

"Bewegliches", "dynamisches" und "prozesshaftes" Denken beim Mathematiklernen

1. Manche Mathematikdidaktiker¹ tragen die Gutwörter "bewegliches", "dynamisches" und "prozesshaftes Denken" wie ein Mantra vor sich her, im Einklang mit dem jeweils neuesten Zeitgeist. Was mit diesen Ausprägungen des Denkens gemeint ist, bleibt i.d.R. ungeklärt. Manifestierungen wie "Vorstellungen von realen Bewegungen", "Software für Dynamische Geometrie", "Folgen als unendliche Prozesse" zeugen von einem recht oberflächlichen Verständnis. Im Folgenden möchte ich an einigen Beispielen aufzeigen, dass es beim Treiben und besonders beim Lernen von Mathematik immer wieder Situationen gibt, bei denen man die Beweglichkeit, die Dynamik, das Prozesshafte tunlichst herausnimmt (Hinwendung zum Objektcharakter einer Funktion, Beweisführung nach Anhalten einer beweglichen Konfiguration, Konzentration auf endliche (Teil-) Prozesse).

2. In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts wurde u.a. mit dem Gruppenbegriff und seiner innermathematischen sowie später noch mit seiner unterstellten psychologischen Bedeutung (als ursprüngliche Vorlage für Piagets Konzept der Gruppierung der Denk-Operationen) die Etablierung der Abbildungsgeometrie in der Schule begründet. Die sinnvolle Beschäftigung mit abstrakten Gruppen ist sicherlich der Ausbildung beweglichen Denkens förderlich, und hier kam hinzu, dass die Selbstabbildungen der Ebene sich so schön als Verformungen und Bewegungen veranschaulichen lassen und die einfachsten Typen sogar "Bewegung" genannt werden. Solange man die (Kongruenz-) Abbildungen lediglich als Werkzeuge zur Analyse geometrischer Formen auf Symmetrie verwendet, kommt man in der Tat mit einer anschaulichen Begrifflichkeit hin: Man bringt im realen Raum oder in der Vorstellung zwei Papp-Exemplare der zu untersuchenden (ebenen) Figur zur Deckung, dreht oder wendet (aus der Ebene heraus und wieder in sie hinein) eines der beiden Exemplare, bis es sich erneut mit dem anderen deckt, und hat so eine Symmetrie gefunden. Wie gesagt, wird mit solchen sinnvollen mathematischen Aktivitäten ganz gewiss bewegliches Denken gefördert. Aber ob das daran liegt, dass es sich bei den Handlungen um (eventuell vorgestellte) reale Lageveränderungen von Objekten handelt, ist nirgends belegt und bei genauerer Betrachtung auch gar nicht plausibel.

¹ Nachdem ich mich jahrzehntelang penibel des fraueneinbeziehenden Sprachgebrauchs gemäß den Richtlinien des Landes NW befleißigt und so meine Gendersensibilität unter Beweis gestellt habe, bin ich zur Verwendung der geschlechtsneutralen Stammform der Substantive und damit zu einer klareren Sprache zurückgekehrt.

Die mentalen Hindernisse bei diesem Zugang (und man kann sich schlechterdings keinen anderen vorstellen) sind schier unüberwindlich: Man kriegt vielleicht noch den Punktmengen-Charakter der Ebene hin. Aber dass die ganze Ebene der Definitionsbereich ist und dass mit diesen Abbildungen Punkte nicht bewegt, sondern nur zugeordnet werden, – diese Begrifflichkeit wird mit der Vorstellung von realen Bewegungen geradezu verhindert.

Diese Erfahrung macht jeder Mittelstufenlehrer, soweit ihm selbst der Funktionscharakter dieser Selbstabbildungen klar ist. Und so konnte sich niemals eine echte Abbildungsgeometrie in der allgemeinbildenden Schule etablieren, zumal der Geometrieunterricht sich dort sowieso seit Langem ständig auf dem Rückzug befindet.

3. Bewegung in die Geometrie ist (ab 1988) im wahrsten Sinne des Wortes durch die sog. Dynamische-Geometrie-Software (DGS) gekommen. Wir Geometer waren davon angetan, dass wir Veränderungen und Invarianten bei allerlei Manipulationen nun wirklich *sehen* konnten. Aber zum Analysieren muss die Bewegung immer wieder angehalten werden, und es muss am stehenden Bild argumentiert werden, auch und gerade, wenn man dieses sich nur vorstellt. Für dieses Zusammenspiel zwischen dem Bewegungs- und dem Ruhemodus sind umfangreiche Erfahrungen sowie Wissen erforderlich, die bei den Schülern und Studenten (S&S) i.A. nicht vorhanden sind. Auch die Formalisierung mittels stetiger Abbildungen von $I \times F$ in die Ebene (I das Einheitsintervall, F eine Figur) bleibt den Geometrie-Novizen verschlossen, so dass die Auffassung von der Ebene als Punktmenge untergeht. Einzuräumen ist, dass man damit leben kann, indem man nicht darüber redet. – In zahlreichen Studien wird der Umgang der S&S mit DGS als wenig strukturierter Aktionismus beschrieben, und es steht dahin, inwieweit er "dynamisches" Denken fördert (was immer man unter diesem versteht), es sei denn, man definiert dieses als den Umgang mit DGS.

4. Auch der Grenzwertbegriff (der gängigen Analysis) wird in der Mathematikdidaktik gern mit einer "dynamischen" Sichtweise assoziiert, wonach eine Folge ein nicht endender Prozess sei, der sich bei Konvergenz einem stabilen Zustand nähert (z.B. L&RW 2015, 565). Jeder Informatikstudent lernt im ersten Semester, dass die Terminiertheit eine wesentliche Konstituente eines Algorithmus ist, d.h. dass dieser auf jeden Fall nach endlich vielen Schritten enden muss. Wohl ist der Begriff des mentalen Prozesses weniger formal gefasst, aber auch ein *unendlicher mentaler Prozess* ist etwas Sinnloses. Genau diese Sinnlosigkeit hat Zenon vor zweieinhalb Jahrtausenden in seinem berühmten Paradoxon eingefangen: In der Dynamik eines realen Wettlaufs holt Achilles die Schildkröte nach Kurzem ein, beim Durchlaufen der vorgegebenen Folge der Zeitpunkte jedoch nie.

Natürlich ist der Grenzwertbegriff immer wieder irgendwie an "dynamische" Prozesse gekoppelt (gut nachvollziehbar in (Greefrath u.a. 2016, 105) zusammengefasst), z.B. in der Analysis beim Annähern an eine Stelle im (Abschluss des) Definitionsbereich(s) einer Funktion – oder eben beim Wettlauf zwischen Achilles und der Schildkröte zwecks Erzeugung der Paradoxie. Solche "dynamischen" Kontexte sind gewiss für die jeweilige *Problemstellung* bedeutsam. Für den *Aufbau eines tragfähigen Grenzwertbegriffs* müssen sie aber (vorübergehend) beiseite geräumt werden. Mit z.B. der Ersetzung kontinuierlicher Wege durch diskrete Folgen wird die scheinbare "Dynamik" herausgenommen und Konvergenz so dem gesunden Menschenverstand zugänglich gemacht.

Letztlich handelt es sich dabei um die Formalisierung, mit der Karl Weierstraß in der Mitte des 19. Jhdts. die Probleme überwinden konnte, die seine Vorläufer Newton, Leibniz, Cauchy u.a. mit dem Grenzwertbegriff auf der Basis ihrer "dynamischen" Auffassung noch hatten. Solche Formalisierungen sind nicht von vorneherein ein didaktisches Übel; sie liefern vielmehr oft die fachliche Grundlage für die mentale Zugänglichkeit mathematischer Begriffe. Die Abqualifizierung des Weierstraßschen Grenzwertbegriffs als "antididaktische Inversion", wie dies L&RW unter Berufung auf "die historische sowie die individuelle lernpsychologische Begriffsentwicklung" unternehmen (567), stellt ihrerseits eine antididaktische Inversion dar.

Es ist abwegig, S&S beim Begriffsaufbau in die historische Sackgasse aus der Zeit vor Weierstraß zu schicken. Und für die – durchaus unplausible – Unterstellung, dass "die individuelle lernpsychologische Begriffsentwicklung" über eine "dynamische" Sichtweise laufen müsse, bleiben L&RW jeglichen Beleg schuldig. Es mag ja sein, dass die tatsächlich vorkommenden – zumeist unzulänglichen – Lernprozesse "dynamische" Vorstellungen & Verständnisse (V&V) beinhalten. Aber das liegt doch zunächst daran, dass den S&S solche V&V suggeriert werden! Da wird z.B. "die Kreisfläche durch eine Folge von Polygonen ausgeschöpft, die immer mehr Ecken haben, bis sie 'schließlich' zum Kreis werden", usw. usf. Solche Fauxpas unterlaufen einem als Lehrer immer wieder, vielleicht weil man selbst mangelhafte V&V hat, aber sogar auch dann, wenn man es besser weiß.

Auf zahlreiche solche Mängel beim Lehren und Lernen des Grenzwertbegriffs habe ich in (Bender 1991) hingewiesen. Seitdem wurde in vielen Studien, insbesondere auch zum Nullkommaperiodeneun-Problem, gezeigt, dass es regelmäßig "dynamische" und "prozesshafte" V&V in der Phase der Grundlegung sind, die zu einer ungeeigneten Begrifflichkeit führen.

Eine simple "dynamische" Sichtweise *i.e.S.*, nach der der Grenzwert am Ende eines unendlichen Prozesses steht, ist schlichtweg widersinnig. Auch

mit einer – ebenfalls simplen – "dynamischen" Sichtweise *i.w.S.*, nach der man sich dem Grenzwert "nur" nähert, provoziert man Fehl-V&V. Wohl findet ein Annähern in dem Sinn statt, dass "beim Durchlaufen der Folge die Abstände gegen 0 gehen". Aber diese sog. Erklärung ist nicht nur vage, sondern außerdem zirkulär, indem sie den Begriff der (konvergenten!) Nullfolge benutzt. Wenn man dieses "Annähern" (mathematisch-, sprach- und alltagslogisch!) in den Griff kriegen will, kommt man an der Leibnizschen Formalisierung nicht vorbei, nämlich letztlich: für jede, noch so kleine, Umgebung liegen nur endlich viele Glieder außerhalb.

Ein derart aufgebauter Grenzwertbegriff kann und soll natürlich alsbald mit "dynamischen" V&V angereichert und in vielerlei "dynamischen" Kontexten eingesetzt werden (u.a. für deren Bewältigung er ja entwickelt wird). Diese Anreicherung erfolgt jedoch oft zu früh, sei es durch gut gemeinte Lehrmaßnahmen (zur Motivation, zur Legitimation, in Anwendungen, im Zuge des eingangs genannten Mantras, aufgrund ungeeigneter V&V beim Lehrer), sei es durch unterschwellige Signale (heimlicher Lehrplan).

In den Schulcurricula der Bundesländer werden wir eine Renaissance des (in NW 1999) "abgeschafften" Grenzwertbegriffs nicht mehr erleben. Aber wenigstens noch die Lehrer, Mathematiker und Anwender von (höherer) Mathematik sollten eine ordentliche begriffliche Basis haben. Meine These lautet jedenfalls, dass mit einem sorgfältigen (vorübergehenden!) Heraushalten von "dynamischen" V&V aus dem grundlegenden Begriffsaufbau die Zahl der Grenzwert-Versteher spürbar erhöht werden könnte.

5. Mit der Auffassung von der Ebene als "statischer" Punktmenge, von Kongruenzabbildungen als "statischen" Funktionen, vom Grenzwert als "statischem" topologischem Objekt wurden in der Historie epistemologische (und damit für die S&S lernpsychologische) Hindernisse beseitigt. Sie könnte auch einen kleinen Kontrapunkt gegen die jeweilige "dynamische" Moderne setzen und zur notwendigen Muße in der Bildung beitragen.

Literatur

- Bender, P. (1991): Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten. In *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* 44, 238-243
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., Weigand, H.-G. (2016): Aspects and "Grundvorstellungen" of the Concepts of Derivative and Integral. Subject Matter-Related Perspectives of Concept Formation. In *Journal für Mathematik-Didaktik* 37, Supplement 1, S99-S129
- L&RW (Felix Lensing & Bettina Rösken-Winter) (2015): Wie viel Grenzwert braucht der Mensch? – Unendlichkeit dynamisch und statisch begreifen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* 2015, 564-567