Willi DÖRFLER, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, AT

Mathematik als Grammatik ihrer Zeichen (Wittgenstein)

Der folgende Text ist eine Interpretation von Ideen, Vorschlägen, Anregungen und Fragestellungen von Ludwig Wittgenstein zu einem nicht metaphysischen Verständnis von Mathematik, das ganz klar und radikal sich von allen traditionellen philosophischen Positionen (Platonismus, Empirismus, Logizismus, etc.) distanziert. Eine gewisse Nähe besteht bestenfalls zu Nominalismus und Formalismus. Zentral erweist sich der Regelbegriff, der es dann erlaubt, total auf die Frage nach mathematischen Objekten zu verzichten. Es ist also (m)eine Interpretation basierend auf vielen Äußerungen Wittgensteins verstreut in mehreren Publikationen: Bemerkungen zu den Grundlagen der Mathematik, Philosophische Untersuchungen, Philosophische Bemerkungen, u.a. Genaue Einzelbelege und Zitate sind aus Platzgründen hier leider nicht möglich.

Die Frage nach dem Gegenstand oder den Gegenständen der Mathematik plagt die Philosophie der Mathematik noch immer ohne jegliche Hoffnung auf eine rationale und konsensuelle Antwort. Selbst der Verzicht auf mathematische Gegenstände (wie im Nominalismus) ist mit dem Einspruch konfrontiert, dass dann mathematische Sätze nicht wahr sein können. Aus diesem Dilemma kann es also nur einen radikalen Ausweg geben, wenn man nicht die Metaphysik zu Hilfe rufen möchte. Einen solchen Ausweg hat Wittgenstein vorgeschlagen, der damit aber auf wenig Zustimmung stieß, weil er die Loslösung von liebgewordenen Vorurteilen und Grundannahmen voraussetzt. Wittgenstein formuliert seinen Vorschlag auf verschiedene Weise, und dieser basiert ganz wesentlich auf seiner These der Bedeutung von Zeichen und Wörtern als deren Gebrauch, deren Verwendung in Sprachspielen. Daher gilt es, sich darüber klar zu werden, wie mathematische Zeichen, Termini, Definitionen, Sätze, Beweise etc. in der Mathematik verwendet werden. Dabei liegt der Fokus vorwiegend innerhalb der Mathematik, wenn auch Wittgenstein den Anwendungen der Mathematik große Relevanz zuschreibt, aber gleichzeitig sagt, dass die Mathematik daraus nicht ihre Bedeutungen ableiten kann.

Wittgenstein entwickelt seine Sicht u.a. aus dem Kontrast der Mathematik zur Naturwissenschaft und meint, dass die Auffassung von Mathematik als eine solche ein gravierendes Missverständnis darstellt. Die Sätze etwa der Physik werden als Beschreibungen von Sachverhalten verstanden und verwendet, zum Beispiel dadurch, dass sie durch Experimente überprüft werden können und müssen. Nichts davon ist für Mathematik sinnvoll. Besonders wichtig ist der Unterschied zwischen Experiment und Beweis (oder Rechnungen). Letztere zeigen, was herauskommen muss und wie es herauskommt. Die Wiederholung (oder das Foto, der Film) einer Rechnung hat eine ganz andere Funktion als die Wiederholung (das Foto, der Film) eines Experimentes. Beim Experiment bleibt stets ungeklärt, wieso jenes Ergebnis sich ergab, ein Beweis zeigt gerade dieses. Zur Verstärkung des Kontrastes sagt Wittgenstein u.a.: mathematische Sätze sind nicht beschreibend, es gibt keine mathematischen Sachverhalte, es gibt in der Mathematik keine Überraschungen, Mathematik als Konstruktion und als System von (Beweis-) Techniken, Mathematik als Kalkül, etc. Auf einen einfachen gemeinsamen Nenner gebracht, heißt das, dass Mathematik als Mathematik nicht als Wissenschaft eines Gegenstandsbereiches verstanden werden soll (wie etwa die Mineralogie als die Wissenschaft von den Gesteinen). Damit ist aber Wittgenstein mit all den Vorwürfen an den Nominalismus konfrontiert. Um dies zu umgehen, muss man noch weitergehen und eine Sichtweise auf den Charakter oder den Gebrauch mathematischer Sätze entwickeln, die den totalen Verzicht auf den Begriff von Wahrheit ermöglicht. Dabei sind sehr unterschiedliche Sichtweisen möglich abhängig vom Gebrauch der Sätze (keine absolute Bedeutung also!).

Hier ist der Begriff der Regel für Wittgenstein ganz zentral, und die diesbezügliche Diskussion wird an vielen Stellen auch seiner Sprachphilosophie geführt. Hier muss ein naives Verständnis von „Regel" genügen. Die mathematische Bedeutung mathematischer Sätze liegt nun nach Wittgenstein darin, dass sie als Regeln verwendet werden und nicht als Beschreibungen von Sachverhalten. Der Regelcharakter mathematischer Sätze ist ganz zentral und wird auf verschiedene Weise noch verdeutlicht. Aber Regel wofür? Einmal sind mathematische Sätze Regeln zum Schließen etwa in Beweisen. Bereits bewiesene Sätze und Formeln werden in neuen Beweisen verwendet, wobei es aber vollkommen irrelevant ist, ob durch sie ein „Sachverhalt" beschrieben wird oder nicht: dies folgt aus jenem wegen diesem. Besonders deutlich wird dies in mehr formalisierten Beweisen. Es entsteht so ein komplexes System von Regeln und nicht die Beschreibung einer Welt mathematischer Objekte. In Definitionen vor allem finden sich Regeln dafür, wie wir gewisse Begriffe oder Termini und Zeichen verwenden sollen. Beispiel: $i*i=-1$ oder die Definition von „unendliche Menge". Ich denke, es ist ziemlich unsinnig, die absolute Existenz des Unendlichen in welcher Form auch immer anzunehmen. Aber es macht offenbar Sinn festzulegen, wie man in der Mathematik dieses Wort verwenden soll, woraus dann auch seine Bedeutung entsteht. Es geht also nicht darum, irgendetwas Vorgegebenes intuitiv zu erfassen und zu beschreiben (wie für Cantor oder Gödel), sondern sinnvolle Sprechregeln und Zeichenregeln zu entwerfen, aus denen dann weitere Regeln, d.h. Sätze abgeleitet werden können. In diesem Sinne gibt es in der

Mathematik auch kein Unendliches sondern nur Theorien dazu, durchaus verschiedene Entwürfe, wie „Unendlich“ „aussehen“ könnte. Besonders an diesem Beispiel wird deutlich, wie leistungsstark die Regelmetapher ist. Selbst eingefleischte Platonisten geben zu, dass man mit dem Unendlichen nicht direkt operieren kann, sondern nur mit Zeichen nach entsprechenden Regeln. Aber der angebliche Gegenstand dieser Zeichen tritt dann in der Mathematik gar nicht mehr auf! Das gilt entsprechend bereits für die natürlichen Zahlen beim Rechnen und in der gesamten Arithmetik. Der Regelcharakter ermöglicht nun den Verzicht auf die Kategorisierung mathematischer Sätze als wahr oder falsch: das macht für Regeln einfach keinen Sinn. Regeln können gültig oder korrekt sein, und – ganz wichtig – sie müssen akzeptiert werden (aber sie können nicht bestritten oder widerlegt werden). Hier könnte man nun weitergehen mit dem Hinweis auf Beweisregeln wie Vollständige Induktion oder Auswahlaxiom, die ebenso nicht die Konsequenz aus Eigenschaften irgendwelcher Objekte sind. Damit fällt auch die abstruse Vorstellung weg, dass sich Wahrheit durch logisches Schießen von Satz zu Satz „fortpflanzt“. Ein anderer Aspekt der Auffassung mathematischer Sätze als Regeln ist, dass damit die Unzeitlichkeit der Mathematik verständlich wird: Regeln werden immer im Präsens formuliert. Natürlich können Regeln verändert, erweitert, abgeschafft, etc. werden, aber die Regel selbst hat eben keine zeitliche Dimension: sie gilt, solange Menschen sie akzeptieren. Damit verliert auch das Phänomen verschiedener „Mathematiken“ (Intuitionismus) oder verschiedener Logiken seine Brisanz, die es sonst etwa für den Platonismus besitzt: beschreibt die Mathematik eine unabhängig existierende mathematische Welt, so kann nur eine Beschreibung richtig sein.

Man muss sich nun allerdings der Frage stellen, wieso mathematische Sätze konsequent als Aussagen über mathematische Objekte formuliert werden und damit den Anschein erwecken, mathematische Sachverhalte zu beschreiben in Analogie zu physikalischen Aussagen. Die Lokalisierung dieser Objekte variiert dabei je nach philosophischer Orientierung. Hier kann wieder der Regelcharakter mathematischer Sätze herangezogen werden, denn diese dienen für die verschiedensten Anwendungen als Regeln zur Beschreibung von Sachverhalten. Mathematische Sätze sind somit selbst nicht Beschreibungen von Sachverhalten, sondern können für solche oder als konstitutive Teile davon verwendet werden, also als Regeln zur Konstruktion von Modellen aller Art. Das ist schon für die Arithmetik gut nachvollziehbar, wo die Rechenregeln auch für die Anwendungen eine zentrale Rolle spielen. Der Anwender muss das jeweils möglichst gut passende Regelsystem (= mathematische Theorie) wählen oder auch ein solches erst entwickeln. Die Regeln sind dabei wieder Regeln zum Operieren mit Zeichen und jeder neue Satz stellt in diesem Sinne eine neue Regel auf. Da nun in den Anwendungen stets

Gegenstände und ihre Beziehungen zu beschreiben sind, erscheint es sinnvoll, die Beschreibungsregeln als Regeln zum Umgang mit Objekten zu formulieren, wobei die diesbezüglichen Zeichen in den Sätzen und Formeln den Charakter von Variablen oder von Indices im Sinne von Peirce haben, die auf mögliche Referenzobjekte verweisen. In einem gewissen Sinne wird dadurch auch das notorische Anwendungsproblem gelöst: Beschreibungsregeln als Techniken der Modellbildung sind eben keine Bilder einer Realität und auch in dieser nicht auffindbar. Sie werden vom Modellbildner nach gewissen Zielsetzungen und nach ihrer Praktikabilität gewählt.

Wittgenstein verwendet noch andere Metaphern. So bezeichnet er mathematische Sätze als grammatische und meint damit, dass sie den Gebrauch der in ihnen verwendeten Zeichen und Wörter regeln oder besser: so benutzt werden, ähnlich wie oben als Regeln in den jeweiligen Zeichenspielen. Er erläutert dies an Sätzen wie „Jeder Stab hat eine Länge“, der keinen Sachverhalt wiedergibt, sondern etwas über „Stab“ und „Länge“ mitteilt. Oder: „Weiß ist heller als Schwarz“ ist keine empirische Aussage, was auch daran ersichtlich ist, dass die Negation dieses Satzes sinnlos erscheint. Grammatische Sätze sind also nicht an einer Realität außerhalb der Sprache überprüfbar, was sie in die Nähe der analytischen Urteile bei Kant rückt. Sieht man mathematische Sätze unter diesem grammatischen Aspekt, so wird zum Beispiel verständlich, warum Mathematik nicht an der empirischen Erfahrung scheitern kann (und auch noch nie durch empirische Erfahrungen widerlegt wurde; dies im Kontrast etwa zu Quine oder dem heute aktuellen Quasi-Empirismus).

Zwei andere oft verwendete Begriffe sind „Norm“ und „Paradigma“, in welchen Formen mathematische Sätze, Beweise und Definitionen verwendet werden. So ist etwa die mathematische Kugel kein Objekt sondern dient als Paradigma, Norm oder Vorbild dafür, was wir als Kugel bezeichnen und verwenden wollen und sollen. Damit fällt die quälende Frage nach der Qualität und dem Ort des Objektes einer idealen Kugel einfach weg. Dieses Paradigma wird und muss wieder in einer gegenstandsbezogenen Formulierung festgelegt werden, um diese Rolle spielen zu können.

Insgesamt ergibt sich so ein totaler Transfer des Mathematischen in den Bereich menschlichen und vor allem sozial vermittelten Tuns: Regeln haben einen durch und durch sozialen Charakter, und darin liegt auch die didaktische Relevanz von Wittgensteins Sicht.