

Kriteriengeleitete Untersuchung von Zentralabituraufgaben aus Bayern und NRW im Bereich der Analysis

1. Einleitung

Vor dem Hintergrund der Auseinandersetzung um das Hamburger Zentralabitur (vgl. [JK], [BK], [Kü] und [BL]) wird in [Ba] für die Bundesländer Bayern und NRW im Bereich der Analysisaufgaben den folgenden Fragen nachgegangen:

- Welche mathematischen Inhalte und Verfahren werden wie oft und in welcher Art und Weise eingesetzt?
- Welche mathematischen Tätigkeiten sind in welchen Ausprägungen zur Lösung dieser Aufgaben erforderlich?
- Bilden sich im Laufe der Jahre Aufgabenstereotypen heraus, die auf wenige Grundtypen rückführbar sind und ein Learning for the test ermöglichen oder sogar provozieren?

Als Stichprobe dienen Aufgaben für den Leistungskurs jeweils für den ersten Prüfungstermin in der Variante für den wissenschaftlichen Taschenrechner aus den Jahren von 2007 bis 2015 in NRW und 2007 bis 2011 in Bayern. Die Auswahl fällt aus persönlichen Gründen auf Bayern und NRW. Die zeitliche Auswahl ist den Tatsachen geschuldet, dass es vor 2007 in NRW kein Zentralabitur und es seit 2012 in Bayern keine Leistungskurse mehr gibt. Zur Klassifizierung wurde das Manual der COACTIV-Studie (vgl. [JR]) für die vorliegenden Belange fortentwickelt. Zum einen müssen unterschiedliche fachliche Inhalte Berücksichtigung finden und zum anderen interessieren uns mögliche stereotype Verknüpfungen zwischen mathematischen Inhalten und mathematischen Prozessen. Aus diesem Grund werden die mathematischen Inhalte und Verfahren sehr detailliert notiert. Die Kodierung erfolgte durch den Autor dieses Beitrags und vier Master-Lehramtstudierende, die in diesem Bereich ihre Masterarbeiten geschrieben haben. Hier sollen ein paar prägnante Ergebnisse vorgestellt werden, für die Detailverweise wir auf [Ba].

2. Rahmenbedingungen

In Bayern werden im fraglichen Zeitraum für die drei Bereiche Analysis, Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Stochastik jeweils zwei Aufgaben angeboten aus denen schuluniform für jeden Bereich genau eine ausgewählt werden muss. In NRW werden drei Analysis-Aufgaben, zwei Lineare Algebra/Analytische Geometrie-Aufgaben, von denen eine Übergangsmatrizen beinhaltet, und eine Stochastik-Aufgabe angeboten, von

denen kursuniform drei ausgewählt werden. In der Auswahl muss sich eine Analysis-Aufgabe und dürfen sich höchstens zwei Analysis-Aufgaben befinden. Durchgehend sind in NRW zwei Analysisaufgaben kontextualisiert und eine kontextfrei. Wir unterscheiden die drei Fallgruppen „Bayern“ (BY) mit zwei Aufgaben pro Jahrgang, „NRW kontextualisiert“ (NRW_I/II) mit zwei Aufgaben pro Jahrgang und „NRW kontextfrei“ (NRW_III) mit einer Aufgabe pro Jahrgang.

Die bayerischen Aufgaben sind in mehrere Teile unterteilt, wobei der erste Teil durchweg rein innermathematisch ist. Ein weiterer Teil setzt zumeist neu an und enthält in der Regel einen innermathematischen oder außermathematischen Anwendungsbezug. Aus Platzgründen beschränken wir uns in diesem Beitrag auf einen Vergleich der Fallgruppen BY und NRW_I/II.

3 Verwendete Funktionen, Begriffe und Verfahren

Im Folgenden beziehen sich die Prozentangaben auf das Bewertungsgewicht der Aufgabenteile: 5% bedeutet, dass im Mittel des Untersuchungszeitraums 5% der Punkte für solch einen Aufgabentyp vergeben wurden. Die bayerischen Aufgaben nutzen als Funktionen Kompositionen aus Logarithmus-, Exponential-, ganzrationalen und gebrochenrationalen Funktionen, teilweise mit Scharparameter.

Der erste Prüfungsteil umfasst die klassischen Elemente einer Kurvendiskussion, Definitionsbereich (1%), Symmetrie (3%), Grenzwerte (9%), Schnittpunkte mit den Achsen (3%), Monotonie und Extrema (15%), Tangenten (2%), Krümmungsverhalten und Wendepunkte (5%) und wird mit der Skizze des Graphen abgeschlossen (11%). Darüber hinaus werden häufig Integralfunktionen (9%), uneigentliche Integrale (6%), bestimmte Integrale (10%), Umkehrfunktionen (3%) weitere Gleichungen (4%), Rotationsintegrale (6%), Einfluss von Parametern (4%), Steckbriefaufgaben (1%) und Differentialgleichungen (4%) thematisiert. Weiterhin treten Einsetzungen, Transformationen, Prozentrechnen und Ortskurven mit einem Anteil von zusammen 5% auf.

In der Fallgruppe NRW_I/II werden in der ersten Aufgabe NRW_I stets zusammengesetzte Exponentialfunktionen, und in der zweiten Aufgabe NRW_II stets ganzrationale Funktionen der Ordnung drei oder vier verwendet. **Es ist also in jedem Jahr möglich, den Analyseteil der Abiturprüfung ausschließlich mit ganzrationalen Funktionen zu bestreiten, wenn im Analyseteil nur die Aufgabe NRW_II gewählt wird.** Bis auf zwei Ausnahmen (2011.II und 2013.II) sind die verwendeten Größen zeitabhängig, in den beiden Ausnahmen ortsabhängig. An mathematischen

Objekten und Verfahren treten Einsetzungen (8%), Gleichsetzungen (7%), Ungleichungen (7%), Monotonie, lokale und globale Extrema (18%), extremale Änderungsrate (13%), Grenzwerte (2%), Differenzenquotienten (2%), Integralmittel (5%), Stammfunktion und bestimmtes Integral (15%), Bestimmung einer ganzrationalen Funktion über eine Steckbriefaufgabe (3%) und abschnittsweise definierte Funktionen (3%) auf. 10% der Punkte wurden für Aufgabenteile vergeben, in denen nicht innermathematische gearbeitet werden musste. Die restlichen 11% entfallen auf Transformationen, Prozentrechnen, das arithmetische Mittel sowie rein arithmetische Operationen.

Als Fazit bleibt festzuhalten, dass die mathematischen Inhalte der Fallgruppe BY sowohl in Bezug auf die verwendeten Funktionen als auch in Bezug auf die verwendeten Begriffe und Verfahren in der Regel weit über die Fallgruppe NRW_I/II hinausgehen. Eine Ausnahme bildet die Verwendung abschnittsweise definierter Funktionen, die im Untersuchungszeitraum dreimal in NRW_I und in Bayern nicht auftraten. Ferner muss festgehalten werden, dass beide Fallgruppen im Untersuchungszeitraum nicht das gesamte zur Untersuchungszeit verpflichtende Curriculum abdecken, so erscheinen z.B. in beiden Fallgruppen nie trigonometrische Funktionen. Die Lücken in NRW_I/II sind offensichtlich weitaus größer.

4. Prozesse

In Anlehnung an die Coaktiv-Studie und Druke-Noe klassifizieren wir die Prozesse Technisches Arbeiten (T), Innermathematisches Modellieren (IM), Argumentieren (A) sowie Mathematisches Modellieren, aufgesplittet in die Teilprozesse Mathematisieren (M), Interpretieren (I) und Validieren (V). Dabei werden die Prozesse in aufsteigenden ordinalen Niveaus mit drei bis sieben Ausprägungen klassifiziert, das nullte Niveau ist hier nicht dargestellt. Eine Beschreibung der Niveaus mitsamt Ankerbeispielen findet man in [Ba]. Angegeben ist jeweils der mittlere Anteil an Bewertungspunkten in Prozent im Untersuchungszeitraum.

	T1	T2	T3	T4	IM1	IM2	IM3	A1	A2	A3
BY	20	26	21	6	15	14	13	18	11	6
NRW	51	31	0	0	16	3	0	24	2	0

	M1	M2	M3	M4	M5	I1	I2	I3	I4	I5	I6	V1	V2
BY	8	0	0	0	1	7	0	1	1	0	1	0	1
NRW	41	10	9	3	1	48	2	4	2	2	1	5	3

Auffällig ist, dass in NRW die hohen innermathematischen Niveaus gar nicht erreicht werden und auch die mittleren Niveaus nur sehr schwach belegt sind. Dafür sind die niedrigen Modellierungsniveaus sehr stark, die hohen Modellierungsniveaus jedoch nur schwach belegt. Zu bemerken ist, dass die ersten drei Mathematisierungsniveaus reine Entkleidungsniveaus sind, die keine inhaltliche Auseinandersetzung mit dem Kontext erfordern, sondern bei denen lediglich die Zuordnung von Größenamen mit Funktionsnamen aus dem Text entnommen werden muss und auf eindeutige kontextunspezifische Art und Weise eine mathematische Tätigkeit, wie das Berechnen eines Funktionswerts, einer Maximalstelle o.ä., initiiert wird, bzw. bei denen Bestands-Änderungsraten-Sprechweisen in der richtigen Art und Weise, dabei aber rein schematisch, angewendet werden müssen (vgl. [Ba]).

Literatur

- [Ba] Bauer, S. (2017). Eine kriteriengeleitete Untersuchung von Zentralabituraufgaben in Bayern und NRW im Bereich der Analysis unter curricularen und prozessorientierten Gesichtspunkten, *DuEPublico preprint* 43630
- [BK] Busse, J., Kaiser, G.(2014). Hamburger Mathematikabitur im Kreuzfeuer der Kritik. In: *MGDM*, Heft 97, S. 28-31
- [BL] Blum, W., Löding, W. (2014). Diskussion. In: *MDMV*, Band 22, Heft 4, S.134-135
- [Dr] Drücke-Noe, C. (2013). *Aufgabenkultur in Klassenarbeiten im Fach Mathematik*, Springer-Spektrum
- [JK] Jahnke, T., Klein, H.-P., Kühnel, W., Sonar, T., Spindler, M. (2014). Die Hamburger Abituraufgaben im Fach Mathematik. Entwicklungen von 2005 bis 2013. In: *MDMV*, Band 22, Heft 2, S.115-122
- [JR] Jordan, A., Ross, N., Krauss, S. u.a. (2006). *Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben: Dokumentation der Aufgabenkategorisierung im COAKTIV-Projekt*, Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung
- [Kü] Kühnel, W. (2015). Modellierungskompetenz und Problemlösekompetenz im Hamburger Zentralabitur Mathematik. In: *Mathematische Semesterberichte*, Band 62, Heft 1, S. 69-822