

Modellieren im Analysisunterricht mit Differentialgleichungen

1 Einleitung

Ein guter Teil der heute gängigen Modellierungsaufgaben im Bereich der Analysis hat die Eigenschaft, dass die Idealisierung der Sachsituation und die anschließende Mathematisierung bereits durch die Aufgabenstellung erbracht werden. Dabei ist es in den meisten Fällen vollkommen unklar, aus welchen Überlegungen heraus die Modellfunktion gewählt wurde. Typischerweise müssen dann innerhalb der vorgegebenen Modellierung Fragen, wie die nach dem Zeitpunkt des maximalen Wachstums beantwortet werden.

In Bauer (2017) wird ein Zugang vorgestellt, der tatsächlich substantielle Prozesse im Bereich des Idealisierens, Mathematisierens, Interpretierens und Validierens ermöglicht. Dazu wird „die“ Modellierungsmethode der Analysis schlechthin herangezogen, nämlich das Modellieren mit Differentialgleichungen. Durch die Fokussierung auf qualitative Eigenschaften der Lösungen, die im Kontext häufig ausreichen, um die gewünschten Informationen zu erzielen und die sich einfach aus der Differentialgleichung ablesen lassen, ist es möglich auch komplexere Modellierungen durchzuführen. Dies wird exemplarisch anhand von unterschiedlichen Befischungsstrategien eines Fischbestands in Bauer (2017) dargestellt. In dem hier vorliegenden Beitrag soll nun anknüpfend an die Diskussionen nach dem Vortrag auf der GDM-Tagung 2017 in Potsdam lediglich ein spezieller Aspekt vertieft werden, nämlich die unterschiedlichen Wege, die zur logistischen Differentialgleichung führen können.

2 Wege zur logistischen Differentialgleichung

Werden in der Schule Differentialgleichungen behandelt, so ist der übliche Startpunkt die Differentialgleichung des exponentiellen Wachstums, $f'(x) = r \cdot f(x)$. Beim exponentiellen Wachstum ist die Änderungsrate proportional zum Bestand. In einem zweiten Schritt wird dann, z.B. anhand von Abkühlungsvorgängen, die Differentialgleichung des beschränkten Wachstums, $f'(x) = r \cdot (K - f(x))$, eingeführt, bei der die Änderungsrate proportional zur Differenz zwischen Sättigungsgrenze oder Kapazität K und Bestand $f(x)$ ist. Im Kontext des Temperatenausgleichs ist K die Umgebungstemperatur. Als Kombination aus exponentiellem und beschränktem Wachstum wird im Anschluss die logistische Differentialgleichung in der Form $f'(x) = r \cdot f(x) \cdot (K - f(x))$ eingeführt, mit der Beschreibung, dass bei diesem Modell, dem logistischen Wachstum, die Änderungsrate

proportional zum Bestand und zur Differenz von Kapazität und Bestand, also proportional zum Produkt dieser beiden Größen ist.

Dieser Zugang zum logistischen Wachstumsmodell hat den Vorteil, dass er eine Kombination der beiden vorherigen Wachstumsmodelle und somit gut an vorherigen Unterricht anknüpft. Wird er jedoch auf das Wachstum von Populationen angewendet, beinhaltet er auch gewisse Brüche. Um diese Brüche klarer herauszustellen, soll zunächst einmal eine Situation dargestellt werden, in der dieser Zugang natürlich wirkt, um anschließend die Unterschiede klarer aufscheinen zu lassen. Dazu betrachten wir die Ausbreitung einer ansteckenden Krankheit (oder eines Gerüchts). Wir haben zum einen die Größe der Infizierten (oder Informierten) $I(t)$ und zum anderen diejenigen, die noch nicht infiziert (nicht informiert) sind, aber infiziert (informiert) werden können, $J(t)$. Bei einem Zusammentreffen von einem Infizierten und einem nicht Infizierten wird der nicht-Infizierte durch den Infizierten infiziert und die Größe der Infizierten wächst. Die Anzahl der Kontakte zwischen Infizierten und nicht Infizierten kann als proportional zur Anzahl der Infizierten und der nicht Infizierten angenommen werden, also zum Produkt der beiden Größen. Damit erhalten wir für die Änderungsrate der Infizierten $I'(t) = r \cdot I(t) \cdot J(t)$. Dabei hat die Proportionalitätskonstante r eine klare inhaltliche Bedeutung, sie gibt die Effizienz an, mit der sich die Ansteckung vollzieht, genau gesagt, die mittlere Anzahl der Neuinfektionen, die ein Infizierter pro Zeiteinheit und nicht Infizierten verursacht. Gehen wir nun davon aus, dass die Größe der Gesamtpopulation aus Infizierten und nicht Infizierten konstant bleibt und die Größe K hat, erhalten wir für die Größe der nicht Infizierten die algebraische Gleichung $J(t) = K - I(t)$. Setzen wir diese Gleichung in die Differentialgleichung für I ein, erhalten wir die logistische Differentialgleichung in der oben angegebenen Form.

Betrachten wir nun die Evolution von Populationsgrößen ergeben sich auf diesem Weg Brüche: Wir haben es eigentlich nur mit einer Größe, nämlich der Populationsgröße f zu tun. Es fällt schwer der Differenz $K - f(t)$, dem Kapazitätsmanko, den Status einer eigenen Größe zuzugestehen. Sie ist z.B. nicht unabhängig von f messbar. In den Anwendungssituationen wird zudem der Wert von K eventuell gar nicht bekannt sein. Die Aussage, dass nun die Änderungsrate gleichzeitig proportional zum Bestand und zur Differenz zwischen einer anzunehmenden Kapazitätsgröße und dem Bestand ist, erscheint nicht natürlich und in sich widersprüchlich, weil die Differenz $K - f(t)$ keine so eine klare inhaltliche Bedeutung als eigenständige Größe hat. Auch die Proportionalitätskonstante r lässt sich in diesem Kontext nur

schlecht deuten (es ist die mittlere Anzahl der Nachkommen, die ein Individuum pro Zeiteinheit und Kapazitätsmanko $K - f(t)$ hat).

Wir wollen dem zwei andere Strukturierungen gegenüberstellen, die uns in diesem Kontext angemessener erscheinen. In der ersten Variante starten wir mit dem Modell des exponentiellen Wachstums $f'(t) = r \cdot f(t)$. Dabei hat r die inhaltliche Bedeutung der Differenz des Proportionalitätsfaktors von Geburten- und Sterberate. Im exponentiellen Modell wird nun angenommen, dass dieser Faktor konstant ist. In einer Erweiterung des Modells wird nun einbezogen, dass dieser Faktor wiederum von der Populationsgröße abhängen kann, r also eine Funktion der Populationsgröße f ist. Die Beobachtungen suggerieren nun, dass bei kleinen Populationen der Proportionalitätsfaktor eine bestimmte Größe r_0 hat, für größere Populationen kleiner wird und bei sehr großen Populationen schließlich negativ wird, die Sterberate also ab einer gewissen Populationsgröße über der Geburtenrate liegt. Die einfachste mögliche Mathematisierung benutzt einen afflinearen Zusammenhang und lautet $r(f) = r_0 \cdot (1 - \frac{f}{K})$, dabei ist K die Populationsgröße, bei der sich Geburten- und Sterberate genau die Waage halten. Das Gesamtmodell lautet dann $f'(t) = r_0 \cdot f(t) \cdot (1 - \frac{f(t)}{K})$. Auch der Parameter r_0 hat eine klare inhaltliche Bedeutung, er gibt an wie viele Nachkommen ein Individuum pro Zeiteinheit bei sehr kleinen Populationsgrößen hat.

Eine andere Strukturierung geht den historischen Weg, auf dem Pierre-François Verhulst, 1804-1849, zur logistischen Differentialgleichung gelangte (vgl. Verhulst 1838). Vor dem Hintergrund der abnehmenden Wachstumsgeschwindigkeit der französischen Bevölkerung wurde damals klar, dass das zu der Zeit gängige exponentielle Wachstumsmodell, man sprach vom geometrischen Wachstum, die beobachteten Daten nicht mehr gut widerspiegelte. Verhulst argumentiert, dass die Wachstumsgeschwindigkeit in der zunehmenden Bevölkerung durch die größer werdende Konkurrenz um beschränkte Ressourcen von selbst abnehmen würde und irgendwann ganz zum Erliegen käme. Er schlug vor in der Differentialgleichung $f'(t) = r \cdot f(t)$ die rechte Seite durch einen negativen Term zu ergänzen, der diese Konkurrenzeffekte widerspiegelt. Die einfachste Möglichkeit ist ein quadratischer Term (ein linearer Term würde ja zu keinem neuen Modell führen), $f'(t) = r \cdot f(t) - m \cdot f(t) \cdot f(t)$.

Die quadratische Struktur des Konkurrenzterms lässt sich inhaltlich gut begründen: Konkurrenz tritt auf, wenn Mitglieder der Bevölkerung aufeinandertreffen. Die Häufigkeit des Aufeinandertreffens wächst quadratisch mit der Größe der Bevölkerung (diese Überlegung muss

natürlich im schulischen Kontext sorgfältig durchgeführt werden), die Konkurrenz ist also proportional zu $f^2(t)$. Evolutionsbiologen sprechen in diesem Zusammenhang von intraspezifischer Konkurrenz im Gegensatz zur interspezifischen Konkurrenz zwischen unterschiedlichen Spezies, (Murray, 2002). Der Parameter m gibt die Intensität der Konkurrenz an, besitzt also auch eine klare inhaltliche Bedeutung. Ein weiterer Vorteil dieser Strukturierung besteht darin, dass hier eine additive Struktur von Einflüssen zum Tragen kommt. Das normale zur Welt kommen und Sterben ist in dem Term $r \cdot f(t)$ enthalten, die zusätzlichen Konkurrenzeffekte in dem Term $-m \cdot f^2(t)$. Dieses Linearitätsprinzip hat eine enorme Tragweite und wird bei allen weiterführenden Modellierungen eine große Rolle spielen: Unterschiedliche Einflüsse können einzeln modelliert und anschließend additiv überlagert werden.

3 Fazit

Es wird deutlich, dass ein und dieselbe Differentialgleichung in unterschiedlichen Kontexten in unterschiedlichen Strukturierungen erscheinen kann und sollte. Die unterschiedlichen Strukturierungen spiegeln dabei unterschiedliche Wirkungszusammenhänge im Sachkontext wider. Ein Indiz auf eine gut passende Strukturierung der Differentialgleichung vor dem Hintergrund einer gewissen Sachsituation wird durch die einfache inhaltliche Deutbarkeit der verwendeten Parameter in der Sachsituation geliefert.

Literatur

- Bauer, S. (2017). Modellieren mit Differentialgleichungen über das logistische Wachstumsmodell hinaus. *Der Mathematikunterricht*, 63 (1), 28-36.
- Verhulst, J.P. (1838). Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement, *Corresp. Math. Phys.* 10, 113-121.
- Murray, J.D. (2002). *Mathematical biology I*. Springer-Verlag, New York, third edition.