Martin Erik HORN, Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin, DE

Über die Kunst, Lineare Gleichungssysteme auf eine etwas andere Art zu lösen

Die Erarbeitung von Strategien zur Lösung Linearer Gleichungssysteme ist elementarer Bestandteil der Wirtschaftsmathematik-Ausbildung an der HWR Berlin. In Grundlagen-Veranstaltungen der Anfangssemester wird dabei üblicherweise in das Gauß-Verfahren sowie in die Lösung Linearer Gleichungssysteme durch inverse Matrizen, die mit Hilfe ihrer Unterdeterminanten ermittelt werden, eingeführt.

In den englischsprachigen Wirtschaftsmathematik-Kursen der vergangenen Wintersemester, die von relativ leistungsstarken Studierenden und einer hohen Anzahl an Austauschstudenten mit bereits vorhandenen vertieften Kenntnissen zur Wirtschaftsmathematik besucht wurden, konnten über diese Standard-Strategien hinaus auch alternative Ansätze erörtert werden.

Im Vordergrund stand dabei die mathematische Modellierung und Lösung Linearer Gleichungssysteme mit Hilfe der Geometrischen Algebra. So wurden im WS 2014/2015 schwerpunktmäßig der historische Ansatz von Graßmann (Horn 2015), im WS 2015/2016 das Gauß-Verfahren in der Interpretation als Koordinatentransformationen (Horn 2016) und im gerade zu Ende gegangenen WS 2016/2017 die Lösung Linearer Gleichungssysteme mit Hilfe von Eigenwerten und Eigenvektoren sowie ergänzend durch Sandwich-Produkte (Horn 2017) mit den Studierenden erarbeitet. Diese Nutzung von Sandwich-Produkten wird im Folgenden dargestellt.

1. Historischer Blick auf die Geometrische Algebra

Die Lösung Linearer Gleichungssysteme beruht nach Cramer und Grassmann auf einer intelligenten Verknüpfung von Determinanten bei Cramer beziehungsweise von äußeren Produkten bei Grassmann. Beide Herangehensweisen sind mathematisch äquivalent, was sich auch in der von Grassmann 1877 genutzten Schreibweise (Grassmann 1877, S. 385) zur Lösung des Linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{a}\,\mathrm{x} + \boldsymbol{b}\,\mathrm{y} + \boldsymbol{c}\,\mathrm{z} = \boldsymbol{d}$ (mittlere Formel)

$$\mathrm{x} = \frac{\boldsymbol{d}.\boldsymbol{b}.\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}.\boldsymbol{c}} \quad (1844) \qquad \mathrm{x} = \frac{[\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]}{[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]} \quad (1877) \qquad \mathrm{x} = \frac{\boldsymbol{d}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}} \quad (\text{modern})$$

ausdrückt. Ursprünglich hatte er den gleichen Lösungsansatz noch unter deutlicherer Kenntlichmachung des Produktcharakters in der ersten Fassung seiner Ausdehnungslehre (Grassmann 1844, S. 72, § 46) durch Punkte (linke Formel) angegeben, während in moderner Form (rechte Formel) äußere Produkte durch Keilsetzungen geschrieben werden.

Die zur Ermittlung der Unbekannten x, y, z bei Cramer benötigten Determinanten entsprechen dem orientierten Volumen der Parallelepipede, die durch die Koeffizientenvektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ bzw. dem Ergebnisvektor $\boldsymbol{d}$ aufgespannten werden. Dies ist in der Formulierung von Grassmann mit Hilfe äußerer Produkte sofort einsichtig. Nach Arnold empfiehlt sich die Betonung dieses Sachverhalts, denn „if determinants are defined otherwise, then any sensible person will forever hate all the determinants“ (Arnold 1998).

2. Der Mathematik-Virus MV/G

In Bezug auf Einordnung der bzw. Umgang mit der Geometrischen Algebra identifiziert Hestenes mehrere mathematische Viren (MV), die die davon Befallenen in ihrer Fähigkeit, mathematisch korrekt und sinnkonsistent zu agieren, beeinträchtigen: „Just as a computer virus (CV) is program which impairs the operating system of a computer, an MV is an idea which impairs the conceptualization of mathematics in the mind“ (Hestenes 1992).

Einer dieser Viren, den Hestenes als Grassmann-Virus (MV/G) bezeichnet, führt die davon Betroffenen zu der irrigen Annahme, dass die Grassmann-Algebra (also die Algebra äußerer Produkte) fundamentaler als die Clifford-Algebra (also die Algebra äußerer **und** innerer Produkte) sei.

Eine Betonung von Lösungsmethoden, die auf rein äußerer Multiplikation aufbauen, verstärkt somit diesen mathematischen Virus. Um eine solche Festigung von MV/G zu unterbinden, ist es sinnvoll, bei Behandlung der Geometrischen Algebra neben die durch Grassmann eingeführte Lösungsstrategie auch alternative Zugänge, die das vollständige Geometrische Produkt nutzen, zu diskutieren.

3. Sandwich-Produkte

Eine solche Nutzung gelingt, wenn der Ergebnisvektor $\boldsymbol{d}$ des Linearen Gleichungssystems in Sandwich-Form rechts- und linksseitig mit den Koeffizientenvektoren multipliziert wird. Dieses Vorgehen hat auch den Vorteil, dass die üblicherweise rein algebraische Lösungsweise durch eine geometrische Darstellung ergänzt und so besser verstanden werden kann. Dabei können zwei verschiedene Zugänge unterschieden werden.

Reine Sandwich-Produkte: Der mittlere Vektor wird rechts- und linksseitig mit einem gleichen Vektor multipliziert, z.B.

$$\boldsymbol{c\,d\,c} = \boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{a}\,\mathrm{x} + \boldsymbol{b}\,\mathrm{y} + \boldsymbol{c}\,\mathrm{z})\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c\,a\,c}\,\mathrm{x} + \boldsymbol{c\,b\,c}\,\mathrm{y} + \boldsymbol{c}^3\,\mathrm{z}$$

Wird nun die Differenz zwischen diesem reinen Sandwich-Produkt und dem Vielfachen $\boldsymbol{c}^2\boldsymbol{d}$ des Ergebnisvektors gebildet, führt dies zur Elimination einer einzigen Variablen – in diesem Fall also von z.

Die Bildung eines weiteren reinen Sandwich-Produkts mit dem neuen Koeffizienten von y führt dann auf eine längere, recht unübersichtliche Lösungsformel für x. Die Kunst bei diesem Ansatz zur Lösung Linearer Gleichungssysteme besteht nun darin, dieses Lösungsschema zu vereinfachen.

Gemischte Sandwich-Produkte: Der mittlere Vektor wird rechts- und linksseitig mit unterschiedlichen Vektoren multipliziert, z.B.

$$\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a}\,\mathrm{x} + \boldsymbol{b}\,\mathrm{y} + \boldsymbol{c}\,\mathrm{z})\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{c}\,\mathrm{x} + \boldsymbol{b}^2\boldsymbol{c}\,\mathrm{y} + \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}^2\,\mathrm{z}$$

und

$$\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{a}\,\mathrm{x} + \boldsymbol{b}\,\mathrm{y} + \boldsymbol{c}\,\mathrm{z})\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\mathrm{x} + \boldsymbol{b}^2\boldsymbol{c}\,\mathrm{y} + \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}^2\,\mathrm{z}$$

Wird nun die Differenz zwischen diesen beiden gemischten Sandwich-Produkten gebildet, führt diese auf die gleichzeitige Elimination von zwei Variablen – in diesem Fall von y und z. Damit ergibt sich aus der Differenzgleichung $\boldsymbol{c}\boldsymbol{d}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{d}\boldsymbol{c}$ umstandslos eine Lösungsformel für x:

$$\mathrm{x} = (\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{c})^{-1}\,(\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{c})$$

Gemischte Sandwich-Produkte führen somit direkt zur Lösung von Linearen Gleichungssystemen mit drei Unbekannten. Da die Differenz des Geometrischen Produktes dreier Vektoren und dem gleichen Geometrischen Produkt unter Umkehr der Reihenfolge der Vektoren (Reversion) aus Symmetriegründen gleich dem äußeren Produkt dieser drei Vektoren sein muss, entspricht die eben aufgefundene Formel $\mathrm{x} = (\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})^{-1}\,(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d}\wedge\boldsymbol{b})$ und da- mit der ursprünglichen Formel $\mathrm{x} = (\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})^{-1}\,(\boldsymbol{d}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})$ von Grassmann.

Zurück zu **reinen Sandwich-Produkten:** Jetzt wird rechts- und linksseitig der gleiche **Bivektor** anmultipliziert, z.B. der Bivektor $\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}$ oder $\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{a}\,\mathrm{x} + \boldsymbol{b}\,\mathrm{y} + \boldsymbol{c}\,\mathrm{z})\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,\mathrm{x} + \boldsymbol{b}^2\boldsymbol{c}^2\boldsymbol{b}\,\mathrm{y} + \boldsymbol{b}^2\boldsymbol{c}^2\boldsymbol{c}\,\mathrm{z}$$

und

$$\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a}\,\mathrm{x} + \boldsymbol{b}\,\mathrm{y} + \boldsymbol{c}\,\mathrm{z})\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{b}\,\mathrm{x} + \boldsymbol{b}^2\boldsymbol{c}^2\boldsymbol{b}\,\mathrm{y} + \boldsymbol{b}^2\boldsymbol{c}^2\boldsymbol{c}\,\mathrm{z}$$

Eine Differenzbildung führt jetzt ebenfalls umstandslos zur Lösung für x:

$$\mathrm{x} = (\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})^{-1}\,(\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})$$

4. Geometrische Interpretation

Neben einer möglichen Unterdrückung des MV/G-Virus besitzt die Anwendung von Sandwich-Produkten einen weiteren didaktischen Vorteil: Sandwich-Produkte lassen sich geometrisch einsichtig interpretieren und so die Lösungsstrategie zumindest bei Linearen Gleichungssystemen mit nur wenigen Unbekannten auch graphisch überzeugend nachverfolgen.

Reine Sandwich-Produkte: Das mit $\boldsymbol{c}^{-2}$ skalierte reine Sandwich-Produkt $\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{c}^{-1}$ beschreibt eine Reflexion des Linearen Gleichungssystems an einer Achse in Richtung des Koeffizientenvektors $\boldsymbol{c}$. Die Komponente $\mathrm{x}\,\boldsymbol{c}$ in Richtung der ***c***-Achse bleibt dabei unverändert und hebt sich weg, wenn die beiden Gleichungssysteme subtrahiert werden. Dadurch reduziert sich eine räumlich dreidimensionale Situation in eine Anordnung, bei der lediglich Vektoren in der zu ***c*** senkrecht stehenden Ebene zu berücksichtigen sind.

Gemischte Sandwich-Produkte: Die Lösungswerte x, y, z Linearer Gleichungssysteme können in Koordinatensystemen mit schräg zueinander stehenden Achsen in Richtung der Koeffizientenvektoren ***a***, ***b***, ***c*** (die somit als Basisvektoren wirken) direkt als Koordinatenwerte abgelesen werden (Horn 2016). Die gemischten Sandwich-Produkte führen zu einer Vertauschung von zwei dieser schräg zueinander stehenden Achsen, die mit einer Streckung verknüpft ist. Diese Achsenvertauschung kann auch anhand einfacher Beispiele leicht gezeigt werden (Horn 2017c).

5. Kursdurchführung

Im WS 2016/2017 wurde dieser Ansatz an der HWR Berlin erfolgreich gegen Ende der Lerneinheit zur Linearen Algebra (Horn 2017b, c) erprobt.

Literatur

Arnold, V. I. (1998). On Teaching Mathematics. *Uspekhi Mat. Nauk*, No. 1 (319), Vol. 53, S. 229–234, siehe auch URL: http://pauli.uni-muenster.de/~munsteg/arnold.html.

Grassmann, H. (1844). *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre. Erster* Theil, die lineale Ausdehnungslehre enthaltend. Leipzig: Otto Wigand.

Grassmann, H. (1877). Der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre. *Mathematische Annalen*, XII, 375–386.

Hestenes, D. (1992). Mathematical Viruses. In: A. Micali et al. (Hrsg.). *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, S. 3–16, Dordrecht: Kluwer.

Horn, M. E. (2015a). Ein physikdidaktischer Blick auf die Lineare Algebra. In: F. Caluori et al. (Hrsg.). *BzMU 2015*, Band 1, S. 408–411, Münster: WTM.

Horn, M. E. (2015b). Lineare Algebra in physikdidaktischer Ausprägung. *PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Wuppertal 2015*. URL: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/626 [17.12.2015].

Horn, M. E. (2016). Physikdidaktische Interpretation des Gaußschen Algorithmus. *Phy Did B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Hannover 2016*. URL: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/727 [17.12.2016].

Horn, M. E. (2017a). Eigenwerte und Eigenvektoren aus Geometrisch-Algebraischer Perspektive. Zur Veröffentlichung vorgesehen in: *PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Dresden 2017.* URL: www.phydid.de .

Horn, M. E. (2017b). Zur Lösung Linearer Gleichungssysteme mit Hilfe gemischter Sandwich-Produkte. Zur Veröffentlichung vorgesehen in: *PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Dresden 2017.* URL: www.phydid.de .

Horn, M. E. (2017c). Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra Crash Course. Part VI: Solving Systems of Linear Equations With Sandwich Products. OHP-Folien des Kurses ‚Mathematics for Business and Economics', LV-Nr. 200 691.01, WS 2016/ 2017, BSEL/HWR Berlin. Vorgesehen als Anhang von Horn (2017b).