Stephan BERENDONK, Bergische Universität Wuppertal, DE

(K)ein Beweis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung bei Otto Toeplitz

Das Buch „Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung“ von Otto Toeplitz trägt den folgenden Untertitel: „Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode“. Offensichtlich soll das Buch seine Leser auf eine besondere Weise in die Analysis einführen. Meine Neugier ist geweckt: Was unterscheidet dieses Buch von den gewöhnlichen Lehrbüchern zur Analysis und was verbirgt sich hinter der *genetischen Methode*? Meine Vermutung, dass es sich bei dem Buch wohl um eine *Geschichte der Analysis* handelt, muss ich schon beim Lesen des Vorworts über den Haufen werfen: „Nichts liegt mir ferner, als eine Geschichte der Infinitesimalrechnung zu lesen; ich selbst bin als Student aus einer ähnlichen Vorlesung weggelaufen. Nicht um die *Geschichte* handelt es sich, sondern um die *Genesis* der Probleme, der Tatsachen und Beweise, um die entscheidenden Wendepunkte dieser Genesis.“ Keine Geschichte der Analysis im eigentlichen Sinne also. Ich lese das Buch. Es ist anders. Aber inwiefern?

Keine *eigenständige* Differentialrechnung

Erst die Differentialrechnung, dann die Integralrechnung. So kenne ich das, so ist das vielenorts. Bei Toeplitz ist es jedoch anders: Erst nachdem man sich im zweiten Kapitel den Begriff des bestimmten Integrals erarbeitet hat, wird man im dritten Kapitel mit der gängigen Differentialrechnung ausgestattet. Diese wird allerdings simultan mit und (zunächst nur) im Dienste der Integralrechnung entfaltet. So folgt beispielsweise nach der Produktregel direkt ein Paragraph zur partiellen Integration, nach der Kettenregel direkt einer zur Substitution. Apropos Kettenregel! Äußere Ableitung mal innere Ableitung. Wie kommt man auf diese Regel? Toeplitz schreibt dazu: „Die Produktregel erlaubt uns zu folgern:

$$(u^2)' = u\,u' + u'u \qquad = 2\,u\,u',$$
$$(u^3)' = u^2\,u' + (u^2)'\,u = 3\,u^2\,u',$$

allgemein, durch Schluß von n auf $n+1$:

$$(u^n)' = (n\,u^{n-1})\,u'.\text{“}$$

Wir erkennen zwischen den Klammern die Ableitung der Potenzfunktion. Sollte das etwa auch für andere Verkettungen als mit der Potenzfunktion wahr sein? Mit dieser Frage steht nun auf induktive Weise die Kettenregel, wenn auch unbewiesen, im Raum. Aha! Das war dann wohl gerade ein Stück genetische Methode, überlege ich.

Kein *Primat* des Stetigkeitsbegriffs

In dem Kapitel über das bestimmte Integral hatte ich einen Satz wie „Alle stetigen Funktionen sind integrierbar“ erwartet, doch Toeplitz begnügt sich dort mit (stückweise-)monotonen Funktionen für die man die Existenz des Integrals ja zum Nulltarif erhält. Es ist nun mit Blick auf die genetische Methode interessant zu schauen, wo, d.h. in welcher Situation, und wie, d.h. in welcher Rolle, der Begriff Stetigkeit bei Toeplitz erstmals auftritt.

Die Situation ist folgende: Die Ableitung des Logarithmus soll bestimmt werden, wobei der Logarithmus bei Toeplitz als die Fläche unter der Hyperbelfunktion $f(x) = \frac{1}{x}$ definiert ist, genauer: $\log(x) \coloneqq \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ für $x > 0$. Seien dazu x_0 und x reelle Zahlen mit $0 < x_0 < x$. Wir bestimmen $\log'(x_0)$ und betrachten dazu das Integral $\int_{x_0}^x \frac{1}{t}\, dt$, das ja gleich der Differenz von $\log(x)$ und $\log(x_0)$ ist. Die zu diesem Integral gehörige Fläche liegt „zwischen“ zwei Rechtecken, sodass gilt: $(x - x_0)\frac{1}{x} < \log(x) - \log(x_0) < (x - x_0)\frac{1}{x_0}$. Nun teilen wir durch $x - x_0$ und sehen, dass der dadurch entstehende Differenzenquotient $\frac{\log(x)-\log(x_0)}{x-x_0}$ zwischen $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{x_0}$ eingeklemmt ist. Wir lassen schließlich x nach x_0 laufen und erhalten so als (rechtsseitigen) Grenzwert: $\log'(x_0) = \frac{1}{x_0}$. Die Ableitung des Logarithmus ist offenbar wieder die ursprüngliche Hyperbel! Gilt „das“ womöglich noch für andere Funktionen, also, dass die Ableitung der „Integralfunktion“ einer Funktion wieder die Ausgangsfunktion ist? Ganz bestimmt, denn wir haben ja beim Ableiten gar keine charakteristische Eigenschaft des Logarithmus, wie etwa dessen Funktionalgleichung, verwendet, oder doch? Wir durchlaufen den Beweis also erneut auf der Suche nach den vielleicht unbemerkt verwendeten Eigenschaften. Was garantiert uns, dass die betrachtete Fläche zwischen den beiden Rechtecken liegt? Antwort: Monotonie! Und was garantiert uns, dass $\frac{1}{x}$ nach $\frac{1}{x_0}$ läuft, wenn x nach x_0 läuft? Gerne würden wir wieder so schlagfertig mit nur einem Wort antworten, aber diesmal fehlt uns der passende Begriff. Zeit für einen Bluff! Wir erfinden einfach ad hoc einen Garanten und taufen ihn Stetigkeit. Der Logarithmus hat sich damit, was den ersten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung betrifft, als paradigmatisches Beispiel und zwar für die Klasse der monotonen und stetigen Funktionen erwiesen. Dabei bleibt’s. Eine allgemeinere Formulierung des Hauptsatzes (d.h. ohne Monotonie) findet man bei Toeplitz nicht. Der Stetigkeitsbegriff ist bei Toeplitz eben nur Werkzeug, nicht Gegenstand eigener Betrachtungen oder gar Grundbegriff. Jedenfalls: Paradigmatische Beispiele, beweiserzeugte Begriffe, wie hier der Stetigkeitsbegriff, und „enge“ Formulierungen von Sätzen, das alles gehört wohl zur genetischen Methode, überlege ich.

Kein *explizites* Axiomensystem der reellen Zahlen

Nach den vorstehenden Ausführungen über das Buch, wird diese Zwischenüberschrift nicht weiter verwundern. Es stellt sich aber die Frage, wie Toeplitz es dann mit den reellen Zahlen, insbesondere mit der Vollständigkeit, hält. Er schreibt dazu: „Für eine Darstellung also, die die Entwicklung der einzelnen unendlichen Prozesse ihrer Genesis nach aufweisen will, wird der unendliche Dezimalbruch die gegebene Zahldefinition sein […]“. Faktisch bezieht er sich später jedoch immer auf sein Theorem I, den Satz, dass jede Intervallschachtelung eine reelle Zahl bestimmt. Dieser Satz wird von Toeplitz ausführlich durch die Konstruktion dreier expliziter Intervallschachtelungen angebahnt: einer Schachtelung des Kreisumfangs mit Hilfe ein- und umbeschriebener Vielecke, einer Schachtelung der Eulerschen Zahl (stetige Verzinsung) und einer Schachtelung von 4/3 mit Hilfe schriftlicher Division. Der Beweis des Satzes erübrigt sich für ihn dadurch. Klarer Fall von genetischer Methode, würde ich sagen. Später gesellen sich bei der Integralrechnung in Form von Unter- und Obersummen übrigens noch weitere explizit angegebene Intervallschachtelungen hinzu, deren Konstruktion meist auf dem Verfahren der sukzessiven Intervallhalbierung beruht. Die Idee des sukzessiven Halbierens wurde zuvor auch schon zur Konstruktion der ein- und umbeschriebenen Vielecke bei der Bestimmung von Umfang und Inhalt des Kreises verwendet. Halbieren als Leitidee, überlege ich.

Kein *Beweis* vom zweiten Teil des Hauptsatzes

Nun also zum eigentlichen Titel dieses Beitrags. Der zweite Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung besagt, dass man mit Hilfe *jeder* Stammfunktion einer Funktion das Integral der Funktion „ausrechnen“ kann. In Anbetracht des ersten Teils des Hauptsatzes bleibt dazu noch zu zeigen, dass sich zwei Stammfunktionen nur um eine Konstante unterscheiden können bzw. dass *eine Funktion deren Ableitung überall Null ist, eine Konstante ist*. Toeplitz schreibt dazu: „Der Satz ist geometrisch sehr einleuchtend […] – noch anschaulicher ist er am mechanischen Bild der Funktion: Ableitung 0 heißt hier Geschwindigkeit 0, Ruhe. Wenn ein bewegter Punkt in *jedem* Zeitmoment ruht, dann steht er überhaupt still, sein Ort *s* ist konstant. Aus diesem Satz, dessen rein mathematischen Beweis wir auf später verschieben […].“ Ähnlich ergeht es einige Seiten weiter dem Zwischenwertsatz. Auch dessen Beweis wird, sicher im Zuge der genetischen Methode, auf *später* vertagt. Es stellt sich heraus, dass sich dieses

„später“ nicht mehr innerhalb der veröffentlichten Buchseiten befindet. Das wiederum ermöglicht uns zu spekulieren, welche Beweise Toeplitz für den Zwischenwertsatz und den Hauptsatz vorgesehen hatte.

Ein *passender* Beweis für den zweiten Teil des Hauptsatzes

Wonach suchen wir jetzt genau? Nun, die reellen Zahlen sind bei Toeplitz, wie gesagt, Intervallschachtelungen (Theorem 1) und bei der Konstruktion solcher Schachtelungen wird, sofern möglich, sukzessive halbiert. Ein Beweis des Zwischenwertsatzes, der diese Bemerkungen aufgreift, ist uns natürlich bekannt. Fehlt also nur noch ein passender Beweis für den zweiten Teil des Hauptsatzes. Bei der Suche nach Lehrbüchern zur Analysis, die die reellen Zahlen mit Hilfe von Intervallschachtelungen einführen, treffe ich im Schrank überrascht auf mein früheres Schulbuch: Mathematik Sekundarstufe II – Analysis Leistungskurse von Cornelsen Schwann. Tatsächlich enthält dieses Buch sogar zwei verschiedene Varianten den Hauptsatz zu beweisen, die jeweils auch auf die Idee der Intervallhalbierung zurückgreifen. *Variante 1* ist die klassische: Supremumsatz (mit Halbieren) – stetige Funktionen sind beschränkt (mit Halbieren) – Satz vom Maximum – Satz von Rolle – Mittelwertsatz – Hauptsatz. *Variante 2* dagegen lautet: lokaler Trennungssatz – globaler Monotoniesatz (mit Halbieren) – nicht negative Ableitung in einer Umgebung impliziert monotones Steigen – Hauptsatz. Toeplitz‘ Buch enthält nun aber keinen einzigen der in den beiden Varianten durchschrittenen Sätze. Ich beschließe den Beitrag daher mit einer *dritten Variante*, die direkt auf den Hauptsatz (verschwindende Ableitung in einer Umgebung impliziert eine konstante Funktion) abzielt, was allerdings zu Kosten einer alternativen Definition der Ableitung geht.

Alternative Definition der Ableitung: Eine Funktion f heiße *differenzierbar* an der Stelle c, wenn es eine Zahl $f'(c)$ gibt, sodass für alle steigenden Folgen s_n und fallenden Folgen t_n mit $s_n < t_n$ und gemeinsamem Grenzwert c die Folge $\frac{f(t_n)-f(s_n)}{t_n-s_n}$ gegen $f'(c)$ konvergiert.

Beweis des Hauptsatzes: Sei f eine Funktion deren Ableitung konstant 0 ist. Angenommen die Funktion f ist selbst nicht konstant. Seien dann o.B.d.A. s und t reelle Zahlen mit $s < t$ und $f(s) < f(t)$. Definiere ausgehend von s und t durch sukzessive Intervallhalbierung eine steigende Folge s_n und eine fallende Folge t_n, sodass der Differenzenquotient in jedem Schritt steigt, also für alle n gilt: $\frac{f(t_n)-f(s_n)}{t_n-s_n} \leq \frac{f(t_{n+1})-f(s_{n+1})}{t_{n+1}-s_{n+1}}$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(t_n)-f(s_n)}{t_n-s_n}$ positiv. Wir haben also eine Stelle mit positiver Ableitung gefunden, nämlich den inneren Punkt der Intervallschachtelung (s_n, t_n). Widerspruch! Offenbar ist die Funktion f konstant.