Rolf BIEHLER, Hauke FRIEDRICH, Universität Paderborn, DE

Professionelles Wissen von Lehrkräften zum Thema bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit

1. Kontext

Im Rahmen des DZLM haben wir eine mehrtägige Lehrerfortbildung für Lehrkräfte der gymnasialen Oberstufe entwickelt, um sie bei der Umsetzung der Bildungsstandards und der neuen Kernlehrpläne zu unterstützen und dabei systematisch digitale Werkzeuge einzusetzen, insbesondere graphische Taschenrechner oder CAS-Rechner. Wir stützen uns dabei auf Arbeiten aus der Stochastikdidaktik zu den neuen Bildungsstandards der Sekundarstufe II (Biehler & Eichler, 2015; Biehler, Eichler, Löding, & Stender, 2015). Im Rahmen dieser Fortbildungsreihe beschäftigt sich ein Fortbildungstag mit dem Thema stochastische Unabhängigkeit und bedingte Wahrscheinlichkeiten, also einem Thema, das gewöhnlich in der Einführungsphase im Oberstufenunterricht behandelt wird.

2. Problemlage zum Thema stochastische Unabhängigkeit und bedingte Wahrscheinlichkeiten im Unterricht der Sekundarstufe II

Schülerinnen und Schüler haben in der Sekundarstufe I mit Baumdiagrammen mehrstufige Zufallsversuche modelliert, in der Regel aber, ohne dass der Begriff der stochastischen Unabhängigkeit explizit thematisiert wurde. Ebenso wenig wurde der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit explizit eingeführt, aber implizit bei mehrstufigen Zufallsexperimenten benutzt. Es ist sogar zu befürchten, dass Schülerinnen und Schüler unreflektiert bei mehrstufigen Zufallsexperimenten Unabhängigkeit voraussetzen, da diese Praxis leider auch in Schulbüchern verbreitet ist, wie eine in einer Bachelorarbeit durchgeführte Schulbuchanalyse zeigt. Als zentrales Modell wird in der Oberstufe die Binomialverteilung behandelt, bei dem die stochastische Unabhängigkeit eine zentrale Modellannahme ist. Auch hier legen viele Schulbücher zu wenig Wert auf die besondere Herausstellung dieser Modellannahme und schlagen auch Aufgaben zum Training der Binomialverteilung vor, bei denen es unplausibel ist, dass die Annahme der Unabhängigkeit erfüllt ist (vgl. Biehler, 2005). Dies schlägt sich auch in problematischen Abituraufgaben nieder. Beispielsweise wurde in der „Nowitzki-Aufgabe" im NRW-Abitur 2008 unbegründet die stochastische Unabhängigkeit bei sukzessiven Basketball-Freiwürfen unterstellt (Borovcnik, 2009; Diepgen, 2008).

Bei der Binomialverteilung steht die stochastische Unabhängigkeit von Zufallsexperimenten im Vordergrund, dem entspricht in der Mathematik der

Begriff der stochastischen Unabhängigkeit von Zufallsgrößen. Prototypisch wird das Konzept auch bei Urnenziehungen (mit oder ohne Zurücklegen) angewendet. Im stochastischen Theorieaufbau an der Hochschule wird der Begriff der Unabhängigkeit von Zufallsgrößen aus dem Begriff der Unabhängigkeit von Ereignissen abgeleitet: Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn gilt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. In der Schule werden diese beiden Begriffe i.d.R. gar nicht scharf unterschieden. Die Definition der stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen steht oft unverbunden neben der Praxis, stochastische Unabhängigkeit bei mehrstufigen Zufallsversuchen anzunehmen. Diese Problematik ist in der Stochastikdidaktik Truran and Truran (1997) aufgefallen. Ein ähnliches Spannungsfeld macht der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit auf. Einerseits findet man als Definition $(*) P(A|B) \coloneqq \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Man berechnet $P(A|B)$ also wenn man $P(A \cap B)$ und $P(B)$ kennt. Bei mehrstufigen Zufallsversuchen ist aber oft $P(B)$ und $P(A|B)$ (in der zweiten Stufe) aus der Analyse der Sachsituation „direkt" gegeben und man berechnet mit der Pfadregel $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$, es bleibt offen, wieso man im Baumdiagramm überhaupt von bedingten Wahrscheinlichkeiten im Sinne der Definition (*) sprechen kann.

Ein weiterer oft im Unterricht vernachlässigter Punkt ist die Häufigkeitsinterpretation der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$: Wenn ich einen Zufallsversuch wiederholt durchführe, dann erwarte ich unter den Ergebnissen, bei denen B eingetreten ist, das Eintreten von A mit einer relativen Häufigkeit von etwa $P(A|B)$ bei großem Stichprobenumfang n. Diese Häufigkeitsinterpretation kann natürlich auch zum Schätzen von bedingten Wahrscheinlichkeiten aus Experimenten und Simulationen genutzt werden. Beispielsweise kann so die Unabhängigkeit von Zufallsexperimenten dadurch empirisch geprüft werden, dass man überprüft, ob annähernd gilt $P(E_2|E_1) = P(E_2)$ für beliebige Elementarereignisse E_2, die den zweiten Teilversuch betreffen und beliebige Elementarereignisse E_1, die den ersten Teilversuch betreffen.

Ein wichtige Anwendung der bedingten Wahrscheinlichkeiten sind Problemstellungen im Umfeld des Satzes von Bayes, die eine hohe praktische Relevanz besitzen und bei denen häufig Fehlvorstellungen auftreten, nicht nur bei Schülerinnen und Schülern, sondern auch außerhalb der Schule (Krämer & Gigerenzer, 2005). Beispielsweise werden bei medizinischen Tests die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(erkrankt|Test\ positiv)$ und $P(Test\ positiv|erkrankt)$ verwechselt und die Basisrate beim Beurteilen vernachlässigt.

3. Inhalte der Lehrerfortbildung zum Thema stochastische Unabhängigkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit (Modul B)

Das Thema wird im ersten Fortbildungstag (Modul A) vorbereitet, in dem Einstiege in die Stochastik mit computergestützter Simulation erarbeitet werden. In den drei folgenden Fortbildungstagen wird das Thema Unabhängigkeit bei der Binomialverteilung (Modul C) und die bedingten Wahrscheinlichkeiten wieder bei der Interpretation von Hypothesentestergebnissen (Modul D und E) aufgegriffen. Basis der Lehrerfortbildung ist ein strukturierter Unterrichtsvorschlag mit einem Stufenkonzept, das die o.g. Aspekte in einen sinnvollen Aufbau integriert.

1. Einführung der bedingten Wahrscheinlichkeit und stochastischen Unabhängigkeit an einstufigen Zufallsexperimenten (fairer und unfairer Würfel mit unterschiedlich gefärbten Flächen); Häufigkeitsinterpretation der bedingten Wahrscheinlichkeit; Nutzung von Simulationen zur Veranschaulichung der Häufigkeitsinterpretation der bedingten Wahrscheinlichkeit
2. Explizite Thematisierung von bedingten Wahrscheinlichkeiten in Baumdiagrammen bei mehrstufigen Versuchen; Einführung des Begriffs „stochastische Unabhängigkeit von Teilexperimenten bei einem zusammengesetzten Zufallsversuch"; Kennzeichnen der stochastischen Unabhängigkeit als prinzipiell zu überprüfende Modellannahme
3. Anwendungen auf authentische Anwendungsgebiete, u.a. der „Sally-Clark-Skandal" (http://en.wikipedia.org/wiki/Sally Clark) und das Zeige-Ring-Finger-Problem (http://www.welt.de/wissenschaft/article13613930/Was-die-Laenge-von-Zeige-und-Ringfinger-verraet.html).
4. Anwendungen von bedingten Wahrscheinlichkeiten im Umfeld des Satzes von Bayes nach Ideen von (Wassner, Biehler, Schweynoch, & Martignon, 2007).

Zum Unterrichtsvorschlag werden die in Abschnitt 2 dargelegten Probleme als wichtiges Hintergrundwissen vermittelt. Die dort thematisierten Fehlvorstellungen werden als nicht nur bei Schülerinnen und Schülern verbreitete Fehlvorstellungen thematisiert und Möglichkeiten aufgezeigt, diese Fehlvorstellungen im Unterricht aufzudecken und Unterricht so zu gestalten, dass Schülerinnen und Schüler adäquatere auch intuitive verfügbare Vorstellungen entwickeln können.

4. Schlussbemerkung

Evaluationsergebnisse zu dem vorgestellten Kurs werden an anderer Stelle veröffentlicht. Wir bedanken uns bei Ralf Nieszporek und Birgit Griese (beide Uni Paderborn) und bei Wolfgang Unkelbach und Gernot Jost, Mathematikmoderatoren der Bezirksregierung Arnsberg, mit denen wir gemeinsam das vorliegende Konzept diskutiert und gemeinsam in Fortbildungen umgesetzt haben.

Literatur

Biehler, R. (2005). Authentic modelling in stochastics education: The case of the binomial distribution. In G. Kaiser & H.-W. Henn (Eds.), *Festschrift für Werner Blum* (pp. 19-30). Hildesheim: Franzbecker.

Biehler, R., & Eichler, A. (2015). Leitidee Daten und Zufall. In W. Blum, S. Vogel, C. Drüke-Noe, & A. Roppelt (Eds.), *Bildungsstandards aktuell: Mathematik für die Sekundarstufe II* (pp. 70-80). Braunschweig: Diesterweg.

Biehler, R., Eichler, A., Löding, W., & Stender, P. (2015). Simulieren im Stochastikunterricht. In W. Blum, S. Vogel, C. Drüke-Noe, & A. Roppelt (Eds.), *Bildungsstandards aktuell: Mathematik für die Sekundarstufe II* (pp. 248-260). Braunschweig: Diesterweg.

Borovcnik, M. (2009). "Anwendungen" und Anwendungen - Zentrales Abitur und vergebene Chancen für den Unterricht in Stochastik. *Stochastik in der Schule*, *29*(3), 10-18.

Diepgen, R. (2008). Kein Witz!? Zur Nowitzki-Aufgabe im NRW Zentralabitur 2008. *Stochastik in der Schule*, *28*(3), 20-28.

Krämer, W., & Gigerenzer, G. (2005). How to Confuse with Statistics or: The Use and Misuse of Conditional Probabilities. *Statistical Science*, *20*(3), 223-230.

Truran, J. M., & Truran, K. (1997). Statistical Independence - One Concept or Two? Implications for Research and for Classroom Practice. In B. Phillips (Ed.), *Papers on Statistical Education presented at ICME-8 (International Congress on Mathematics Education-8) Seville, Spain, July 14-21*. Hawthorn, Australia: Swinburne Press.

Wassner, C., Biehler, R., Schweynoch, S., & Martignon, L. (2007). *Authentisches Bewerten und Urteilen unter Unsicherheit - Arbeitsmaterialien und didaktische Kommentare für den Themenbereich "Bayessche Regel" für den Stochastikunterricht der Sekundarstufe I Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik Bd. 5* http://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hebis:34-2006092214718