Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, MNU, DE

Intuitive Modellierung mit dem KUMULATOR

Die Modellierung komplexer Prozesse aus der Realität in (stark vereinfachten) dynamischen Systemen ist ein wichtiges Thema im Mathematikunterricht, das aber nur selten den gebührenden Platz einnimmt. Für die Modellierung werden meist Programme wie eine Tabellenkalkulation oder spezielle Modellbildungssoftware wie Dynasys oder Stella genutzt oder es werden explizit Differenzialgleichungen gelöst. Dieser Zugang ist nicht ohne Hürden, was eine Behandlung in der Schule behindert.

Für eine auf Benutzerebene kalkülfreie intuitive Modellierung wurde die Lernumgebung KUMULATOR entwickelt (ELSCHENBROICH & SEEBACH 2016, www.kumulator.de). Die Bestände werden durch die Angabe von Startwerten und durch fortgesetzte Änderungen berechnet, die Änderungen werden also kumuliert.

1. Eingabe - Verarbeitung - Ausgabe

Beim KUMULATOR kann der Nutzer festlegen, welche Zustände und welche Änderungen angezeigt werden sollen, in welcher Schrittweite gerechnet werden soll, ob die Graphenpunkte verbunden werden und ob sie in Einzelschritten aufgebaut oder sofort alle auf dem gewünschten Intervall gezeigt werden sollen. Dann werden die Startwerte für die Bestände, die Formeln für die Veränderungen, die Schrittweite (oft passt $\Delta t = 1$) und das Zeitintervall eingegeben. In den Formeln der Veränderungen können auch eigene Variable, z. B. als Schieberegler, und Funktionen genutzt werden.

Die Ausgabe erfolgt zahlenmäßig in einem ‚Container'-Diagramm und als Graph im Grafik-Fenster (siehe Abb. 1). Beim Einzelschritt-Modus, der über einen Schieberegler gesteuert wird, sind im Diagramm der aktuelle Wert des Bestandes in einem Würfel und der Änderungswert in einem Kreis zu sehen. Im Grafikfenster werden die berechneten Werte punktweise angezeigt, diese Punkte können auch wahlweise als optischen Effekt durch einen Polygonzug verbunden werden. Wir nutzen hier die Software also als Graphenplotter, d. h. es wird der Graph erzeugt, ohne dass man einen Funktionsterm haben muss.

Die Berechnung eines neuen Zustandswertes erfolgt dem Polygonzugverfahren von Euler-Cauchy aus dem alten Zustandswert und der zugehörigen Änderung: $\text{Zustandgröße}_{\text{neu}} = \text{Zustandsgröße}_{\text{alt}} + \text{Zustandsänderung}$, wobei in die Zustandsänderung der Wert Δt eingeht.

2. KUMULATOR I

Bei einem einzigen Zustand haben wir einen intuitiven Zugang zu den Wachstumsfunktionen. Es lassen sich vier Grundtypen von Wachstumsprozessen identifizieren und leicht mit dem KUMULATOR modellieren (Elschenbroich & Seebach, 2016):

- Lineares Wachstum
- Exponentielles Wachstum
- Beschränktes Wachstum
- Logistisches Wachstum.

Ist die Änderung konstant, ergibt sich ein lineares Wachstum; ist die Änderung proportional zum Bestand, erhält man ein exponentielles Wachstum. Beide Fälle lassen sich problemlos in der Sek I behandeln. Zu den erzeugten Graphen können die Schülerinnen und Schüler zur eigenen Kontrolle passende Funktionen eingeben und deren Korrektheit überprüfen.

In der Realität ist ein exponentielles Wachstum nur kurzfristig vorhanden, weil es über alle Grenzen wachsen würde. Ein beschränktes Wachstum können wir dadurch modellieren, dass der Zuwachs proportional zum ‚Rest' bis zur Grenze, zum sogenannten Sättigungsmanko ist. Hier tritt das Problem auf, dass der stärkste Zuwachs zu Beginn ist, was in der Realität meist auch nicht der Fall ist. Beim Streben nach einem realistischen Wachstumsmodell, das sich zu Beginn exponentiell verhält und zum Ende beschränkt, kommt man zum sogenannten logistischen Wachstum.

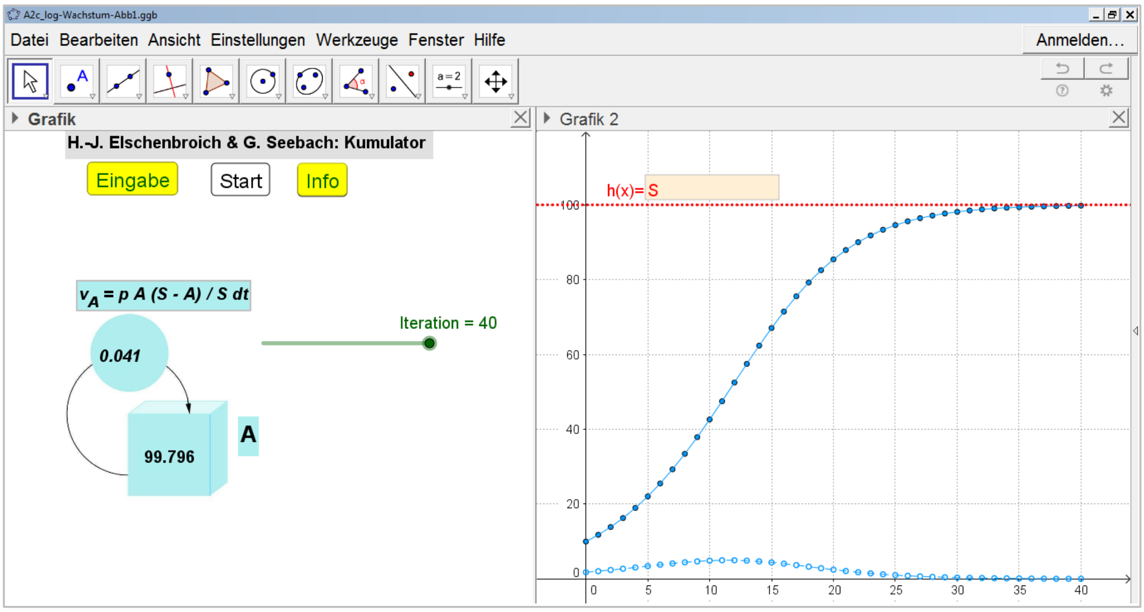

Abb. 1 Logistisches Wachstum, mit Bestand und Änderung

Die Veränderung ist hier sowohl proportional zum Bestand als auch proportional zum Sättigungsmanko und liefert die typische S-Kurve.

Aus der Änderung den Bestand zu konstruieren, ist eine Grundaufgabe der Integralrechnung, die in letzter Zeit gegenüber geometrischen Flächenberechnungen an Bedeutung gewonnen hat. Wenn wir eine Funktion f(t) definiert haben, können wir bei schultypischen Funktionen f mit $v_A = f(t) \cdot \Delta t$ punktweise und näherungsweise den Graphen einer Stammfunktion konstruieren. Bei konstantem f erhalten wir die Stammfunktion exakt, ansonsten je kleiner Δt ist umso besser angenähert.

3. KUMULATOR II

Bei zwei Zuständen untersucht man im Unterricht oft Übergangsprobleme. Beim Stechheber-Experiment (Elschenbroich & Seebach 2016) hat man zwei Messzylinder A und B mit Flüssigkeiten und zwei Stechheber, mit denen man schrittweise Flüssigkeit in den jeweils anderen Messzylinder umfüllt. Die Stechheber können auch unterschiedlich sein.

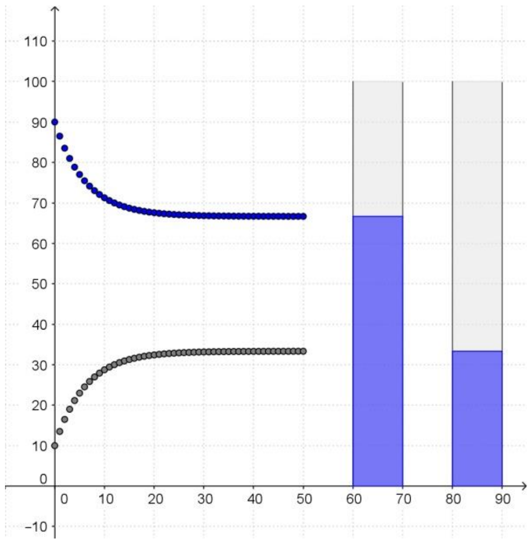

Abb. 2 Stechheber

In Zylinder A soll zu Beginn eine blaue Flüssigkeit, in Zylinder B klares Wasser sein. Wenn wir Stechheber einsetzen, die z.B. $p_A = 5\,\%$ und $p_B = 10\,\%$ des Inhaltes ihres Zylinders aufnehmen und transportieren, so erhalten wir für den Start mit A = 90 cm³ und B = 10 cm³ in 40 Schritten, dass die Flüssigkeiten in beiden Messzylindern praktisch gleich gefärbt, d.h. gut durchmischt sind. Die Veränderungen sind offensichtlich $v_A = p_B \cdot B - p_A \cdot A$ und $v_B = p_A \cdot A - p_B \cdot B$. Die Graphen wurden hier durch Rechtecke als stilisierte Messzylinder ergänzt.

Würde man dies Problem mit Übergangsmatrizen behandeln, so erhält man das Übergangsdiagramm aus Abb. 3 und die Übergangsmatrix $\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

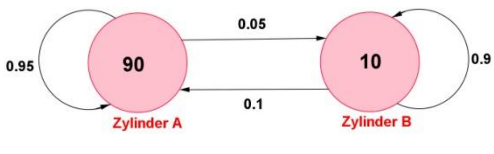

Abb.3 Übergangsdiagramm

Für den KUMULATOR muss man aber nur auf die *Veränderungen* schauen, was kommt zum Bestand *hinzu* und was wird vom Bestand *weg* genommen. Weiter kann man mit dem KUMULATOR mit 3 oder 4 Zuständen typische

Abituraufgaben zum Thema Übergangsmatrizen visualisieren und dabei zahlreiche mühevolle Berechnungen ersetzen.

Mit dem KUMULATOR können auch einfache dynamische Systeme berechnet werden, z. B. Räuber-Beute-Modelle wie die Entwicklung der historischen Luchs- und Schneehasen-Population in der Hudson Bay, die Ausbreitung von Infektionen oder Wachstum mit Selbstvergiftung. Dabei gehen Produkte wie $A \cdot B$ mit entsprechenden Faktoren in die Veränderungen ein, um z. B. das ‚Treffen' von Räuber und Beute zu berücksichtigen.

4. Resümee

Der KUMULATOR ist eine Lernumgebung für einfache Modellierungen in der Schule. Er setzt das Prinzip ‚Von der Änderung zum Bestand' so um, dass die angesprochenen Prozesse schon in der Sek I sinnvoll behandelt werden können. Sein gleichungsorientierter Ansatz ermöglicht einen intuitiven Zugang, der für die Schüler auf der Benutzerebene nach dem Aufstellen der Formeln für die Veränderungen kalkülfrei ist. Es sind keine Kenntnisse von Differenzialgleichungen oder Integralrechnung nötig und es werden keine speziellen Flüsse-Diagramme wie bei Dynasys oder Stella benutzt.

Das hier entwickelte ‚Container'-Diagramm ist sehr einfach und intuitiv zu verstehen. Die entscheidende geistige Leistung besteht in der Formulierung der Formeln für die Veränderungen.

Die Berechnungen erfolgen schrittweise numerisch, die Bestandsfunktionen werden punktweise aufgebaut und graphisch als diskrete Punkte ausgegeben. Bei diskreten Prozessen ($\Delta t = 1$) erhalten wir eine exakte Lösung, ansonsten eine näherungsweise Lösung bei Verfeinerung der Schrittweite.

Dabei kann und sollte man auch ansprechen, dass die Berechnungen und Folgerungen stets nur innerhalb eines mathematischen Modells erfolgen und dass dieses immer nur sehr begrenzt die Realität abbilden kann.

Literatur

Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (2016): Modellieren mit dem Kumulator. In *Mathematik lehren 199*, 50–51. Velber, Friedrich Verlag

URL

www.kumulator.de