Andreas BÜCHTER, Sebastian BAUER, Universität Duisburg-Essen, DE

Typisch mathematisches Denken – auch im Analysisunterricht der gymnasialen Oberstufe

1. Vorrede

Mit der vorliegenden Arbeit verbinden wir das Ziel, einen konstruktiven Beitrag für mehr Tiefgang im Analysisunterricht zu leisten. Hierfür gibt es unterschiedliche Beweggründe, die aus der intensiven Auseinandersetzung mit dem aktuellen Mathematikunterricht und seinen Ergebnissen sowie der Problematik des Übergangs von der Schule in die Hochschule resultieren. So werfen z. B. die mäßigen Anforderungen in Zentralabituraufgaben (vgl. Bauer, 2017a) die Frage auf, wie es um das heutige Anschlussniveau in Leistungskursen Mathematik bestellt ist. Von der anderen Seite in den Blick genommen kann man feststellen, dass selbst in MINT-Studiengängen viele Studienanfängerinnen und -anfänger gravierende Schwierigkeiten mit der Bewältigung grundlegender Anforderungen haben; dies trifft sowohl auf das vertiefte technische als auch auf das begriffliche Arbeiten oder den flexiblen Umgang mit Mathematik zu (vgl. Büchter, Scheibke & Wilzek, 2017).

Da das Beklagen entsprechender Zustände alleine noch keine Hinweise zur Verbesserung dieser liefert, zeigen wir am Beispiel des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung, wie typisch mathematisches Denken und Arbeiten auf dem Niveau der Schule aussehen und zu entsprechendem Tiefgang führen kann (vgl. Bauer & Büchter, 2017). Ein anderer konstruktiver Vorschlag, der eine mögliche schulische Thematisierung von Differenzialgleichungen zum Gegenstand hat, wird in Bauer (2017b, 2017c) ausgeführt. Die Vorschläge haben gemein, dass auch die Förderung fachlich interessierter und intellektuell begabter Schülerinnen und Schüler ernst genommen wird, was nicht zu Lasten anderer Schülerinnen und Schüler gehen muss. Zugleich nehmen die Vorschläge das Ziel eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts ernst. Sie gehen dabei von den aktuellen Rahmenbedingungen des Analysisunterrichts aus.

2. Aktuelle Rahmenbedingungen des Analysisunterrichts

Am Beispiel des Bundeslandes Nordrhein-Westfalen lässt sich gut konkretisieren, wie sich die Rahmenbedingungen des Analysisunterrichts in den vergangenen Jahrzehnten verändert haben. So steht heute gegenüber den 1980er-Jahren nur noch etwa die Hälfte der Unterrichtszeit für Analysis im Leistungskurs Mathematik zur Verfügung und die curricularen Vorgaben umfassen erheblich weniger fachliche Gegenstände als damals (vgl. Büchter, 2016; Büchter, Scheibke & Wilzek, 2017).

3. Zielsetzungen und Suchrichtung für konstruktive Vorschläge

Unser Anliegen, mehr Tiefgang im Analysisunterricht der gymnasialen Oberstufe zu erzeugen, kann aus unserer Sicht realisiert werden, wenn das typisch mathematische Denken und Arbeiten gefördert wird und die Prinzipien der Wissenschaftsorientierung und Wissenschaftspropädeutik berücksichtigt werden.

Die Förderung des typisch mathematischen Denkens und Arbeitens soll dabei im Sinne von „thinking mathematically (mastering mathematical modes of thought“ (Niss, 2003) erfolgen. Damit wird der fachlichen Qualifizierung aller Schülerinnen und Schüler, der Vorbereitung auf vertiefte mathematische Bildung (in MINT-Studiengängen) und einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht gedient.

Die Berücksichtigung von Wissenschaftsorientierung und Wissenschaftspropädeutik stellt sicher, dass nicht zwischen verschiedenen „Mathematiken“ („Schulmathematik“ vs. „Hochschulmathematik“) unterschieden wird, sondern das mathematische Arbeiten in der Hochschule als Präzisierung, Formalisierung und Vertiefung des Arbeitens in der Schule verstanden wird. Im Sinne eines Spiralcurriculums hat die Schule dabei die Aufgabe, die Präzisierung, Formalisierung und Vertiefung dadurch vorzubereiten, dass die Grenzen des inhaltich-anschaulichen Vorgehens erfahrbar werden.

4. Beispiel: Weiterdenken vom Hauptsatz aus

Wenn mehr Tiefgang im Analysisunterricht erreicht werden soll, muss unter den aktuellen Rahmenbedingungen exemplarisch gearbeitet werden. Dabei ist es natürlich sinnvoll, zentrale Begriffe, Zusammenhänge oder Verfahren zu vertiefen. Kaum etwas bietet sich dafür mehr an, als ein „Hauptsatz“ – zumal der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung in einigen aktuellen Schulbüchern arg verkürzt präsent ist (LS NRW, 2015):

> **Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung**
> Für eine stetige Funktion f auf dem Intervall $[a;b]$ gilt:
> $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, wobei F eine beliebige Stammfunktion von f auf $[a;b]$ ist.

In den meisten Darstellungen umfasst der Hauptsatz, der schulisch für den Riemann’schen Integralbegriff formuliert wird, zwei Teilaussagen für Funktionen, die auf einem beschränkten und abgeschlossenen Intervall definiert und stetig sind (vgl. Büchter & Henn, 2010):

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung
Die Funktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei auf dem Intervall $[a; b]$ stetig.

(1) Für die Integralfunktion $F_a: [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt\,, a \leq x \leq b$, gilt $F_a'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a; b]$.
(2) Wenn F eine Stammfunktion von f ist, dann gilt $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Bei der obigen Formulierung lässt die erste Teilaussage erkennbar werden, warum der Satz „Hauptsatz“ heißt. Sie garantiert unter den getroffenen Voraussetzungen die Existenz von Stammfunktionen und sagt aus, dass „Differenzieren Integrieren rückgängig macht“, wie also Differenzial- und Integralrechnung zusammenhängen. Die zweite Teilaussage gibt dann noch eine (extrem nützliche) Regel zur Berechnung bestimmter Integrale an.

Der Substanzverlust in der Schulbuchfassung führt somit zu einer Unstimmigkeit in der Darstellung und dürfte dem Prinzip der Wissenschaftsorientierung kaum noch genügen. Geht man auch heute von einer stimmigen Fassung des Hauptsatzes aus, dann liegen im Sinne typisch mathematischen Denkens und Arbeitens, Fragen nahe, die den Unterricht wissenschaftspropädeutisch werden lassen. Eine Voraussetzung beim Hauptsatz ist, dass die Ausgangsfunktion auf einem beschränkten und abgeschlossenen Intervall stetig ist. Geht man gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern den Fragen, was passieren kann, wenn die Funktion nicht stetig oder das Intervall nicht beschränkt und abgeschlossen ist nach, beginnt eine spannende Suche, die in viele Richtungen und zu vielen substanziellen Betrachtungen und Ergebnissen führen kann. Z. B. führt eine „Sprungstelle“, also eine Art fehlender Stetigkeit an einer Stelle, dazu, dass die Integralfunktion an dieser Stelle nicht differenzierbar ist, die erste Teilaussage also nicht möglich ist bzw. nicht gilt.

Da Funktionen mit einer „Sprungstelle“, die an allen anderen Stellen stetig sind, über dem Intervall aber integrierbar sind, liegt die Frage nahe, wann Funktionen nicht mehr (mit dem schulischen Integralbegriff) integrierbar sind. Auch wenn diese Frage schulisch kaum vollständig geklärt werden kann, führt die Suche fast zwangsläufig zu einer Vertiefung des Grenzwertbegriffs, des Stetigkeitsbegriffs und des Integralbegriffs – und zu spannenden ersten Ergebnissen. So ist z. B. schulisch auch heute durchaus noch erreichbar, dass eine Funktion mit unendlich vielen Unstetigkeitsstellen untersucht wird, die integrierbar ist (vgl. Bauer & Büchter, 2017).

5. Nachrede

Der Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe muss vertiefte Allgemeinbildung und Studienvorbereitung ermöglichen. Andernfalls ließe sich kaum rechtfertigen, warum er formal eine hervorgehobene Rolle im Fächerkanon spielt. Allerdings steht dafür heute weniger Unterrichtszeit zur Verfügung als früher und sind die curricularen Voraussetzungen dafür heute weniger breit und tief. Der intendierte Tiefgang, der zu einem „mathematikhaltiger[en] Mathematikunterricht" (Jahnke, 2012) führen soll, kann also nur exemplarisch erzeugt werden – aber er kann erzeugt werden. Die wiederholte Anregung des typisch mathematischen Denkens und Arbeitens zeigt hierfür einen geeigneten Weg auf, der gegangen werden sollte, auch wenn sich entsprechende Anforderungen nicht in zentral gestellten schriftlichen Abiturprüfungen wiederfinden lassen. Denn: Unabhängig von der konkreten Ausgestaltung der zentralen Abiturprüfungen (vgl. Bauer 2017a) sollte nicht hingenommen werden, dass das fachliche Interesse und die intellektuellen Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler „untertunnelt" werden.

Literatur

Bauer, S. (2017a). Kriteriengeleitete Untersuchung von Zentralabituraufgaben aus Bayern und NRW im Bereich der Analysis. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017*.

Bauer, S. (2017b). Modellieren im Analysisunterricht mit Differentialgleichungen. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017*.

Bauer, S. (2017c). Modellieren mit Differentialgleichungen über das logistische Wachstumsmodell hinaus. *Der Mathematikunterricht, 63 (1)*, 28-36.

Bauer, S. & Büchter, A. (2017). Vom Hauptsatz aus Weiterdenken - Analysis wissenschaftspropädeutisch unterrichten. *Der Mathematikunterricht, 63 (1),* 17-27.

Büchter, A. (2016). Zur Problematik des Übergangs von der Schule in die Hochschule - Diskussion aktueller Herausforderungen und Lösungsansätze für mathematikhaltige Studiengänge. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016*.

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2010). *Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Büchter, A., Scheibke, N. & Wilzek, W. (2017). Zur Problematik des Übergangs von der Schule in die Hochschule – Zielsetzungen, Eingangsvoraussetzungen und Wirksamkeit von Vorkursen Mathematik. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017*.

Jahnke, T. (2012). Die Regeldetri des Mathematikunterrichts. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012*.

(LS NRW) Lambacher Schweizer (2015). *Mathematik Qualifikationsphase – Leistungskurs – Grundkurs. Nordrhein-Westfalen.* Stuttgart: Ernst Klett.

Niss, M. A. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish KOM project. In A. Gagatsis, S. Papastavridis (Hrsg.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education – Athens, Hellas 3-4-5 January 2003* (pp. 116 – 124). Athen: Hellenic Mathematical Society.