

Das Zylindermantelproblem im Praxissemester - Entwicklungsforschung in einer Fokusgruppe

Um bei Lehramtsstudierenden wissenschaftsbasierte Kompetenzen zum Unterrichten aufzubauen, schlägt der Wissenschaftsrat vor, dass diese Studierenden in den Praxisphasen durch Forschendes Lernen eine forschende Grundhaltung entwickeln sollen und dadurch lernen, Theoriewissen für das Unterrichten fruchtbar einzusetzen (vgl. 2001, S. 41). Es wird aber nichts darüber gesagt, wie diese Form des Lernens zieladäquat gestaltet werden kann. Im vorliegenden Beitrag stellen wir vor, wie Studierende in einer Fokusgruppe aus vier Personen durch einen doppelzyklischen Prozess zur Entwicklungsforschung lernen, Theoriewissen gezielt für Unterricht zu nutzen, um ihn zu planen, durchzuführen, zu beobachten, zu reflektieren und zu optimieren und dabei auch theoretische Einsichten zu gewinnen.

Eines der zentralen Ziele war der Aufbau einer Praxis fachdidaktischer Reflexion in der Unterrichtshandlung (reflection-in-action, Schoen 1983). Dies wurde in zwei Zyklen fachdidaktischer Reflexion angelegt. Jeder dieser Zyklen besteht aus einer Phase antizipierender Reflexion (reflection-pre-action, Bikner-Ahsbahs 2017, S. 94) während der Planung, sich anschließenden Reflexionen im Unterrichtshandeln (reflection-in-action, Schoen 1983) und einer Phase nachbereitender Reflexion (reflection-on-action, Schoen 1983). Antizipierende fachdidaktische Reflexion liegt dann vor, wenn Studierende *im Durchdenken von Konzeptschritten Theoriewerkzeuge nutzen, um Mathematikunterricht zu planen, mögliche Ereignisse, z.B. Fehler, bestimmte Aufgabenbearbeitungen, situative Interessenlagen, Hürden, Lerngelegenheiten etc. zu antizipieren und Handlungsoptionen zu entwerfen*. Dies wurde in der Fokusgruppe durch gemeinsame Unterrichtsplanung realisiert. Eine Person unterrichtete gemäß dieser Planung, die anderen beobachteten und dokumentierten den Unterricht theoriebasiert. Beobachtungen dieser Form sensibilisierten Studierende für fachdidaktisch begründete Handlungsoptionen. Nach dem Unterricht wurde dieser in Hinblick auf fachdidaktische Konzepte besprochen. Sind alle Ereignisse, Fehler, Hürden, Lösungswege etc. vorausgesehen worden? Hat der Unterricht die Lernenden ausreichend kognitiv aktiviert? Hat die Lehrkraft diagnostisch fundiert und angemessen adaptiv reagiert, z.B. durch emergente Aufgabenstellungen (Bikner-Ahsbahs & Kampake 2016)? An welchen Stellen könnten das Material oder auch die Interaktion im Ablauf der Stunde verbessert werden? Wodurch? Diese Überlegungen („reflection-on-action“) führten zu einer empirisch basierten Optimierung der Planung in Hinblick auf das Ziel, alle Lernenden mathematisch angemessen herauszufordern sowie kognitiv zu aktivieren. Danach begann

der zweite analog gestaltete Zyklus. Gemäß der optimierten Planung wurde in einer Parallelklasse unterrichtet und dieser Unterricht anschließend fachdidaktisch reflektiert. Dabei kam der gesamte Entwicklungsprozess vergleichend in den Blick: Waren die Veränderungen zur verbesserten kognitiven Aktivierung passend? Sind sie gelungen? Warum oder warum nicht wie gewünscht? Schülerlösungen sowie Mitschriften und Kommentare der beteiligten Beobachter*innen dienten als Datenbasis für einen Bericht mit Konsequenzen für einen möglichen dritten Zyklus.

Im folgenden Abschnitt wird nun die Entwicklungsforschung einer Fokusgruppe skizziert. Sie hatte das Ziel, eine Formel im Unterricht funktional zu behandeln (Bikner-Ahsbahs et al. 2015), um quadratische Funktionen einzuführen. Dabei hat diese Gruppe das *Zylindermantelproblem* (Winter & Ziegler 1974, S. 153, Aufgabe 6) wiederentdeckt und für besonders heterogene Lerngruppen der Klasse 9 aufbereitet.

Beim Zylindermantelproblem können mit einem rechteckigen Bogen Papier (unterschiedlicher Seitenlängen) zwei Zylinder mit unterschiedlichen Volumina geformt werden. In Abb.1 etwa hat der Mantel A die Seitenlängen 7cm und 14 cm. Wird die 7cm lange Seite als Höhe genutzt, ist das Volumen größer als wenn diese Länge als Umfang verwendet wird.

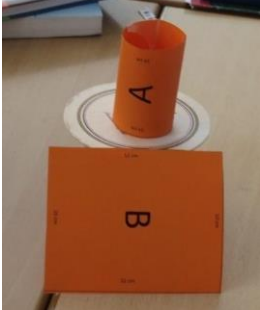

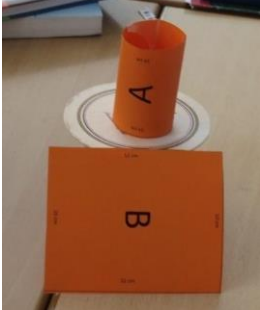

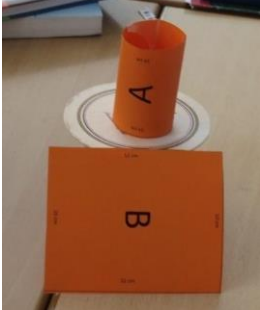

<p>Format A:</p> $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ $= \pi \cdot 2,23^2 \cdot 7$ $= \underline{109,36 \text{ cm}^3}$ <p>Format B:</p> $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ $= \pi \cdot 1,75^2 \cdot 10$ $= \underline{96,21 \text{ cm}^3}$	<table border="0"> <tr> <td data-bbox="810 1093 1070 1400">  </td> <td data-bbox="1139 1240 1332 1400">  </td> </tr> </table>		
			

Abb. 1: Zylindermantelproblem

Diese Idee wird nach der Drei-Elemente-Methode (Bikner-Ahsbahs & große Kamphake 2016) in eine Mitmach-Geschichte eingebettet, die die Doppelstunde strukturiert: Die Blue Ox AG möchte Energiepillen in zylindrischen Behältern vertreiben und bittet die Klasse um ein Gutachten für eine optimale Lösung. Anforderungen sind: Der Inhalt betrage mindestens 100 cm^3 und die Materialkosten (bezogen auf die Mantelfläche) sollen so gering wie möglich sein. Zwei Lösungswege sind möglich, „Ausrechnen“ oder „Experimentieren“ (Abb. 1, siehe Bild rechts). Die Zahlenwerte im ersten Zyklus führen bei der Volumenberechnung unmittelbar zur Entscheidung (Abb. 1), d. h. die kognitive Aktivierung ist gering. Diese wird im zweiten Zyklus

durch eine Veränderung der Maße der Rechtecke verbessert. Passend zu dieser Öffnung leitet der Bearbeitungsbogen nun verbessert den Lösungsprozess in den Schritten *Ideen sammeln, strukturiert aufschreiben, Empfehlung formulieren* an (Abb. 2).

Die neuen Formate für Rechtecke sind: 10cm x 11cm und 10cm x 12cm. In dieser Variante gibt es mehr als ein Volumen von mindestens 100 cm^3 . Auch der experimentelle Zugang führt nicht sofort zu einer eindeutigen Entscheidung. Die Lernenden müssen sich der Lösung argumentativ nähern. Dies geschieht, indem Ideen als Hypothesen auf dem Arbeitsblatt formuliert werden, der Lösungsprozess ausgeführt und schließlich begründet ausgewertet wird.

Lösungsweg:	Beschreibung:
<p><u>A:</u></p> <p>$A_1: r = 7 \text{ cm} : \pi = \frac{7}{2} = 2,23 \text{ cm}$</p> <p>$A_2: r = 7 \text{ cm} : \pi = \frac{7}{2} = 1,11 \text{ cm}$</p> <p>$A_1: V = 2,23^2 \cdot \pi \cdot 7 = 109,36 \text{ cm}^3$</p> <p>$A_2: V = 1,11^2 \cdot \pi \cdot 14 = 54,19 \text{ cm}^3$</p> <p><u>B:</u></p> <p>$B_1: r = 12 \text{ cm} : \pi = \frac{12}{2} = 1,90 \text{ cm}$</p> <p>$B_2: r = 10 \text{ cm} : \pi = \frac{10}{2} = 1,56 \text{ cm}$</p> <p>$B_1: V = 1,9^2 \cdot \pi \cdot 10 = 113,41 \text{ cm}^3$</p> <p>$B_2: V = 1,6 \cdot \pi \cdot 12 = 96,51 \text{ cm}^3$</p> <p><u>Mantelfläche:</u></p> <p>$A = 14 \cdot 7 = 98 \text{ cm}^2$</p> <p>$B = 10 \cdot 12 = 120 \text{ cm}^2$</p>	<p>Schritt 1: Der Radius berechnen der 4 Maßstäbe</p> <p>Schritt 2: das Volumen der beiden Körpern (ein Körper zwei Wege) berechnen und die Mantelfläche</p> <p>Schritt 3: Vergleichen der Ergebnisse</p>

Dieser Ausschnitt ist dem Arbeitsblatt einer Schülergruppe nachempfunden. Das Arbeitsblatt beginnt mit einer Ideensammlung (nicht abgebildet), legt einen Lösungsweg in Schritten nahe und strukturiert die abschließende Empfehlung für die Firma vor (siehe unten).

Empfehlung:
<p>Wir würden der Firma Blue Ox das Format <u>A₁</u> empfehlen, weil wir dort den kleinstmöglichen eckförmigen Volumen erhalten haben ($109,36 \text{ cm}^3$) und weil die Mantelfläche kleiner ist. Wichtig der Umfang muss 14 cm betragen und die Höhe 7 cm.</p>

Abb. 2: Ausschnitt aus dem Arbeitsblatt mit nachempfundenen Schülerlösungen

In der Interaktion entstehen Anforderungen zum adaptiven Lehrerhandeln. „Wenn der Mantel gleich ist, kann das Volumen nicht unterschiedlich sein!“ „Wenn der Radius 0 ist, ist der Zylinder weg!“ Dies sind zwei Schülerbeiträge, die reflektierende Lehrerreaktionen verlangen. Im ersten Fall kann dies knapp sein: „Bist du sicher? Prüf das doch mal!“. Der zweite Fall ist feinsinniger. „Was genau ist weg?“ ist eine Reaktion, die den Schüler zum Nachdenken bringt: „Der Zylinder ist nicht weg, er besteht aus einer Linie der Länge h.“ Abb. 3 zeigt die fachliche Klärung in der Schlussphase des Unterrichts. Es werden funktionale Zusammenhänge in der Zylindervolumenformel untersucht (Bikner-Ahsbahs et al. 2015) und der proportionale

Zusammenhang zwischen V und h mit dem quadratischen Zusammenhang zwischen V und r verglichen (Abb. 3).

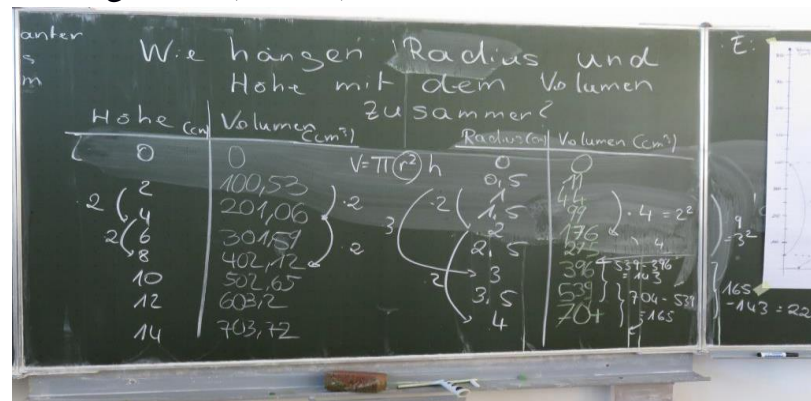


Abb. 3: Tafelbild zum funktionalen Denken an der Zylinderformel.

Die entscheidende Einsicht, wie kognitive Aktivierung bei allen Lernenden intensiviert werden kann, gelingt den Studierenden erfahrungsbasiert in den zweiten Zyklen. Dies geschieht durchweg durch eine fachdidaktisch fundierte Anhebung des mathematischen Gehalts der Konzeptionen: in der argumentativen Ausrichtung der Aufgabenstellung, in Arbeitsblättern mit heuristisch-dialogischer Strukturierung, in der Adaptivität des Lehrerhandelns als „reflection-in-action“ durch emergente Aufgaben und in der abschließenden „reflection-on-action“ mit fachdidaktischen Entwürfen für weitere Handlungsoptionen.

Danksagung: Dieses Projekt wurde gefördert von der Deutschen Telekom Stiftung im Rahmen des Entwicklungsverbunds zur Lehrerbildung: Diagnose und Förderung heterogener Lerngruppen.

Literatur

- Bikner-Ahsbahr, A., Thode, D., & Best, M. (2015). Funktionsverständnis im Übergang zur Sekundarstufe II. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*, Vortrag auf der Jahrestagung der GDM in Basel.
- Bikner-Ahsbahr, A. (2017). Design Research – ein Ansatz zum Forschenden Lernen. In S. Doff, R. Komoss (Hrsg.), *How does change happen? Wandel im Fachunterricht analysieren und gestalten*. (S. 87-110). New York, Berlin, Heidelberg: Springer VS.
- Bikner-Ahsbahr, A. & große Kamphake, L. (2016). Interesse fördern – inklusiv. *mathe-matiklehren* 195, 8-12.
- Schoen, Donald A. (1983). *The Reflective Practitioner: How Professionals Think in Action*. London: Temple Smith.
- Winter, H. & Ziegler, T. (1974). *Neue Mathematik 10*. Hannover: Hermann Schroedel Verlag.
- Wissenschaftsrat (2001) *Empfehlungen zur künftigen Struktur der Lehrerbildung*. Drs.5065/01 Berlin, 16.11.01/mo. <http://www.wissenschaftsrat.de/download/archiv/5065-01.pdf> (Zugriff am 14.04.2016)