

Finanzmathematik im Unterricht – erste Ergebnisse eines Entwicklungsforschungsprojekts

1. Beschreibung der Forschungsmethode

Nach PREDIGER et al. ist ein mögliches Ergebnis der Entwicklungsforschung (engl. „Design Research“) die fundierte Erstellung von

...konkreten, qualitativ hochwertigen und funktionalen Produkten für den Einsatz im Unterricht...(PREDIGER et al., 2012, S. 452)

Die Entwicklungsforschung in diesem Sinne ist zyklischer Natur und schlägt grob formuliert das Durchlaufen vier unterschiedlicher Stationen vor (siehe Abb. 1). Die hier vorgestellte Untersuchung beginnt den Kreislauf bei „Lern-



Abb. 1 Zyklus der fachdidaktischen Entwicklungsforschung (entnommen aus Prediger et al., 2012, S. 453, verändert)

gegenstand spezifizieren und strukturieren“. Die Operationalisierung erfolgt über einen Zugang über *zentrale Ideen der Finanzmathematik*.

Der zweite Abschnitt dieser Untersuchung widmet sich unter „Design entwickeln“ dem Erstellen von Unterrichtsmaterialien.

In einem dritten Abschnitt werden die empirischen Erprobungen im Sinne „Design-Experimente durchführen und auswerten“ evaluiert.

An dieser Stelle muss erwähnt werden, dass es sich hier um Entwicklungsforschung im Kleinen handelt. Darunter soll das partielle Durchlaufen des „Entwicklungsforschungskreislaufs“ gemeint sein. Um „lokale Theorien zu entwickeln“, müsste umfangreicher empirisch erhoben werden.

2. Zentrale Ideen der Finanzmathematik

Der Zugang erfolgt über *fundamentale Ideen* einer Wissenschaft. Im Folgenden wird über **zentrale Ideen** statt *fundamentale Ideen* im Sinne von SCHREIBER gesprochen. Im Rahmen einer qualitativen Studie wurden sechs Finanzmathematiker/innen befragt. Aus den Transkripten konnten fünf *zentrale Ideen* der Finanzmathematik extrahiert werden: *Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik, Handhabung von Risiko, No-Arbitrage-Prinzip, Replikation und Zeitwert des Geldes* (vgl. DORNER, 2016, S. 233 ff.).

3. Exemplarische Beschreibung des Unterrichtsmaterials

Beispielhaft wird in Ansätzen eine Sequenz zu „**Krediten und Risiko**“ vorgestellt (vgl. DORNER, 2017, S. 51 ff.). Kredite und Tilgungspläne kommen in Schulbüchern und Lehrplänen durchaus vor. Die Aufgaben vermitteln aber einen recht statischen Eindruck, und Risiken wie Schwankungen des Zinssatzes oder des Wechselkurses bei Fremdwährungskrediten werden nicht thematisiert. Ein wesentlicher Bestandteil dieses Unterrichtsvorschlags ist die Verwendung von GeoGebra. Mit Hilfe von Schiebereglern und Zufallszahlen werden Dynamiken und Risiken eines Kredites sichtbar. Im Anschluss werden der Beitrag der Sequenz zu den *zentralen Ideen* sowie das Erfüllen der Kriterien für einen guten (anwendungsorientierten) Mathematikunterricht beschrieben (vgl. DORNER, 2016, S. 235). Das untenstehende Arbeitsblatt (siehe Abb. 2) soll einen exemplarischen Eindruck der Unterrichtssequenz vermitteln.

Beitrag zu den zentralen Ideen: Bei der Bestimmung des Schuldenstandes wird voll und ganz im Sinne der Idee *Zeitwert des Geldes* gearbeitet. Alle Berechnungen beruhen auf dem Grundsatz: „Ein Euro heute ist mehr wert, als ein Euro morgen“. Eine Modellierung des Zinssatzes mit Hilfe von Zufallszahlen ermöglicht eine probabilistische Betrachtung, es wird *Stochastik im Kontext Finanzmathematik verwendet*. Durch diese Art der Modellierung ist der Schuldenstand nach jeder Periode im Vorhinein nicht mehr vorhersehbar. Die Zusammenhänge zwischen Zinssatz und Schuldenstand können beobachtet und so das Risiko der Zinssatzänderung identifiziert werden. In diesem Sinne wird ein Beitrag zu der Idee *Handhabung von Risiko* geleistet.

Erfüllen der Kriterien von guter Anwendung im MU:

Formale Aspekte: Die geforderte Mathematik erfüllt den Lehrplan, die Sequenz ist für 6-8 Einheiten konzipiert. Sie kann verkürzt werden.

Eignung: Kredite sind keine Objekte des alltäglichen Lebens der Lernenden. Das Ausborgen von Geld ist jedoch auch bei den Schülern/innen gang und gäbe. Viele trifft es aber erst im späteren Leben, z.B. beim Hauskauf.

Authentizität: Aufgrund aktueller Ereignisse (negative Zinssätze für Banken bei der EZB) ist das Modellieren von Zinssätzen ein brandheißes Thema bei Wissenschaftlern/innen und Praktikern/innen.

Mathematische Aspekte: Tilgungsgleichung, geometrische Reihe, Zufallszahl. Die verwendete Mathematik ist also keineswegs trivial, jedoch überschreitet sie auch nicht den Horizont der Schüler/innen.

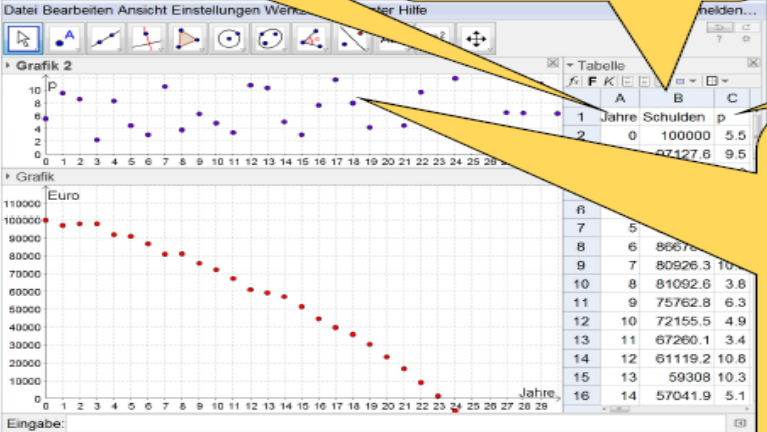
Das vorige Modell geht davon aus, dass der Jahreszinssatz über die Laufzeit konstant bleibt, das stimmt nicht mit der Realität überein. Schwankende Zinssätze stellen das Risiko eines Kredits dar. Diese Gefahr übersehen viele Kreditnehmer/innen. Bei der Aufnahme eines Kredits muss ein Gespräch mit einer/m Bankberater/in geführt werden, dabei werden solche Rückzahlungsszenarien, wie bei der vorigen Aufgabe aufgezeichnet. Der/Die Berater/in zeigt in den meisten Fällen nur einen möglichen Tilgungsplan. Das ist in der Regel ein Diagramm, das für Kreditnehmende günstig ist. Für die Kreditnehmenden schlecht verlaufende Tilgungspläne werden in der Regel nicht gezeigt. Die Bank möchte eben ihre Produkte verkaufen, da ist diese Strategie ganz klar.

Erstelle ein neues GeoGebra-Arbeitsblatt, in dem sich der Jahreszinssatz von Jahr zu Jahr verändert! Modellierte den sich verändernden Zinssatz als Zufallszahl! Öffne ein neues GeoGebra-Arbeitsblatt und folge den Schritten!

1) Tabelle: Öffne die Tabellenansicht! Schreibe in die Zelle A1 Jahre! Trage in die erste Spalte die Zahlen von 0 bis 40 ein!

3) Tabelle/Grafik: Schreibe in die Zelle B1 Schulden! Berechne den jährlichen Schuldenstand und erzeuge wieder eine Liste von Punkten, um diesen zu visualisieren, wie bei Blatt 1!

2) Tabelle: Trage in die Spalte C den Zinssatz ein! Tippe dazu in die Zelle C1 p ein! Gib in die Zellen C2 bis C40 den Befehl `ZufallszahlGleichverteilt(2,6)` ein, um eine zufällig erzeugte rationale Zahl zwischen 2 und 6 zu bekommen!



4) Tabelle/Grafik: Visualisiere den Verlauf des Zinssatzes ebenfalls durch Punkte! Hinweis: Das Unterlegen zweier Spalten, die nicht nebeneinander liegen, funktioniert durch das Unterlegen der ersten Spalte, dann hält man die Taste STRG gedrückt und unterlegt die zweite Spalte. Nun kann man das Werkzeug "Liste von Punkten" (•••) verwenden. Damit die Punkte nur im Grafikenster 2 angezeigt werden, darf im Eigenschaftendialog des Objekts Punkt unter „Erweitert“ nur Grafik2 angehakt sein (Bei dem Objekt Liste funktioniert das nicht).

1. Das Drücken der F9-Taste veranlasst eine neue Berechnung der Zufallszahlen. Simuliere durch Drücken der Taste mehrere Rückzahlungsszenarien! Beschreibe die Vorkommnisse!
2. Welche Werte/Verläufe des Zinssatzes sind für den/die Kreditnehmer/in günstig und welche nicht?
3. Vergrößere den Bereich, in dem der zufällige Zinssatz liegen darf, auf das Intervall]0,1 ;12[! Was passiert? Beschreibe die Vorkommnisse!
4. Eine bessere Modellierung: Der Zinssatz des nächsten Jahres soll in einem kleinen Intervall (Wie klein?) um den Zinssatz des aktuellen Jahres liegen (Zufallszahl). Ändere die Spalte C dementsprechend ab und simuliere anschließend mehrere Szenarien! Was fällt dir auf?
5. Ist es überhaupt sinnvoll, den Kreditzinssatz mit Zufallszahlen zu simulieren?

Abb. 2 Das zweite Arbeitsblatt der Unterrichtssequenz

4. Empirische Erprobung

Die vorgestellte Unterrichtssequenz wurde im April 2016 an einem Wiener Gymnasium in der 10. Schulstufe erprobt. Ausgewertet wurden die erhobenen Daten über ein **drei Perspektiven Modell**, dabei sollen alle am Prozess Beteiligten teilhaben. Der **Forscher** schildert seine Sicht, **Schüler/innen** antworten zu bestimmten Fragen, und die **Lehrperson** verfasst einen nach Kriterien orientierten Erfahrungsbericht. Hier wird auf das abgebildete Arbeitsblatt (siehe Abb. 2) eingegangen.

Forscher: Die meisten Fragen waren technischer Natur in GeoGebra. Einem Schüler war nicht klar, wie er bei Frage 4 ein passendes Intervall finden

sollte. Die Lehrperson half ihm durch weitere Fragen, den Zinssatz vernünftig zu modellieren.

Schüler/innen: Hier wird näher auf die Frage 2 eingegangen. Die Antworten lassen sich durch drei Gruppen beschreiben. Schüler/innen antworten: 1) sehr kurz und im Prinzip richtig, 2) umfangreich und verstricken sich dadurch in Ungereimtheiten, 3) berücksichtigen die Zeitkomponente und vergessen darauf, dass durchgehend niedrige Zinssätze am besten wären.

2.) Je niedriger der Zinssatz, desto besser. 2) Am besten wären konstante niedrige Zinssätze, um die Tilgdauer gering zu halten. Am ungünstigsten wären sprunghaft also stark verändernde Zinssätze, da die Tilgdauer länger sein könnte und vielleicht noch mehr Schulden (wegen hohen Zinssätzen) vorhanden sein könnten.

Abb. 3 Schüler/innenantwort zu 1)

2) Zu Beginn hohe Zinssätze \Rightarrow mehr Geld, welches zurückzahlen ist.
- n - niedrige - n - \Rightarrow weniger Geld, - n -

Abb. 4 Schüler/innenantwort zu 3)

Abb. 5 Schüler/innenantwort zu 2)

Lehrperson: Der Lehrer meinte zur Gestaltung der Arbeitsblätter:

Meine persönliche Einschätzung hierzu ist, dass diese Instruktionen jedenfalls sehr hilfreich sind, da sie dabei helfen, technische Probleme so gering wie möglich zu halten.

Er hebt hervor, dass die Schüler/innen eigenständig arbeiten und sich Wissen aneignen können, und betont die gute Verständlichkeit der Materialien.

Die S. verbrachten im Unterricht die meiste Zeit mit der Bearbeitung der Aufgaben und stellten nur vereinzelt Verständnisfragen.

Der Lehrer erprobte aufgrund der positiven Rückmeldungen der Schüler/innen die Arbeitsblätter auf eigene Faust in einer weiteren Schulklasse.

Fazit: Die Lehrperson wird bei der Verwendung dieser Materialien trotz der Sprechblasentechnik mit technischen Problemen konfrontiert sein. Ansonsten eignen sich die Materialien für eine Verwendung im Unterricht, bei der sich die Schüler/innen eigenständig Wissen aneignen können.

Literatur

Dorner, C., (2016). Finanzmathematik im Unterricht – Was soll unterrichtet werden? – ein Zugang über zentrale Ideen. In: Institut für Mathematik und Informatik der PH Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 233 – 236). Münster: WTM-Verlag.

Dorner, C., (2017). Kreditszenarien. In: H. Humenberger und M. Bracke (Hrsg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 3* (S. 51 – 81). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Prediger, S. et al. (2012). Lehr- Lernprozesse initiieren und erforschen – Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* 65 (8), (S. 452 – 457).