Andreas EICHLER, Thomas HAHN, Viktor ISAEV, Julia GRADWOHL, Universität Kassel, DE

Konzepte von Lernenden zu Grundbegriffen der Analysis

„Calculus concepts are extremely hard to learn“ (Makonye, 2013, S. 352). Was genau schwierig zu lernen ist, ist mehrfach berichtet worden. Beispielsweise fasst Artigue (1991) zusammen, dass Schülerinnen und Schüler zwar hinreichend prozedurale Kenntnisse etwa zum Bilden einer Ableitung besitzen, inhaltlich-geometrische Überlegungen zu Konzepten wie etwa dem Ableitungsbegriff dagegen schwer fallen. Dazu passend sind die Ergebnisse von Malle (2003) zu den Vorstellungen zum Differenzenquotienten. Ergänzend zu den Schlussfolgerungen von Artigue (1991) stellt Makonye (2013) verschiedene Arten von Fehldeutungen auch bezogen auf das Ausführen von Ableitungen fest. Zusammenfassend sind daher Schwierigkeiten bekannt, die quasi die gesamte Schulanalysis bezogen auf die Differentialrechnung betreffen. Im Vergleich zu anderen Gebieten der Schulmathematik weiß man aber wenig zu Vorstellungen oder Fehlvorstellungen von Lernenden. Fehlvorstellungen (englisch misconceptions) können hier als Vorstellungen verstanden werden, die nicht auf den Konventionen oder dem allgemeinen Wissen entsprechenden Grundannahmen basieren (z.B. Siyepu, 2013). Fehlvorstellungen zur Analysis sind nur ansatzweise kategorisiert. Etwa unterscheidet Orton (1983) zwischen arbitrary, executive and structural errors. Während zu den letzteren die Fehlvorstellungen gehören, können die anderen Kategorien als Flüchtigkeits- und nicht einordbare Fehler verstanden werden. In ähnlicher Form unterscheidet Siyepu (2013) 30 Jahre später slips, errors und misconceptions.

Das fehlende Wissen und die mangelnde Kategorisierung von Fehlvorstellungen von Lernenden in der Analysis war Ausgangspunkt für das Forschungsprojekt „Konzepte von Lernenden zur Analysis“ (KoLA). Hier beziehen wir uns auf einen Teil des Projekts, dessen Ziel es ist, Fehlvorstellungen zu Grundbegriffen im Bereich der Differentialrechnung zu untersuchen. Als mögliche, mit Fehlvorstellungen verbundene Konzepte haben wir als zentrale Themen dieses Bereiches den Ableitungsbegriff, die Ableitungsregeln sowie die Umschreibung eines Grenzwerts identifiziert (Tietze, Klika & Wolpers, 2000). Für die Darstellung der Studie gehen wir im Folgenden auf die Methode ein und skizzieren erste Ergebnisse der Kategorisierung.

Methode

Die Stichprobe der Untersuchung bestand aus 93 Schülerinnen und Schülern dreier Gymnasien aus insgesamt 5 verschiedenen Kursen. Eine Auswahl von Aufgaben für die Untersuchung wird im Ergebnisteil präsentiert. Insgesamt repräsentieren die Aufgaben formal-symbolische Abfragen von prozeduralem Wissen sowie begrifflich geometrisch geprägte Aufgaben. Diese wurden im Sinne einer diagnostischen Vorgehensweise (Ingenkamp & Lissmann, 2008) jeweils mit einer Aufforderung der Erläuterung versehen. Dadurch sind jeweils zwei Antwortarten entstanden, einerseits symbolische bzw. grafische Lösungen sowie textbasierte Erläuterungen.

Die Auswertung der Antworten der Schülerinnen und Schüler erfolgte kodierend in mehreren Durchgängen. So wurden zunächst Codes entwickelt, die Lösungen der Lernenden kodiert und die unabhängig erfolgten Kodierungen der Autoren hinsichtlich der Übereinstimmung geprüft. Vorläufig abgeschlossen wurde die spiralig erfolgte Entwicklung eines Kodierleitfadens mit dem Erreichen einer Interrater-Reliabilität von größer als 0,8 (Cohens Kappa). Im Folgenden berichten wir lediglich die aus diesem Verfahren entwickelten Kategorien von Fehlvorstellungen zu zentralen Konzepten und Verfahren der Analysis. Alle im Folgenden angesprochenen Kategorien verstehen wir als Muster in dem Sinne, dass sie in einer substantiellen Häufigkeit in den Dokumenten der Lernenden auftauchen.

Ergebnisse

Die Kategorisierung der Schülerlösungen hat die in Abbildung 1 dargestellte Differenzierung ergeben.

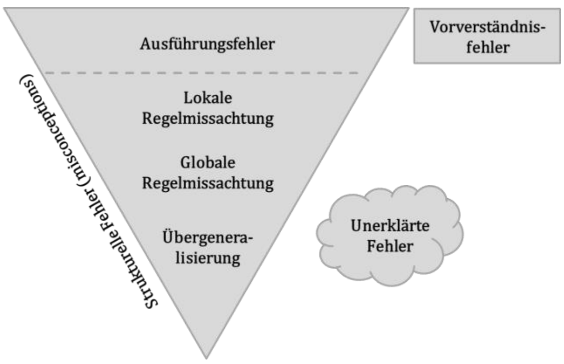


Abb. 1: Kategorisierung von Fehlvorstellungen

Als *Ausführungsfehler* bezeichnen wir solche, bei denen wir hinsichtlich der Aufgabenstellung keine Systematik unterstellen. *Vorverständnisfehler* sind inhaltsabhängig. Diese entsprechen überwiegend den executive errors nach Orton (1983) oder den slips nach Siyepu (2013). Im Bereich der Differentialrechnung sind dies insbesondere Fehler, die auf algebraische Fehlvorstellungen zurückzuführen sind, wie etwa die inkorrekte Anwendung von binomischen Formeln. Weiterhin sind *Unerklärte Fehler* in den Bearbeitungen aufgetreten, deren Grundlage nicht ermittelt werden konnte und die zum Teil aus Überlagerungen mehrerer, aber nicht mehr trennbarer Fehlvorstellungen bestanden. Diese Fehler entsprechen den arbitrary errors nach Orton (1983) und zum Teil den errors nach Siyepu (2013).

Als *Lokale Regelmissachtungen* betrachten wir solche auf Fehlvorstellungen basierende Vorgehensweisen, bei denen eine Regel zwar überwiegend angewendet werden kann, in spezifischen Situationen jedoch nicht. Ein Beispiel (Abb. 2) ist die korrekte Ausführung der Potenzregel, die aber bei einem isolierten Term x (wie in Abb. 2) oder dem absoluten Glied nicht angewendet wird.

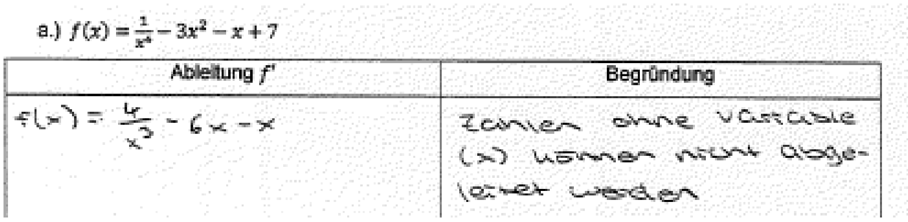
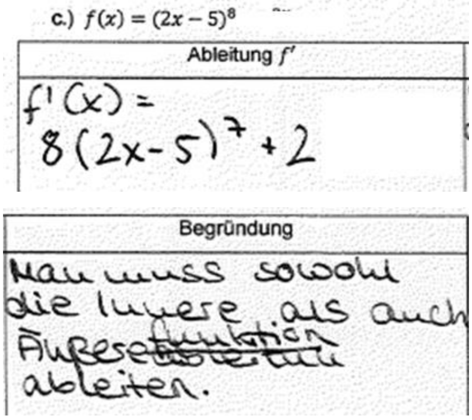


Abb. 2: Beispiel einer Lokalen Regelmissachtung

Als *Globale Regelmissachtung* werden Bearbeitungen eingeschätzt, die systematisch in allen Situationen für die Anwendung einer Regel auftreten.



Skizzieren Sie den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion

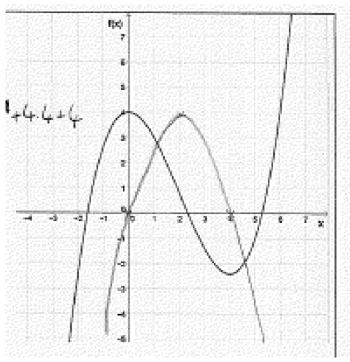
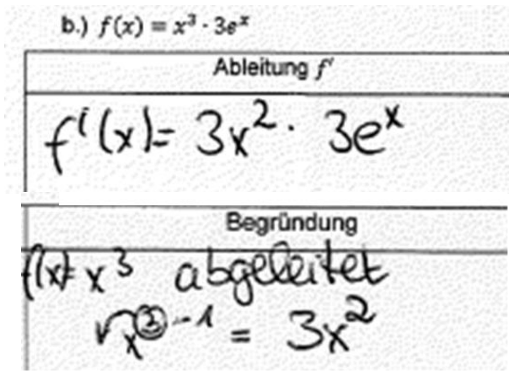


Abb. 3: Beispiele von Globalen Regelmissachtungen

Beispielsweise wird bei dem Versuch der Anwendung der Kettenregel systematisch allein eine innere oder äußere Ableitung erzeugt (Abb. 3). Bei der geometrischen Deutung einer Ableitung werden hierbei z. B. systematisch nur Beziehungen charakteristischer Punkte der Graphen von Funktion und Ableitungsfunktion („Extremstelle wird zur Nullstelle") betrachtet ohne die Steigung in den Intervallen zwischen diesen Punkten zu beachten.

Schließlich betrachten wir als Basis der *Übergeneralisierung* solche Fehlvorstellungen, die dazu führen, eine Regel über ihren Geltungsbereich hinaus anzuwenden (z. B. Makonye, 2013). Eine Übergeneralisierung stellt beispielsweise die Linearisierung der Produktregel analog zur Summeregel bei der Ableitung von Funktionen, aber auch die Linearisierung von nicht-quadratischen Funktionen bei der grafischen Ableitung dar (Abb. 4).



Skizzieren Sie den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion

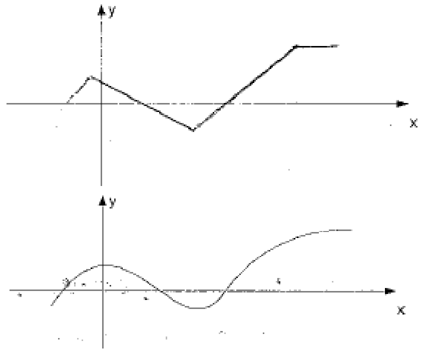


Abb. 4: Beispiele von Übergeneralisierungen

Ausblick

Mit der Kategorisierung von Fehlvorstellungen ist die Einordnung von nahezu allen Schülerlösungen in unserer Stichprobe bei symbolisch wie auch bei geometrisch ausgeführten Prozeduren möglich gewesen. Die Ergebnisse einer Quantifizierung zu den Kategorien stehen noch aus. Weiterhin soll das Projekt KoLA Erkenntnisse in qualitativer Hinsicht bezogen auf Denkprozesse vertiefen und ebenso qualitativ wie quantitativ auf andere Bereiche der Analysis wie die Integralrechnung ausgeweitet werden.

Literatur

Artigue, M. (1991). Analysis. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 167–198). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ingenkamp, K., & Lissmann, U. (2008). *Lehrbuch der pädagogischen Diagnostik* (6., neu ausgestattete Aufl.). *Studium Paedagogik.* Weinheim: Beltz.

Makonye, P. J. (2013). Learner errors on calculus tasks in the NSC examinations: Towards an analytical protocol for learner perturbable concepts in introductory differentiation. *The International Journal of Learning*, *18*(6), 339–357.

Malle, G. (2003). Vorstellungen vom Differenzenquotienten fördern. *mathematiklehren*. (118), 57–62.

Orton, A. (1983). Students‘ understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 235–250.

Siyepu, S. W. (2013). An exploration of students’ errors in derivatives in a university of technology. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 577–592.

Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (2000). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II.* Didaktik der Mathematik: Vol. 1. Braunschweig: Vieweg.