3: 88,72%		ZD4: 0,87%	

Abb. 3: Auszug einer Zahlendreher-LCA zur Addition, 1728 Datensätze, 4 von 8 Aufgaben

Es wird deutlich, dass die vierte Gruppe (ZD4) mit einem Anteil von 0,87% an der gesamten Stichprobe eine starke Tendenz aufweist, sowohl bei der Aufgabe 1 als auch bei der Aufgabe 3 einen Zahlendreher zu erzeugen. Wird ein Blick in die Auswertungsergebnisse der Normierungsstichprobe geworfen, zeigt sich, dass diese Gruppe vor allem Zahlendreher gepaart mit einem Zählfehler (Kombinationsfehler) produzieren. Die zweite Gruppe (ZD2), die Schwierigkeiten mit der Aufgabe 6 und 10 aufweisen, hingegen tendiert zu einem direkten Zahlendreher.

Bei einer LCA mit denselben Aufgaben aber unter Berücksichtigung einer Zählfehlerproblematik ergibt sich folgendes Bild.

Aufg. 1: 16 + 4	k. ZF	ZF	Aufg. 3: 33 + 9	k. ZF	ZF	Aufg. 6: 51 + 28	k. ZF	ZF	Aufg. 10: 35 + 46	k. ZF	ZF
ZF1:	**0.8885**	0.1115	ZF1:	**0.8659**	0.1341	ZF1:	**0.9193**	0.0807	ZF1:	**0.9193**	0.0807
ZF2:	**0.9970**	0.0030	ZF2:	**0.9720**	0.0280	ZF2:	**0.9999**	0.0001	ZF2:	**0.9058**	0.0942
ZF3:	**0.9475**	0.0525	ZF3:	**0.7967**	0.2033	ZF3:	**0.0003**	**0.9997**	ZF3:	**0.8339**	0.1661
ZF4:	**0.8747**	0.1253	ZF4:	**0.9098**	0.0902	ZF4:	**0.9448**	0.0552	ZF4:	**0.2072**	**0.7928**

ZF1: 29,57% ZF2: 54,28% ZF3: 2,43% ZF4: 13,72%

Abb. 4: Auszug einer Zählfehler-LCA zur Addition, 1728 Datensätze, 4 von 8 Aufgaben

Die Gruppe ZF3 zeigt deutliche Schwierigkeiten bei der Aufgabe 51+28, während die vierte Gruppe vor allem die Aufgabe 35+46 (ZE+ZE mit Zehnerübergang) mit einem Zählfehler zu lösen scheint. Hierbei ist allerdings zu beachten, dass vielleicht auch die dritte Gruppe mit der Aufgabe 10 Probleme haben könnte, diese sich aber nicht mehr so zählfehlerspezifisch zeigen, weil die Aufgabe 10 relativ spät in der Sequenz der Aufgaben auftritt und damit vor allem der Anteil unspezifischer Lösungen, das sind Lösungen die keinem besonderem Fehlertyp zuzuordnen sind, zunimmt.

Abhängigkeiten zwischen den Fehlern

Interessant ist nun die Frage, wo sich die Mitglieder der Gruppen aus der Zahlendreher-LCA in den Gruppen der Zählfehler-LCA wiederfinden.

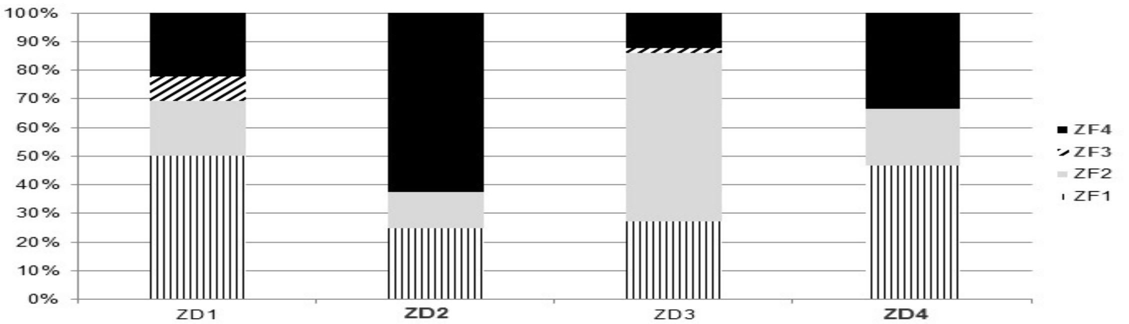


Abb. 5: Verteilung der einzelnen ZF-Gruppen auf die ZD-Gruppen

Es zeigt sich, dass die SchülerInnen aus der ZD2-Gruppe, die die Zahlendreher nicht in Kombination mit Zählfehlern macht, zu 62,5% auch zur ZF4-Gruppe gehören, die einen Zählfehler bei der Aufgabe 35+46 generiert. Die ZD4-Gruppe, die schon dadurch aufgefallen ist, dass sie tendenziell einen Zahlendreher in Kombination mit einem Zählfehler eingibt, gehört zu 33,33% auch zur ZF4-Gruppe. Auffällig ist für beide Gruppen, dass kein Vertreter – zumindest für diese Aufgabenauswahl – auch in der Gruppe ZF3 vertreten sind.

Deutlich wird, dass alle Vertreter der Fallgruppen, die sich aus der Zahlendreher-LCA ergeben, sich auch in den verschiedenen Gruppen aus der Zählfehler-LCA wiederfinden. Dies stützt eine erste These, dass eine Zahlendreherproblematik nicht zwangsweise mit einer Zählfehlerproblematik einhergehen muss.

Interessant ist aber auch, wie sich Vertreter einer LCA-Fallgruppenanalyse für Subtraktionsaufgaben (ZF-S) in der von Additionsaufgaben (ZF-A) – beide Analysen unter Berücksichtigung einer Zählfehlerproblematik – wiederfinden.

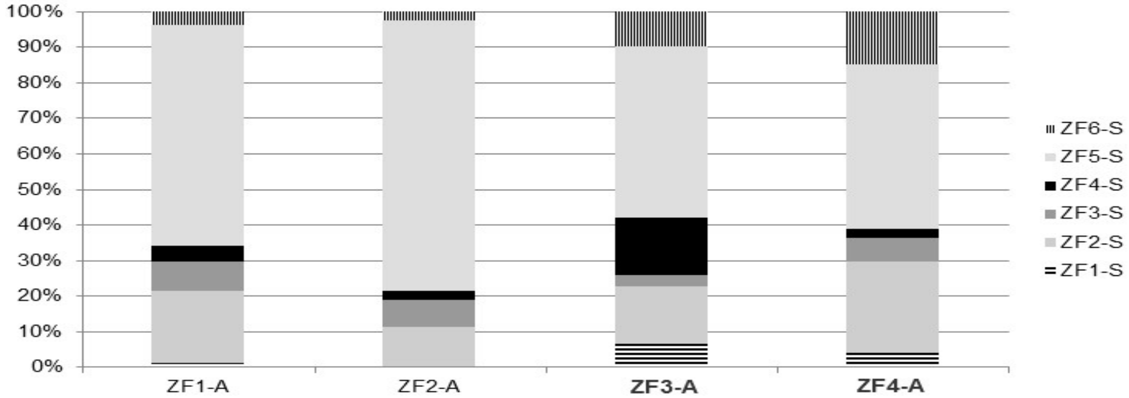


Abb. 6: Verteilung der einzelnen ZF-Subtraktions-Gruppen auf die ZF-Additions-Gruppen

Nicht nur, dass sich bei einer LCA-Analyse sechs Gruppen mit unterschiedlichem Antwortverhalten herauskristallisieren – dabei sind die auffälligen Gruppen (ZF1-S, ZF4-S und ZF6-S) in schwarz und schwarzgestreift gekennzeichnet, deutlich wird, dass sowohl innerhalb der Gruppen (ZF3-A und ZF4-A), die schon bei der Addition Zählfehler eingeben, auch bei den unproblematischen Gruppen (ZF1-A und ZF2-A) ein gewisser Anteil (ca. 10% und 5%) zu den auffälligen Gruppen der Zählfehler-LCA für die Subtraktion gehören. Dieser geringe Anteil spiegelt sich dann wiederum umgekehrt in Anteilen von knapp über 40% in ZF1-S bis zu annähern 80% in ZF4-S wieder. Damit kann auch eine zweite These formuliert werden, dass SchülerInnen, die bei der Addition noch keine bestimmten Symptome für einen Zählfehler zeigen, bei der Subtraktion aber auffällig werden können.

Literatur

Rost, J.(2004*). Lehrbuch Testtheorie und Testkonstruktion*. Bern: Huber.

Schipper, W., Wartha, S., von Schroeders, N. (2011). *BIRTE 2, Rechentest für das zweite Schuljahr, Handbuch zur Diagnostik*. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.

Luisa WAGNER, Potsdam, Antje EHLERT, Potsdam, Annemarie FRITZ, Essen

Förderung arithmetischer Basiskompetenzen in höheren Grundschulklassen

Im Gegensatz zu vergangenen PISA-Untersuchungen konnten im letzten PISA-Befund erfreuliche Leistungsanstiege der deutschen Schülerinnen und Schüler im Bereich Mathematik festgestellt werden. Auch der Anteil derer, die bereits auf dem mathematischen Grundkompetenzniveau Schwierigkeiten aufweisen, konnte verringert werden (Prenzel et al. 2013). Trotzdem bleibt ein mit ca. 20% immer noch zu hoher Anteil von Schülerinnen und Schülern, die am Ende der Schulzeit nicht über das mathematische Mindestkompetenzniveau verfügen (Frey et al. 2010).

Theoretischer Hintergrund

Verschiedene Studien der letzten Jahre zeigen, dass die Grundlagen für einen erfolgreichen mathematischen Bildungsweg bereits in der Grundschule gelegt werden. So konnten arithmetische Bereiche identifiziert werden, deren Verständnis als Voraussetzung für eine fundierte Wissensbasis unerlässlich ist:

- Teil-Teil-Ganzes-Konzept (Ehlert et al. 2013; Humbach 2008; Schmidt 2009)
- Multiplikation und Division in unterschiedlichen Kontexten (Humbach 2008; Moser Opitz 2007)
- Verständnis des Stellenwertsystems (Moser Opitz 2007; Humbach 2008)
- Modellieren von Textaufgaben (Humbach 2008; Moser Opitz 2007)

Gerade das Teil-Teil-Ganzes-Konzept (TTG-Konzept) bildet die Grundlage für verschiedenste mathematische Verstehensprozesse. Daher wird es im Folgenden genauer betrachtet.

Das Teil-Teil-Ganzes-Konzept bezeichnet das Verständnis, dass sich eine Gesamtmenge aus verschiedenen Teilmengen zusammensetzt. Die Gesamtmenge bleibt dabei immer erhalten. So kann beispielsweise das Zahlentripel 13-6-7 ebenfalls in dieser Struktur dargestellt werden: 13 stellt das Ganze dar, 6 und 7 sind die Teile (Resnick 1983). Durch das Verstehen dieser Zahlbeziehungen ist es den Kindern möglich, Additions- und Subtraktionsaufgaben auf verschiedenen Wegen zu lösen. So können beispielsweise Teilmengen noch einmal unterteilt und dadurch flexible Rechenstrategien, wie das schrittweise Rechnen, genutzt werden (Fritz & Ricken 2008). Dieses flexible

Rechnen ist besonders dann notwendig, wenn Additions- oder Subtraktionsaufgaben gelöst werden sollen, bei denen nicht die Gesamtmenge, sondern die Start- oder Austauschmenge gesucht ist.

Gesamtmenge gesucht:	6 + 7 = ?
Austauschmenge gesucht:	6 + ? = 13
Startmenge gesucht:	? + 7 = 13

Bei gesuchter Startmenge ergibt sich eine zusätzliche Schwierigkeit: Obwohl die gegebene Aufgabe augenscheinlich die Addition beinhaltet, kann das Ergebnis nur durch das Umstellen der Aufgabe und die Verwendung der Subtraktion gefunden werden. Dafür ist es wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler das Konzept der Gegenläufigkeit der beiden Operationen verinnerlicht haben (Fritz & Ricken 2008). Somit stellen Aufgaben mit gesuchter Startmenge eine besondere Herausforderung dar.

Projektbeschreibung

Obwohl die genannten Teilbereiche und im Besonderen das TTG-Konzept als grundlegend für einen erfolgreichen mathematischen Bildungsweg eingestuft werden konnten, gibt es insbesondere für die Klassenstufen 4 - 6 nur sehr wenige Förderangebote, die auf diese Basiskompetenzen abzielen und in den Unterricht integriert werden können. Die Förderung wird häufig außerschulischen Einrichtungen überlassen (Schipper 2002).

Ziel des vorgestellten Dissertationsprojektes soll die Entwicklung eines adaptiven internetbasierten Förderprogramms für die Klassenstufen 4 – 6 sein, das auf diagnostische Befunde zurückgreift, ein individuelles Förderprogramm für jedes Kind ausgibt und somit Basiskompetenzen vermittelt. Um dies zu erreichen, ist eine fundierte Diagnostik nötig, die sowohl zu Beginn als auch begleitend während der Förderung stattfinden muss.

Studiendesign

In der vorgestellten ersten Studie wurden Aufgabenformate zum mathematischen Teilbereich des TTG-Konzepts entwickelt. Dabei wurden theoriegeleitet fünf schwierigkeitserhöhende Aufgabenmerkmale (z.B. gesuchte Menge, Zahlenraum etc.) operationalisiert und in einer querschnittlich angelegten Studie in den Klassenstufen 4 und 5 in einem Multimatrix-Design mit 168 Aufgaben systematisch überprüft. Aus diesen Daten sollen verschiedene schwierigkeitserhöhende Merkmale für die Förderung untersucht werden. Im Folgenden werden ausschließlich Ziffernaufgaben betrachtet. Alle Aufgaben sollen das TTG-Konzept fokussieren. Daher wurde darauf geachtet, dass in Abhängigkeit von dem hohen Zahlenraum (100-1000) eine relativ geringe Konfundierung mit dem Stellenwertverständnis vorliegt. Die Aufgaben enthalten keine Zehner- oder Hunderterübergänge. Sicherlich muss ein

Grundverständnis des Stellenwertsystems im Zahlenraum bis 1000 vorliegen, allerdings sind keine flexiblen Bündelungs- und Entbündelungskompetenzen in den Stellenwerten für eine erfolgreiche Aufgabenbearbeitung erforderlich. Die Aufgaben wurden von 746 Schülerinnen und Schülern gelöst.

Gesuchte Menge	Beispiel Ziffernaufgabe
Gesamtmenge	857 - 32 = ?
Austauschmenge	899 - ? = 892
Startmenge	? – 36 = 161

Tab. 1: Beispiele eingesetzter Aufgaben in Abhängigkeit der TTG-Struktur

Ausgewählte Ergebnisse

Eines der angenommenen schwierigkeitserhöhenden Merkmale ist die gesuchte Menge. Wie bereits erläutert, stellen Aufgaben mit gesuchter Austausch- oder Startmenge besondere Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler. Um dies empirisch zu überprüfen, wurden die Aufgaben zunächst raschskaliert. Dadurch lassen sich die Fähigkeit der Person und die Schwierigkeit einer Aufgabe auf einer gemeinsamen Skala abbilden. (Boone 2014). Für die weiteren Berechnungen wurden die Itemschwierigkeiten extrahiert und miteinander verglichen. Dafür wurden die Schwierigkeiten sämtlicher Aufgaben gleicher TTG-Struktur gemittelt.

Beim Vergleich der gemittelten Itemschwierigkeiten durch eine Post Hoc Testung konnten signifikante Unterschiede mit $p<.001$ zwischen den drei TTG-Strukturaufgaben (Gesamt-, Austausch-, Startmenge) festgestellt werden. Aus den Mittelwerten ergibt sich, dass die Aufgaben mit gesuchter Gesamtmenge am leichtesten (kleinster Schwierigkeitswert = -0.78) und die Aufgaben mit gesuchter Startmenge am schwersten (größter Schwierigkeitswert = 0.95) zu berechnen sind.

Gesuchte Menge	N	Mittelwert	SD
Gesamtmenge	26	-0.78	0.89
Austauschmenge	28	-0.003	0.77
Startmenge	27	0.95	0.97

Tab. 2: Übersicht Mittelwertvergleich

Fazit

Durch die Analyse der erhobenen Daten konnte bestätigt werden, dass die gesuchte Menge ein wichtiges schwierigkeitserhöhendes Merkmal von Mathematikaufgaben auch im Zahlenraum bis 1000 darstellt. Aufgaben, bei denen die Gesamtmenge gesucht ist, fallen signifikant leichter als Aufgaben mit gesuchter Austauschmenge oder Startmenge. Aufgaben mit gesuchter Startmenge weisen den höchsten Schwierigkeitsgrad auf. Das Verständnis der TTG-Struktur ist somit grundlegend für das erfolgreiche Lösen mathematischer Aufgaben. Für das Erstellen des adaptiven Trainingsprogramms bedeutet dies, dass das TTG-Konzept als Leitkonzept genutzt werden kann. Weitere schwierigkeitserhöhende Aufgabenmerkmale werden darauf aufbauend in die Förderung integriert.

Literatur

Boone, W. J., Staver, J. R., Yale, M. S. (2014). *Rasch Analysis in the Human Sciences.* Dordrech: Springer.

Ehlert, A., Fritz, A., Arndt, D. & Leutner, D. (2013). *Arithmetische Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern in den Klassen 5 bis 7 der Sekundarstufe.* Journal für Mathematik-Didaktik 34 (2), 237-263.

Frey, A., Heinze, A., Mildner, D., Hochweber, J. & Asseburg, R. (2010). Mathematische Kompetenz von PISA 2003 – PISA 2009. In: Klieme, E., Artelt, C., Hartig, J., Köller, O., Prenzel, M., Schneider, W. & Stanat, P. (Hrsg.): *PISA 2009. Bilanz nach einem Jahrzehnt*. 153-176. Münster: Waxmann.

Fritz, A., Ricken, G. (2008). *Rechenschwäche*. München: Reinhardt.

Humbach, M. (2008). *Arithmetische Basiskompetenzen in der Klasse 10.* Berlin: Dr. Köster.

Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche – Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern*. Bern: Haupt.

Prenzel, M., Sälzer, Chr., Klieme, E., Köller, O. (Hrsg.) (2013). *PISA 2012. Fortschritte und Herausforderungen in Deutschland*. Münster: Waxmann.

Resnick, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. In H. P. Ginsburg (Hrsg.), *The development of mathematical thinking*. 109-151. New York: Academic Press.

Schipper, W. (2002): *Das Dyskalkulie-Syndrom*. In: Die Grundschulzeitschrift. Heft 158, 48-51.

Schmidt, S. (2009). Arithmetische Kenntnisse am Schulanfang. In: Fritz, A., Ricken, G. & Schmidt, S. (Hrsg.): *Handbuch Rechenschwäche*. 77-97. Weinheim: Beltz.

Stern, E. (1998*). Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter*. Lengerich: Pabst.

Hans WALSER, Frauenfeld

Umwörter

Zusammenfassung: Das treibt uns alle um. Umwörter sind Ausdrücke oder Formulierungen, die auf sich selber zurückkommen. Es werden einige Beispiele aus dem Unterrichtsalltag diskutiert. Zur Sprache kommen Verspätungen, Tautologien, der Umfang, Lern-Umgebungen und zyklische Hackordnungen.

1. Umwörter

In Ulm und um Ulm und um Ulm herum

Zunächst können einfach Wörter mit der Vorsilbe um- als *Umwörter* bezeichnet werden. Dann aber auch Wörter und Ausdrücke mit einer zyklischen Bedeutung, Zirkelschlüsse oder Tautologien.

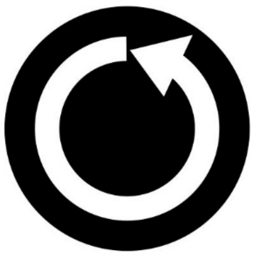


Abb. 1: Umwörter

2. Beispiele

(1) *Der EC 8 nach Zürich erhält 21 Minuten Verspätung. Grund dafür sind Verzögerungen im Betriebsablauf.*

Zunächst: Pünktlichkeit ist eine Kardinaltugend. Verspätungen werden auf die Minute genau angegeben. Nachdem die Kardinaltugend der Pünktlichkeit auf der Basisebene des Bahnbetriebes nicht mehr funktioniert, wird sie auf die Metaebene der Beschreibung der Unpünktlichkeit verlagert. So entsteht ein Turmbau zu Babel.

Die angebliche Begründung mit den Verzögerungen im Betriebsablauf ist nur eine Umschreibung des Basisbegriffs Verspätung. Durch die breitere Formulierung soll wohl der Eindruck einer inhaltlichen Begründung entstehen.

(2) Winkelbegriff: »*two lines meeting at a point with an angular relation between them*« (Mitchelmore und White, 1998, S. 5).

Für einen außenstehenden Leser kann diese Formulierung als Tautologie erscheinen.

(3) *Wie lautet der Fachausdruck für Fachausdruck?* — Als korrekte Antworten sind Fachausdruck und Terminus technicus zugelassen.

(4) *Hilfe zur Selbsthilfe*. Weiter keine Hilfe. Also keine Hilfe. Hilfe zur Selbsthilfe.

(5) *Lernen lernen*: Wer lernen kann, braucht's nicht mehr zu lernen. Wer's nicht kann, kann's auch nicht lernen.

(6) *Wovon man nicht sprechen kann, darüber muss man schweigen* (Wittgenstein 1922, Schlusssatz).

3. Umfang

An einem Wochenende im Mathematikum in Gießen studierte ich die Relation zwischen den Besuchern und den Exponaten („Museumsblick“).

Ein Exponat besteht aus einem Rad mit einem Stift am Rand. Dieser fährt beim Abrollen des Rades über die Kontur einer Zykloide (Abb. 2). Ein etwas angejahrter Mann fuhr mit dem Finger die Kontur der Zykloide entlang und erklärte seiner Begleiterin, das sei der Weg eines Kreispunktes bei einer Umdrehung, also der Umfang des Kreises. — Es ist schwer, dieser Argumentation zu begegnen. Als ich dann endlich meine Gedanken geordnet hatte, waren die beiden verschwunden. Man soll nie über den eigenen Unterricht reflektieren, sonst verliert man den Anschluss an seine Schüler.

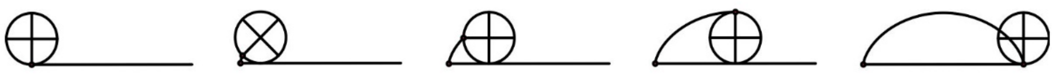


Abb. 2: Zykloide

Nun ist es so, dass die Länge eines Zykloidenbogens bereits von Christopher Wren (1632-1723) berechnet wurde: Beim Abrollen eines Rades mit dem Radius r ergibt sich für den Zykloidenbogen die Länge $8r$. Dies ist ein bemerkenswertes ganzzahliges Resultat, das die irrationale Kreiszahl nicht enthält (Abb. 3).

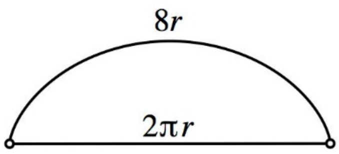


Abb. 3: Längenverhältnisse

Die „richtige“ Umfanglänge erscheint am Boden als abgerollte Strecke.

Den Umfang erhalten wir gemäß Schuldefinition als Weglänge eines Kreispunktes bei einer Umdrehung, wenn das drehende Rad nicht rollt. Das ist die Situation, in der man Schneeketten montieren muss, um weiterzukommen.

4. Weg und Umweg

Weg und Umweg werden als Gegensatzpaar verstanden, das eine definiert sich durch das andere. Die Abbildung 3 ist eine Illustration des Satzes, dass der Umweg länger ist als der direkte Weg. Als Argument für diesen Satz wird oft vorgebracht, dass der direkte Weg eben der kürzeste Weg ist und daher kürzer als jeder Umweg. Es dürfte schwerfallen, Schülerinnen und Schüler zu einem Beweis dieses Sachverhaltes zu motivieren.

5. Der direkte Weg

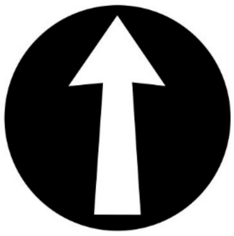


Abb. 4: Vorgeschriebene Fahrtrichtung: geradeaus

Immer der Nase nach.

... so geh hübsch sittsam und lauf nicht vom Wege ab! (Grimm 1812)

La línia recta és creació de l'home; la línia corba, de Déu. (Antoni Gaudí)

Keine Seitenkrümmung, geodätische Linie.

6. Lern-Umgebung

Abb. 5: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) soll gesagt haben, er habe jeweils beim Erwachen so viele Ideen dass der Tag in der Regel nicht ausreiche, um alle Ideen umzusetzen. Stellen wir uns nun vor, Leibniz wäre gleich beim Erwachen in eine Lernumgebung eingebüxt worden.

Die beste Lern-Umgebung ist die Umgebung.

A mind lively and at ease, can do with seeing nothing, and can see nothing that does not answer. (Jane Austen, 1815/16, Volume 2, Chapter 9).

7. Schere – Stein – Papier

Die englische Sprechweise ist *Rock – Paper – Scissors*. Die Reihenfolge ist anders, die zyklische Reihenfolge aber gleich.

Abb. 6: Kreisverkehr

Der positive Drehsinn wird in der Regel als *Gegenuhrzeigersinn* serviert. Wegen der Umkehrung „*Gegen-*„ ist das eine schlechte Eselsbrücke. Der Esel muss rückwärts über die Brücke gehen. Besser ist (in Ländern mit Rechtsverkehr) eine Anlehnung an den Kreisverkehr.

Unterlagen: www.walser-h-m.ch/hans/Vortraege/Vortrag101/index.html

Literatur

Austen, Jane (1815/16). Emma.

Grimm, Jakob und Wilhelm (1812): Kinder- und Hausmärchen, Band I.

Mitchelmore, M. und White, P. (1998): Development of Angle Concepts: A Framework for Research. In: Mathematics Education Research Journal 10.3, S. 4–27.

Wittgenstein, Ludwig (1922): Tractatus logico-philosophicus. London: Kegan Paul, Trench, Trubner.

Candy WALTER, Hildesheim

Eine empirische Untersuchung über die Planung und Durchführung statistischer Datenerhebungen von Lernenden der 9. und 10. Schuljahrgänge

Die in den nationalen Bildungsstandards konkretisierten Kompetenzen stellen unter der Leitidee Daten und Zufall den Planungaspekt deutlich heraus. Die Planung und damit inbegriffene Entscheidungen sind beim Erfassen und Auswerten statistischer Daten somit ein verbindlich zu unterrichtende Inhalt. Einen wichtigen für den Unterricht relevanten Aspekt stellt das Wissen über Schülerfehler und -schwierigkeiten dar. Da bis heute weder national noch international kaum empirische gehaltvolle Resultate (mit mathematikdidaktischem Hintergrund) über Schülerschwierigkeiten, Fehlern und Lernstrategien beim Planen und Durchführen statistischer Datenerhebungen bekannt sind, werden diese im Rahmen der vorgestellten Arbeit in den Blick genommen. Nationale Ansätze findet man z.B. bei LINDMEIER & REISS (2014, S. 52); International bspw. bei WATSON & MORITZ (2000) sowie SHAUGHNESSY (2007). Den Rahmen der Arbeit bildet die empirische Untersuchung von Schwierigkeiten und Fehlern (inkl. der Ursachen, Handlungen und Konsequenzen), die im Bearbeitungsprozess während der Planen und Durchführen statistischer Datenerhebungen bei Schülerinnen und Schülern auftreten. Nachfolgend sollen die im Rahmen der Arbeit verwendeten Definitionen für Schwierigkeiten und Fehler, die im Kontext der Planung und Durchführung einer statistischen Datenerhebung auftreten, genauer vorgestellt werden. Die genaue Herleitung kann jedoch aus pragmatischen hier nicht erfolgen, sondern nur beleuchtet werden. Der Artikel schließt mit einer knappen Beschreibung des vorgenommen Schülersamplings und der für die Studie verwendeten Aufgabentypen.

Schwierigkeitsbegriff für den Bereich der stat. Planung und Datenerhebung

Für eine Definition des Schwierigkeitsbegriffs spielen die individuelle Erfahrungen, Fähigkeiten und Kenntnisse von Individuen eine entschiedene Rolle. Eine gute Möglichkeit zu einer geeigneten Schwierigkeitsdefinition zu gelangen ist die, dass man versucht sie aus den verschiedenen Problemdefinitionen abzuleiten. LANGE hat in ihrer Dissertation eine solche Strategie verfolgt und so, über die dort jeweils vorhandenen Unterscheidungen zwischen Aufgaben und Problemen, den Begriff der Schwierigkeit geschickt definiert (Lange 2013, S. 24ff). Dieser Schwierigkeitsbegriff eignet sich auch für die im Rahmen der Arbeite vorgenommenen Schwierigkeitsanalyse. Wie definieren Schwierigkeiten im Sinne von Lange als *„Stellen „im Bearbeitungsprozess, in der rekonstruierbar ist, dass eine Person nichts oder etwas* *nicht selbstverständlich (im Sinne von nicht sicher, zweifelnd) ausführt und dabei auf nichts in der Aufgabesituation Anwendbares zurückgreifen möchte bzw. zurückgreifen kann […].“* (Lange 2013, S. 32) Schwierigkeiten im Bearbeitungsprozess machen sich bspw. dadurch kenntlich, dass eine Schülerin oder ein Schüler…

- für eine gewisse Zeit nichts ausführt oder etwas nicht selbstverständlich ausführt. Anzeichen: z.B. *nonverbale Signale* (Mimik, Gestik und Raumverhalten).
- Aussagen trifft wie: *ich weiß nicht, ob das stimmt, ich weiß nicht, wie wir das machen sollen*. (ebd., S. 31)

Die Äußerung der Schülerin Marie: *„Ich glaub nicht, dass man so viele Werte braucht, um zu sehen wie weit die springen […].“* lässt eine Schwierigkeit bei der Angabe eines geeigneten Versuchsumfangs erkennen. Stellen, die im Bearbeitungsprozess auf mögliche Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler hinweisen, lassen sich für gewöhnlich nur aus *Videomitschnitten* und die hierzu i.A. angefertigten *Transkriptionen* entnehmen. Während des Bearbeitungsprozesses liegen evtl. keine Schwierigkeiten vor, wenn…

- Handlungen, Strategien, Lösungsschemata etc. routinemäßig und/ oder sicher (ohne zu Zögern, ohne Zweifel etc.) ausgeführt werden.
- Aussagen wie *das kenn bzw. weiß ich, das ist kein Problem, das ist genauso wie bei…* etc. vorkommen.

Fehlerdefinition für den Bereich der stat. Planung und Datenerhebung

In der math. Didaktik wird oft die Definition von OSER (1999) verwendet u.a. HEINZE (2004), PREDIGER & WITTMANN (2009), STEUER (2014): *„Ein Fehler ist ein von der Norm abweichenden Sachverhalt (oder ein von der Norm abweichenden Prozesse) […]*. (Oser et. al 1999) Da OSER`s Fehlerdefinition bekannte (starre) Bezugssysteme bzw. Normen voraussetzt, ist sie für das Vorhaben – der im Rahmen dieser Studie anvisierten Fehlerdiagnose – eher unpassend, da den teilnehmenden Schülerinnen und Schüler das für die Studie entwickelte Planungs- und Entscheidungsmodell (siehe hierzu WALTER (2015, S. 980-982)) nicht geläufig ist. Eine Fehlerfeststellung setzt in diesem Sinne aber zwingend eine bekannte Norm voraus, da sonst eine Normabweichung – also ein möglicher Fehler – von den Schülerinnen oder Schülern nicht erkannt und entsprechend verbessert werden kann. Ähnlich problematisch – wie schon bei den Fehlerdefinitionen von MILLER et al. (1960) und GLOY (1978) – müssten auch bei der Definition von OSER richtig angewandte Lösungsverfahren, die zu korrekten Ergebnissen führen, aber von einer zuvor festgelegten Norm differieren, als Fehler markiert werden. Dementsprechend wären auch von einer Norm abweichende Umwege oder kontrastierende Strategien, wie alternative Lösungsverfahren, stets als Fehler anzusehen. Besser geeignet ist das Begriffsverständnis über Fehler von K. WINTER (2011, S. 36): „*Ergebnisse, die mathematisch korrekt sind, aber in ihrer Form nicht einem bspw. in curricularen Vorgaben verankerten Normalverfahren entsprechen […] werden nicht als Fehler betrachtet, sondern als Alternativen eines zu einem korrekten Ergebnis führenden Lösungsverfahrens.*“ Wie sieht nun eine Fehlerdefinition für die Studie aus? Da – im Gegensatz zur Schwierigkeit – eine geeignete Fehlerdefinition für die Planung und Durchführung statistischer Datenerhebung nicht vorliegt wurde im Rahmen Studie eine solche Definition theoretisch abgeleitet. Hierbei wurden zwei Aspekte berücksichtigt. Zum einen richtet sich das Fehlerverständnis an geeigneten Fehlerdefinitionen aus der Psychologie, der Pädagogik und der Mathematikdidaktik aus. Zum anderen wurde das bereits oben erwähnten Planungs- und Entscheidungsmodell berücksichtigt. Hierdurch gelang es Fehler sowohl während der Planungsphase und als auch während der Datenerhebung zu berücksichtigt. Für die Studie verwenden wir folglich die folgende Definition:

- Fehler sind von Personen begangene inadäquate oder dissonante Entscheidungen, die im Bearbeitungsprozess während der Vororientierung und Zielfestlegungen, der Maßnahmenspezifikation (Alternativenvermittlung) und der anschließenden Bewertung und Auswahl erfolgen.
- Während der statistischen Datenerhebung (Umsetzung und Wirkungskontrolle) sind Fehler von Personen vergessen, versehentlich falsch oder bewusst nicht ausgeführten einzelnen, notwendigen Maßnahmen (Handlungen).

Dementsprechend – und in Anlehnung an WINTER (2013) – sind *keine Schülerfehler*: Individuelle Umwege, die richtig sind, aber von einem festgelegten Normverfahren abweichen und zu einem hinreichend korrektem Resultat führen.

Schülersampling und Aufgabentypen

Das Vorgehen der Studie ist qualitativ ausgerichtet und erfolgt empirisch. Das *Sampling der Schülerinnen und Schüler* erfolgt im Raum Hannover und Hildesheim. Dort werden insgesamt 16 Schülerpaare aus 9ten und 10ten Schuljahrgänge per Zufallsziehung aus 16 verschiedenen Realschulen und Gymnasien bestimmt. Den Probandenpaaren werden vier verschiedene Aufgabentypen mit jeweils drei Unteraufgaben ausgeteilt, von denen die einzelnen Paare zwei Aufgabentypen ihrer Wahl bearbeiten sollen. Teilaufgabe a) verlangt – bezogen auf den Sachkontext – eine statistische Planung mit genauer Dokumentation. Teilaufgabe b) verlangt von den Lernenden eine kleine praktische Teilerhebung. Im letzten Aufgabenteil wird nach möglichen Planungsanpassungen gefragt. Unter Berücksichtigung der im Sinne von KLAFKI (1958) erwähnten Zugänglichkeit und dem geforderten interdisziplinären Arbeiten (KMK 2003, S. 3) wurde eine Aufgabe aus dem Bereich der *Naturwissenschaft (Biologie)* (Sprungweiten von Fröschen), zwei Aufgaben im Kontext der *Wirtschaft* (Medienausstattung, Mediennutzung) und eine Aufgabe im Feld der *Verkehrszählung* angesiedelt. Um die wesentliche Qualität der Aufgaben zu steigern, wurden folgende inhaltsbezogene und didaktische Merkmale beachtet: Die Aufgaben sollten möglichst *„pragmatisch"*, das bedeutet unter realen Bedingungen des Schulalltag umsetzbar sein. Ferner sollten die Aufgaben *verfügbar*, d. h. durch leicht zugängliches Material (z.B. Gegenstände, Quellen, Hilfsmittel etc.) bearbeitet werden können. Darüber hinaus sollten die Aufgaben möglichst *authentisch (glaubwürdig)*, *relevant* und *offen* sein.

Literatur

Heinze, A. (2004). Zum Umgang mit Fehlern im Unterrichtsgespräch der Sekundarstufe I - Theoretische Grundlegung, Methode und Ergebnisse einer Videostudie. In: Journal für Mathematikdidaktik (JMD), Heft 3/4, S. 221 – 244.

Lange, A. (2013). *Inhaltsanalytische Untersuchung zur Kooperation beim Bearbeiten mathematischer Problemaufgaben*, Waxmann.

Lindmeier, A. & Reiss, K. (2014). Wahrscheinlichkeitsvergleich und inferenzstatistisches Schließen Fähigkeiten von Kindern des 4. und 6. Schuljahrs bei Basisproblemen aus dem Bereich Daten und Zufall, mathematica didactica 37, S. 30-60.

Prediger, S. & Wittmann, G. (2009). Aus Fehlern lernen – (wie) ist das möglich?, In: Prediger, S. et al.: Falsch bringt weiter?! Mit Fehlern umgehen. Praxis der Mathematik in der Schule (PM), Heft 27, S.1-12.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistical learning and reasoning, In: LESTER, F. K. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*: *A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*, Bände 1-2, National Council of Teachers of Mathematics, IAP, S. 957-1010.

Walter, C. (2015). Planung und Erhebung statistischer Daten im Mathematikunterricht. In: Caluori, F. et al. (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht, S.271-272. WTM-Verlag, Münster, S. 980-984.

WINTER, K. (2011): *Entwicklung* von *Item-Distraktoren* mit *diagnostischem Potential* zur *individuellen Defizit*- und *Fehleranalyse*: *didaktische Überlegungen, empirische Untersuchungen* und *konzeptionelle Entwicklung* für ein *internetbasiertes Mathematik-Self-Assessment*. WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, Münster.

Beat WÄLTI, Bern

Produktives Spielen

Abstract

Natürliche Differenzierung ist mittlerweile in Lehrmitteln gut verankert: alle Mitglieder einer heterogenen Gruppe werden innerhalb einer Aufgabe herausgefordert. Für das Lehrwerk mathwelt (2017, Kl. 3 - 6), bietet sich auch mathematisches Spielen als Schlüssel zu Strukturen an. Zu den entwickelten Spielen zum gemeinsamen Lernen wurden Erwartungen bzw. Teilaufgaben für verschiedene Lernniveaus formuliert. Wir spielen drei dieser Spiele an und suchen darin Herausforderungen – auch für uns.

Mathwelt, Lehrmittel für die Klasse 3 – 6 (in Print)

In der Schweiz ist ein Lehrmittelprojekt für altersgemischtes Lernen in Vorbereitung. Ein wesentlicher Bestandteil des Lehrmittels sind Lernumgebungen, die für verschiedene Leistungsniveaus zugänglich sind. So enthält das Lehrmittel unter anderem:

- • 88 gemeinsame Lernanlässe (Lernumgebungen) für die Klassen 3 - 6
- • ca. 100 Aufgaben zum gemeinsamen Lernen für Klasse 3 & 4
- • ca. 100 Aufgaben zum gemeinsamen Lernen für Klasse 5 & 6
- • ca. 80 Spiele (in der Regel Neuentwicklungen)

In diesem Beitrag finden Sie 3 Spiele für die Klassen 3 – 6. Im Zentrum steht die Stärkung des Bewusstseins für Stellenwerte.

Weshalb ‚produktives Spielen?

- Es müssen maximal n/2 Spielgruppen betreut werden anstelle von n Lernenden.
- Lernende tauschen sich aus, oft auch ohne dass dieser angeregt werden muss
- Produkte (Protokolle), ermöglichen die Rekonstruktion von Gedankengängen
- Spiele provozieren eine erhöhte Bereitschaft, sich auch ‚strategisch' auf eine Struktur einzulassen
- In der Regel wenig Korrekturaufwand

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

– Gute Spiele differenzieren natürlich

– Gute Spiele stützen und (oder) strukturiertes mathematische Sachverhalte.

Es gilt allerdings zu beachten, dass

– Nicht alle spannenden Spiele mathematisch gehaltvoll sind.

– Spielregeln schnell einmal zum Lernstoff werden, es gilt daher, sie einfach zu halten

– Spiele weniger erklärt und vermehrt angespielt werden sollten.

– Spiele schnell einmal in Aktivismus ausarten und vom Wesentlichen ablenken.

– Produktive Spiele einer Auswertung bedürfen.

– Die Auswertung sich in der Regel auf Protokolle stützen sollte, die deshalb eingefordert werden müssen.

1. Spielvorschlag: Wer legt die Nähere Zahl?

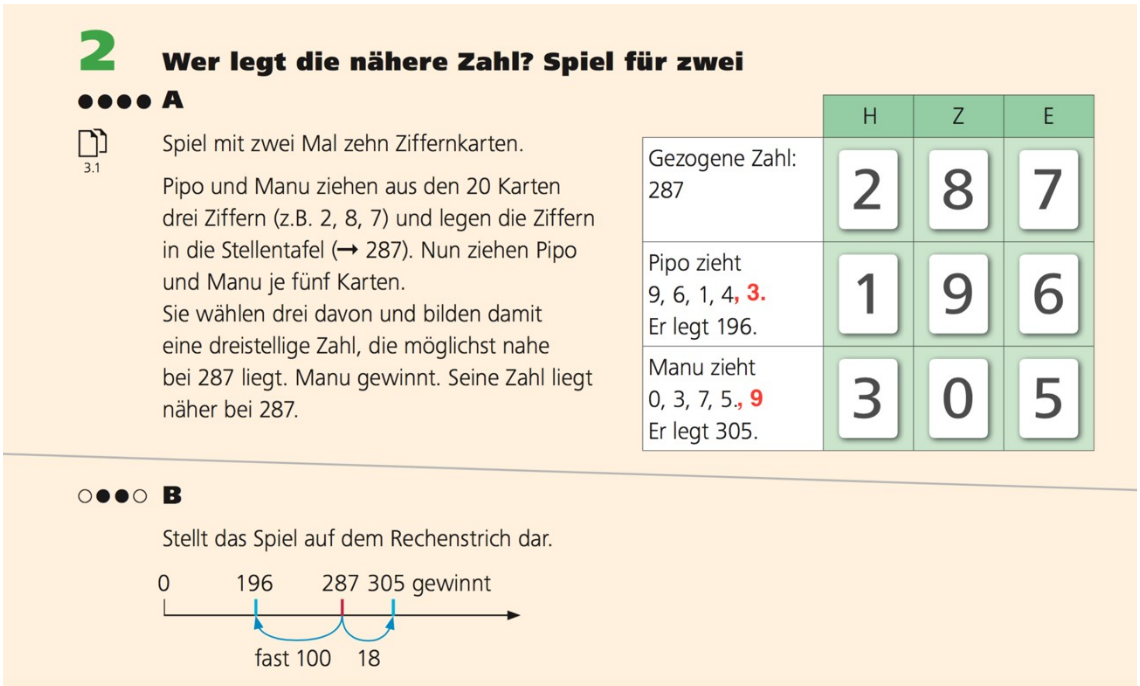


Abbildung 1: Wer legt die nähere Zahl (Autorenteam mathwelt (in Print), Themenbuch.

Fachliche Herausforderungen in diesem Spiel könnten sein:

– Gibt es auch unentschiedene Spielstände (gleich weit weg)?

- Bei welchen Spielsituationen kann man aufgrund der Ziffernkarten - bei zwei kompetenten Spielenden - auf einen Blick entscheiden, wer gewinnt?
- Es wird nur die erste Ziffer in die Stellenwertetafel gelegt: Wann wissen wir, wer gewinnt?

2. Spielvorschlag: Wer legt den letzten Geldschein?

2 **Wer legt den letzten Geldschein?**

●●●● **A**

Spielgeld für 2 Spielende:

– 3 Geldscheine zu Fr. 10.–
– 3 Geldscheine zu Fr. 20.–
– 3 Geldscheine zu Fr. 50.–
– 3 Geldscheine zu Fr. 100.–
– 3 Geldscheine zu Fr. 200.–

Iwan bestimmt zuerst die Zielsumme.
Sie beträgt maximal 1000 Franken und ist eine Zehnerzahl.

Kai darf bestimmen, wer die erste Note zieht.

Die beiden Spielenden ziehen nun abwechslungsweise einen der Geldscheine und legen den Schein auf den Stapel. Die Summe der Scheine auf dem Stapel wird laufend addiert.

Beispiel:
Iwan bestimmt den Zielbetrag: 130 Franken
Kai entscheidet, dass er beginnt.
Sie führen ein Spielprotokoll.

Zielbetrag: 130 Franken
Kai: 50 Franken
Iwan: 50 + 50 = 100 Franken
Kai: 100 + 10 = 110 Franken
Iwan: 110 + 20 = 130 Franken
Iwan gewinnt.

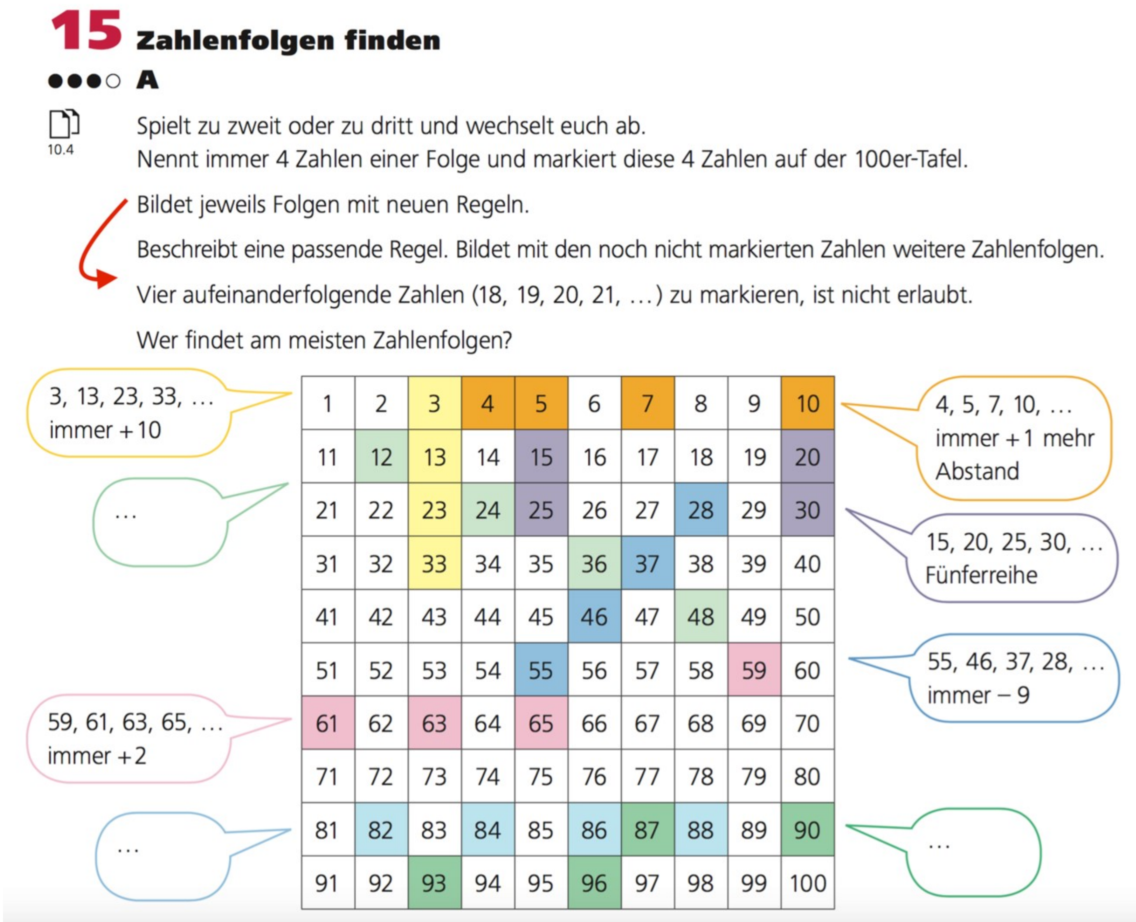
Wer die Runde gewinnt, bestimmt den nächsten Zielbetrag,
wer die Runde verliert, bestimmt anschliessend,
wer mit ziehen beginnt.

Abbildung 2: Wer legt den letzten Geldschein (Autorenteam mathwelt (in Print), Themenbuch)

Herausforderungen:

- Zu welchen Beträgen gibt es sichere Gewinnstrategien? Wann ist der erste Zug günstig, wann nicht?
- Was ändert, wenn auch Münzen zu 1.–, 2.– und 5.– dazu genommen werden?
- Was ändert, wenn beliebig viele Scheine je Kategorie zur Verfügung stehen?

3. Spielvorschlag: Zahlenfolgen finden.



15 Zahlenfolgen finden

A

10.4

Spielt zu zweit oder zu dritt und wechselt euch ab.
Nennt immer 4 Zahlen einer Folge und markiert diese 4 Zahlen auf der 100er-Tafel.

Bildet jeweils Folgen mit neuen Regeln.

Beschreibt eine passende Regel. Bildet mit den noch nicht markierten Zahlen weitere Zahlenfolgen.

Vier aufeinanderfolgende Zahlen (18, 19, 20, 21, …) zu markieren, ist nicht erlaubt.

Wer findet am meisten Zahlenfolgen?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Abbildung 3: Zahlenfolgen finden (Autorenteam mathwelt (in Print), Themenbuch).

- Mehr als 16 Zahlenfolgen mit 5 Gliedern mit verschiedenen Bildungsregeln auf’s 100er Feld legen.
- Zu wenigen Zahlen eine Bildungsregel finden
- Bildungsregeln explizit darstellen
- Spielvariante: 2 Spielende halten 10 verschiedene Bildungsregeln in der Hand, legen diese abwechselnd hin und bestimmen die Startzahl.

Literatur

Hübner, M., Krummenacher, R., Luginbühl, S., Wälti, B. (in Print): mathwelt. Lehrwerk für altersgemischtes Lernen in der Mathematik. Bern: Schulverlag Plus

Josephine WEGENER, Reinhard HOCHMUTH; Leibniz Universität Hannover

Mathematikbezogene Problemlöseprozesse in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen

Im Rahmen des Projekts KoM@ING[11] an den Standorten Hannover/Lüneburg wurden unter anderem Problemlöseprozesse von Studierenden in fortgeschrittenen Lehrveranstaltungen des Elektrotechnikstudiums analysiert. Dazu wurden drei Kategoriensysteme herangezogen. Diese bezogen sich einerseits auf Problemlösestrategien und –phasen und andererseits auf die Lehrveranstaltungskontexte des angewendeten mathematischen Wissens.

Das Projekt KoM@ING

Das Verbundprojekt KoM@ING beschäftigte sich mit der Kompetenzmodellierung mathematischer Praktiken in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen. Im Teilprojekt A an der Leibniz Universität Hannover/Leuphana Universität Lüneburg wurden mittels qualitativer Methoden mathematische Praxen in einer fortgeschrittenen Fachveranstaltung im Elektrotechnikstudium analysiert. Den Ausgangspunkt für die Analysen bildete die Herausforderung für die Studierenden, in fortgeschrittenen Elektrotechnik-Veranstaltungen die zuvor im Studium vermittelten verschiedenen und teilweise widersprüchlichen mathematischen Vorstellungen aus der Höheren Mathematik sowie aus Grundlagenveranstaltungen des Faches zu integrieren. Dabei lag der Fokus auf der Lehrveranstaltung Signale und Systeme, die im Sommersemester 2014 an der Universität Kassel stattfand. Einen Teilaspekt des Projekts stellte die Analyse von Problemlöseprozessen der Studierenden dar.

Ausgangssituation

Den Ausgangspunkt der vorliegenden Untersuchung bildeten Aufgabenbearbeitungen von Studierenden aus einer fortgeschrittenen Lehrveranstaltung „Signale und Systeme“ der Elektrotechnik an der Universität Kassel im Sommersemester 2014. Es wurden jeweils sechs Aufgaben von vier Zweiergruppen bearbeitet. Der Analyse lagen Videoaufzeichnungen der Bearbeitungen, die Transkripte der Bearbeitungen sowie die Bearbeitungszettel der Studierenden zugrunde. Außerdem standen die Folien der Vorlesung zur Verfügung.

[11] Das Verbundprojekt KoM@ING wurde bis Ende Juli 2015 vom BMBF (01PK11021D) finanziell unterstützt.

Kategoriensysteme

Im Folgenden werden die drei Kategoriensysteme vorgestellt, die für die Analyse verwendet wurden.

1. Höhere Mathematik vs. Signale und Systeme

Hier soll untersucht werden, inwiefern die Studierenden in den Bearbeitungen der Aufgaben auf Wissen aus der Höheren Mathematik (HM) und/oder auf Wissen aus der Elektrotechnikveranstaltung (SST) zurückgreifen. Dazu wurden die Transkripte der Studierendenbearbeitungen herangezogen und die Textstellen anhand des Kategoriensystems in Tabelle 1 kodiert.

Kategorie	Erklärung	Beispiel
1.a SST	Studierende wenden Wissen aus der Veranstaltung **Signale und Systeme** an.	• Anwenden der Ausblendeigenschaft der Delta-Distribution • Anwenden der Eigenschaften der Fouriertransformation aus der Vorlesung
1.b HM	Studierende wenden Wissen aus der **Höheren Mathematik** an.	• Zeichnen von Funktionsgraphen • Berechnung eines Integrals
1.c Keine Zuordnung	Wissen, das angewendet wird, **lässt sich nicht eindeutig einer der vorherigen Kategorien zuordnen**.	

Tabelle 3: Kategoriensystem 1

2. Problemlösestrategien

Das zweite Kategoriensystem bezieht sich auf die von den Studierenden verwendeten Problemlösestrategien. Als Ausgangspunkt diente das Kategoriensystem „Heuristische Strategien“ nach Bruder & Collett (2011). Die Kategorien sind in Tabelle 2 dargestellt.

Oberkategorie	Unterkategorien
2.1 Analogieschluss	2.1a Untersuchung auf Analogie
	2.1b Ähnlichkeit nutzen
2.2 Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes	2.2a Informationen strukturieren / aussondern / erweitern
	2.2b Fallunterscheidung / Zerlegung
2.3 (Systematisches) Probieren	2.3a Unsystematisches Probieren
	2.3b Systematisches Probieren nach eigenen Kriterien
	2.3c Systematisches Probieren (Fallbeispiele / Spezialfälle)

	2.3d Systematisches Probieren bis zum Algorithmus
2.4 Vorwärts- / Rückwärtsarbeiten	2.4a Vorwärtsarbeiten (von Gegebenem aus)
	2.4b Vorwärtsarbeiten (nach Lösungsplan)
	2.4c Rückwärtsarbeiten (von Gesuchtem aus)

Tabelle 4: Kategoriensystem 2

Ein Ziel des Teilprojekts war es, dieses allgemeine Kategoriensystem vor dem Hintergrund des speziellen Kontextes zu konkretisieren und einen Kodierleitfaden zu erstellen.

3. Problemlösephasen nach Polya

Das dritte Kategoriensystem bildeten die Problemlösephasen von Polya (1995):

- 3a Verstehen der Aufgabe
- 3b Ausdenken eines Plans
- 3c Ausführen des Plans
- 3d Rückschau.

Kodierungen und Ziele

Zunächst wurden Textstellen des Transkripts auf Grundlage der drei Kategoriensysteme unter Verwendung des Programms MaxQDA eingeordnet. Bezüglich des Kategoriensystems 2 erfolgte die Kodierung so, dass eine Oberkategorie (z.B. 2.1 Analogieschluss) jeweils ein disjunktes (Unter-) Kategoriensystem umfasste. Die Analyseeinheiten wurden sinngemäß gewählt (keine Längenbeschränkung). Außerdem wurden Fragen des Interviewers in die Kodierung mit einbezogen.

Ziel der Untersuchung war die Identifizierung von Unterschieden und Gemeinsamkeiten in den Problemlösestrategien und –phasen der Studierenden in Abhängigkeit davon, ob auf Wissen aus der Veranstaltung SST oder auf Wissen aus der HM zurückgegriffen wurde. Dazu wurden die drei Kodierungen gewissermaßen übereinandergelegt. Die Forschungsfragen bezogen sich darauf, ob bestimmte Strategien oder Phasen häufiger in der Kategorie HM als in der Kategorie SST auftreten und ob Unterschiede in der Struktur des Auftretens der Strategien und Phasen bezüglich HM oder SST existieren. Dabei wurde explorativ und orientiert an der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2000) vorgegangen.

Erste Ergebnisse

Folgende Auffälligkeiten konnten beobachtet werden:

- Es tritt fast kein (systematisches) Probieren auf.

- Es tritt deutlich häufiger Vorwärtsarbeiten als Rückwärtsarbeiten auf.
- Bezüglich der Problemlösephasen von Polya fällt auf, dass selten eine Rückschau stattfindet.
- Analogieschluss (sowohl Untersuchung auf Analogie als auch Ähnlichkeiten nutzen) tritt häufiger im Zusammenhang mit SST als mit HM auf.
- Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes kommt häufiger im Zusammenhang mit SST als mit HM vor.
- Bezüglich der Problemlösephasen von Polya treten Verstehen der Aufgabe, Ausdenken eines Plans und Rückschau häufiger im Zusammenhang mit SST als mit HM auf.

Insgesamt lassen sich viele Auffälligkeiten aufgabenspezifisch erklären. Dass bestimmte Problemlösestrategien und –phasen häufiger zusammen mit einer der beiden Kategorien aus Kategoriensystem 1 (SST vs. HM) auftreten, erklärt sich vermutlich daraus, dass Studierende eher häufiger direkt auf das Wissen ihrer aktuellen Veranstaltung als auf frühere zurückgreifen. So untersuchen Studierende beispielsweise auch in erster Linie anhand der aktuellen Vorlesungsfolien Sachverhalte auf Analogie und greifen in einer Rückschau auch eher auf Inhalte der aktuellen Vorlesung zurück.

Es versteht sich, dass es sich bei den beschriebenen Beobachtungen um erste explorative Ergebnisse handelt, die lediglich mögliche Tendenzen beschreiben. Ein Problem stellt unseres Erachtens insbesondere die starke Aufgabenabhängigkeit der auftretenden Problemlöseprozesse und –phasen dar. Deshalb soll in zukünftigen Untersuchungen stoffdidaktischen Überlegungen auch ein größeres Gewicht eingeräumt werden.

Literatur

Bruder, R., & Collett, C. (2011). Problemlösen lernen im Mathematikunterricht. *2. Auflage.* Berlin: Cornelsen.

Mayring, P. (2000). *Qualitative Inhaltsanalyse*. Forum Qualitative Sozialforschung, Vol. 1, No. 2

Polya, G. (1995). Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. *4. Auflage*. Tübingen: Francke Verlag.

Markus WEHRLE, Weingarten

Wie steht es ums Kopfrechnen in den verschiedenen Schularten der Sekundarstufe? – Vorstellung einer geplanten Studie

Problemstellung

Der Gebrauch von Taschenrechnern, Smartphones, Tablets und Computern hat zugenommen. Die mobilen Geräte werden zum Rechnen selbst einfacher Aufgaben benutzt, obwohl man während der eigenen Schulzeit gelernt hat, die meisten dieser Aufgaben im Kopf zu rechnen. (vgl. Krauthausen 1993, S. 190)

Kopfrechnen wird also durch das zunehmende Aufkommen technischer Hilfsmittel und deren Nutzung vernachlässigt.

Im Bildungsplan der Realschule in Baden-Württemberg taucht der Begriff des Kopfrechnens ebenso wenig auf (vgl. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg 2004) wie in den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz der Länder in Mathematik für den mittleren Bildungsabschluss (vgl. Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder der Bundesrepublik Deutschland 2004).

In der mathematikdidaktischen Forschung finden sich neben zahlreichen Untersuchungen der Grundschule kaum welche in der Sekundarstufe (vgl. Wagner 2006, S. 10).

In der Schule wird Kopfrechnen nicht überall behandelt.

Aus dieser Bestandsaufnahme lassen sich folgende Zusammenhänge vermuten. Das hier benutzte Wort meint „Hypothesen“ nicht im wissenschaftlichen sondern im bildungssprachlichen Sinne.

Hypothesen

- Die Nutzung elektronischer Hilfsmittel drängt das Kopfrechnen in den Hintergrund.
- Durch die Allverfügbarkeit dieser technischen Hilfsmittel wird vom Kopfrechnen zu wenig Gebrauch gemacht.
- Dadurch verkümmert die Fertigkeit des Kopfrechnens.
- Kopfrechnen wird als unwichtig erachtet.
- Der Taschenrechner liefert Genauigkeit in kurzer Zeit.
- Mit dem Taschenrechner fühlt man sich sicher.
- Der Taschenrechner ist oft bequemer, anstrengungsloser.

Aus all diesen Gründen wird lieber mit dem Taschenrechner gerechnet als im Kopf.

Forschungsstand

Der Begriff „Kopfrechnen“ wird in der Literatur unterschiedlich definiert. Für Grassmann et al. zum Beispiel ist eine im Kopf durchgeführte Rechnung schriftliches Rechnen, sobald sie mit Hilfe eines an das schriftliche Rechnen angelehnten Verfahrens zustande kam, auch wenn äußerlich sichtbar kein Schreibmaterial verwendet wurde (vgl. Grassmann, Eichler, Mirwald, Nitsch 2010, S. 53).

Demgegenüber schließen wir uns der mehrheitlich geteilten Auffassung an, wonach das im Kopf gewählte Verfahren keinen Einfluss auf die Kategorisierung „Kopfrechnen“ hat, und verwenden das Wort „Kopfrechnen“ folglich als „Rechnen im Kopf ohne Verwendung äußerlicher Hilfsmittel“ (vgl. Wagner 2006, S. 37).

Es steht als eine von vier Kategorien neben

- Halbschriftlichem Rechnen
- Schriftlichem Rechnen
- Rechnen mit dem Taschenrechner

(vgl. Plunkett 1987, S. 44)

Kopfrechnen ist die tragfähige Basis, Rechenanforderungen gerecht zu werden. Es ist an Einsicht und Verständnis gebunden. Seine Rechenwege sind selbstbestimmt und flexibel. (vgl. Krauthausen 1993, S. 201f)

Forschungsergebnisse

Da keine aktuellen Studien existieren, hier eine kleine Auswahl Ergebnisse zurückliegender Forschung (vgl. Wagner 2006, S. 10).

In dritten Klassen brauchen Schülerinnen und Schüler zwischen sechs und 39 Sekunden je Aufgabe. Zwischen Zeitaufwand und Fehlerhäufigkeit konnte kein genereller Zusammenhang hergestellt werden. (Brenner 1980 zitiert nach: Wagner 2006, S. 50)

Die Fehlerschwerpunkte der Klassen 2 bis 10 liegen in den Nullaufgaben (MW: Aufgaben wie a • 0, 0 • a oder 0 • 0) sowie Aufgaben mit hohen Faktoren. Eine Untersuchung ohne Nullaufgaben würde die Rechensicherheit verdoppeln. (Lörcher 1985 zitiert nach: Wagner 2006, S.50)

An fünf Schulen der Landkreise Heilbronn und Heidelberg wurden in je zwei Klassen fünf Fehlerquoten von 4 % bis 19 % gemessen, wobei sich die Unterschiede weniger schulintern als interschulisch zeigten. Zwischen den Geschlechtern zeigte sich kein Unterschied. Im Gegensatz zu obiger 1985 veröffentlichter Untersuchung gab es auch keinen Unterschied zu Kindern mit Migrationshintergrund. (vgl. Wagner 2006, S. 78ff)

Forschungsdesign

Auch die letztgenannte Studie liegt schon über zehn Jahre zurück. Sie fand nur in einem einzigen Schultypus statt, untersuchte lediglich eine Schulstufe und enthielt ausschließlich Aufgaben der Multiplikation und Division.

Daher ist geplant, nicht nur die Hauptschule, sondern auch Werkrealschule, Realschule, Gemeinschaftsschule und Gymnasium miteinzubeziehen. Neben der fünften soll eine zweite Schulstufe erhoben werden. Derzeit ist Klasse acht geplant. Das Instrument mischt Aufgaben zu Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Der Vor-Test enthielt sogar wenige Aufgaben mit Potenzen. Der Erhebungsrahmen von zwei Schulamtskreisen wird auf zwei Bundesländer ausgedehnt.

Die Studie wird in zwei Abschnitten durchgeführt. Der quantitative Teil ermittelt Fehlerhäufigkeiten. Darin auffallende Probanden werden um ein Interview gebeten, in dem anhand eines wesentlich geringeren Aufgabenumfanges die im Kopf verwendeten Strategien qualitativ erhoben werden.

Forschungsfragen

Die Daten der quantitativen Studie „Wie gut rechnen Jugendliche im Kopf?“ und der qualitativen Studie „Welche Strategien werden verwendet?“ sollen Antworten liefern auf folgende Fragen.

- Welche Änderungen zeigen sich im Laufe der Sekundarstufe?
- Gibt es Unterschiede zwischen den Schularten?
- Worin weicht Bayern von Baden-Württemberg ab?
- Gibt es Signifikanzen zwischen den Geschlechtern?

Außerdem haben bisherige Studien aufgeworfen:

- Gibt es eine Korrelation zwischen Leistung und Strategie?
- Unterscheidet sich das Zahlverständnis zwischen guten und weniger guten Kopfrechner(inne)n?

Beispiel aus einem Prä-Test

34 + 17	= 51	67 • 2	= 134	76 :4	= 19
67 – 18	= 49	56 + 24	= 80	78 + 21	= 99
45 • 5	= 225	15 • 12	= 180	51 : 3	= 17
78 : 3	= 26	37 + 43	= 80	31 – 18	= 22
528 – 36	= 492	867 – 123	= 744	39 : 3	= 13
2 • 87	= 174	15 + 899.798	= 898.819	58 – 19	= 39
15 • 8	= 120	132 • 4	= 518	87: 3	= 28
3^4	= 12	90 + 120	= 210	909 + 108	= 1017
2^5	= 10	132 : 3	= 44	52 : 4	= 13
85 : 5	= 17	72 : 9	= 8	14 – 5	= 9
43 + 29	= 72	18 + 53	= 71	17 + 4	= 21

Prätest Beispiel 2016-01-19RSK7.20 Seite 1

Literatur

Brenner, A. (1980). Schwierigkeiten mit dem kleinen Einmaleins – Bericht über Erfahrungen mit Grundschülern zu Beginn des 3. Schuljahrs. Zitiert nach A. Wagner, *Zum Kopfrechnen in der Hauptschule* (S. 50). Hildesheim 2006: Franzbecker.

Grassmann, M., Eichler, K.-P., Mirwald, E., Nitsch, B. (2010). Mathematikunterricht. In A. Kaiser und S. Miller (Hrsg.), *Kompetent im Unterricht der Grundschule*. Band 5. Baltmannsweiler: Schneider Hohengehren.

Krauthausen, G. (1993). Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Rechenverfahren, Taschenrechner: Für eine Neubestimmung des Stellenwertes der vier Rechenmethoden. *Journal für Mathematikdidaktik*, *14*, 189 – 219.

Lörcher, G. (1985). Einmaleinskenntnisse bei Schülern der Sekundarstufe. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 191 – 194. Zitiert nach A. Wagner, *Zum Kopfrechnen in der Hauptschule* (S. 50). Hildesheim 2006: Franzbecker.

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (2004). *Bildungsplan 2004 Realschule Baden-Württemberg*. Stuttgart.

Plunkett, S. (1987). Wie weit müssen Schüler heute noch die schriftlichen Rechenverfahren beherrschen? *mathematik lehren, 21*, 43 – 46.

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss*. München: Wolters Kluwer.

Wagner, A. (2006). *Zum Kopfrechnen in der Hauptschule*. Hildesheim: Franzbecker.

Christian WERGE, Leipzig

Hilfen für Schüler der Sekundarstufe mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen: Erfahrungen mit der Kla^P^PS-Regel in der Lerntherapie

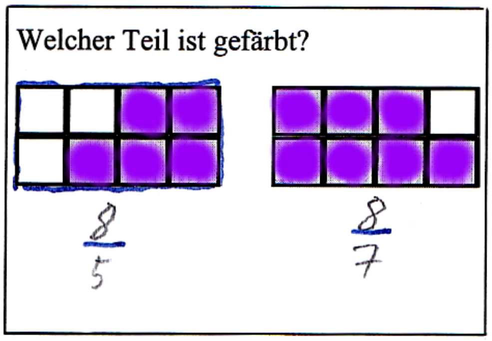
$x:a:m - x$, alſo $mx - x^2 = a^2$

Ältere Schülerinnen und Schüler mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen zeichnen sich oft dadurch aus, dass sie bereits beim Berechnen von Termen aus Zahlen Probleme haben, die richtige Reihenfolge der Rechenoperationen und die korrekte Richtung der Ausführung nicht kommutativer Operationen einzuhalten.

Im Beitrag wird nach kurzer Einführung in die Spezifik rechenschwacher Schüler die Kla^P^PS-Regel erläutert und ihr Einsatz in lerntherapeutischen Situationen beschrieben. Dabei werden typische Fehlermuster herausgearbeitet.

1. Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen

Betrachtet man die Aufgabe 44+32 und ihre Lösung *67* mit der Nebenrechnung 4+2=6 und 4+3=7 wird deutlich, dass dieser Schüler zwar mit den Ziffern richtig gerechnet hat, aber ein Problem beim Erfassen und Zuordnen der zugehörigen Stellenwerte hat, also ein sogenanntes Orientierungsproblem (Schulz, S. 467). Solche Richtungsprobleme beobachten wir auch bei (nichtkommutativen) Rechenoperationen, z. B. 64-25=*41*, „denn 6-2=4 und 5-4=1“, wie vorgerechnet wird, oder beim Verwechseln von Zähler und Nenner gemeiner Brüche (s. Abb.: Chris, 7. Klasse). Beim letztgenannten Problem spielt auch die beklagte „Dominanz der syntaktischen Ebene“ (Padberg, S. 155) eine Rolle.



Die Problematik rund ums zählende Rechnen und mangelhafter Automatismen im Bereich der kleinen Einsplus- und Einmaleins sollen hier nicht betrachtet werden, sondern nur die Schwierigkeiten mit der korrekten Vereinfachung und Berechnung von Termen mit Zahlen, kurz der Vorrang-regeln.

2. Besonderheiten der Vorrangregeln

Auf diese Art von Regeln trifft sicher die oft geforderte Begründung der Regeln anhand von möglichst anschaulichen Vorstellungen nicht zu, denn es handelt sich um Vereinbarungen, die im Laufe der letzten Jahrhunderte Wandlungen unterzogen waren, wie ein kleiner Ausschnitt aus der Herleitung der graphischen Lösung einer quadratischen Gleichung (Schön, S. 288) belegt, bei der aus heutiger Sicht zumindest die Klammer um „m - x“ fehlt.

Bei diesen Regeln muss demnach im Mittelpunkt der methodischen Überlegungen die Art der Illustration stehen, wie Schulbücher verdeutlichen.

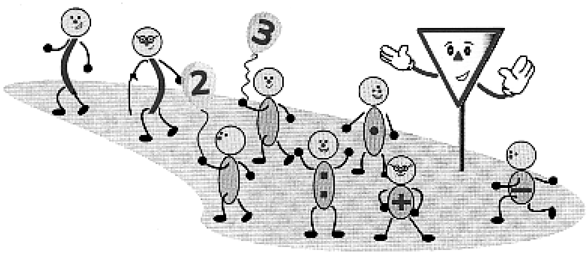
Bei mehreren Rechenoperationen in einer Aufgabe ist deren Reihenfolge zu beachten.

▶ **11**

1. Was in Klammern steht, zuerst berechnen
2. Potenzen berechnen
3. Multiplizieren oder Dividieren vor Addieren oder Subtrahieren („Punktrechnung vor Strichrechnung")

Treten in einer Aufgabe Klammern oder mehrere Rechenoperationen auf, so ist die richtige Reihenfolge der Rechnungen zu beachten. Es gelten folgende **Vorrangregeln:**

(1) Was in Klammern steht, wird zuerst berechnet.
(2) Potenzrechnung geht vor Punktrechnung.
(3) Punktrechnung geht vor Strichrechnung.
(4) Sonst wird von links nach rechts gerechnet.



Beispiel

Will man den Wert von $3 + 5 \cdot 2^3$ berechnen, beginnt man zunächst mit der Rechenoperation der 3. Stufe:

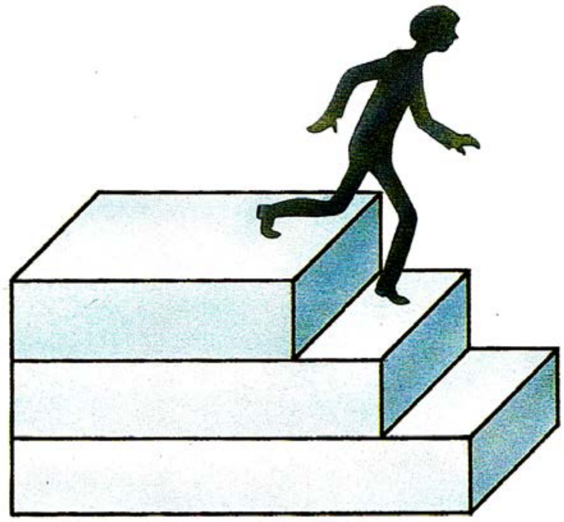
$$3 + 5 \cdot 2^3 = 3 + 5 \cdot 8$$

Dann führt man die Rechenoperation der 2. Stufe aus:

$$3 + 5 \cdot 8 = 3 + 40$$

Nun erst wird die Rechenoperation der 1. Stufe ausgeführt:

$$3 + 40 = 43$$

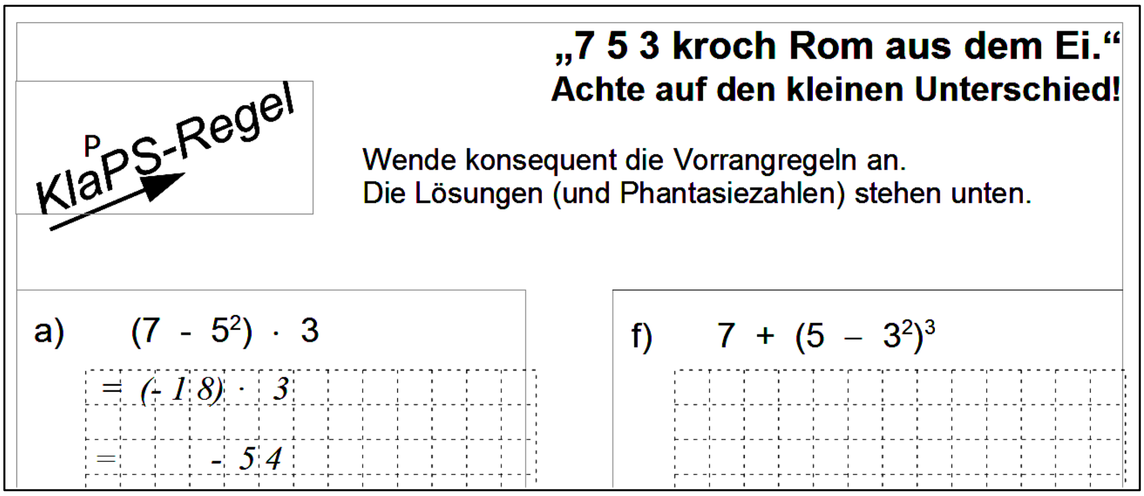


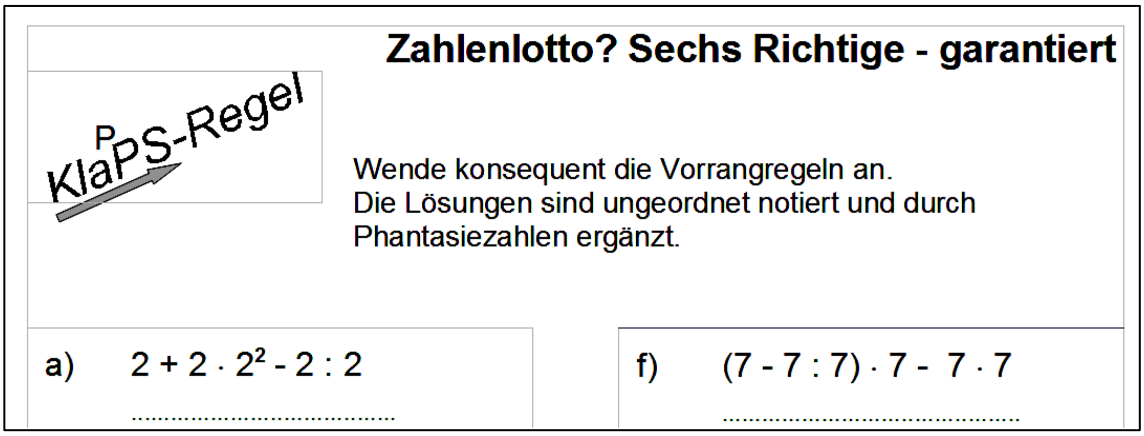
Während im oberen Bild (Mathematik 5, VW, S. 24) nüchtern die Reihenfolge genannt wird, veranschaulichen im zweiten Beispiel (Mathematik 5, DUDEN PAETEC, S. 66) ***von rechts nach links*** spazierende Klammern, Exponenten und Operationszeichen die Reihenfolge. Im dritten Beispiel (Mathematik 5, Oldenburg, S. 37) bewegt sich der „Lerner" ***nach rechts*** von der dritten zur ersten Stufe hinab.

3. Zur Kla^{P}PS-Regel

In lerntherapeutischen Sitzungen wird die Kla^{P}PS-Regel in vier Schritten eingeführt. Ausgehend von $3 + 4 \cdot 2$ wird an die aus der Grundschule meist bekannte „Punkt- vor Strichrechnung“ erinnert, mit $(3 + 4) \cdot 2$ kommt die Klammer ins Spiel, soweit die mündlich überlieferte „Klaps-Regel“. Der nächste Schritt kann mit Hilfe von $3 - 4 \cdot 2$ verdeutlicht werden, wobei häufig suggestiv nach $4 \cdot 2$ fehlerhaft $8 - 3 = 5$ angegeben wird und der Pfeil dann die korrekte Rechenrichtung betont. Schließlich fehlt noch, erläutert z. B. an $3 \cdot 4^2$, die Einordnung von Potenzen: Das Kleinbuchstabe a hat keine Oberlänge, also gibt es dort Platz für ein hochgestelltes P für Potenz.

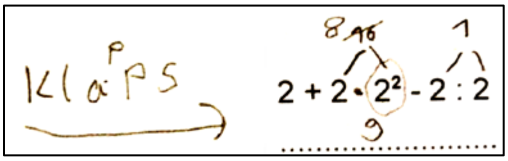
Übungsblätter zur Kla^{P}PS-Regel sollten, einer berechtigten Kritik an Übungsplantagen und dem Hinweis auf J. S. Bachs (1685 – 1750) Notenbüchlein für Anna Magdalena, wenigstens „einen Hauch von Poesie“ aufweisen.





4. Erfahrungen und häufige Fehler

Die Kla^{P}PS-Regel erweist sich als eine Merkhilfe (Eselsbrücke), die besonders Schülern mit Problemen im Mathematikunterricht eine gewisse Hilfe bietet. Selbst mit dieser Regel bleiben jedoch noch weitere typische Fehler bei Termumformungen unberücksichtigt, die – wie wir sagen – „versteck-



ten“ Klammern: So klammern ***Bruchstriche*** ebenso wie ***Wurzelzeichen*** und die (kleingedruckten) Terme in einem ***Exponenten*** müssen genau wie die ***zwei Seiten einer Gleichung*** als geklammert angesehen werden.

Bei wiederholter bewusster Anwendung wird die Fehlerzahl spürbar reduziert. Die korrekte Wiedergabe allein genügt nicht zur Fehlervermeidung, wie ein Beispiel von Marvin (9. Klasse) zeigt, der Sekunden vor der Lösung der Aufgabe die Regel aus dem Gedächtnis richtig notiert hatte. Von uns beobachtet wurde auch, dass auf einem Übungsblatt Punkt- vor Strichrechnung bzw. die vom Pfeil geforderte Rechenrichtung beachtet und missachtet wurde.

Überraschende Fehler traten auf, wenn z. B. bei $(8 - 3) \cdot 4 + 2 = 5 - 7 = 2$ (Paula, 7. Klasse) Operatoren in der Rechnung doppelt auftraten.

5. Kritische Anmerkungen

Obwohl die Regel hilft, typische Fehler, insbesondere Richtungsfehler bei Kindern und Jugendlichen mit Orientierungsschwierigkeiten zu vermeiden, ist erstens die Übertragung auf die viel häufiger auftretenden Terme mit Variablen nur begrenzt möglich (Distributivgesetz beim Auflösen von Klammern), zweitens verstellt die konsequente Beachtung der Pfeilrichtung bequemes Kopfrechnen bei Aufgaben wie $2 \cdot 17 \cdot 5 = \mathbf{2 \cdot 5} \cdot 17 = 170$ und drittens wird der Aspekt des Auflösens verschachtelter Klammern „von innen nach außen“ nicht veranschaulicht.

Literatur

Bock, H.; Walsch, W. (Hrsg.), Mathematik 5 entdecken verstehen anwenden (1992). München: Oldenbourg

Mathematik. Lehrbuch für Klasse 5 (1988). Berlin: Volk und Wissen

Mathematik 5. Ausgabe G (2005). Berlin: DUDEN PAETEC

Padberg, F. (2015). *Didaktik der Bruchrechnung*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Schulz, Andrea (2009). Integrative Lerntherapie – ein außerschulische Hilfe für Kinder mit Rechenschwäche. In Fritz, A. et al. (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (S. 459-474). Weinheim, Basel: Beltz.

(Der Autor, Dr. Ch. Werge, ist auch Leiter des Duden Instituts für Lerntherapie Halle /Saale.)

Birgit WERNER & Margit BERG, Heidelberg

Sprache im Mathematikunterricht - Stolpersteine oder Ressource?

Sprache im Mathematikunterricht

Die Heterogenität in den Schulen nimmt zu und betrifft unter anderem auch die sprachlichen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler. Die Kinder bringen ganz unterschiedliche sprachliche Voraussetzungen mit in den Unterricht, beispielsweise im Zusammenhang mit einer sprachanregungsarmen Umgebung oder mit dem Aufwachsen mit mehreren Sprachen und gegebenenfalls einem späten Beginn des Zweitspracherwerbs. Mit der Ausweitung inklusiver Schulformen wächst die beschriebene Heterogenität weiter, da nun auch die besonderen Lernvoraussetzungen und Förderbedürfnisse von Schülerinnen und Schülern mit sonderpädagogischem Förderbedarf in allgemeinen Schulen berücksichtigt werden müssen.

Davon ist der Mathematikunterricht keinesfalls ausgenommen. Die vordergründige Annahme, dass der Mathematikunterricht ein weitgehend sprachfreies Fach sei, stellt sich bei näherem Hinsehen als Trugschluss heraus: Die mathematische Sprache erweist sich sogar als besonders anspruchsvoll, da zu ihren Merkmalen eine äußerst präzise, häufig abstrakte und zudem sehr dichte Ausdrucksweise gehört. Das Verständnis wird daher bereits dann blockiert, wenn nur einzelne Wörter nicht exakt verstanden werden. Somit finden sich tatsächlich in sprachlichen Aspekten des Mathematikunterrichts Stolpersteine, die den mathematischen Lernerfolg erschweren und einschränken können. Auf der Wortebene müssen schon in der Grundschulzeit etwa 500 mathematische Fachbegriffe neu gelernt werden (vgl. Lorenz, 2005). Hinzu kommen mit den sogenannten Polysemien auch noch Wörter, die im mathematischen Kontext eine andere Bedeutung haben als in der Alltagssprache (Beispiel: Die 8 ist trotz der Kurven eine "gerade" Zahl). Viele mathematische Fachbegriffe sind komplex aufgebaut und bestehen aus Zusammensetzungen mehrerer Wörter ("Quadernetz", "Geodreieck") oder enthalten Vorsilben ("legen" / "zerlegen"), die die Bedeutung des Wortes verändern. Das Verständnis von Präpositionen und Konjunktionen ist für die Kommunikation im Mathematikunterricht unverzichtbar, fällt aber Kindern mit sonderpädagogischem Förderbedarf in den Schwerpunkten Lernen und Sprache häufig schwer. Aber auch die Satzstruktur in der verwendeten Lehrersprache und in schriftlich eingegebenen Arbeitsanweisungen oder Aufgaben kann das Verständnis des mathematischen Inhalts erschweren. Derartige Stolpersteine auf der Satzebene können durch die Satzlänge begründet sein, aber auch durch komplexe grammatische Formen wie beispielsweise verschachtelte Nebensätze oder Passivkonstruktionen.

Einschränkungen des Sprachverständnisses

In der Studie PRIMA®Sprache (Werner & Berg, 2015) wurde das Sprachverständnis von Schülerinnen und Schülern vergleichen, die eine dritte oder vierte Klasse an einer allgemeinen Grundschule, einer Förderschule im Schwerpunkt Lernen und einer Sprachheilschule besuchten. Die Förderschüler mit einem spezifischen Lern-Förderbedarf zeigten in allen überprüften Teilbereichen des Sprachverstehens deutliche Einschränkungen; bei den Sprachheilschülern galt dies ebenfalls für einige Bereiche. Somit besteht für diese Schülergruppen das Risiko sprachlich (mit)bedingter Lernschwierigkeiten. Begleitet wurden die Verständnisprobleme in vielen Fällen durch auditive Speicherschwächen. Als besonders hoch stellte sich der Rückstand im überprüften deutschsprachigen Wortschatz bei bilingualen Förderschülern heraus.

Die Bedeutung der vorgefundenen Sprachschwierigkeiten für den mathematischen Lernerfolg erschließt sich unmittelbar bei einem Blick in die Bildungsstandards: Die als „allgemeine mathematische Kompetenzen" charakterisierten Aspekte „Problemlösen", „Kommunizieren", „Argumentieren", „Modellieren" und „Darstellen" sind entweder auf Sprache angewiesen oder sogar eine genuin sprachliche Tätigkeit. Die Bildungsstandards stellen somit hohe sprachlich-kommunikative Anforderungen.

Anforderungen auf der Wort- und Satzebene

An einem Beispiel aus den Bildungsstandards Mathematik Primarstufe (KMK 2014, 14) wird deutlich, wie hoch die Anforderungen an den Wortschatz der Kinder sind: In dem Satz „Hier ist eine Zahl mit Plättchen in der Stellentafel dargestellt" müssen nicht nur die mathematischen Fachbegriffe „Zahl" und „Stellentafel" verstanden werden, sondern auch die Bedeutung von „Plättchen" in diesem Zusammenhang sowie die bildungssprachlich orientierte Verwendung des Verbs „darstellen", das hier in der Partizip-Form („dargestellt") vorkommt. Auf der gleichen Seite der Bildungsstandards finden sich weitere mathematische Fachbegriffe („Zehner, Hunderter-, Tausender- und Zehntausenderstelle"), ein bildungssprachlich geprägtes Verb („geschieht") sowie ein Verb mit einem Präfix („verschieben") und Steigerungsformen zweier Adjektive (kleiner / kleinsten, größer / größten). Dabei handelt es sich keineswegs um ein ungewöhnlich hohes Anspruchsniveau: Vergleichbaren sprachlichen Anforderungen begegnen Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht bereits im Grundschulalter tagtäglich.

Die hohen sprachlichen Anforderungen beschränken sich jedoch nicht auf die Wortebene, sondern betreffen auch die Satzebene. Auch hier kann exemplarisch auf die Bildungsstandards Mathematik verwiesen werden. Hier findet sich in den Bildungsstandards für die Grundschule (ebd., S. 14) unter anderem der folgende Satz: "Schreibe die drei größten Zahlen auf, die mit zwei Plättchen in dieser Stellenwerttafel gelegt werden können". Hier kommt es zu einer Vermischung der Abstraktionsebenen („Plättchen“, „Zahl“ und abgebildete Punkte). Den Kindern wird eine konkrete Aufforderung gegeben (Zahlen mit Plättchen legen), die jedoch nur gedanklich vorgenommen werden kann. Die syntaktische Komplexität ist auf Grund des genutzten Relativsatzes ("Zahlen, die... gelegt werden können") und der Passivkonstruktion ("gelegt werden") hoch. Zudem handelt es sich mit 16 Wörtern um einen sehr langen Satz, der das Arbeitsgedächtnis vieler Kinder überlastet.

Fördermöglichkeiten auf der Wort- und Satzebene

Um sprachliche Hürden im Mathematikunterricht zu verringern, muss bereits in der Unterrichtsplanung eine Reflexion des erforderlichen Wortschatzes erfolgen. Auf dieser Basis kann dann eine gezielte Wortschatzarbeit in den Unterricht integriert werden. Insbesondere muss dabei ein fachspezifischer Mindestwortschatz erarbeitet werden. Hilfreich ist dabei beispielsweise die Erstellung eines Glossars ("Mein Mathewörterbuch") durch die Schülerinnen und Schüler. Dabei ist auch die Beachtung von Polysemien relevant: Wörter, die den Kindern aus ihrem Alltag bereits bekannt sind, in der Mathematik jedoch eine andere oder spezifischere Bedeutung haben, werden sonst möglicherweise missverstanden und werden so zu Lernhemmnissen.

Bei der Einführung neuer Wörter ist es sinnvoll, einen Bezug zum Alltags- und Weltwissen der Kinder herzustellen, um die Vernetzung der Wörter zu erleichtern. Hier bei bietet sich vor allem eine sozial-kooperative Erarbeitung an. Eher linguistisch motivierte Vorgehensweisen wie etwa die Verwendung von Synonymen werden ergänzt durch individuelle Umschreibungen durch die Schülerinnen und Schüler. In einem handlungsbegleitenden Sprechen wird besonders gut deutlich, worauf neu eingeführte Wörter sich beziehen. Um Kindern mit eingeschränkten Sprachverarbeitungsfähigkeiten das Mitlernen zu erleichtern, ist es sinnvoll, dass die Lehrkraft die Fachwörter in ihrer eigenen Sprache mehrfach und mit prägnanter Betonung anbietet und somit als Sprachmodell fungiert. Unterstützt werden kann das Wortlernen der Schülerinnen und Schüler durch Merkmale der Lehrersprache: Als wirksam haben sich dabei die Reduktion des Sprechtempos und eine herausgehobene Betonung der neuen Wörter erwiesen. Hilfreich ist zudem das Setzen von Pausen im Sprachfluss, da diese die Äußerungen in Sinneinheiten untergliedern und zudem mehr Zeit für die Sprachverarbeitung geben. Auch der Einsatz von Schrift, z. B. in Form von Wortkarten, kann die Aufnahme neuer Wörter unterstützen und ein sinnvolles Speichermedium darstellen. Eine Entlastung erfahren die Kinder zudem durch den Einsatz von Visualisierungshilfen durch Realgegenstände, Bilder oder Symbole.

Diese Maßnahmen sind gleichermaßen als Verständnishilfe auf der Satzebene anzusehen. An die Stelle von Bildern einzelner Gegenstände können hier Situationsbilder treten und das Verständnis des Zusammenhangs erleichtern. Gemeinsam können hier zudem Hypothesen zum mathematischen Inhalt und Vorgehen entwickelt und versprachlicht werden. Zur Sicherstellung des Aufgaben- und Anweisungsverständnisses ist es sinnvoll, die Aufgaben- bzw. Problemstellung durch die Schülerinnen und Schüler wiederholen zu lassen.

Die Merkmale der Lehrersprache sind in Bezug auf die Satzebene durch weitere Merkmale zu ergänzen: Für Kinder mit sprachlichen Entwicklungsrückständen sollten einerseits syntaktische Vereinfachungen vorgenommen werden (z. B. Verwendung einfacher Hauptsätze statt komplexer Nebensätze), andererseits auch die Satzlänge reduziert werden. Satzabbrüche oder Umformulierungen während des Sprechens sollten in der Lehrersprache vermieden werden. Die Äußerungen der Kinder können unterstützt werden durch Strukturierungshilfen, etwa durch die Vorgabe von Satzanfängen.

Literatur

Berg, M. (2015): Grammatikverständnis und mathematische Fähigkeiten sprachbehinderter Kinder. Sprache-Stimme-Gehör 39 (2), 76 – 80

Glück, C. W. & Berg, M.: Kugel, Kegel und Zylinder – Wortschatzförderung (nicht nur) im Geometrieunterricht: Sprachheilpädagogische Prinzipien und Beispiele. Zeitschrift für Heilpädagogik 61 / 2010, 97-108

Kultusministerkonferenz (2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschlusse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf

Lorenz, J. H.: Mathematikverstehen und Sprachrezeptionsstörungen in den Eingangsklassen. In: Arnoldy, P. & Traub, B. (Hrsg.): Sprachentwicklungsstörungen – früh erkennen und behandeln. Karlsruhe: Loeper 2005

Werner, B. (2009): Dyskalkulie – Rechenschwierigkeiten. Diagnose und Förderung rechenschwacher Kinder an Grund- und Sonderschulen. Stuttgart: Kohlhammer

Werner, B., Berg, M. (2015): PRIMA®Sprache – Studie zum Sprachverständnisbei Schülern der Klasse 3 /4 an Grund-, Sprachheil- und Förderschulen. Zeitschrift für Heilpädagogik 66 (9), 432 – 447

Gerda WERTH, Paderborn

Ziehen und Beweisen mit DGS – Welche Beweiskraft haben für Studierende die Erkenntnisse, die sie im Zugmodus gewinnen?

Einleitung

Seit dem Wintersemester 1998/99 wird an der Universität Paderborn die Erstsemester-Pflichtvorlesung „Elemente der Geometrie" für die Lehrämter HRGe und G unter Einsatz der Software für dynamische Geometrie (DGS) Cinderella gelesen, d.h. sowohl die wöchentliche Vorlesung mit der zweistündigen Übung, als auch die Klausur werden mit Computereinsatz durchgeführt. Die naheliegende Frage, inwieweit sich die Hoffnungen und Erwartungen bzgl. des Einsatzes der DGS bestätigt haben, mündete in eine qualitative Untersuchung zu den Forschungsfragen:

- DGS und Beweis: Wie wirkt sich DGS auf das Beweisverständnis der Lernenden aus?
- Zugmodus als heuristisches Werkzeug: Wie verwenden Lernende den Zugmodus, und welchen kognitiven Nutzen ziehen sie aus ihm?

Theoretischer Rahmen

In der Literatur zum Thema „Beweisen" finden sich viele Aussagen, die herausstellen, dass die Mathematik eine „beweisende" Wissenschaft sei, ohne jedoch den Begriff „Beweis" explizit zu definieren. Manin z.B. sagt: „A proof becomes a proof only after the social act of „accepting it as a proof." This is true for mathematics as it is for physics, linguistics or biology" (Manin 2010, S.45). Als Beispiele für diese These seien der vom Computer ausgeführte Beweis des Vier-Farben-Satzes oder die interaktiven Zero-knowledge-Beweise genannt. Da so gut wie nie formale Beweise in aller Strenge geführt werden, bedarf es eines in der betroffenen mathematischen Kommunität ausgehandelten Konsenses darüber, wie detailliert jeweils vorgegangen werden muss, mit der einhergehenden Gewissheit, dass entstandene Lücken jederzeit geschlossen werden können. Für die Lernenden ergibt sich hieraus das Problem, dass sie oftmals unsicher sind, ob etwas bewiesen ist, oder nicht. Hinzu kommt, dass in der Schul- und in der Hochschullehre nach wie vor die verifizierende Funktion eines Beweises stark im Vordergrund steht (vgl. de Villiers 1990, S.17). Noch bedeutsamer für die Lehre wären jedoch eigentlich die Funktionen des Begründens, der Systematisierung und der Kommunikation; weitere Funktionen wie Förderung eines entdeckenden Vorgehens und überhaupt intellektuelle Herausforderung ließen sich anschließen. Betrachtet man nun die Rolle einer DGS beim Beweisen, so sind hier vielfältige Bereiche zu benennen, wie das Aufstellen und Untersuchen einer Vermutung, das Finden einer Beweisidee, die Visualisierung von zentralen Beweisschritten, die Erarbeitung von Beweisstrategien oder auch das Führen von Existenzbeweisen. Für welche Aspekte die Studierenden die DGS vor dem Hintergrund ihres individuellen Beweisverständnisses einsetzen, wird in der Untersuchung herausgearbeitet.

Untersuchungsdesign der Studie

Im Wintersemester 08/09 wurden 51 Lehramtsstudierende befragt, davon 27 Erstsemester, die aktuell an der Veranstaltung „Elemente der Geometrie“ teilnahmen, und 24 Studierende im Hauptstudium, die diese einige Semester zuvor gehört hatten. Die Studierenden bearbeiteten, je nach Zeit, ein bis zwei zufällig aus einem Aufgabenpool von insgesamt vier Aufgaben ausgewählte Aufgaben und wurden anschließend nach einem vorbereiteten Interviewleitfaden (teilstandardisierte Methode nach Mayring) befragt. Durch die Auswertung der Transkripte mit der Methode der Objektiven Hermeneutik nach Oevermann wurde das Beweisverständnis anschließend qualitativ herausgearbeitet und mit der Bearbeitung der Aufgaben abgeglichen.

Welches Beweisverständnis findet sich bei den Studierenden?

Viele Studierende weisen einem Beweis in erster Linie verifizierende Funktion zu und berühren keine weiteren Beweisaspekte. Für diese Studierende kann der Einsatz der DGS deswegen einen Beweis liefern, weil sie ja mit Hilfe der dynamischen Visualisierung alle möglichen Fälle überprüfen können. Nur ein kleiner Teil dieser Personen akzeptiert die Visualisierung nicht als Beweis. Diese Gruppe führt im Wesentlichen zwei Argumente an: zum einen könnten auch mit einer DGS nur endlich viele Fälle überprüft werden (endliche Anzahl von Pixeln, Untersuchung einer endlichen Anzahl von Objekten), zum anderen sei die Darstellung ohnehin ungenau (flächige Punkte, treppenförmige Geraden).

Etwas anders sieht es bei denjenigen aus, die einem Beweis darüber hinaus auch begründende Funktion zuweisen. Hier wird die Visualisierung vorwiegend nicht als Beweis akzeptiert. Allerdings ist es von entscheidender Bedeutung, ob der Wunsch, durch einen Beweis die Begründungszusammenhänge aufzudecken, intrinsisch motiviert ist, oder ob eher eine Orientierung an der „mathematischen Kommunität“ erfolgt, von der man weiß, dass diese derartige Nachweise einfordert. Trotz ihres Wissens um diesen mathematischen Standard machen diese Studierenden sich ihn nicht zu eigen, was sich darin ausdrückt, dass sie zufrieden sind, wenn etwas „anschaulich klar“ ist, ein Status, der bereits durch die Visualisierung erreicht werden kann und keines weiteren Beweises bedarf.

Studierenden, für die ein Beweis eine verifizierende und/oder begründende Funktion hat, fällt es relativ leicht zu entscheiden, ob ein Sachverhalt durch eine bestimmte Vorgehensweise (Visualisierung mit einer DGS) bewiesen ist oder nicht, da sie sich an ihrem Beweisverständnis orientieren können. Demgegenüber gibt es aber viele Studierende, die ein eher diffuses Beweisverständnis haben und denen nicht klar ist, aus welcher Motivation heraus etwas bewiesen wird, weshalb ihnen dann auch nicht klar ist, wann etwas bewiesen ist. Damit einhergehend findet sich bei diesen Personen häufig kein eigenes Beweisbedürfnis, sondern eher die Auffassung, dass Beweisen eine lästige Pflichtaufgabe sei.

Insgesamt konnte ich bei den Beweisverständnissen keinen wesentlichen Unterschied zwischen Erstsemester- und fortgeschrittenen Studierenden feststellen.

Beobachtungen zum Einsatz des Zugmodus

Besonders häufig war zu beobachten, dass die Studierenden den Zugmodus einsetzen, um durch das Überprüfen „aller möglichen Fälle" Thesen zu generieren. Je nach Beweisverständnis wurde anschließend ein formaler Beweis für nötig erachtet oder diese Überprüfung als hinreichend angesehen. Die sich während des Ziehens für eine Behauptung ergebenden Gegenbeispiele wurden längst nicht von allen Studierenden als solche erkannt. Dabei spielte auch die Art und Weise des Ziehens und der Formatierung eine Rolle: während einige Studierende hektisch hin- und herzogen, so dass Beobachtungen kaum möglich waren, erzeugten andere derart viele Linien, Punkte, Strecken- und Winkelmessungen, dass die Zeichnung unübersichtlich wurde und somit Zusammenhänge nur schwer erkannt werden konnten. Andere wiederum blendeten Linien aus, die für das Aufspüren von Beziehungen hilfreich gewesen wären. Auch beim Umgang mit dem Programm traten häufig Probleme auf, was insofern überraschend ist, als dieses i.A. als unkompliziert und leicht erlernbar angesehen wird. Von besonderer Bedeutung erwiesen sich hier die Konstruktionshierarchien. Einigen Studierenden gelang es nicht, eine für die jeweilige Beobachtung geeignete Zeichnung zu erstellen. Dieses Unvermögen manifestierte sich vor allem darin, dass nicht bedacht wurde, ob feste oder variierbare Größen von Vorteil für den jeweiligen Untersuchungszweck wären. Dies führte oft dazu, dass Ideen allein deswegen nicht weiter verfolgt wurden, weil die technische Umsetzung scheiterte.

Es gab indes auch Studierende, die den Zugmodus gewinnbringend einsetzen konnten, um Vermutungen zu generieren, gegebenenfalls zu verwerfen und auf Beweisideen zu kommen. Interessanterweise befanden sich diese Studierenden alle im oberen Leistungsdrittel.

Zusammenfassung und Konsequenzen

Da das individuelle Beweisverständnis zunächst unabhängig vom Einsatz einer DGS ist, vertrete ich die These, dass diese Problematik durch die DGS nicht hervorgerufen, sondern nur sichtbar gemacht wird. Damit zeigt sich erneut die Bedeutsamkeit der Auseinandersetzung mit den Fragen: „Was ist ein Beweis?", „Was akzeptieren wir als Beweis?", „Warum beweisen wir?". In diesem Kontext ist wichtig, dass ein Beweis nicht ausschließlich auf die Verifikation reduziert wird, sondern dass die Studierenden die verschiedenen Beweisfunktionen kennen und gegebenenfalls auch einander gegenüberstellen.

Zum Einsatz des Zugmodus lässt sich sagen, dass sich die von Hölzl 1999 getroffene Aussage: „Dynamik per se liefert keinen didaktischen Vorsprung gegenüber den traditionellen Werkzeugen der Geometrie" auf eindrucksvolle Weise bestätigt hat. Da sich planvolles Ziehen offensichtlich nicht von alleine einstellt, muss der Einsatz des Zugmodus viel häufiger thematisiert und reflektiert werden: wie konnten Thesen generiert werden, welche Vorgehensweisen wurden beim Ziehen verfolgt, und an welchen Stellen ergaben sich unerwartete Schwierigkeiten oder konnten überraschende Beobachtungen gemacht werden? Auch die Analyse von Zeichnungen, die aufgrund ihrer Anlage letztlich nicht zum gewünschten Ziel führten, könnte hier hilfreich sein. Das Repertoire der von mir beobachteten Studierenden war hier i.A. nicht sehr reichhaltig, denn auch diejenigen, die fachlich sehr gut waren und durchaus auch vom Einsatz der DGS profitiert haben, stießen hier immer wieder an Grenzen.

Literatur

De Villiers, M. (2003). *Rethinking Proof with The Geometer's Sketchpad.* Emeryville CA: Key Curriculum Press.

Hölzl, R. (1999). *Qualitative Untersuchungen zur Verwendung dynamischer Geometrie-Software.*. Augsburg: Wißner.

Manin, Y.I. (2010). *A Course in Mathematical Logic for Mathematicians.* New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer.

Mayring, P. (1999). *Einführung in die qualitative Sozialforschung.* Weinheim: Beltz, Psychologie Verlags Union.

Oevermann, U. (1993). Die objektive Hermeneutik als unverzichtbare methodologische Grundlage für die Analyse von Subjektivität. Zugleich eine Kritik der Tiefenhermeneutik. In T. Jung et al. (Hrsg.), *„Wirklichkeit" im Deutungsprozess: Verstehen und Methoden in den Kultur- und Sozialwissenschaften* (S. 106–189). Frankfurt / M.: Suhrkamp.

Lena WESSEL, Nadine WILHELM, Dortmund

Zusammenhänge zwischen Sprachkompetenz und verstehensorientierter Leistung beim Umgang mit Brüchen

Ausgangspunkt und Forschungsfragen

Der Untersuchungsfokus von Zusammenhängen von Mathematikleistung und familienbedingten Hintergrund- und Kompetenzfaktoren hat sich in den letzten Jahren zunehmend verschoben. Während insbesondere in großen Schulleistungsstudien der Einfluss von Migrationshintergrund, sozioökonomischem Hintergrund, Nationalität und Mehrsprachigkeit untersucht wurde (Überblick z.B. in Wessel 2015, Wilhelm 2016), nehmen aktuelle Studien vermehrt sprachliche Faktoren in den Blick (Paetsch, Felbrich & Stanat 2015, Wilhelm 2016). Analysen der Zentralen Prüfungen 10 in Nordrhein-Westfalen zeigen, dass sprachliche Kompetenz in der Unterrichtssprache Deutsch mit einer Varianzaufklärung von 13 % den stärksten Zusammenhang mit Mathematikleistung aufweist (Prediger, Wilhelm, Büchter, Gürsoy & Benholz 2015). In diesem Beitrag wird geprüft, inwiefern diese Ergebnisse auf Klasse 7 und den Umgang mit Brüchen übertragbar sind und wie sie sich für verschiedene Sprachgruppen darstellen. Verfolgt werden zwei übergeordnete Forschungsfragen:

F1. Welche Hintergrundfaktoren haben den stärksten Zusammenhang zur verstehensorientierten Leistung beim Umgang mit Brüchen?

F2. Welche Zusammenhänge bestehen zur verstehensorientierten Leistung beim Umgang mit Brüchen in verschiedenen Teilstichproben (einsprachige, mehrsprachige und türkischsprachige Lernende)?

Design, Instrumente & Methoden

Im Rahmen der Projekte MuM-MESUT (gefördert durch die DFG mit Förderkennzeichen PR 662/14-1, Leitung S. Prediger) und MuM-Multi (gefördert vom BMBF mit Kennzeichen 01JM1403A, Leitung S. Prediger & A. Redder) wurden Anfang 2015 in zwei Erhebungsdurchgängen Daten von 1124 Lernenden der Klasse 7 (12 Haupt-, Real-, Gesamt- und Sekundarschulen) gesammelt.

Untersucht wurde als abhängige Variable die Mathematikleistung, genauer die „verstehensorientierte Leistung beim Umgang mit Brüchen“, die mit einem bereits bewährten Brüchetest (Wessel 2015) erhoben wurde. Als Hintergrundfaktoren wurden die folgenden einbezogen: allgemeine Sprachkompetenz (gemessen mit einem C-Test), bildungssprachliche Kompetenz (gemessen mit einem BiSpra-Test, adaptiert von Uesseler et al. 2013), kognitive Grundfähigkeiten (BEFKI, Wilhelm et al. 2014), Türkischkompetenz (türkischer C-Test bestehend aus drei von Çelikkol & Rehbein adaptierten Schulbuchtexten, unveröffentlicht) und sozioökonomischer Hintergrund (erfragt mittels Bücheraufgabe, Paulus 2009). Die Faktoren Migrationshintergrund, Mehrsprachigkeit, Alter und Geschlecht wurden auf Basis der Selbstauskunft der Lernenden erhoben. Der Faktor Mehrsprachigkeit wurde operationalisiert durch das Kriterium „Lernender gibt an, mit Eltern oder Großeltern auch eine andere Sprache als Deutsch zu sprechen". Türkischsprachig wurde durch freiwillige Teilnahme am türkischen C-Test erfasst.

Zur Analyse der Zusammenhänge bzgl. Forschungsfrage F1 wurden Regressionsanalysen mit der Variable „verstehensorientierte Leistung beim Umgang mit Brüchen" als abhängige Variable durchgeführt. Weitere Modelle zur Varianzaufklärung für verschiedene Teilstichproben (ein-, mehr-, türkischsprachig) wurden zur Beantwortung von Forschungsfrage F2 und entsprechender Teilfragestellungen (siehe unten) herangezogen.

Überblick über Gesamtstichprobe

In der untersuchten Gesamtstichprobe von n = 1124 Lernenden aus 54 siebten Klassen haben 5,4 % der Lernenden einen Migrationshintergrund erster Generation und 51,6 % einen Migrationshintergrund zweiter Generation. Die übrigen 43 % weisen keinen Migrationshintergrund auf. Eine Mehrheit von 56,7 % verfügt über einen mehrsprachigen Sprachhintergrund.

Kategorisiert man die Lernenden entsprechend ihrer Leistungen im C-Test in sprachlich starke und sprachlich schwache Lernende, so finden sich sowohl einsprachige Lernende unter den sprachlich Schwachen (Anteil von 36 %), als auch mehrsprachige Lernende unter den sprachlich Starken (Anteil von 36 %). Auch wenn die einsprachigen Lernenden hinsichtlich ihrer Sprachkompetenz den mehrsprachigen Lernenden im Durchschnitt überlegen sind, zeigen diese Anteile, dass die häufig vorgenommene Gleichsetzung der Kategorien „mehrsprachig" und „sprachlich schwach" das heterogene Sprachleistungsspektrum der mehrsprachigen Lernenden nicht adäquat abbildet.

Ergebnisse zu Zusammenhängen zwischen Hintergrundfaktoren und Mathematikleistung in der Gesamtstichprobe

Für Forschungsfrage F1 liefert ein statistisches Modell zur Variablenselektion zunächst einen nicht signifikanten Einfluss der Faktoren „Alter", „Geschlecht", „Mehrsprachigkeit", „Migrationshintergrund" und „sozioökonomischer Hintergrund" in der Gesamtstichprobe. Diese Faktoren werden im Folgenden nicht weiter betrachtet.

Für die übrigen untersuchten Faktoren „allgemeine Sprachkompetenz", „bildungssprachliche Kompetenz" und „kognitive Grundfähigkeiten" zeigen sich folgende Zusammenhänge: Unter Kontrolle der kognitiven Grundfähigkeiten klärt die allgemeine Sprachkompetenz (Operationalisierung durch C-Test) einen Varianzanteil von 10 % auf, bildungssprachliche Kompetenz 8 %. In beiden Modellen ist der größte Anteil an Varianzaufklärung erwartungsgemäß bei den kognitiven Grundfähigkeiten zu verorten (12 % im Modell mit allgemeiner Sprachkompetenz bzw. 13 % im Modell mit bildungssprachlicher Kompetenz).

In einer weiteren Analyse wurden außerdem Zusammenhänge der genannten Hintergrundfaktoren bezogen auf die Subskalen *konzeptuelles Verständnis* von Brüchen und *Kalkül- und Faktenwissen* zu Brüchen genauer betrachtet. Der Vergleich der Zusammenhänge der untersuchten Hintergrundfaktoren zeigt nahezu keinen Unterschied zwischen beiden Subskalen.

Ergebnisse zu Zusammenhängen zwischen Hintergrundfaktoren und Mathematikleistung in Teilstichproben

Für die Teilstichproben einsprachige, mehrsprachige und türkischsprachige Lernende wurden weitere Berechnungen durchgeführt. Tabelle 1 bezieht sich zunächst auf einsprachige und mehrsprachige Lernende.

Tabelle 1: Varianzaufklärungen bzgl. Subgruppen einsprachiger und mehrsprachiger Lernender

Hintergrundfaktor	**Varianzaufklärung**			
	Einsprachig (n = 487)		**Mehrsprachig** (n = 637)	
	ohne...	*unter...*	ohne...	*unter...*
	...Kontrolle der kognitiven Grundfähigkeiten			
Allgemeine Sprachkompetenz (C-Test)	$\eta^2 = 0{,}17$	$\eta^2 = 0{,}09$	$\eta^2 = 0{,}14$	$\eta^2 = 0{,}08$
Bildungssprachliche Kompetenz (BiSpra)	$\eta^2 = 0{,}18$	$\eta^2 = 0{,}10$	$\eta^2 = 0{,}12$	$\eta^2 = 0{,}06$
Kognitive Grundfähigkeiten (BEFKI)	$\eta^2 = 0{,}21$	$\eta^2 = 0{,}11$ *bzw.* $0{,}14$	$\eta^2 = 0{,}17$	$\eta^2 = 0{,}12$

Beim Vergleich der aufgeklärten Varianz ohne und unter Kontrolle der kognitiven Grundfähigkeiten in den beiden Gruppen fällt auf, dass die Leistungen im C-Test und die kognitiven Grundfähigkeiten in der Gruppe der Mehrsprachigen weniger stark zusammenhängen als bei den Einsprachigen.

Es wird außerdem deutlich, dass der Anteil aufgeklärter Varianz für bildungssprachliche Kompetenz stärker mit kognitiven Grundfähigkeiten zusammenhängt als dies bei allgemeiner Sprachkompetenz der Fall ist. Dies rechtfertigt, weitere Analysen auf den C-Test zu beziehen.

Tabelle 2: Varianzaufklärungen bzgl. Subgruppe türkischsprachiger Lernender (n = 234)

Hintergrundfaktor	**Varianzaufklärung**	
	ohne...	*unter...*
	...Kontrolle der kognitiven Grundfähigkeiten	
Allgemeine Sprachkompetenz (C-Test)	$\eta^2 = 0{,}16$	$\eta^2 = 0{,}10$
Bildungssprachliche Kompetenz (BiSpra)	$\eta^2 = 0{,}10$	$\eta^2 = 0{,}05$

Sprachkompetenz Türkisch (C-Test Türkisch)	$\eta^2 = 0{,}04$	$\eta^2 = 0{,}03$
Kognitive Grundfähigkeiten (BEFKI)	$\eta^2 = 0{,}11$	$\eta^2 = 0{,}06$

In der Teilstichprobe der 234 türkischsprachigen Lernenden (vgl. Tabelle 2) klärt allgemeine Sprachkompetenz den größten Varianzanteil auf – sowohl ohne als auch unter Kontrolle der kognitiven Grundfähigkeiten. Sprachkompetenz im Türkischen erweist sich hingegen als unabhängiger von der Mathematikleistung; dies verweist auf die bislang nicht stattfindende Aktivierung der Erstsprache für das Mathematiklernen in deutschen Schulen. Diese Deutung muss jedoch vor dem Hintergrund der relativ kleinen Stichprobe eingeschränkt und in weiteren Studien untersucht werden.

Insgesamt stärkt die Untersuchung die Befunde zur hohen Relevanz der Sprachkompetenz für die Mathematikleistung und zwar insbesondere auch für die einsprachig deutschen Jugendlichen.

Literatur

Paetsch, J., Felbrich, A. & Stanat, P. (2015): Der Zusammenhang von sprachlichen und mathematischen Kompetenzen bei Kindern mit Deutsch als Zweitsprache. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 29 (1),* 19–29.

Prediger, S., Wilhelm, N., Büchter, A., Gürsoy, E. & Benholz, C. (2015): Sprachkompetenz und Mathematikleistung – Empirische Untersuchung sprachlich bedingter Hürden in den Zentralen Prüfungen 10. *Journal für Mathematik-Didaktik, 36(1),* 77–104.

Uesseler, S., Runge, A. & Redder, A. (2013): „Bildungssprache" diagnostizieren. Entwicklung eines Instruments zur Erfassung von bildungssprachlichen Fähigkeiten bei Viert- und Fünftklässlern. In A. Redder & S. Weinert (Hrsg.), *Sprachförderung und Sprachdiagnostik.* (S. 42-67). Münster: Waxmann.

Wilhelm, O., Schroeders, U. & Schipolowski S. (2014): *Berliner Test zur Erfassung fluider und kristalliner Intelligenz für die 8. bis 10. Jahrgangsstufe (BEFKI 8-10).* Göttingen: Hogrefe.

Wilhelm, N. (2016, im Druck): *Zusammenhänge zwischen Sprachkompetenz und Bearbeitung mathematischer Textaufgaben. Quantitative und qualitative Analysen sprachlicher und konzeptueller Hürden.* Heidelberg: Springer Spektrum.

Wessel, L. (2015): *Fach- und sprachintegrierte Förderung durch Darstellungsvernetzung und Scaffolding. Ein Entwicklungsforschungsprojekt zum Anteilbegriff.* Heidelberg: Springer Spektrum.

Annika M. WILLE, Klagenfurt

„Die Analysis ist also etwas Unerreichbares“ – Wie sich Studierende zentralen Begriffen der elementaren Analysis nähern.

Die Veranstaltung „Didaktik der Analysis“ an der Universität Klagenfurt im Wintersemester 2015/2016 begegnete der Frage, wie der Aufbau eines reflektierten Verständnisses für die zentralen Begriffe der elementaren Analysis, deren Zusammenhang und deren Bedeutung für den Schulunterricht bei Lehramtsstudierenden unterstützt werden kann. Schriftliche Reflexionen und Rückmeldungen der Studierenden werden dahingehend analysiert und die Veranstaltungsform vorgestellt.

Theoretischer Rahmen

In der Theory of Commognition von Anna Sfard (2008) wird *Denken* als individualisierte Form von (interpersonaler) Kommunikation gesehen. Denken und Kommunikation werden als zwei Erscheinungsformen des selben Phänomens verstanden und daher verwendet Sfard für beide den Ausdruck *commognition,* der sich aus „cognition“ und „communication“ zusammensetzt.

Lernen wiederum wird betrachtet als Individualisierung vom kollektiven Diskurs. Das heißt, es ist eine Veränderung der eigenen mathematischen Kommunikation, sei es mit anderen oder mit sich selbst, um nach und nach kompetenter am Diskurs mit anderen teilnehmen zu können. Eine *Vorbedingung für Lernen* sei die *„recursivity of linguistic commognition*“. Gemeint ist, sich auf Teile der Kommunikation wieder beziehen zu können, beispielsweise Anmerkungen über eigene Gedanken äußern oder reflektieren, was ein anderer oder man selbst kommunizierte. Dies ermöglicht einen *„Blick von außen“*, um reflektieren, abstrahieren und begründen zu können.

Veranstaltung „Didaktik der Analysis“

Die Veranstaltung „Didaktik der Mathematik“ an der Universität Klagenfurt im Wintersemester 2015/2016 versuchte eine Antwort auf die Frage zu finden, wie ein Blick von außen im oben genannten Sinne gefördert werden könne, so dass Studierende ihre mathematische und mathematikdidaktische Kommunikation verändern können, um kompetentere Teilnehmer im allgemeinen elementaranalytischen Diskurs zu werden.

Inhaltlich orientierte sich die Veranstaltung (zwei parallele Kure mit insgesamt 40 Studierenden) am Buch „Analysis verständlich unterrichten“ von Rainer Danckwerts und Dankwart Vogel (2006). Dabei wechselten sich bei fünf Themengebieten – Folgen, Ableitungsbegriff, Integralbegriff, Kurvendiskussion und Extremwertprobleme – Vorlesungen, Übungen und Reflexionen ab. Die Reflexionen wurden durch *erdachte Dialoge* (Wille 2008) umgesetzt, eine Form des Schreibens im Mathematikunterricht, bei der in einer Einzelarbeit ein schriftlicher selbst erdachter Dialog zwischen zwei Protagonisten verfasst, bzw. fortgesetzt wird, die sich über eine mathematische oder mathematikdidaktische Fragestellung unterhalten.

Im Folgenden wird auf die zweite Reflexion zum Ableitungsbegriff eingegangen, die von 35 Studierenden abgegeben wurde. Die Studierenden setzten hierbei den folgenden Anfangsdialog fort:

S1: Kannst du mir noch einmal erklären, was in der letzten Stunde wichtig war?

S2: Hast du denn eine spezielle Frage? Wir hatten ja drei Zugänge zum Ableitungsbegriff, einen geometrischen, einen anwendungsbezogenen und am Ende noch die lokale Linearisierung.

S1: Der anwendungsbezogene war der mit der lokalen Änderungsrate?

S2: Ja, genau.

S1: Der schien für die Schulanalysis besonders wichtig zu sein. Aber warum?

S2: Du gehst dabei vom Bestand über den absoluten Zuwachs zum relativen Zuwachs und – schwupp – hast du die momentane Änderungsrate.

S1: Schwupp???

S2: Entschuldige, das „Schwupp“ ist wirklich nicht so einfach und eigentlich der springende Punkt. Ich erkläre es dir einmal ganz genau und danach, warum das für die Schulanalysis wichtig ist.

S1: Danke, denn mit den ganzen Begriffen kann ich im Moment nicht viel anfangen.

Fragestellungen für die Auswertung der Reflexionen waren:

1. Wie werden elementaranalytische Begriffe im erdachten Dialog verwendet und weist der Gebrauch der Begriffe auf Hürden auf dem Weg hin, nach und nach kompetenter am elementaranalytischen Diskurs mit anderen teilnehmen zu können?
2. Welche Rekursionsebenen sind erkennbar? An welchen Stellen bezieht sich der Studierende beim Schreiben auf einen Teil seines eigenen erdachten Dialoges?

Auswertung

Zunächst wird auf die zweite Frage nach den Rekursionsebenen eingegangen. Es zeigten sich in den Reflexionen verschiedene Ebenen, bei denen sich der jeweils Schreibende auf Teile des eigenen erdachten Dialoges bezog (vgl. Abb. 1). Alle Studierenden beschrieben einen Prozess, wie sie auf die lokale Änderungsrate kommen oder sie ausrechnen können. 37% aller Studierenden nahm einen „Blick von außen“ ein, indem sie Zusammenhänge zu unterschiedlichen Interpretationen oder Beschreibungsebenen erklärten. Auf die zentrale Frage nach Schwierigkeiten beim Schritt zur Analysis durch den

Grenzwertübergang gingen nur 26% der Studierenden ein, und schließlich begründeten 63% der Studierenden didaktisch die Bedeutung des anwendungsorientierten Zugangs für die Schulanalysis, aber in unterschiedlichen Tiefen. Manche bezogen sich direkt auf den von ihnen vorher beschrieben Prozess (mittlerer Pfeil in Abb. 1), andere bezogen sich auf den Zusammenhang zwischen verschiedenen Zugängen oder auf Schwierigkeiten beim Übergang zur Analysis, wie beispielsweise eine Studentin, die in der Rolle von S1 zur Bedeutung des anwendungsorientierten Zugangs schreibt: „Weil er – bis zum Schwupp – im Anschaulichen bleibt. Das kann man sich ja wirklich vorstellen."

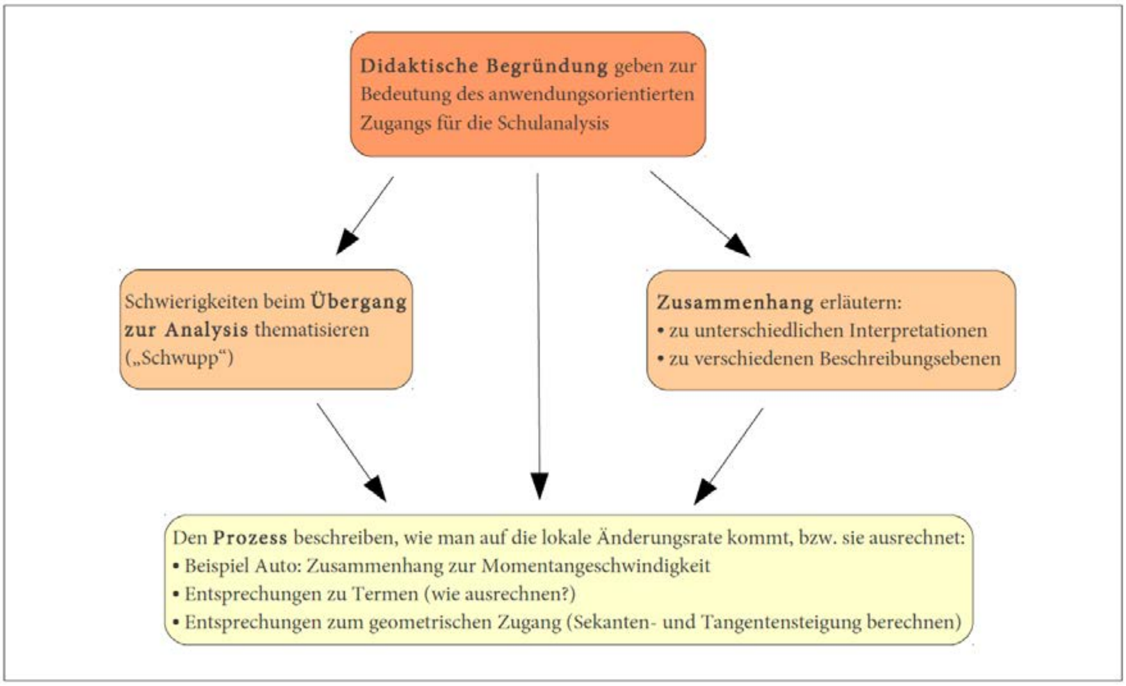


Abbildung 32: Rekursionsebenen in der zweiten Reflexion.

Bezüglich der ersten Frage nach dem Gebrauch elementaranalytischer Begriffe zeigten sich zum einen bei der Interpretation von Variablen oder Termen Unsicherheiten im mathematischen Diskurs, zum anderen wurde zum Teil der Begriff „lokale Änderungsrate" ausschließlich synonym für den entsprechenden Term oder für die Tangentensteigung verwendet, so dass Schwierigkeiten beim Übergang zur Analysis umgangen wurden.

Diskussion

Welchen Effekt hatten nun die Reflexionen auf die Veranstaltung? Zum einen konnte während des Semesters auf Verständnisschwierigkeiten eingegangen werden, die in den Reflexionen auftraten. Dabei wurden die ersten vier erdachten Dialoge kommentiert, so dass jeder Studierende Rückmeldungen erhielt. Zum anderen wurden gute Reflexionen nach Absprache für alle

Studierende zur Verfügung gestellt. Die Studierenden selbst werteten die Reflexionen überwiegend positiv, aber nicht nur. Zum einen wurde der Zeitaufwand angeführt, zum anderen schrieb beispielsweise ein Studierender:

„negativ für mich war einfach, dass wenn man sich mit dem stoff nicht ganz auskannte, war es wirklich schwer eine reflexion zu schreiben die einen eigentlich das gefühl beim lesen geben hätte sollen, dass die person die es geschrieben hat, auch eine ahnung davon hat“.

Der gleiche Punkt wurde von anderen positiv gesehen. So schrieben zwei Studierende:

„Positiv war, dass einem beim Schreiben der Reflexionen erst wirklich klar wurde ob man ein Thema verstanden hatte oder nicht. Wenn nicht konnte man dies in den Reflexionen auch anmerken. (…) Ebenfalls positiv war, dass man in die Rolle des Erklärenden schlüpfen kann, und somit eine andere Sicht auf das Thema bekommt.“

„Nochmals das Durchdenken, das Erarbeiten von eigenen Beispielen, man kommt auf andere Dingen und Zusammenhänge, an die man rein reproduktiv nicht denken würde.“

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Abwechseln von Vorlesung, Übung und Reflexion einen häufigen Austausch zwischen Studierenden und Lehrenden während des Semesters ermöglichte. Die Reflexionen selbst spiegelten den Gebrauch elementaranalytischer Begriffe eines Studierenden, so dass während des Semesters die jeweils individuelle Kommunikation Teil des gemeinsamen Diskurses werden konnte. Es gab zudem einen Zusammenhang zwischen dem späteren Klausurergebnis und der Rekursionstiefe, der ein Indiz dafür sein könnte, dass es zum Lernprozess beitragen kann, Teile des eigenen erdachten Dialoges in verschiedenen Tiefen aufgreifen zu können, wobei wiederum die Fähigkeit nötig ist, den Prozess, wie man einen analytischen Begriff entwickelt, selbst als Produkt zu betrachten, über das man spricht.

Literatur

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. München: Spektrum Akademischer Verlag.

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing.* Cambridge: Cambridge University Press.

Wille, A. M. (2008). Aspects of the concept of a variable in imaginary dialogues written by students. In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Seulveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME32), vol. 4 (S. 417-424). Cinvestav-UMSNH, Mexico.

Stefanie WINKLER, Passau/Niederbergkirchen

Möglichkeiten einer differenzierten Erfassung mathematikspezifischer Begabungsausprägungen im Klassenunterricht (3./4. Jgst.)

Ausgehend von Konzepten zum Konstrukt der „mathematischen Begabung“ und bereits bestehenden Projekten zur Diagnose und Förderung mathematisch begabter Kinder im Grundschulalter sollen diese nun im regulären Mathematikunterricht durch kompetenzorientierte Aufgabenstellungen und Einschätzungen identifiziert werden. Hinweise auf individuelle Begabungsausprägungen werden dazu umfassend qualitativ erfasst und für Rückschlüsse und weitere individualisierte Planungen im Unterricht ausgewertet:

Mathematische Begabung und Kompetenzen - Ausgangslage

Wird Begabung als Potenzial eines jeden Individuums betrachtet, das in Wechselwirkung mit der Umwelt tritt, so wird auch für den Mathematikunterricht der Grundschule fixiert, dass mathematische Leistung in Form von mündlichen, schriftlichen und non-verbalen Beiträge erst die Ergebnisse eines Lernprozesses darstellen. Diese entwachsen der potentiellen mathematischen Begabung des Schülers, die sich durch den Einfluss von Umwelt und Persönlichkeit in Form von Fähigkeiten und Kompetenzen entfaltet, zeigt und weiterentwickelt (Ulm 2011, 7 - 9) – also genau in der Dynamik, die der kompetenzorientierte Lehrplan Plus für das Bundesland Bayern vorgibt.

Kompetenzorientierte Diagnose mathematischer Begabung – Projekt

Um mathematikbezogene Fähigkeiten entwickeln zu können bedarf also sowohl der entsprechenden kognitiven Disposition als auch der vor allem unterrichtlichen Unterstützung dabei, inhalts-, prozess- und informationsverarbeitendes Denken im Bereich der Mathematik in Form von Kompetenzen aufzubauen. (Ulm 2011, 5 – 6) Letztere werden als Grundkompetenzen curricular angestrebt und erlernt. Sie können dann je nach Begabung, Motivation und sozial-emotionalem Verhalten von Schülern bei der Lösung mathematischer Probleme in je eigenen Niveaus und Ausprägungen genutzt werden. (Schott/Ghanbari, 26 – 27)

Um möglichst genaue Rückschlüsse ziehen und passgenaue Fördermaßnahmen ansetzen zu können – aussagekräftiger als dies zugewiesene Einstufungen mathematischer Begabung durch quantitative Tests tun würden – werden prozessorientierte Lernumgebungen dazu genutzt, Kompetenzen und Arbeitsweisen möglichst leistungsunabhängig zu erfassen. Dazu werden Beobachtungen aus dem Unterricht der Jahrgangsstufen 3 und 4 mehrperspektivisch in Form von Transkripten, Beobachtungen und Schülernotizen aufgegriffen. Induktiv werden diese dann analysiert, einer Grundstruktur von

Kompetenzniveaus zugeordnet und auf Auffälligkeiten beziehungsweise Zusammenhänge mit leistungsbasierten Ergebnissen aus Lernstandsdiagnosen und Testsituationen verglichen.

Qualitative Einschätzung mathematischer Begabung – Ergebnisse

Zur differenzierten Diagnose der Ausprägung mathematischer Begabung bedarf es nicht nur testähnlicher Indikatoraufgaben. Kompetenzorientierte, curricular-valide Aufgaben ermöglichen es den Schülern bereits während des Erarbeitungsprozesses, vielfältige individuelle Denk- und Arbeitsweisen einzubringen, die ergebnisorientierte Problemstellungen – so die Auswertung – nicht offenlegen.

Ein niedrigschwelliger Themen-Einstieg schafft für alle Schüler eine gemeinsame Ausgangsposition. Kinder, deren Potential in bestimmten Fähigkeitsbereichen noch nicht angeregt wurde, erhalten damit die Gelegenheit ihre Begabung in Form von weiteren Kompetenzen zu entfalten und dann auch zu zeigen. Auch in diesem Zusammenhang ergeben produktorientierte Aufgaben andere Ergebnisse bezüglich mathematischer Begabungen.

Durch eine offene Lernatmosphäre, die unterschiedliche Sozial- und Bearbeitungsformen erlaubt, können Umwelt- und Unterrichtsmoderatoren individuell vom Kind so gestaltet werden, dass trotz der verhaltensorientierten Diagnostik eine Zuordnung von Niveaus und Kategorien möglich ist.

Dazu können die Anforderungsbereiche der Bildungsstandards genutzt werden: Deduktiv festgelegte Stufen und Grundkompetenzen werden dabei zugeschrieben und induktiv passend zur Aufgabenstellung modifiziert und modelliert: besonderer Förderbedarf – reproduktive Arbeit – Berücksichtigung von Zusammenhängen – Verallgemeinerungen/Abstraktion.

Literatur

Schott, F., Ghanbari, S. A. (2012). Bildungsstandards, Kompetenzdiagnostik und kompetenzorientierter Unterricht zur Qualitätssicherung des Bildungswesens. Eine problemorientierte Einführung in die theoretischen Grundlagen. Münster/New York/München/Berlin: Waxmann.

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2005). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4). München/Neuwied: Luchterhand.

Ulm, V. (2010). Mathematisches Denken und mathematische Begabung. In V. Ulm, Mathematische Begabungen fördern (S. 3 - 7). Berlin: Cornelsen.

Eva-Maria Wißing, Essen

Kinder deuten Beziehungen zwischen Phänomenen und Strukturen in arithmetisch-symbolischen Zahlenmustern

In der Mathematik, die als „Wissenschaft von den Mustern“ (Devlin 1997, S. 3) verstanden wird, werden von Mathematikern „abstrakte „Muster“ – Zahlenmuster, Formenmuster, Bewegungsmuster, Verhaltensmuster und so weiter“ (ebd.) untersucht. Devlin charakterisiert diese Muster unter anderem als „wirkliche oder vorgestellte, sichtbare oder gedachte, statische oder dynamische, qualitative oder quantitative, auf Nutzen ausgerichtete oder bloß spielerischem Interesse entspringende. Sie können aus unserer Umgebung an uns herantreten oder aus den Tiefen des Raumes und der Zeit oder aus unserem eigenen Interesse“ (ebd.).

Muster sind ein bedeutender Bestandteil des Mathematikunterrichts (der Grundschule). So werden in den Bildungsstandards Mathematik für die Grundschule „Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept“ (Walther 2007, S. 42) angegeben und sind den Inhaltsbereichen *über*geordnet. Demzufolge gibt es im aktuellen Lehrplan Mathematik für die Grundschule NRW keinen separaten Bereich „Muster und Strukturen“. Vielmehr sind sie „integraler Bestandteil aller (*Themen*-) Bereiche“ (MSW 2008, S. 56, Hinzufügung Wißing).

Begriffsbestimmung *Muster* und *Struktur*

In den Bildungsstandards wird darauf hingewiesen, dass „sich die Begriffe *Muster* und *Struktur* nicht scharf definieren und nicht voneinander abgrenzen lassen“ (Walther 2007, S. 43, vgl. Lüken 2012, S. 22) und meist synonym verwendet werden. Weiter geben sie an, dass sie den Begriff *Muster* als Oberbegriff verwenden und vor allem dann von *Struktur* sprechen, wenn es sich um grundlegende, vorgegebene *Muster* handelt (vgl. Walther 2007, S. 43). Eine Vermischung der beiden Begrifflichkeiten lässt sich häufig vorfinden. Lüken weist in diesem Zusammenhang auf eine Schwierigkeit für die schulische Arbeit hin und nimmt eine Begriffsschärfung vor (vgl. Lüken 2012, S. 14, 18ff).

Bevor Lükens Begriffsschärfung kurz erläutert wird, soll zunächst ein allgemeines Verständnis der beiden Begrifflichkeiten skizziert werden, um dann im Anschluss mein theoretisches Konzept vorzustellen.

Der Begriff *Muster* stammt vom lateinischen Wort *monstrare* ab, was im Deutschen mit *zeigen*, *weisen* übersetzt werden kann. Allgemein bedeutet es eine Vorlage oder ein Vorbild, das in seiner Art vollkommen, nachahmenswert beziehungsweise beispielhaft ist. Es besteht aus (regelmäßigen,) sich wiederholenden Elementen. (vgl. Brockhaus Bd. 19, 2006, S. 178) Gemeint ist somit jedes wiederholt zu beobachtende, regelhafte Phänomen.

Der Begriff *Struktur* lässt sich vom lateinischen Wort *structura* ableiten, was mit *Ordnung*, *Bau* übersetzt wird. Gemeint ist die Anordnung der Teile eines Ganzen, die einen gegliederten Aufbau, eine innere Gliederung aufweisen. Diese Teile können wechselseitig voneinander abhängen und sind ein in sich strukturiertes Ganzes (vgl. Brockhaus Bd. 26, 2006, S. 501f).

Lüken gibt nach vorangegangener Diskussion zum Bereich „Muster und Struktur in der Mathematik" (vgl. Lüken 2012, S. 20ff) an, dass ein *Muster* eine Regelmäßigkeit beschreibt. Daher versteht sie unter einem *mathematischen Muster* „jegliche numerische oder räumliche Regelmäßigkeit" (Lüken 2012, S. 22). Den Begriff *Struktur* schärft sie aus, indem sie angibt, dass er die Art und Weise beschreibt, in der ein Muster gegliedert ist. Das heißt, dass die Beziehungen zwischen den verschiedenen Bestandteilen eines Musters dessen Struktur darstellen (vgl. ebd., Lüken bezieht sich auf Mulligan, Mitchelmore & Prescott 2006, S. 209).

Ein *mathematisches Muster*, im Rahmen meines Forschungsvorhabens ein *Zahlenmuster*, steht für mich in einer Wechselbeziehung zwischen zwei komplementären Komponenten, die sich wechselseitig bedingen: Den phänomenologisch sichtbaren (An-) Ordnungen und den gesetzmäßig strukturellen Zusammenhängen (s. Abb. 1).

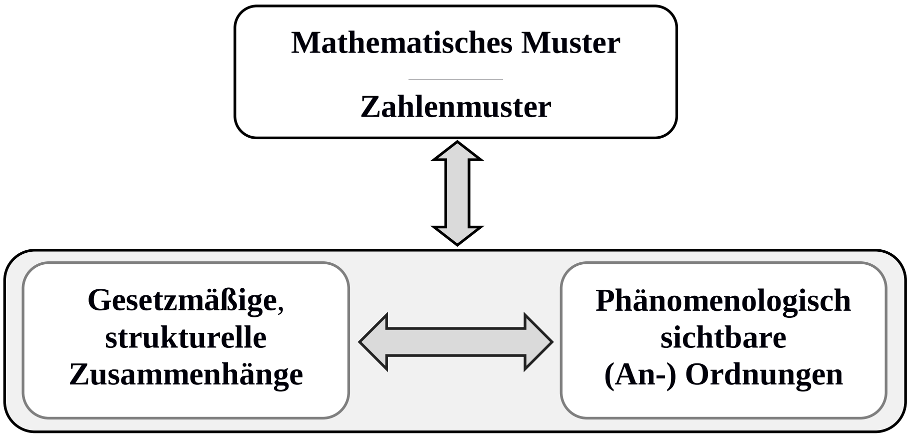


Abb. 1: Komplementäre Beziehungen des didaktischen Konzepts „Mathematisches Muster"

Unter phänomenologischen (An-) Ordnungen ist das visuell Wahrnehmbare gemeint, also das, was ‚an der Oberfläche' zu sehen ist. Soll dieses gedeutet werden, so wird es zu einem fraglichen Zeichen (vgl. Epistemologisches Dreieck - Steinbring 2005). Um es deuten zu können, *muss* man sich den gesetzmäßigen, strukturellen Elementen bzw. Zusammenhängen, die den Phänomenen an der Oberfläche zugrunde liegen und zum Teil nicht direkt sichtbar sind, bedienen.

Nachdem vorangehend eine Begriffsschärfung der Begriffe *Muster* und *Struktur* erfolgte, sollen nun Typen der Musterdeutung vorgestellt werden, die im Rahmen des Forschungsprojektes *KidZ* – ***Ki**nder **d**euten **Z**ahlenmuster* rekonstruiert werden konnten. (Für weitere Informationen zum Forschungsprojekt s. Wißing 2015)

Typen der Musterdeutung

In der Interventionsstudie KidZ wurden Schülerinnen und Schüler der vierten Jahrgangstufe der Grundschule dazu aufgefordert, Zahlenmuster innerhalb substanzieller Lernaufgaben zu deuten. Insgesamt wurden mit zehn Schülerinnen und Schülern 60 klinische Interviews geführt, von denen 30 Prä- und weitere 30 Post-Interviews darstellten. Mittels dieses Datenmaterials konnte ein Spektrum an Deutungen bezüglich der arithmetisch-symbolischen Strukturierungsfähigkeit ausgemacht werden, wobei vier verschiedene Deutungstypen rekonstruiert werden konnten: *Ziffer*, *Zahl*, *Veränderung*, *Operativer Zusammenhang*.

Ziffer - Nehmen Kinder bei der Deutung eines Zahlenmusters eine *Ziffern*sicht ein, so deuten sie *sichtbare* Einzelelemente eines Zahlenmusters. Sie zerlegen das zu deutende Zahlenmuster in seine Einzelelemente und nehmen elementare Beschreibungen, Anordnungen, Gruppierungen etc. vor.

So beschreibt Anna den ersten Summanden eines Strukturierten Päckchens (s. Abb. 2), indem sie sagt, dass „am Anfang alles sieben ist und dann geht's hier so runter: Drei, zwei, eins, null." Ferner gibt sie an, dass auf „beiden Seiten" (sie meint die Hunderter und Einer) alles gleich ist und dass es in der Mitte „runter geht".

0.	734	+	222	=	____
1.	724	+	233	=	____
2.	714	+	244	=	____
3.	704	+	255	=	____
4.	____	+	____	=	____

Abb. 2: Strukturiertes Päckchen

Annas Deutungen können wir mit einer *Buchstabensicht* vergleichen. Soll man das Buchstaben-Päckchen aus Abb. 3 beschreiben, so könnte man sich den Formulierungen von Anna bedienen.

a.	ldf	+	hhh	=	____
b.	lcf	+	hii	=	____
c.	lbf	+	hjj	=	____
d.	laf	+	hkk	=	____
e.	____	+	____	=	____

Abb. 3: Buchstaben-Päckchen

Zahl - Bei einer *Zahl*sicht stehen elementare Zahlbeziehungen im Vordergrund. Um beispielsweise Zahlen geschickt zu addieren, werden solche miteinander kombiniert, die ein glattes Ergebnis hervorrufen (18+12=30). Hierbei werden *Beziehungen zwischen sichtbaren Elementen* ausgenutzt.

Veränderung - Bei der Sichtweise *Veränderung* stehen regelbasierte, konstante Veränderungen bzw. (rhythmische) Unterschiede im Vordergrund. So wird beispielsweise erkannt, dass der erste Summand (s. Abb. 2) immer um zehn kleiner wird. Die sichtbaren Zahlen werden miteinander verglichen, sodass zugrundeliegende *unsichtbare Beziehungen* genannt werden.

Operativer Zusammenhang - Wird die Sichtweise des Operativen Zusammenhangs eingenommen, so beziehen sich Schülerinnen und Schüler auf *Beziehungen von Beziehungen zwischen Unsichtbarem*. Beim angegebenen Strukturierten Päckchen (s. Abb. 2) werden z. B. die beiden Veränderungen der Summanden zueinander in Beziehung gesetzt, um die operative Auswirkung des Ergebnisses vorherzusagen: „Die Zahlen werden immer um elf größer (2. Summand) und aber die um zehn kleiner (1. Summand). Also wird das Ergebnis immer einen mehr, weil elf minus zehn sind eins.“

Resümee

Jeder Typ der hier vorgestellten Muster-Typen kann für eine Aufgabenbearbeitung sinnvoll sein. Daher sollten Schülerinnen und Schüler in einem reflektierenden Umgang mit diesen Typen gefördert werden.

Literatur

Brockhaus Enzyklopädie in 30 Bänden (2006). *Band 19 MOSC-NORDD, Band 26 SPOT-TALA*, 21., völlig neu überarbeitete Auflage. Leipzig, Mannheim: F. A. Brockhaus GmbH, Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG.

Devlin, K. (1997). *Muster der Mathematik: Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur*. Aus dem Amerikanischen übersetzt von Diener, I. Heidelberg; Berlin: Spektrum, Akademischer Verlag.

Lüken, M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht. Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern*. Münster: Waxmann Verlag GmbH.

MSW - Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2008). *Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen*. Nr. 2012. Frechen: Ritterbach Verlag.

Mulligan J., Mitchelmore, M. Prescott, A. (2006). Integrating Concepts and Processes in Early Mathematics: the Australian Pattern and Structure Mathematics Awareness Project (PASMAP). In: Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M., Stehlíková, N. (Hg.): Proc. 30th Conf. of PME. Vol 4. Prague, S. 209-216.

Walther, G., van den Heuvel-Panhuizen, M., Granzer, D., Köller, O. (Hrsg.) (2007). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor GmbH & Co. KG.

Steinbring, Heinz (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction - An Epistemological Perspective*. Mathematics Education Library, Vol. 38. Berlin, New York: Springer.

Wißing, E.-M. (2015). Kinder deuten strukturierte arithmetisch-symbolische Zahlenmuster - Erste Einsichten aus einer qualitativen Studie. In: Calouri, F., Linneweber-Lammerskitten H. & Streit C. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM Verlag, Band 2, S. 1000-1003.

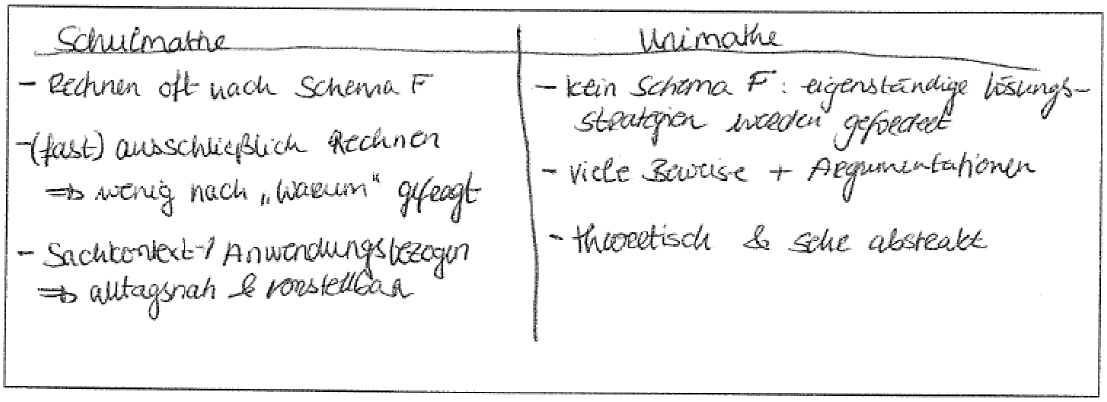
Ingo WITZKE, Siegen & Kathleen CLARK, Florida State

Der Übergangsproblematik Schule-Hochschule im Fach Mathematik begegnen. Das Kooperationsprojekt „Überpro“.

Im Kooperationsprojekt der Universitäten Siegen, Florida State und Köln, genannt „Überpro“, suchen wir im Dialog mit Studierenden Probleme am Übergang von der Schule zur Hochschule besser zu beschreiben und zu verstehen. Dazu entwickeln und erproben wir ein Interventionsseminar, in dem Studierende befragt und unterstützt werden sollen, dem oftmals als problematisch beschriebenen Übergang im Fach Mathematik zu begegnen.

In der einschlägigen Literatur werden hinsichtlich der „ersten Diskontinuität“, also des Übergangs von der Schule zur Hochschule, häufig drei Problemfelder genannt: Das Einfinden der Studienanfänger in eine neue Lebenssituation, fehlendes fachinhaltliches Wissen, sowie die Konfrontation mit einem fundamentalen Auffassungswechsel.

Der Fokus unseres gemeinschaftlichen Forschungsprojektes liegt dabei auf der tiefgehenden Dimension eines von Studierenden am Übergang beschriebenen fundamentalen Auffassungswechsels hinsichtlich des Charakters von Mathematik.



Schulmathe	Unimathe
- Rechnen oft nach Schema F	- kein Schema F: eigenständige Lösungsstrategien werden gefordert
-(fast) ausschließlich Rechnen ⇒ wenig nach „Warum" gefragt	- viele Beweise + Argumentationen
- Sachkontext-/Anwendungsbezogen ⇒ alltagsnah & vorstellbar	- theoretisch & sehr abstrakt

Abbildung 33: Eine Studierende (Bachelor Mathematik, LA GymGe) beschreibt Unterschiede von Schul- und Hochschulmathematik im Pre-Test 2015.

Dieser trat schon in einer Studie an der Universität zu Köln (vgl. Witzke 2013) sehr offen zu Tage und zeigte sich auch im Pre-Test des im Projekt „Überpro“ durchgeführten Pilotseminars im Sommer 2015 recht deutlich (vgl. Abb. 1). Hefendehl-Hebeker beschreibt dieses von Studierenden wahrgenommene Phänomen u.a. im Rahmen eines „sprunghaft ansteigenden Abstraktionsgrad“ (2010, S. 93 & vgl. 2016, S.16ff.).

Konzeptionelle Grundlage unseres Forschungsprojektes ist ein durch Rekonstruktionen, empirische Studien und theoretische Überlegungen entwickeltes bipolares Modell mathematischer Auffassungen (vgl. Burscheid & Struve 2009, Witzke 2015). Dieses ist gekennzeichnet durch einen Dualismus von empirisch-gegenständlichen Auffassungen von Mathematik in Schule und Teilen der Geschichte auf der einen Seite und formal-abstrakten Auffassungen in der modernen Hochschulmathematik auf der anderen Seite. Der häufig mehrdeutig verwendete Begriff der Abstraktion ist dabei klar gefasst; während Mathematik in empirischen Theorien (Balzer, Moulines & Sneed, 1987), vereinfacht dargestellt, seine Ursprünge und Rechtfertigung unmittelbar in der uns umgebenden physikalischen Realität hat, sind in formalen Theorien alle Begriffe gesetzt und bedürfen keiner realistischen ontologischen Bindung. Abstraktion ist in diesem Sinne gleichzusetzen mit einer Loslösung von der realistischen Ontologie der Gegenstände, so wie sie David Hilbert mit der Formulierung der Grundlagen der Geometrie exemplarisch vorgelegt hat.

Nun gibt es eine Vielzahl von Gründen (bspw. bildungstheoretische, entwicklungspsychologische, lerntheoretische & historische), die belegen, warum es sinnvoll ist, Mathematik in der Schule nicht losgelöst von der Realität, sondern in fortwährendem Bezug zu dieser zu unterrichten. Hefendehl-Hebeker führt in diesem Kontext aus (2016, S. 16-17): „Die Begriffe und Inhalte der Schule haben ihre phänomenologischen Ursprünge überwiegend in der uns umgebenden Realität.[...] Die ontologische Bindung an die Realität ist bildungstheoretisch und entwicklungspsychologisch durch Aufgabe und Ziele der allgemeinbildenden Schule gerechtfertigt." Da aber (ebd.) „Mathematik als wissenschaftliche Disziplin heute zu einem Geflecht hoch spezialisierter abstrakter Teilgebiete geworden [ist]", ist eine Kluft, die es für Studierende der Mathematik zu überwinden gilt, aus unserer Sicht unvermeidlich.

Auf Grundlage solcher Betrachtungen haben wir ein Interventionsseminar konzipiert, dass ab dem dritten Semester im Studienplan für Bachelorstudierende angeboten werden kann und welches erstmalig im Sommer 2015 als dreitägiges Blockseminar durchgeführt wurde. Konzeptionelle Grundüberlegungen bestanden darin, dass im Rahmen eines expliziten Ansatzes (vgl. Schwartz, Ledermann, Crawford, 2003), verschiedene Auffassungen von Mathematik identifiziert und in ihrer Relevanz diskutiert werden sollten. Dies geschah mit einem besonderen Fokus darauf, dass verschiedene Auffassungen von Mathematik in unterschiedlichen Kontexten adäquat sein können. Wesentlich war, dass wir im Seminar konkret zu machen suchten, an welchen Fragestellungen sich historisch ein Auffassungswechsel, insbesondere im Sinne des oben beschriebenen bipolaren Modells, vollzogen hat. Als historische Fallstudie diente dazu die Entwicklung der Geometrie (vgl. Abb. 2), die intensiv mit Hilfe originaler Quellen und einordnender Literatur diskutiert wurde.

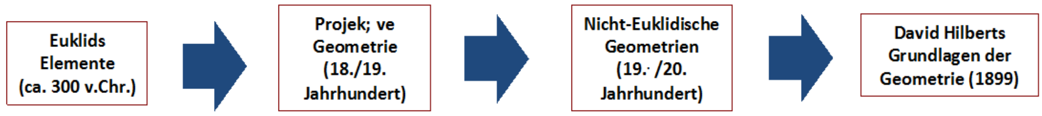


Abbildung 34: Im Seminar nachgezeichnete und diskutierte Entwicklung der Geometrie im Sinne einer Ablösung von der ontologischen Bindung an physikalisch reale Gegenstände (vgl. Witzke 2015 für eine detaillierte Beschreibung des Seminarverlaufes).

Ein besonderer Fokus lag dabei auf der Offenlegung von Fragen die historisch bzw. wissenschaftstheoretisch zu einer Ablösung der Mathematik von „jeder realistischen ontologischen Verpflichtung“ (Peckhaus 2002, S. 7) geführt haben. Wie unter einem Brennglas konnte diese Fragestellung und ihre Folgen für ein modernes (Hochschul-) Mathematikbild im Entstehungskontext von Hilberts Grundlagen der Geometrie diskutiert werden; dabei sticht Hilbert insofern heraus, als dass er eine Geometrie tatsächlich im formalistischen Sinne „exempla trahunt“ (Freudenthal 1961, S. 24) formuliert hat, mit wesentlichem Einfluss auf die Art und Weise wie Mathematik heute aufgefasst werden kann.

Ziel war es durch die explizite Bewusstmachung und Diskussion dieses Auffassungswechsels Hilfestellungen für die individuelle Übergangsbiographie der Studierenden zu geben. Kerngedanke ist dabei, dass sich Schul- und Hochschulmathematik insbesondere aus bildungs- und erkenntnistheoretischen Gründen in wesentlichen Punkten voneinander unterscheiden und daher jegliche Nivellierungsanstrengungen kritisch zu sehen sind – vielmehr sollte die Bewusstmachung und Reflektion eigener Auffassungen im Spiegel historischer und moderner Mathematikauffassungen epistemologische Hürden am Übergang sichtbar, einordbar und erklärbar machen. Durch diese Sensibilisierung für Unterschiede soll ein erfolgreicherer Umgang mit dem Übergang ermöglicht werden - ganz im Sinne der von Ableitinger et al. beschriebenen Position, welche „die erste Diskontinuität als eine Unstetigkeit, die es nicht zu glätten, sondern vielmehr explizit zu thematisieren gilt,“ (Ableitinger et al. 2013, S. VI) versteht.

Das Seminar wurde dabei durch umfängliche systematische Datenerhebung (offener Pre- und Posttest, Videoaufzeichnung von Plenardiskussionen und final Essays) zum Zwecke der Entwicklung von qualitativen Cases (Stake 1994) begleitet. Die Datenanalyse fokussierte dann auf die Erstellung von Kategorien in einem regelgeleiteten Sinne nach Strauss & Corbin (1998). Die Analyse der Daten der Pilotstudie des Projektes „Überpro“ bestätigte, dass die „belief-systeme“ der Studierenden relativ stabil sind und tiefergehende Effekte weiterer längerfristiger Maßnahmen bedürfen. Nichtsdestotrotz lies sich ablesen, dass die vorgestellte Intervention ein adäquates Werkzeug zur Entwicklung einer Bewusstheit für unterschiedliche Auffassungen von Mathematik und ihren Auswirkungen ist. Zudem zeigten sich viele Studierende mit Hilfe des Seminars in der Lage, ihre eigene Auffassung von Mathematik zu reflektieren und im Vergleich mit anderen zu beschreiben und einzuordnen. Auf Grundlage der gewonnenen Ergebnisse findet im Sommersemester 2016 ein semesterbegleitendes Seminar für Studierende des gymnasialen Lehramtes in Siegen statt, das wiederum intensiv mit Methoden qualitativer Forschung – insbesondere wöchentlich geführter Reflexionsbücher – begleitet wird.

Literatur

Ableitinger, A., Kramer, J., & Prediger, S. (Eds.). (2013). *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Balzer, W., Moulines, C. U., & Sneed, J. D. (1987). *An architectonic for science: The structuralist program*. Dordrecht: Reidel.

Burscheid, H. J., & Struve, H. (2009). *Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen*. Hildesheim: Franzbecker.

Freudenthal, H. (1961). Die Grundlagen der Geometrie um die Wende des 19. Jahrhunderts. *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte*. (7), 2–25.

Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Mathematische Wissensbildung in Schule und Hochschule. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth, & H.-G. Rück (Eds.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (pp. 15–30). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hefendehl-Hebeker, L., Ableitinger, C., & Herrmann, A. (2010). Mathematik besser verstehen. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, *44*, 93–94.

Peckhaus, V. (2002). Impliziert Widerspruchsfreiheit Existenz? Oskar Beckers Kritik am formalistischen Existenzbegriff. Retrieved from (19.3.2016) http://kw1.uni-paderborn.de/institute-einrichtungen/institut-fuer-humanwissenschaften/philosophie/personal/peckhaus/texte-zum-download/

Schwartz, R. S., Lederman, N. G., & Crawford, B. A. (2004). Developing Views of Nature of Science in an Authentic Context: An Explicit Approach to Bridging the Gap Between Nature of Science and Scientific Inquiry. *Wiley Periodicals*, 610–645.

Stake, R. E. (1994). Case Studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 236–247). Thousand Oaks, CA: Sage.

Strauss, A., & Corbin, J. *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Witzke, I. (2013). Zur Übergangsproblematik im Fach Mathematik. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, *47*, 1098–1101.

Witzke, I. (2015). Different understandings of mathematics: An epistemological approach to bridge the gap between school and university mathematics. *ESU*,7, 303–322.

Susanne WÖLLER & Simone REINHOLD, Leipzig

Konzeptionelles Begriffsverständnis von Drittklässlern zu den Begriffen *Würfel* und *Quader*

In der Grundschule spielt das Wissen um geometrische Objekte eine wichtige Rolle. Dieses Wissen artikuliert sich überwiegend auf einer sprachlichen Ebene, z. B. durch das Benennen von Eigenschaften dieser Objekte (*gleich lange Seiten, gleich große Flächen*). Allerdings haben Grundschulkinder häufig Schwierigkeiten ihr mathematisches Wissen und ihre Vorstellungen über Flächen und Körper sprachlich auszudrücken. So können konstruktive Bauaktivitäten als gewinnbringend erachtet werden, um das Verständnis von Kindern über geometrische Objekte zu erfassen. Vor diesem Hintergrund wurden im Sommer und Herbst 2015 insgesamt 22 Kinder im Alter von acht bzw. neun Jahren zu ihrem Wissen und ihren Vorstellungen zu den Begriffen *Würfel* und *Quader* befragt. Mit Bausteinen sollten diese Körper konstruiert und die Bauaktivitäten kommentiert werden.

Begriffsverständnis von Kindern zu geometrischen Körpern

Fischbein (1993) beschreibt ein *Konzept* allgemein als "(…) ideal representation of a class of objects, based on their common features" (S. 139). In diesem Sinne beziehen sich *geometrische Konzepte* auf Eigenschaften von geometrischen Figuren, die visuell oder haptisch bei konkreten Repräsentanten der Klasse wahrgenommen werden können. So ordnen Kinder Repräsentanten geometrischer Objekte durch das Erkennen besonderer Flächenformen, Seitenlängen oder Winkelgrößen in eine Begriffskategorie (z. B. *Viereck* oder *Würfel*) ein. Darauf aufbauend umfasst *konzeptionelles Begriffsverständnis* nicht nur spezifisches mathematisches Wissen (vgl. Vollrath, 1984, S. 9-10), das die Kinder über geometrische Formen besitzen, sondern auch subjektiv individuelle Vorstellungsbilder über geometrische Objekte (vgl. Tall & Vinner, 1981). Ebenso relevant ist die Ausprägung von Vorstellungen über das zugrundeliegende Begriffsnetz, in das Begriffe aufbauend auf ihren Eigenschaften eingeordnet werden können (Weigand, 2014, S. 103ff).

Das *Modell der Entwicklung geometrischen Begriffswissens* nach Van Hiele (1986) stellt in diesem Kontext eine weitere Grundlage dar. Hier werden fünf aufeinander aufbauende Denkebenen definiert, die jeweils unterschiedliche Ausprägungen des Wissens bei Kindern beleuchten. So befinden sich Schulanfänger vorwiegend auf der Ebene des räumlich-anschauungsgebundenen Denkens (*Visualization*). Hierbei werden geometrische Figuren durch ihre äußere Erscheinungsform erkannt und beschrieben. Die Ebene des analysierend-beschreibenden Denkens (*Analysis*) ist geprägt durch die Fähigkeiten zunehmend mathematische Eigenschaften eines geometrischen Objekts für dessen Kategorisierung in Betracht zu ziehen. Erst wenn die Kinder in der

Lage sind ein Beziehungsnetz zwischen den Eigenschaften von geometrischen Figuren aufzuspannen, befinden sie sich auf der Ebene des abstrahierend-relationalen Denkens (*Abstraction*). Für die hier vorgestellte Studie mit Kindern im Grundschulalter sind zunächst nur die ersten drei Ebenen relevant (vgl. Szinger, 2008, S. 173).

Forschungsfragen, methodisches Vorgehen und Datenauswertung

Aus Untersuchungen zu ebenen Figuren (u. a. Burger & Shaughnessy, 1986; Maier & Benz, 2014; Thom & McGarvey, 2015) ist bekannt, dass Zeichnungen und Beschreibungen von Kindern Rückschlüsse auf das konzeptionelle Begriffsverständnis zulassen. Dieses Vorgehen als Möglichkeit der Artikulation geometrischen Wissens findet sich auch in Studien zu räumlichen Objekten wieder (u. a. Lewis, 1963; Mitchelmore, 1978). Aus Studien, die Baustrategien von Grundschulkindern in den Blick nehmen (u. a. Reinhold et al., 2013), ergibt sich ferner, dass individuelle Konstruktionen und Produkte von Kindern einen Zugang zu ihren individuellen Vorstellungen bieten. Zudem unterliegen Bauaktivitäten im Vergleich zu Zeichnungen deutlich geringeren Restriktionen im Hinblick auf die (fein)motorischen Fähigkeiten von Grundschulkindern.

Daher versucht das Projekt tiefere Einblicke in das konzeptionelle Begriffsverständnis von Kindern im Alter von acht bis zwölf Jahren zu den geometrischen Körpern *Würfel* und *Quader* über konstruktive Bauaktivitäten mit vorgegebenem Material (Würfel, Quader, Prismen, Fröbel´s 6. Spielgabe) und begleitende sprachliche Artikulationen der Kinder zu erlangen. In einem ersten Schritt wird dabei durch die Befragung von Drittklässlern aus unterschiedlichen Zusammenhängen versucht eine breite Basis im Sinne einer Querschnittstudie zu schaffen. Im Fokus steht dabei die Frage, welcher Art (und Größe) die von den Kindern konstruierten Bauwerke sind und inwieweit sich die Bauaktivitäten und Antworten der Kinder mit dem oben vorgestellten Van-Hiele-Modell verbinden lassen.

Zunächst wurden dazu zehn deutsche und zwölf malaysische Kinder dritter Klassen (Leipzig bzw. Penang, Malaysia) in einer Eins-zu-Eins-Situation mit einem halbstrukturierten Fragebogen interviewt. Während des ca. 20-minütigen Interviews wurden den Kindern sowohl Impulse für konstruktive Bauaktivitäten (*Baue aus diesen Bausteinen einen Würfel (Quader). Kannst du auch noch einen anderen Würfel (Quader) bauen?*), als auch Anregungen zu sprachlichen Äußerungen (*Erkläre mir, was du machst. Warum ist das für dich ein Würfel (Quader)?*) gegeben. In die Konzeption des Leitfadens wurden vorliegende Ergebnisse aus Studien zur Entwicklung geometrischen Denkens bei Kindern (u. a. Crowley, 1987) einbezogen.

Alle Interviews wurden mittels f4-Software transkribiert und nach der Methode der Grounded Theory (Corbin & Strauss, 2015) in Atlas.ti codiert. Auf der Basis konsensueller Validierung wurde ein Codierleitfaden erstellt, der das Begriffsverständnis der Kinder zum *Würfel* und zum *Quader* in Bauaktivitäten sowie die begleitende sprachliche Artikulation einfängt. Ziel ist es, diesen Codierleitfaden mit zunehmendem Datenmaterial weiter auszudifferenzieren und auf diese Weise Hypothesen zur Entwicklung des konzeptionellen Begriffsverständnisses von Kindern im Alter von acht bis zwölf Jahren zu generieren.

Einblicke in erste Ergebnisse und Schlussfolgerungen

Die Auswertung der Daten zeigt eine große Vielfalt an individuellen Vorgehensweisen der befragten deutschen und malaysischen Kinder beim Bauen und Umbauen. Dadurch kann ein großes Spektrum an individuellen Vorstellungen von Drittklässlern bzgl. der ausgewählten Körper angenommen werden. Die Kinder tendieren dazu prototypische Vorstellungsbilder von den Begriffen *Würfel* und *Quader* in ihren Bauaktivitäten umzusetzen: So werden vorwiegend Quader gebaut, deren Schichten relativ zum Gesamtobjekt ausgewogen sind (2x3x2-Quader oder 3x4x3-Quader). Lange und dünne Quader werden dahingegen selten gebaut. Beim Bauen von Würfeln orientieren sich die Kinder größtenteils an der quadratischen Grundfläche, wobei manche Kinder zum Teil die Höhe nicht berücksichtigen und beispielweise einen 3x3x1-Quader bereits als Würfel bezeichnen.

Die Kinder aus Deutschland nutzen in ihren Beschreibungen relativ unsicher mathematisches Wissen und verwenden Eigenschaften der Begriffskategorien der jeweiligen Körper. So sind z. B. Äußerungen wie *„die Flächen sehen quadratisch aus"* oder *„nur die gegenüberliegenden Seiten sehen gleich aus"* Indikatoren für die Zugehörigkeit zur Van-Hiele-Ebene *Visualization* mit Tendenz zur Ebene *Analysis*. Die Kinder aus Malaysia sind teilweise ebenfalls dazu in der Lage. Dennoch wird eine noch größere Spanne eröffnet, da einige Begründungen der Kinder für ihre Bauaktivitäten rein intuitiv und anschauungsgebunden zu sein scheinen (*„I just know this is a cube*").

Die Ergebnisse der Studie bereichern empirisch begründet das Van-Hiele-Modell um Aspekte geometrischen Begriffsverständnisses mithilfe konstruktiver Bauaktivitäten. Es stellt sich die Frage, wie sich das Wissen über die genannten geometrischen Körper in den folgenden Klassenstufen weiterentwickelt. Dieses Interesse bildet den Ausgangspunkt für eine anknüpfende Längsschnittstudie, die tiefere Einblicke in die Entwicklung des geometrischen Begriffsverständnisses von Kindern im Alter von acht bis zwölf Jahren ermöglichen wird.

Literatur

Burger, W. F. & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17(1),* 31-48.

Corbin, J. & Strauss, A. (2015). *Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory*. Thousand Oaks: Sage.

Crowley, M. (1987). The Van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. In M. Montgomery Lindquist (Hrsg.), *Learning and Teaching Geometry, K-12* (S. 1-16). Reston, VA: NCTM.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24(2),* 139-162.

Franke, M. & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*. Wiesbaden: Springer.

Lewis, H. P. (1963). Spatial Representation in Drawing as a Correlate of Development and a Basis for Picture Preference. *Journal of Genetic Psychology, 102*, 95-107.

Maier, A. S. & Benz, C. (2014). Children's Conceptual Knowledge on Triangles Manifested in their Drawings. In P. Liljedahl et al. (Hrsg.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA36* (Vol. 4, S. 153-160). Vancouver, Canada: PME.

Mitchelmore, M. C. (1978). Developmental Stages in Children's Representation of Regular Solid Figures. *The Journal of Genetic Psychology, 133(2),* 229-239.

Reinhold, S., Beutler, B. & Merschmeyer-Brüwer, C. (2013). Preschoolers Count and Construct: Spatial Structuring and its Relation to Building Strategies in Enumeration-Construction Tasks. In A. Lindmeier & A. Heinze (Hrsg.), *Proceedings of the 37th Conference of the IGPME* (Vol. 4, S. 81-88). Kiel: PME.

Szinger, I. S. (2008). The Evolvement of Geometrical Concepts in Lower Primary Mathematics. *Annales Mathematicae et Informaticae, 35,* 173-188.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151–169.

Thom, J. S. & McGarvey, L. M. (2015). The Act and Artifact of Drawing(s): Observing Geometric Thinking with, in, and through children´s drawings. *ZDM Mathematics Education, 47(3),* 465-481.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education.* Orlando: Academic Press.

Vollrath, H.-J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*. Stuttgart: Klett.

Weigand, H.-G. (2014). Begriffslernen und Begriffslehren. In H.-G. Weigand et al. (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 99-122). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Elena ZANNETIN, TU Dortmund

Roland RINK, TU Braunschweig; Elke BINNER, HU Berlin; Christoph SELTER, TU Dortmund

Primarstufe Mathematik kompakt: PriMakom - Eine webbasierte Selbstlernplattform mit praktischen Impulsen für guten Mathematikunterricht

1. Die Ausgangslage

In vielen Bundesländern besteht das Problem, dass aufgrund des Fachlehrermangels der Mathematikunterricht an Grundschulen von einem großen Prozentsatz fachfremd unterrichtender Mathematiklehrerinnen und Lehrer erteilt wird. So gaben im Jahr 2011 beispielsweise in NRW 27,3% der anlässlich der Ländervergleichsstudie des IQB befragten Lehrkräfte an, das Fach fachfremd zu unterrichten, in Hamburg sogar 48,1% (vgl. Richter et al. 2012, S. 240).

Studien belegen in diesem Zusammenhang, dass die Entwicklung der mathematikunterrichtsbezogenen Kompetenzen der Lehrkräfte maßgeblich vom Umfang ihrer mathematischen und mathematikdidaktischen Ausbildung beeinflusst wird (vgl. u.a. Blömeke et. al 2010), und dass sich signifikante Kompetenzunterschiede zwischen Schülerinnen und Schülern zeigen, die von in Mathematik ausgebildeten bzw. fachfremd unterrichtenden Lehrkräften unterrichtet werden (vgl. u.a. Baumert et al. 2011; Richter et al. 2012). Aus diesen Ergebnissen lässt sich ableiten, dass ein Qualifizierungsbedarf für diese Lehrkräfte vermutet werden kann. Hier setzt das Projekt PriMakom des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) an.

Das DZLM wurde 2011 mit dem Ziel gegründet, Fort- und Weiterbildungsangebote für Lehrkräfte und speziell auch für die o.a. Zielgruppe zu entwickeln und anzubieten. Die Selbstlernplattform PriMakom (primakom.dzlm.de) ist eines dieser Angebote. Sie soll vor allem für fachfremd unterrichtende Mathematiklehrkräfte eine Möglichkeit darstellen, sich in zentralen Bereichen des Mathematikunterrichts fortbilden zu können. Das webbasierte Angebot berücksichtigt dabei deren Rahmenbedingungen, wie z. B. ihre zeitlichen Ressourcen, da die „Selbstfortbildung“ unabhängig von Zeit und Ort online möglich ist.

Aber auch andere “klassische” Fortbildungsangebote des DZLM nutzen PriMakom, um Kurse, die in der Regel aus einem Wechsel von Präsenz- und Selbstlernphasen bestehen, inhaltlich anzureichern.

2. Das Projekt: Zielsetzungen und Leitideen

Ziel des Projektes ist, für die Grundzüge eines "guten" und zeitgemäßen Mathematikunterrichts zu sensibilisieren. Indem konkrete Anregungen zur Planung und Umsetzung von Mathematikunterricht gegeben werden, sollen die Lehrkräfte Unsicherheiten ab- und Motivation aufbauen können. Das PriMakom-Angebot ermöglicht einen Ausbau ihres mathematikunterrichtsbezogenen Wissens und Könnens. Diese Kompetenzen sollen schließlich dazu führen, den eigenen Mathematikunterricht auf der Basis der fachlichen und fachdidaktischen Kenntnisse weiter zu entwickeln.

Die Website stellt dabei kein „Rundumangebot" und keine „Materialdatenbank" dar. Durch eine kompakte, exemplarische Darstellung zentraler Themen und Inhalte können die Nutzerinnen und Nutzer zur Reflexion über wesentliche Elemente guten Mathematikunterrichts angeregt werden. Dabei können auf eine sehr anschauliche und kompakte Art und Weise grundlegende Leitideen verinnerlicht werden, die sie selbst umsetzen und eine Übertragung auch auf andere Bereiche in ihrem Unterricht ermöglichen sollen.

Auf der PriMakom-Website werden dabei nicht nur neue Inhalte und Materialien bereit gestellt, sondern auch bestehende Fortbildungsangebote im Rahmen des DZLM (z.B. aus den Projekten PIKAS und KIRA) zielgruppengerecht aufgearbeitet, so dass die Nutzerinnen und Nutzer zu einem produktiven Umgang mit diesem vorhandenem Material angeleitet werden.

3. Die Umsetzung: Strukturen und Gestaltungsprinzipien

Auf der PriMakom-Plattform werden verschiedene thematische Selbstlernmodule angeboten. Zum einen werden Grundlagen zeitgemäßen und guten Mathematikunterrichts konkretisiert (z.B. „Mathe - mehr als rechnen"), zum anderen können inhaltsübergreifende Themen zur Gestaltung von Mathematikunterricht (z.B. „Sprachförderung im Mathematikunterricht") sowie zentrale Inhalte aus den vier Inhaltsbereichen der Bildungsstandards (z.B. „Operationsverständnis aufbauen") von den Nutzerinnen und Nutzern erarbeitet werden.

Die Ausführungen der Selbstlernmodule folgen dabei einem strukturell einheitlichen Aufbau und ermöglichen dadurch eine Sensibilisierung für die einzelnen Themenfelder auf verschiedenen Ebenen. Ein problemorientierter **Einstieg** in das jeweilige Modul soll dabei die Lehrkraft bei zentralen Fragen „abholen". Konkrete Beispiele aus dem Unterrichtsalltag erzeugen Anknüpfungspunkte und Interesse und bauen dadurch Motivation auf, sich mit dem jeweiligen Modul auseinanderzusetzen. Im **Hintergrund** wird den im Einstieg aufgeworfenen Fragen fachlich und fachdidaktisch nachgegangen. Im

Gliederungspunkt **Unterricht** erfährt dieser Hintergrund eine unterrichtspraktische Konkretisierung, indem in Form eines oder mehrerer Unterrichtsbeispiele Anregungen zur Umsetzung gegeben werden. Am Ende eines jeden Moduls werden unter dem Menüpunkt **Material** weitere Anregungen zum Thema in Form von Unterrichtsvorschlägen, Literatur oder weiterführenden Verweisen gegeben.

Bei der Konzeption der Module wurde darauf geachtet, Gestaltungsprinzipien zum multimedialen Lernen zu berücksichtigen und zu nutzen (vgl. Mayr 2009). Diese sind unter anderem:

- **Multimedia Principle**. Die Kombination aus Text (gesprochen oder geschrieben) und Bild (statisch oder dynamisch) ist besser als eine Nur-Text-Darstellung.
- **Personalization Principle**. Die Lernenden sollten direkt und eher umgangssprachlich als formal und unpersönlich angesprochen werden.
- **Signaling Principle**. Verbale Hinweise wie Betonungen oder bildhafte Hinweise wie Pfeile werden genutzt, um die Lernenden auf die wesentlichen Elemente hinzuweisen.

Der Einbezug von echten Schülerdokumenten, Videoszenen aus dem Unterricht oder mathematischen Gesprächen mit Kindern ist in den Ausführungen der Module ein weiteres zentrales Gestaltungselement. Sie ermöglichen es, einen konkreten Bezug zum Unterrichtsalltag herzustellen und somit den Nutzen für den eigenen Unterricht herauszuarbeiten.

Dabei werden die Nutzerinnen und Nutzer auch immer wieder aktiv einbezogen: In Eigenaktivitäten werden sie dabei zu einer kontinuierliche Selbstreflexion sowohl der Ausführungen, als auch ihren eigenen Unterrichts, angeregt.

4. Aktueller Stand und Ausblick

PriMakom ist seit dem Launch im Herbst 2015 als Microsite des DZLM Webauftritts (www.dzlm.de) erreichbar. Aktuell gibt es 18 Module, die online erarbeitet werden können.

Die Selbstlernplattform stellt ein sich stetig weiterentwickelndes und "wachsendes" Fortbildungsangebot dar. Der beständige Ausbau durch die Konzeption neuer Module wird durch die Evaluation der Seite begleitet. Im Rahmen eines Dissertationsprojektes wird z.B. das Nutzungsverhalten von Lehrkräften anhand eines exemplarischen Themas erhoben, auf Arbeitstagungen mit fachfremd Unterrichtenden werden konkrete Selbstlernmodule erprobt. Die dort gewonnen Erkenntnisse sollen dabei auch zur Weiterentwicklung der Plattform sowie der einzelnen Module führen.

Langfristig sollen die Selbstlernmodule noch in weiteren Fortbildungen des DZLM eingesetzt werden, in dem diese z.B. als Vorbereitung für die Präsenzveranstaltung als fachliche und fachdidaktische Grundlage zunächst selbst erarbeitet werden.

Literatur

Baumert, J. & Kunter, M. (2011). Das mathematikspezifische Wissen von Lehrkräften, kognitive Aktivierung im Unterricht und Lernfortschritte von Schülerinnen und Schülern. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), Professionelle Kompetenz von Lehrkräften – Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV (S. 163-192). Münster: Waxmann.

Blömeke, S., Kaiser, G., Döhrmann, M., Suhl, U. & Lehmann, R. (2010). Mathematisches und mathematikdidaktisches Wissen angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich. In S. Blömeke, G. Kaiser & R. Lehmann (Hrsg.), TEDS-M 2008 Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich (S. 195-252). Münster: Waxmann.

Mayer, Richard E. (2009). Multimedia Learning (2nd). New York: Cambridge University Press.

Richter, D., Kuhl, P., Reimers, H. & Pant, H. A. (2012).Aspekte der Aus- und Fortbildung von Lehrkräften in der Primarstufe. In P. Stanat, H. A. Pant, K. Böhme & D. Richter (Hrsg.), Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik. Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs 2011 (S. 237-250). Münster: Waxmann.

Julia ZERLIK, Frankfurt am Main

Struktur-Lege-Technik als empirisches Instrument in der mathematikdidaktischen Professionsforschung

Im Rahmen des vom BMBF geförderten Projekts „Lehrerbildung vernetzt entwickeln (Level). Kompetenzentwicklung im Lehramt durch die systematische Analyse von Unterrichtssituationen in fächer- und phasenübergreifenden Kooperationen“ an der Goethe-Universität Frankfurt/Main sollen im Rahmen von mathematikdidaktischen Seminaren subjektive Theorien von Studierenden zu bedeutsamen Faktoren für das Gelingen von Mathematikunterricht empirisch sichtbar gemacht werden. Hierbei ist sowohl das stoffdidaktische, wie auch das pädagogische Wissen bedeutsam. Als Erhebungsinstrument wird hierfür die Struktur-Lege-Technik entwickelt.

1. Struktur-Lege-Technik (SLT)

„Struktur-Lege-Verfahren sind graphische Verfahren, mit deren Hilfe Schaubilder der Subjektiven Theorien erstellt werden. Diese Schaubilder oder Strukturabbildungen bestehen zum einen aus inhaltlichen Konzepten und zum anderen aus formalen Relationen, mit denen die Konzepte verknüpft werden. Alle Konzepte und Relationen werden auf Kärtchen geschrieben, die sich auf einer Unterlage ordnen, umorganisieren und befestigen lassen.“ (Dann, 1992, S. 3.) In der vorliegenden Studie werden den Studierenden Konzepte in Form von Begriffen zur Verfügung gestellt. Die Relationen werden als Pfeile dargestellt, angelehnt an den Leitfaden der Heidelberger Struktur-Lege-Technik (Dann, 1992).

2. Entwicklung des Erhebungsinstruments

Die Vorstudie, die zur Entwicklung eines Instruments für die Erhebung subjektiver Theorien zu Zusammenhängen zwischen den für Mathematikunterricht bedeutsamen Unterrichtsfaktoren, wurde im Wintersemester 2015/16 in drei Mathematikdidaktikseminaren (4 SWS) an der Goethe-Universität in Frankfurt durchgeführt. Pro Seminar nahmen zwischen 26 und 28 Studierende im Hauptstudium (5. – 6. Semester) teil. Die beiden Seminare „Diversität im Mathematikunterricht“ fanden als Blended-Learning-Seminare mit drei Präsenzphasen statt. Inhaltlich wurde den Studierenden die Gelegenheit gegeben, sich mit verschiedenen Diversitätsaspekten, die im Mathematikunterricht relevant sind, auseinanderzusetzen. Das dritte Seminar „Mathematiklernen und Multimodalität“ war ein wöchentliches Präsenzseminar, bei welchem die verschiedenen Modi Gestik, Lautsprache und Handlungen am Material und ihre Bedeutung für mathematisches Lernen im Fokus standen.

Jeweils in der zweiten (Erhebungszeitpunkt t1) und 14. bzw. 15 Semesterwoche (t2) führten die Probanden die Struktur-Lege-Technik durch. Zusätzlich füllten Sie einen Fragebogen mit personenbezogenen Daten (nur bei t1) und Fragen zur Selbsteinschätzung (t1 und t2) aus.

Für die Struktur-Lege-Technik wurden 23 Begriffe, die für mathematikdidaktisch relevante Aspekte für Unterricht stehen, ausgewählt. Sie lassen sich folgenden zentralen Bereichen zuordnen:

- *Lernen* (Alltagssprache, Mathematische Bildungssprache, mathematische Fachsprache, Mathematische Lernprozesse, Mathematischer Lerngegenstand, Motivation im Mathematikunterricht, Mathematischer Erkenntnisprozess, Lernerfolg, Handeln am Material)
- *Unterrichtsgestaltung* (Gestaltung des Mathematikunterrichts, Mathematische und mathematikdidaktische Kompetenz der Lehrkraft, Offene mathematische Lernangebote, Kooperatives Lernen, Mathematische Situation, Interaktion zwischen Lernenden, Interaktion zwischen Lernenden und Lehrenden)
- *Lernende* (Jungen, Mädchen, Kinder mit Migrationshintergrund, Lernende mit schwachen mathematischen Fähigkeiten, Lernende mit starken mathematischen Fähigkeiten, mathematisches Selbstkonzept, Mathematische Vorkenntnisse)

Die Begriffe werden den Studierenden einzeln auf Karten präsentiert. Außerdem werden den Studierenden für die Erstellung der individuellen Begriffsnetze folgende Verknüpfungsmöglichkeiten in Form eines Leitfadens zur Verfügung gestellt (nach Damm, 1992):

Zeichen	*Erläuterung*
$=$	Definitorisch identisch mit „....“
$\overset{A}{}\!\longrightarrow\!\overset{B}{}$	A bewirkt B, d.h. B ist von A abhängig. Die Richtung ist positiv.
$_{A}\!\longrightarrow^{D}$	A bewirkt D, d.h. D ist von A abhängig. Die Richtung ist negativ.
$\overset{A}{}\!\longleftrightarrow\!\overset{B}{}$	Steht für eine gegenseitige Abhängigkeit von A und B. Die Richtung ist positiv, d.h. gleichsinnig.
$^{B}\!\longleftrightarrow_{D}$	Steht für eine gegenseitige Abhängigkeit von B und D. Die Richtung ist negativ, d.h. gegenläufig.
$\longrightarrow$ $\longleftrightarrow$	Sie können auch selbst Relationen definieren, in dem Sie die Beziehung auf einen Pfeil schreiben.

Für die Vorstudie wurden zwei Fragen bearbeitet, entlang derer die Ergebnisse bezüglich der Anpassung der SLT für die mathematikdidaktische Professionsforschung im Folgenden vorgestellt werden.

3. Ergebnisse – Erhebungszeitpunkt t1

Für die hier vorgestellten Ergebnisse wurden Begriffsnetze von 81 Studierenden zum Erhebungszeitpunt t1 analysiert.

Welche Strukturen entstehen bei der Verwendung der Begriffe?

Für eine genauere Analyse der sichtbar gewordenen Strukturen, wurden für drei Begriffe, die Studierende häufig als Ausgangspunkt bzw. Ziel von Vernetzungen gesetzt haben (Mathematischer Erkenntnisprozess, mathematische Lernprozesse und Kinder mit Migrationshintergrund) untersucht, welche Zusammenhänge zu allen anderen Begriffen hergestellt wurden (direkte Verbindung, Verbindung über einen weiteren Begriff etc.). Dabei wurde auch berücksichtigt, welche Pfeilart (von A nach B, von B nach A und Doppelpfeil) verwendet wurde.

Der Begriff „Mathematischer Erkenntnisprozess" wurde von 50% der Probanden mit dem Begriff „Mathematische Lernprozesse" direkt verbunden. Es wurden hierbei alle drei Pfeilarten verwendet. Direkte Verknüpfungen zum Begriff „Mathematischer Erkenntnisprozess" zeigten sich auch zu „Handeln am Material", „Mathematische Situation" und „Offene mathematische Lernangebote".

Ein ähnliches Bild zeigte sich für den Begriff „Mathematische Lernprozesse". Dies ist nicht überraschend, da die Studierenden den Lernprozess wie oben beschrieben sehr eng mit dem Erkenntnisprozess verknüpft sehen.

Beim Begriff „Kinder mit Migrationshintergrund" dagegen wurden von den Studierenden generell weniger Verknüpfungen zu anderen Begriffen hergestellt. Am häufigsten wurde eine direkte Verbindung zum Begriffskärtchen „Jungen" ($n = 15$), „Mädchen" ($n = 17$), „mathematische Fachsprache" ($n = 19$) und „Alltagssprache" ($n = 23$) gezeichnet.

Welche Gruppen von Begriffen lassen sich bilden?

Es wird davon ausgegangen, dass Begriffe mit vielen Verknüpfungen für Studierende eine zentralere Rolle spielen, als Begriffe mit wenigen Verknüpfungen. Die Anzahl der Verknüpfungen bildete den „Begriffswert" je Begriff und Proband(in). Die Pfeilart wurde hierbei außer Acht gelassen. Mit den so generierten Daten von 40 Probanden(innen) wurde eine Explorative Faktorenanalyse (Hauptkomponentenanalyse mit Varimax-Rotation und Kaiser-Normalisierung) durchgeführt.

Alle Variablen (Begriffe) wiesen Faktorenladungen von > .534 auf:

- *Faktor 1: Lernende + Sprache* (Jungen, Mädchen, Kinder mit Migrationshintergrund, Alltagssprache, Mathematische Bildungssprache, Fachsprache, Lernende mit schwachen mathematischen Fähigkeiten, Lernende mit starken mathematischen Fähigkeiten)
- *Faktor 2: Mathematisches Lernen* (Mathematische Situation, Mathematische Lernprozesse, Mathematischer Lerngegenstand)
- *Faktor 3: Einflussfaktoren Mathematikunterricht* (Motivation im Mathematikunterricht, Gestaltung des Mathematikunterrichts, Mathematische und mathematikdidaktische Kompetenz der Lehrkraft, Lernerfolg, Handeln am Material, Offene mathematische Lernangebote, Kooperatives Lernen, Mathematischer Erkenntnisprozess)
- *Faktor 4:Interaktion und Selbstverständnis* (Interaktion zwischen Lernende, Interaktion zwischen Lernenden und Lehrpersonen, Selbstkonzept in Mathematik, Mathematische Vorkenntnisse)

5. Zusammenfassung und Ausblick

Die für die vorgestellte Vorstudie angepasste Form der Struktur-Lege-Technik führt zu interpretierbaren Ergebnissen, was für die Nutzung im Kontext mathematikdidaktischer Professionsforschung spricht. Dennoch haben die Ergebnisse gezeigt, dass für die Hauptstudie eine weitere Anpassung der Begriffe notwendig wird. Geplant ist ein zusätzlicher Fragebogen und Einzelinterviews, um das Verständnis der Studierenden zu den einzelnen Begriffen und den verwendeten Relationen zu erfragen, um damit die entstanden Begriffsnetze als Repräsentation subjektiver Theorien besser deuten zu können.

„Level – Lehrerbildung vernetzt entwickeln“ wird im Rahmen der gemeinsamen Qualitätsoffensive Lehrerbildung von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter dem Förderkennzeichen FKZ 01JA1519 gefördert.

Literatur

Dann, H.-D. (1992). Variation von Lege-Strukturen zur Wissensrepräsentation. In: Scheele, B. (Hrsg.) Struktur-Lege-Verfahren als Dialog-Konsens-Methodik. Ein Zwischenfazit zur Forschungsentwicklung bei der rekonstruktiven Erhebung subjektiver Theorien. Münster:: Aschendorff, S.3.

Voss, T.; Kunina-Habenicht, O.; Hoehne, V.; Kunter, M. (2015): Stichwort Pädagogisches Wissen von Lehrkräften: Empirische Zugänge und Befunde, In: ZfZ (2015) 18: 187-223.

Anja ZERRENNER, Anke LINDMEIER, IPN Kiel

Messung fachspezifischer Kompetenzen von Lehrkräften im Mathematikunterricht

Der folgende Beitrag stellt einen Ansatz zur Messung fachspezifischer handlungsnaher Kompetenzen von Lehrkräften im Rahmen des Mathematikunterrichts vor. Er beschreibt damit einen Teil eines Dissertationsprojekts, welches sich mit dem Zusammenhang zwischen den fachspezifischen Kompetenzen von Lehrkräften und der fachspezifischen Qualität der Lern-umgebung im Fach Mathematik befasst.

Fachspezifische Aspekte der Qualität einer Lernumgebung

Im Angebots-Nutzungs-Modell von Helmke (2009) deutet sich an, dass eine wirkungsvolle Nutzung eines Lernangebots von zahlreichen Einflussfaktoren abhängt. Insbesondere die Qualität des Lernangebots selbst ist von wesentlicher Bedeutung. Im Bereich der Forschung zur Unterrichtsqualität gibt es bereits verschiedene fachübergreifende Ansätze, die an dieser Stelle nicht in aller Ausführlichkeit dargestellt werden können. Aus fachdidaktischer Sicht stehen vor allem die fachspezifischen Qualitätsaspekte der Lernumgebung im Fokus.

Klieme, Schümer und Knoll (2001) beschreiben drei Basisdimensionen für Unterrichtsqualität: Die *Klassenführung* ist dabei gänzlich fachunspezifisch konzeptualisiert, während die *Schülerorientierung* bereits in einigen Teilen und die *kognitive Aktivierung* nahezu gänzlich fachspezifisch zu fassen sind (vgl. dazu auch Lipowsky et al., 2009). Das kognitive Aktivierungspotenzial von Aufgaben wurde z. B. in der COACTIV-Studie zur Beurteilung der Qualität des Lehr-Lern-Materials als ein fachspezifisches Merkmal für Unterrichtsqualität genutzt (Jordan et al., 2008). Weitere fachspezifische Aspekte der Qualität von Mathematikunterricht beschreiben Schoenfeld und Floden (2014) ausgehend vom Projekt „TRU Math“ in fünf Dimensionen für nachhaltiges, verstehensbasiertes Lernen im Mathematikunterricht. Diese beziehen sich vor allem auf fachspezifische prozessbezogene Merkmale des Unterrichts, die die kognitive Aktivierung der Lernenden begünstigen. Neben dem angemessenen kognitiven Anforderungsniveau liegt der Fokus dabei vor allem auf dem eigenständigen mathematischen Denken und Handeln der Lernenden. Bislang sind die dort genannten Aspekte zwar noch nicht empirisch untermauert, bieten jedoch aufgrund ihrer Orientierung an der Praxis Anhaltspunkte für fachspezifische Qualitätsmerkmale von Mathematikunterricht.

Fachspezifische handlungsnahe Kompetenzen von Lehrkräften

Nach Helmke (2009) ist ein durch die Unterrichtsqualität vermittelter Zusammenhang zwischen den professionellen Kompetenzen der Lehrkraft und dem Lernzuwachs der Schülerinnen und Schüler anzunehmen. Dies stützt beispielsweise auch die COACTIV-Studie, bei der u. a. das professionelle Wissen von Mathematiklehrkräften, das Potenzial der verwendeten Aufgaben sowie die Schülerleistungen in den Blick genommen wurden (Kunter et al., 2011). Aus fachdidaktischer Sicht liegt der Fokus insbesondere auf einem möglichen Zusammenhang zwischen fachspezifischer Qualität einer Lernumgebung und den fachspezifischen Kompetenzen der Lehrkraft. Von besonderem Interesse sind dabei handlungsnahe fachspezifische Kompetenzen, da diese gerade beim unterrichtlichen Handeln, d. h. der Bereitstellung, Implementation sowie Nachbereitung der Lernumgebung, zum Tragen kommen. Für die Betrachtung derer wird im Folgenden das Kompetenzmodell zugrunde gelegt, wie es auch bei Lindmeier (2011) verwendet wird. Dort wird die reflexive Kompetenz als jene Kompetenz konzeptualisiert, die benötigt wird, um eine qualitativ hochwertige Lernumgebung im Fach Mathematik vor- und nachbereiten zu können. Die aktionsbezogene Kompetenz hingegen ist nötig für die adäquate Implementation der Lernumgebung. Diese Kompetenzen sind folglich direkt an den beruflichen Anforderungen orientiert, basieren aber zugleich auf dem fachspezifischen professionellen Wissen der Lehrkräfte, wie es beispielsweise auch in der COACTIV-Studie konzeptualisiert wurde (Kunter et al., 2011); sie sind somit zum einen handlungsnah und zum anderen gerade fachspezifisch gefasst.

Operationalisierung handlungsnaher fachspezifischer Kompetenzen

Die Operationalisierung der reflexiven und aktionsbezogenen Kompetenz von Lehrkräften erfolgte bislang im Rahmen von standardisierten computerbasierten Interviews (z. B. Knievel, Lindmeier & Heinze, 2015). Da die reflexive und aktionsbezogene Kompetenz solche Kompetenzen beschreiben, die für die Unterrichtsvor- und -nachbereitung bzw. die Unterrichtsdurchführung benötigt werden, liegt es jedoch nahe, dass sie insbesondere bei der Betrachtung konkreter Lernumgebungen durch die Unterrichtsqualität sichtbar werden müssten. Das Dissertationsprojekt geht daher der Frage nach, ob sich handlungsnahe fachspezifische Kompetenzen anhand von Merkmalen fachspezifischer Unterrichtsqualität im Rahmen konkreter Lernumgebungen erfassen lassen. Eine Forschungsfrage lautet entsprechend:

> *Welche Indikatoren sind für die Erfassung der reflexiven bzw. aktions-bezogenen Kompetenz von Lehrkräften geeignet?*

Aufgrund der anforderungsbezogenen Konzeptualisierung der reflexiven bzw. aktionsbezogenen Kompetenz werden für die Identifikation solcher Indikatoren die Phasen der Bereitstellung, Implementation sowie Nachbereitung einer Lernumgebung betrachtet. Im Folgenden soll zunächst die Operationalisierung der reflexiven Kompetenz im Zuge der Bereitstellung einer mathematischen Lernumgebung im Fokus stehen.

Im Rahmen einer theoriebasierten Synthese der beruflichen Anforderungen an Lehrkräfte zur Bereitstellung einer qualitativ hochwertigen Lernumgebung wurden zehn Aspekte in folgenden Dimensionen herausgearbeitet:

inhaltliche Abläufe – Dies umfasst die Aspekte der *Zielorientierung*, der *inhaltlichen Vernetzung* und der *Kompetenzorientierung*.

Implementation von Aufgaben/ Material – Neben der *Verwendung von Materialien und Hilfsmitteln* wird hierbei das *kognitive Aktivierungspotenzial der ausgewählten Aufgaben sowie die Ausschöpfung dieses Potenzials* im Zuge der Planung betrachtet. Dabei werden die Arbeitsaufträge der Lehrkraft ebenfalls unter dem Aufgabenbegriff verortet.

Adaptivität & Differenzierung – Diese Dimension beschreibt die *Angemessenheit des fachlichen Anforderungsniveaus* sowie den *Umgang mit Heterogenität* innerhalb der Lerngruppe.

Umgang mit Schülerfehlern/ Fehlvorstellungen/ Schwierigkeiten – An dieser Stelle finden die *Antizipation und Identifikation von potenziell auftretenden Schülerfehlern, Fehlvorstellungen oder Schwierigkeiten* sowie deren angedachte *Nutzung als Lerngelegenheiten* Berücksichtigung.

fachbezogene Interaktion – Hier geht es um die *inhaltsbezogene Eigenständigkeit der Lernenden*, folglich nicht um die Interaktion mit der Lehrkraft, sondern in Anlehnung an die Dimensionen nach Schoenfeld und Floden (2014, s. o.) vor allem um die inhaltsbezogene Interaktion der Lernenden untereinander sowie der einzelnen Lernenden mit dem Inhalt.

Erste empirische Überprüfung der Operationalisierung

Die beschriebene Operationalisierung wird anhand von Planungsdokumenten und Aufgaben sowie leitfadengestützten Interviews zur Unterrichtsvorbereitung empirisch überprüft. Aus praktischen Gründen erfolgt vorab eine zeitliche Einschränkung auf Unterrichtssegmente mit einer Dauer von ca. 15-20 Min. Bislang wurden von vier Lehrkräften im Vorbereitungsdienst in Schleswig-Holstein vollständige Daten zu insgesamt 14 Unterrichtssegmenten erhoben (mind. 3 je Lehrkraft). Diese werden durch geschulte Rater in Bezug auf die Beobachtbarkeit der einzelnen Indikatoren codiert und die Codes anschließend mittels Median auf Ebene der o. g. Aspekte aggregiert.

Erste Auswertungen zeigen, dass sich die Kompetenzausprägungen auf diesen zehn Aspekten für die einzelnen Lehrkräfte über die verschiedenen, auch thematisch unterschiedlichen Unterrichtssegmente hinweg jeweils als konsistent erweisen (Cronbachs $\alpha > 0.82$). Weiterhin sind zwischen den Lehrkräften Unterschiede hinsichtlich ihrer Kompetenzausprägungen auf den zehn Aspekten erkennbar. Folglich scheinen die entwickelten Indikatoren im Rahmen der Bereitstellung einer mathematischen Lernumgebung für die Erfassung reflexiver Kompetenz nutzbar zu sein.

Ausblick

Aktuell werden die videografischen Aufnahmen von der Unterrichtsdurchführung mit dem Ziel der Beobachtung von Indikatoren für aktionsbezogene Kompetenz sowie die leitfadengestützten Interviews zur Unterrichtsnachbereitung mit dem Ziel der Beobachtung von weiteren Indikatoren für reflexive Kompetenz ausgewertet. Anschließend sollen Zusammenhänge zwischen reflexiver und aktionsbezogener Kompetenz betrachtet werden.

Literatur

Helmke, A. (2009). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität*. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Jordan, A., Krauss, S., Löwen, K., Blum, W., Neubrand, M., Brunner, M., Kunter, M. & Baumert, J. (2008). Aufgaben im COACTIV-Projekt: Zeugnisse des kognitiven Aktivierungspotentials im deutschen Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *29*(2), 83–107.

Klieme, E., Schümer, G. & Knoll, S. (2001). Mathematikunterricht in der Sekundar-stufe I: „Aufgabenkultur“ und Unterrichtsgestaltung. In: *TIMSS – Impulse für Schule und Unterricht* (pp. 43–57): BMBF.

Knievel, I., Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (2015). Beyond Knowledge: Measuring Primary Teachers’ Subject-Specific Competences in and for Teaching Mathematics with Items Based on Video Vignettes. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(2), 309–329.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Eds.). (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster [u.a.]: Waxmann.

Lindmeier, A. (2011). *Modeling and measuring knowledge and competencies of teachers: A threefold domain-specific structure model for mathematics* (Vol. 7). Münster: Waxmann.

Lipowsky, F., Rakoczy, K., Pauli, C., Drollinger-Vetter, B., Klieme, E. & Reusser, K. (2009). Quality of geometry instruction and its short-term impact on students’ understanding of the Pythagorean Theorem. *Learning and Instruction*, *19*(6), 527–537.

Schoenfeld, A. H. & Floden, R. E. (2014). *An introduction to the TRU Math Dimensions*. Release Alpha Version.
Retrieved from http://map.mathshell.org/trumath/trumath_dimensions_alpha.pdf .