Martin Erik HORN, Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin, DE

Lösung einer Aufgabe zu Linearen Gleichungssystemen aus der Han-Dynastie mit GAALOP als Taschenrechner-Ersatz

Vor einigen Jahrzehnten hat ein dramatischer Umbruch in der mathematischen Grundbildung stattgefunden. Rückblickend auf meine eigene Schulzeit (Abitur 1983, Baden-Württemberg) fiel meine Ausbildung in diese Umbruchphase. Taschenrechner wurden erst gegen Ende der Sekundarstufe I und in der Sekundarstufe II als Hilfsmittel zugelassen. Zudem erinnere ich mich noch gut, wie wir Werte logarithmischer Funktionen mit Hilfe von Rechenschiebern ermittelten und so deren Eigenschaften diskutierten.

Noch wenige Jahre zuvor war ein Taschenrechnereinsatz im schulischen Bereich nicht vorgesehen, in den Jahren nach meiner Schulzeit verschob sich der Taschenrechnereinsatz in immer frühere Jahrgangsstufen. Die Folgen dieses Prozesses sind deprimierend beeindruckend: Auch für einfachste mathematische Rechnungen greifen Studierende heute im sofortigen Reflex nach ihren Taschenrechnern. Studierende – zumindest in den von mir durchgeführten deutschsprachigen Kursen für Anfangssemester auf Fachhochschulniveau – sind größtenteils Rechen-Analphabeten.

Dieser Befund ist bedauerlich, aber bei einem weiter andauernden exzessiven Taschenrechnereinsatz im schulischen Bereich wohl unvermeidlich. Problematisch wird dies dann, wenn mathematische Bereiche behandelt werden, in denen die geforderten mathematischen Operationen nicht mit derzeit auf dem Markt befindlichen Taschenrechnern durchführbar sind.

Die Geometrische Algebra (Clifford-Algebra) ist ein solches Gebiet, da die Multiplikation nicht-kommutativer Größen zur Zeit nicht per Taschenrechner möglich ist. Die Konsequenz ist simpel: Die Diskussion der Geometrischen Algebra muss sich auf einfachste Fälle beschränken, um die Studierenden rechnerisch nicht zu überfordern und die Stofferarbeitung nicht durch rechnerische Fragen zeitlich zu überdehnen. In einem entsprechenden Unterrichtskonzept (Horn 2016a, b, c) wird die Erarbeitung der Linearen Algebra aus geometrisch-algebraischer Perspektive deshalb auf Lineare Gleichungssysteme mit lediglich zwei Unbekannten reduziert.

Es ist jedoch wünschenswert, die Studierenden auch an die Lösung Linearer Gleichungssysteme mit mehr als zwei Gleichungen bzw. Unbekannten auf Basis der Geometrischen Algebra heranzuführen. Da entsprechende Taschenrechner nicht zur Verfügung stehen, muss für die dabei anfallenden Rechnungen nach einem Ersatz gesucht werden. Als ein solcher „Taschenrechner-Ersatz“ bietet sich das Programm GAALOP an.

Das Programm-Tool GAALOP

GAALOP (Geometric algebra algorithms optimizer) ist ein Compiler, der zur Optimierung von Algorithmen auf Grundlage der Geometrischen Algebra gedacht ist und eine robuste und rechenzeiteffektive Verarbeitung von Programmschritten zur Geometrischen Algebra ermöglicht (Hildenbrand et al. 2010, 2013). Damit ist GAALOP ein hocheffizientes und wirkungsmächtiges Tool, das die Programmierung mathematischer Strukturen auf Grundlage der Geometrischen Algebra deutlich erleichtert.

Auf Grundlage einer intuitiv zugänglichen CluCalc- und LaTeX-Programmierung kann GAALOP jedoch auch als ein geometrisch-algebraischer Taschenrechner-Ersatz ge- oder (je nach Sichtweise) missbraucht werden. Am Beispiel der Lösung einer historisch relevanten Aufgabe aus der frühen Han-Dynastie soll dies im Folgenden demonstriert werden.

Die Reisfelder-Aufgabe aus den Neun Kapiteln

Eine der frühesten mathematischen Kulturtechniken, die die Menschheit entwickelte, war die Lösung einfacher Linearer Gleichungssysteme. Bereits vor über 4000 Jahren konnten babylonische Mathematiker Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten lösen. Entsprechende Lösungstechniken – verbal beschriebene Vorformen des Gaußschen Algorithmus – vermittelten sie in Schulen routinemäßig nachfolgenden Generationen.

Auch in China lösten Mathematiker schon früh Lineare Gleichungssysteme. Einer der ältesten Texte zur Lösung Linearer Gleichungssysteme mit drei Unbekannten findet sich im Buch „Neun Kapitel über die Kunst von Berechnungen“ aus der Zeit der frühen Han Dynastie (200 v.Chr. – 9 n. Chr.), dessen Wirkung auf die asiatische Mathematik mit der von Euklids „Elementen“ auf die europäische Mathematik verglichen werden kann (Derbyshire 2006, S. 163). In der Literatur finden sich verschiedene Fassungen dieser Aufgabe (Derbyshire 2006, S. 161), (Grcar 2011, S. 783), (Wußing 2006, S. 57/58), die in etwa so zusammengefasst werden können:

> *Auf drei Feldern werden drei verschiedene Reissorten geerntet.*
>
> *Drei Körbe der ersten Sorte, zwei Körbe der zweiten Sorte und ein Korb der dritten Sorte wiegen zusammen 39 Tou.*
>
> *Zwei Körbe der ersten Sorte, drei Körbe der zweiten Sorte und ein Korb der dritten Sorte wiegen zusammen 34 Tou.*
>
> *Und ein Korb der ersten Sorte, zwei Körbe der zweiten Sorte und drei Körbe der dritten Sorte wiegen zusammen 26 Tou.*
>
> *Wie viel wiegt jeweils ein Korb einer Reissorte?*

In moderner Form – nach Einführung der Variablenschreibweise durch Diophantus in Alexandria – kann die Reisfelder-Aufgabe als folgendes Lineares Gleichungssystem geschrieben werden:

$$3x + 2y + z = 39$$
$$2x + 3y + z = 34$$
$$x + 2y + 3z = 26$$

Auch die chinesischen Mathematiker lösten diese und ähnliche Aufgaben in Anlehnung an das Gauß-Verfahren. Aufgrund der Nutzung von Rechenbrettern entwickelten sie zudem eine handfest-anschauliche Vorstellung von Matrizendarstellungen, so dass zu Recht von „einer Art Matrizenrechnung" (Wußing 2006, S. 57) gesprochen werden kann.

Geometrische Algebra

Mit seiner Ausdehnungslehre beschreibt Hermann Grassmann eine alternative Lösungsmethode, bei der „die Anwendbarkeit der äusseren Multiplikation mit einer so schlagenden Entschiedenheit heraustritt, dass ich wohl behaupten darf, es werde durch diese Anwendung auch die Algebra eine wesentlich veränderte Gestalt gewinnen" (Grassmann 1844, S. 71). Grassmann gibt die entsprechenden Formeln zur Lösung Linearer Gleichungssysteme mit einer beliebigen Anzahl an Unbekannten an, die in heutiger Schreibweise bei drei Unbekannten x, y, z lauten:

$$x = \frac{\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}} \quad \begin{matrix}\text{(Grassmann1844,}\\ \text{S. 72, Formel1.)}\end{matrix} \qquad y = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{c}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}} \qquad z = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}}$$

Dabei stellen **a**, **b** und **c** die Koeffizientenvektoren und **r** den Ergebnisvektor des Linearen Gleichungssystems dar, siehe auch (Horn 2015). Diese sind in den ersten vier Zeilen der Beispiellösung (Abb. 1) angegeben.

GAALOOP-Umsetzung & Ausblick

Nach Eingabe der Lösungsformeln und Aufruf des Optimize-Buttons werden die gesuchten Rechenergebnisse

$$x = \frac{37}{4} = 9{,}25 \qquad y = \frac{17}{4} = 4{,}25 \qquad z = \frac{11}{4} = 2{,}75$$

wie erwartet ausgegeben. Angegeben werden sie im sich öffnenden Ergebnisfenster als Skalarkomponenten x_(0), y_(0) und z_(0) der naturgemäß rein skalaren Ergebnisse (Abb. 1). Wenn das Programm lediglich als Taschenrechner-Ersatz genutzt wird, können die restlichen Zeilen, die eine Einbindung in LaTeX-Programme ermöglichen, ignoriert werden. Die Handhabung ist also denkbar einfach.

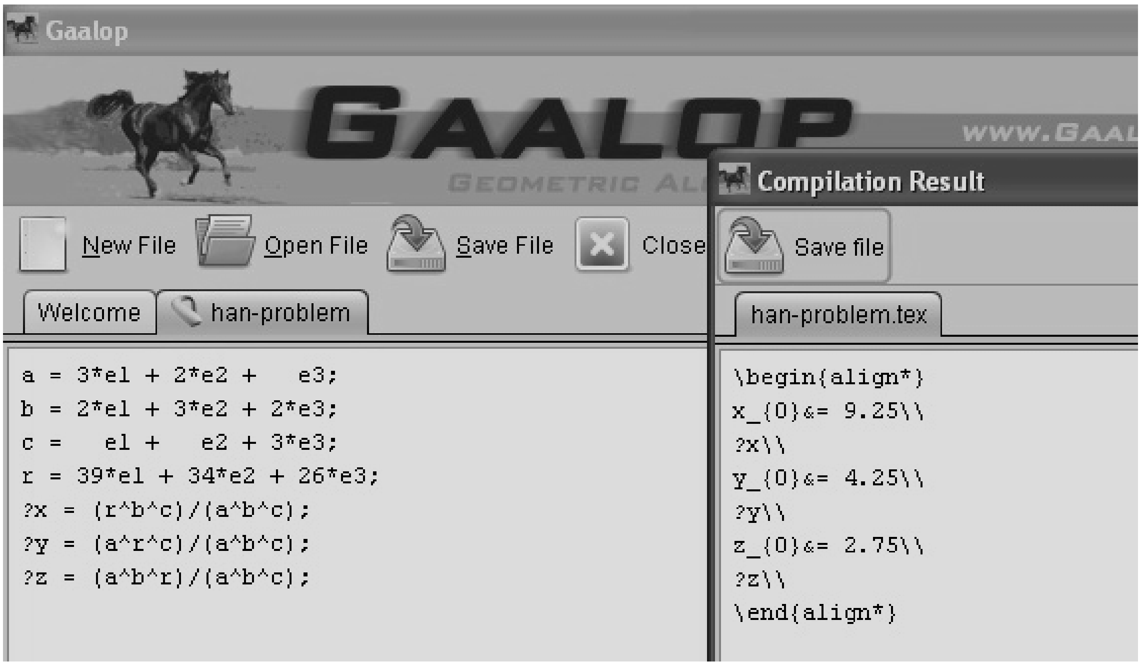

Abb. 1: Lösung der Reisfelder-Aufgabe aus den „Neun Kapiteln“ mit GAALOP.

Da GAALOP frei im Internet (URL: www.gaalop.de) heruntergeladen werden kann, bietet sich eine Nutzung als Taschenrechner-Ersatz auch bei anderen Rechnungen zur Geometrischer Algebra an.

Literatur

Derbyshire, J. (2006). *Unknown Quantity*. Joseph Henry Press, Washington, DC.

Grassmann, H. (1844). *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre. Erster Theil; Lineale Ausdehnungslehre*, Verlag von Otto Wigand, Leipzig.

Grcar, J. F. (2011). Mathematicians of Gaussian Elimination. *Notices of the AMS*, Vol. 58, No. 6, June/July 2011, S. 782–792.

Hildenbrand, D., Pitt, J. & Koch, A. (2010). Gaalop – High Performance Parallel Computing Based on Conformal Geometric Algebra. In: E. Bayro-Corrochano, G. Scheuermann (Hrsg.). *Geometric Algebra Computing in Engineering and Computer Science*. Springer-Verlag, London, S. 477–494.

Hildenbrand, D. (2013). *Foundations of Geometric Algebra Computing*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

Horn, M. E. (2015). Ein physikdidaktischer Blick auf die Lineare Algebra. In: F. Caluori et al. (Hrsg.). *BzMU 2015 in Basel*, Bd. 1, WTM-Verlag, Münster, S. 408–411.

Horn, M. E. (2016a). Die Geometrische Algebra im Schnelldurchgang. *PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Hannover 2016*, DD 05.19.

Horn, M. E. (2016b). *Moderne Lineare Algebra – Ein Überblick*. OHP-Folien des MSB-Kurses „Mathematik und Statistik“. Veröffentlicht als Anlage zu (Horn 2016a).

Horn, M. E. (2016c). *Moderne Lineare Algebra – Übungsblätter 15 & 16 des MSB-Kurses „Mathematik und Statistik“.* Veröffentlicht als Anlage zu (Horn 2016a).

Wußing, H. (2006). *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise – 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2017. Münster: WTM-Verlag.